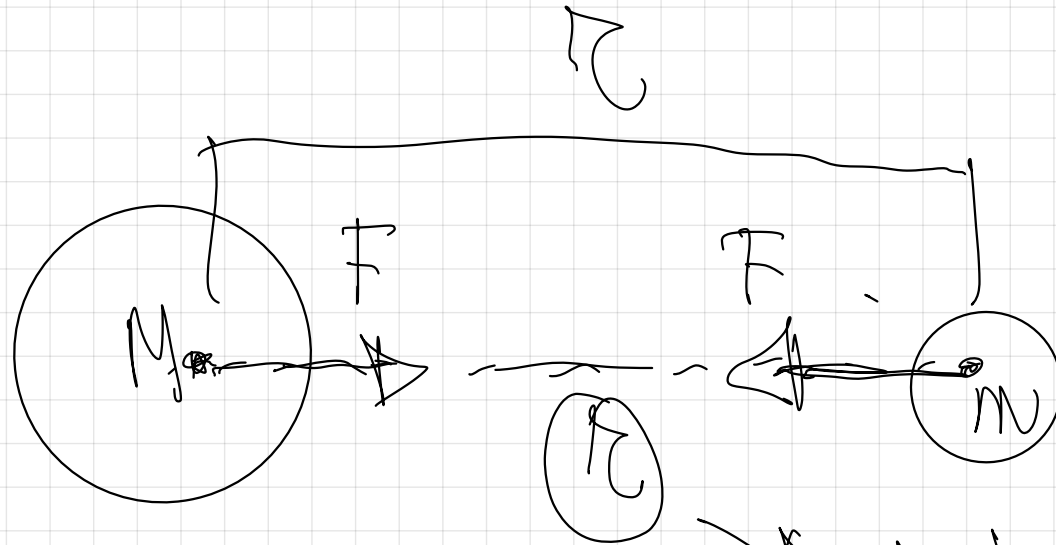


# TEMA 1

## CAMPO GRAVITATORIO.

Ley de la  
Gravitación  
Universal.



distancia  
centro - centro.

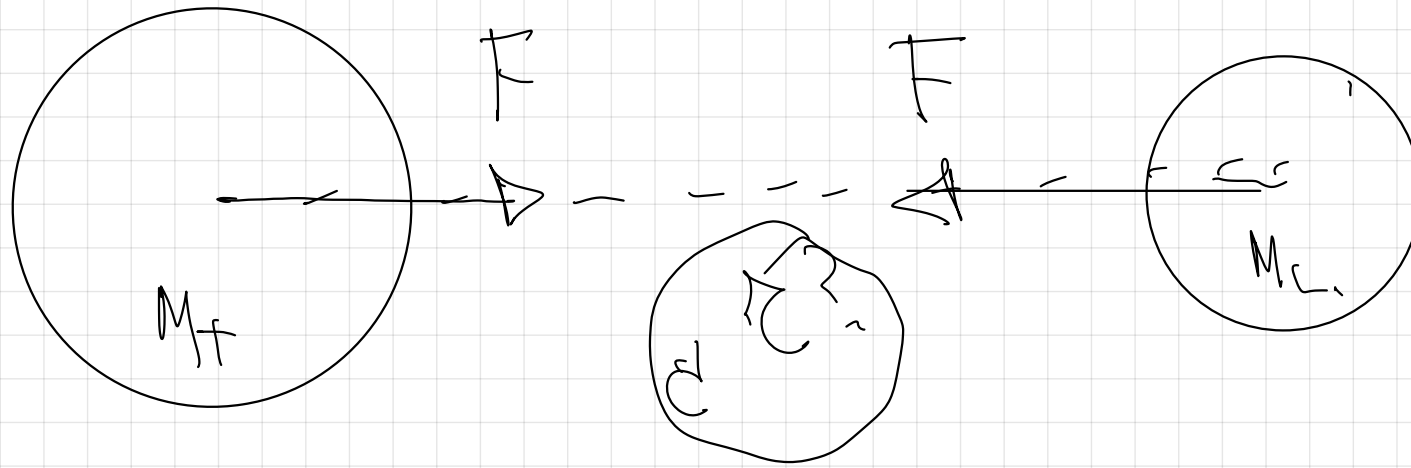
$$F = G \cdot \frac{M_1 \cdot m}{r^2}$$

$$\begin{array}{l}
 F \Rightarrow N \text{ en S.I.} \\
 M \cdot g \Rightarrow Kg \text{ en S.I.} \\
 r \Rightarrow m \text{ en S.I.}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} F \\ M \cdot g \\ r \end{array}} \right\}
 \left[ F = \frac{G}{r^2} \frac{M \cdot m}{r^2} \right]$$

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \quad \left[ G \right] = \frac{F \cdot r^2}{M \cdot m}$$

$$\left[ G = 6.67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2} \right]$$

1.- La masa de la Tierra es de  $6 \cdot 10^{24}$  Kg y la masa de la Luna es de  $7,2 \cdot 10^{22}$  Kg. Si la fuerza gravitatoria entre ellas es de  $1,9 \cdot 10^{20}$  N, ¿Cuál será la distancia entre sus centros?  
.G=  $6,67 \cdot 10^{-11}$  N· m<sup>2</sup> · Kg<sup>-2</sup>



ley de la gravitación universal.

$$F = G \cdot \frac{M_T \cdot M_L}{r^2}$$

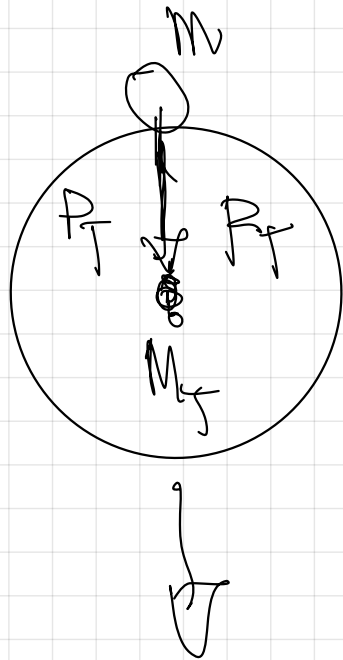
$$F \cdot r^2 = G \cdot M_A \cdot M_L$$

$$r = \sqrt{\frac{G \cdot M_A \cdot M_L}{F}} = \sqrt{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 7.2 \cdot 10^{22}}{1.9 \cdot 10^{20}}}$$

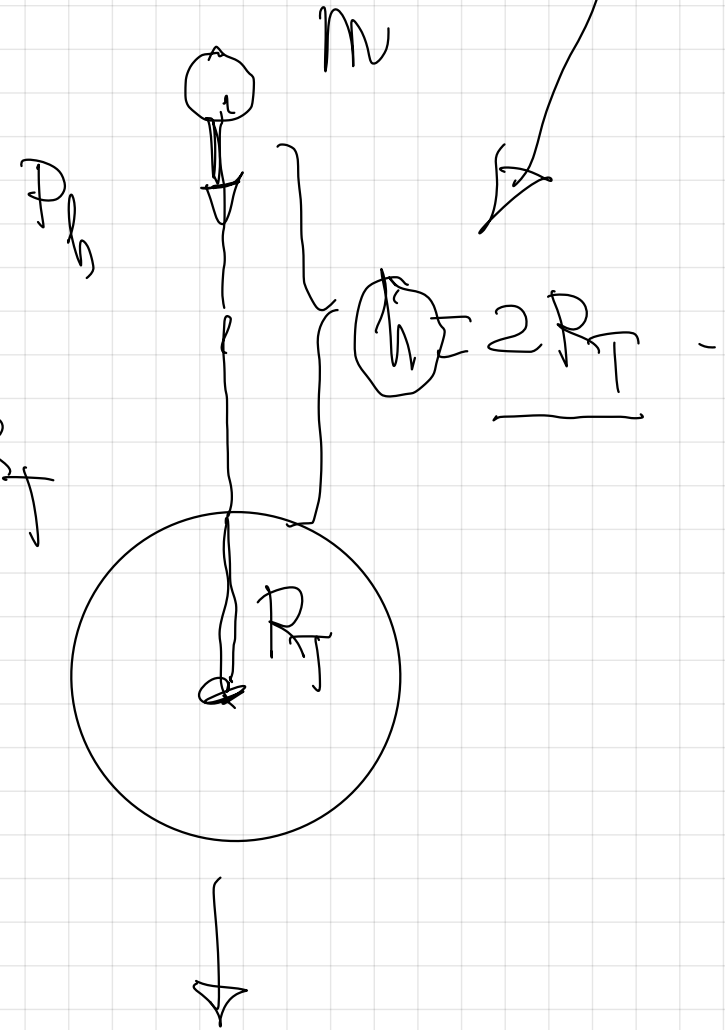
$$r = 3.9 \cdot 10^8 \text{ m}$$

2.- ¿A cuánto disminuye el peso de un cuerpo cuando se eleva desde el nivel del mar a una altura igual al doble del radio terrestre?

1º Dibujo de la situación.



$$r = R_T + 2R_T$$
$$r = 3R_T$$



$$P_T = G \cdot \frac{M_T \cdot M}{R_T^2}$$

$$P_h = G \cdot \frac{M \cdot m}{(3R_T)^2}$$

$$P_h = G \cdot \frac{M_T \cdot M}{9R_T^2}$$

Relaciono ambas expresiones  
dividiéndolas.

$$\frac{P_h}{P_T} = \frac{\cancel{G} \cdot \frac{\cancel{M \cdot M}}{QR}}{\cancel{G} \cdot \frac{\cancel{M \cdot M}}{P_T}}$$

$$\left[ \frac{P_h}{P_T} = \frac{1}{q} \right]$$

El peso a esa altura será la misma punto que en la superficie terrestre.

$$\left[ P_h = \frac{1}{q} P_T \right]$$

$$\frac{P_T}{P_h} = \frac{G \cdot \frac{M}{R_T^2}}{G \cdot \frac{M}{R_T^2}}$$

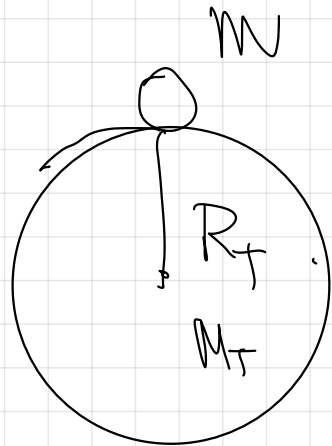
$$\frac{P_T}{P_h} = \frac{1}{1/g}$$

$$\frac{P_T}{P_h} = g$$

El peso en la Tierra es 9 veces superior que a esa altura.

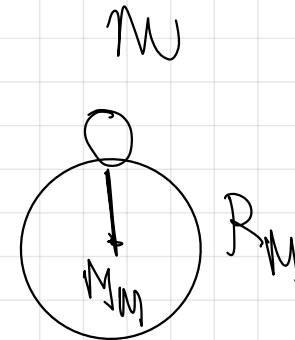
$$P_T = 9 P_h$$

4.- El radio de la Tierra es aproximadamente 6370 Km, mientras que el de Marte viene a ser de unos 3440 Km. Si un objeto pesa 200 N en la Tierra, ¿Cuál sería su peso en Marte?.  
 Dato: Marte tiene una masa 0,11 veces la de la Tierra.

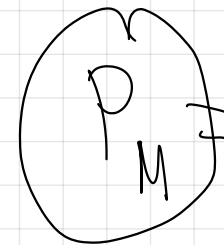


$$P_T = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T^2}$$

com



$$M_M = 0,11 M_T$$



$$G \cdot \frac{0,11 M_T \cdot m}{R_M^2}$$

$$\frac{P_M}{P_T}$$

$$\frac{0 \cdot 11 \cdot \cancel{P_T}}{R_T^2} \cdot \frac{P_T}{R_T^2}$$

$$\frac{P_M}{P_T} = 0 \cdot 11 \cdot \frac{1}{R_M^2} \cdot \frac{1}{R_T^2}$$

$$\frac{1}{R_M^2} \cdot \frac{1}{R_T^2}$$

$$\frac{P_M}{P_T} = 0 \cdot 11 \cdot \frac{R_T^2}{R_M^2}$$

$$\frac{R_T^2}{R_M^2}$$

$$P_M = 0 \cdot 11 \cdot \frac{R_T^2}{R_M^2} \cdot P_T$$

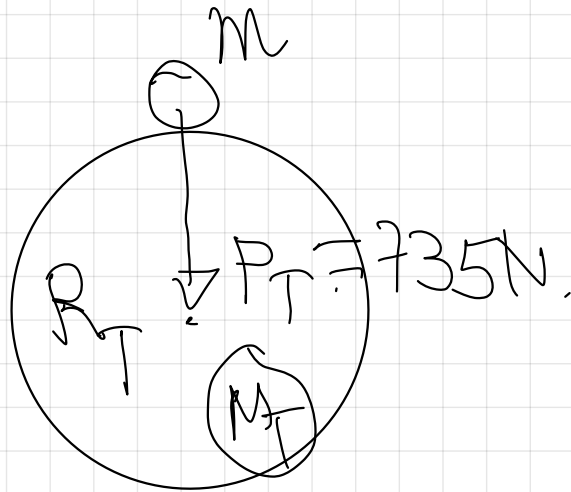
$$P_M \approx 0,11 \cdot \frac{(6,37 \cdot 10^6 \text{ m})^2}{(3,44 \cdot 10^6 \text{ m})^2} = 200 \text{ N}.$$

$$P_M \approx 75,43 \text{ N}.$$

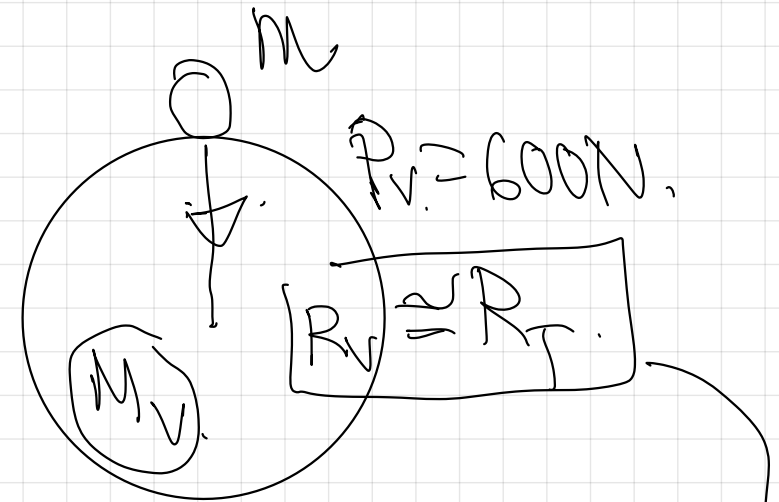
5.- Un astronauta, cuyo peso en la Tierra es de 735 N, aterriza en el planeta Venus y al medir su peso observa que éste es de 600 N. Teniendo en cuenta que el diámetro de Venus es el mismo que el de la Tierra:

a) Halla la relación que existe entre las masas de la Tierra y Venus

b) Calcula la masa de Venus, sabiendo que la masa de la Tierra es de  $6 \cdot 10^{24}$  Kg



$$P_T = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T^2}$$



$$P_V = G \cdot \frac{M_V \cdot m}{R_V^2}$$

$$\frac{P_I}{P_V} = \frac{G \cdot \frac{M_T \cdot M}{R_T^2}}{G \cdot \frac{M_V \cdot M}{R_T^2}} \Rightarrow \frac{P_I}{P_V} = \frac{M_T}{M_V}$$

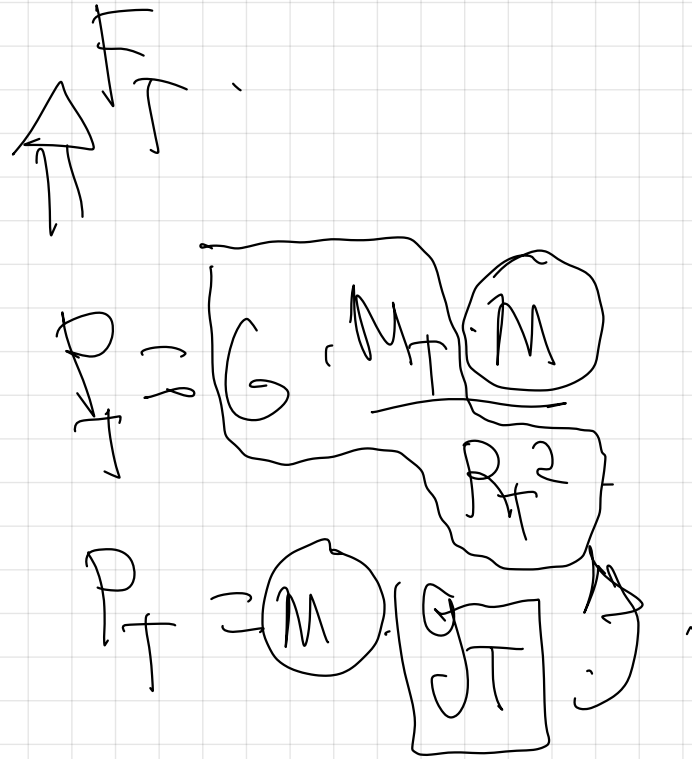
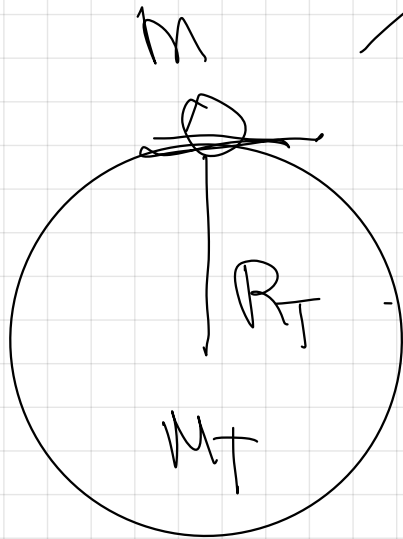
$$\frac{M_T}{M_V} = \frac{P_I}{P_V} \Rightarrow \frac{M_T}{M_V} = \frac{735 \text{ N}}{600 \text{ N}}$$

$$M_T = 1.225 M_V$$

$$1 = 1.225 \frac{M_V}{M_T} \Rightarrow \frac{1}{1.225} = \frac{M_V}{M_T}$$

$$M_U = 0,82 M_T$$

page 2.

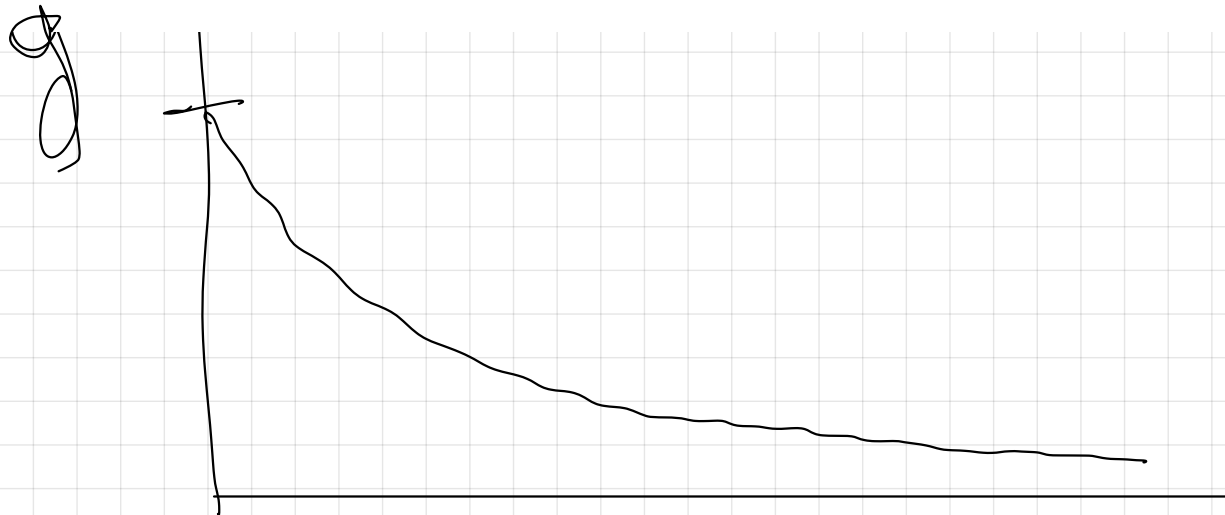


$$g_{CT} = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} = 667 \cdot 10^{-11} \frac{6 \cdot 10^{24}}{(64 \cdot 10^6)^2}$$

$$g_T = g^T \text{ m/s}^2$$

$$g = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} = g^T \text{ m/s}^2$$

3.- Frecuentemente se habla de que los astronautas en el espacio experimentan ausencia de gravedad. ¿Es correcta esta expresión?. Razónese.



$$g = G \cdot \frac{M}{r^2}$$

La gravedad es menor  
y solo podría ser /

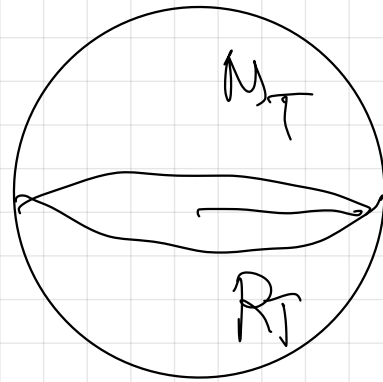
masa en el  $\infty$ .

$$\rho = \frac{M}{V}$$

a

$$\rho = \frac{M}{V}$$

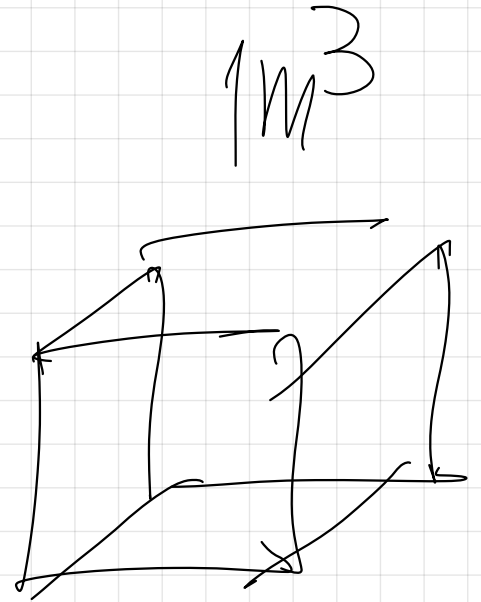
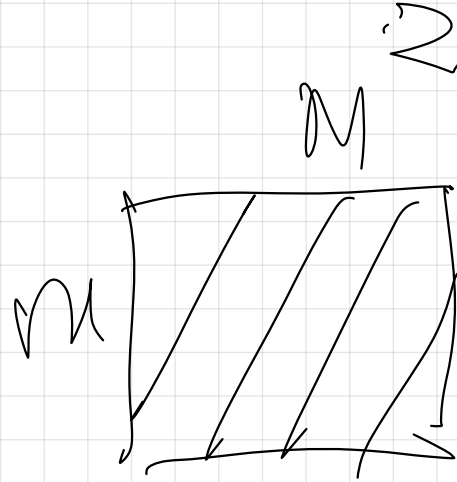
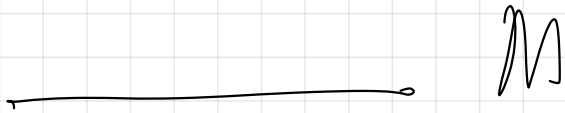
$$= \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$



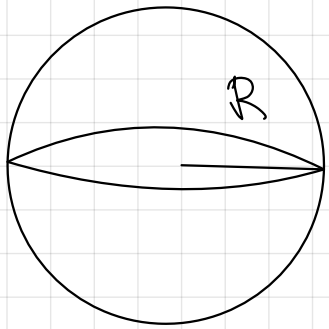
→ ESFERA.

$$Vesfera = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

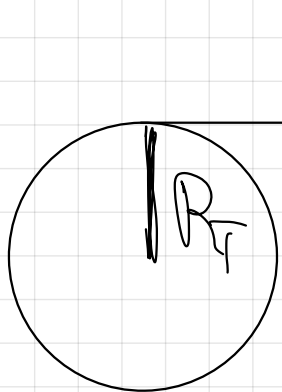


6.- Calcular la densidad media de la Tierra a partir de los siguientes datos:  
 $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ ,  $R_T = 6370 \text{ Km}$ ,  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}$



$$\rho_T = \frac{M_T}{V_T} = \frac{\frac{g_T \cdot R_T^2}{G}}{\frac{4}{3} \pi R_T^3} = \frac{g_T \cdot R_T^2}{G \cdot \frac{4}{3} \pi R_T^3}$$

La  $M_T$  la escribimos en función de los datos conocidos.



$$g_T = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} \Rightarrow M_T = \frac{g_T \cdot R_T^2}{G}$$

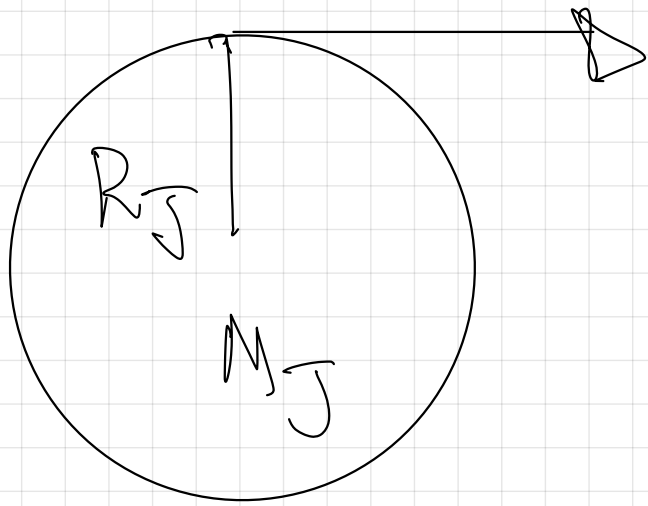
$$R_T = 6370 \text{ Km} = 6370 \cdot 10^3 \text{ m}$$

$$p_T = \frac{g_T}{G \cdot \frac{4}{3} \pi R_T^3} = \frac{9,8 \text{ m/s}^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 6,37 \cdot 10^6}$$

$$p_T = 5,5 \cdot 10^3 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$$

7.- Júpiter tiene una densidad media de  $\rho = 1,34 \cdot 10^3 \text{ Kg/m}^3$  y un radio medio  $R = 0,718 \cdot 10^5 \text{ Km}$ . Sabiendo que  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}$ .

- ¿Cuál es la aceleración de la gravedad en la superficie de Júpiter?
- ¿Pesará un cuerpo lo mismo en Júpiter que en la Tierra?. Razónese



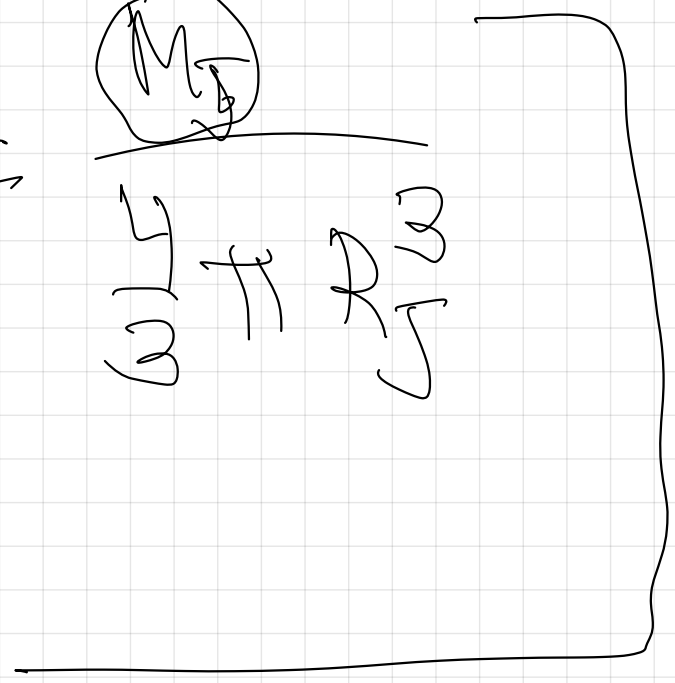
$$g_{J'} = G \cdot \frac{M_J}{R_J}$$

En función de los datos conocidos,

$$g_{J'} = \frac{M_J}{R_J} \Rightarrow \frac{M_J}{R_J} = g_{J'}$$

$$g_{J'} = \frac{M_J}{R_J} \Rightarrow \frac{M_J}{R_J} = g_{J'}$$

$$\frac{M_J}{R_J} = g_{J'} \Rightarrow \frac{M_J}{R_J} = g_{J'}$$



$$g_J = G \cdot \frac{M_J}{R_J^2} = G \cdot \frac{\rho_J \cdot \frac{4}{3} \pi R_J^3}{R_J^2}$$

$$g_J = G \cdot \rho_J \cdot \frac{4}{3} \pi R_J \quad R_J = 0.718 \cdot 10^8 \text{ m}$$

$$g_J = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 1.34 \cdot 10^3 \cdot \frac{4}{3} \pi (0.718 \cdot 10^8)$$

$$g_J = 26.88 \text{ m/s}^2$$

b) No, ya que en la Tierra la gravedad es menor.

$$D \stackrel{m}{=} g \quad \frac{g_S > g_T}{\text{---}}$$

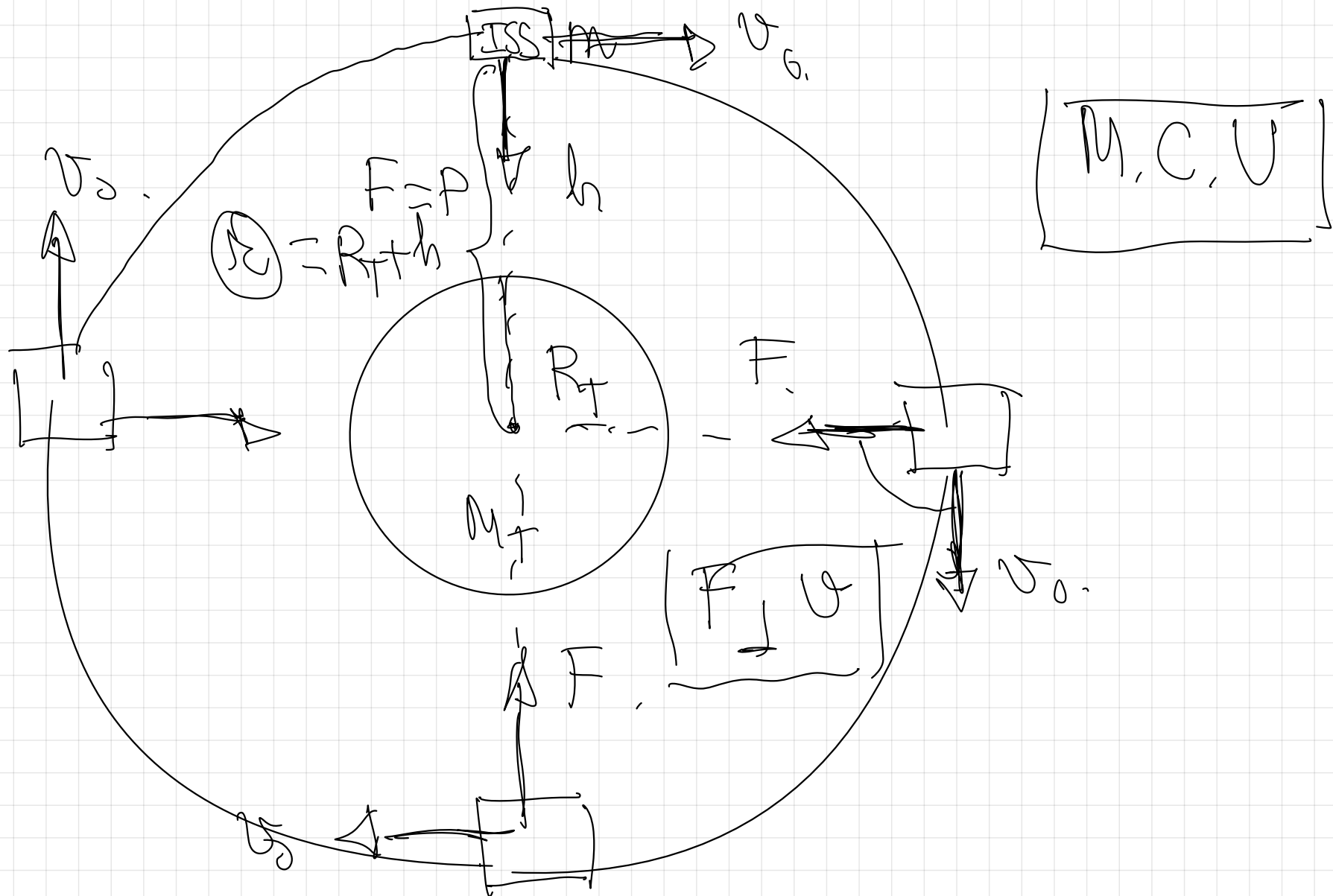
$$D_S < D_T$$

## TEMA 2

pag 13.

# APLICACIONES DE LA GRAVITACIÓN AL MOVIMIENTO DE SATÉLITES, PLANETAS Y GALAXIAS

1.º Velocidad orbital de un satélite.



ley de la gravitación universal

2ª ley de Newton

$$\begin{array}{ccc}
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 F_{\text{gravitations}} & \stackrel{=}{=} & f_{\text{normal}} \\
 G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2} & \stackrel{=}{=} & m \cdot \boxed{a_n}
 \end{array}$$

$$G \cdot \frac{M_T \cdot \cancel{m}}{r^2} \stackrel{=}{=} \cancel{m} \cdot \boxed{\frac{v_0^2}{r}}$$

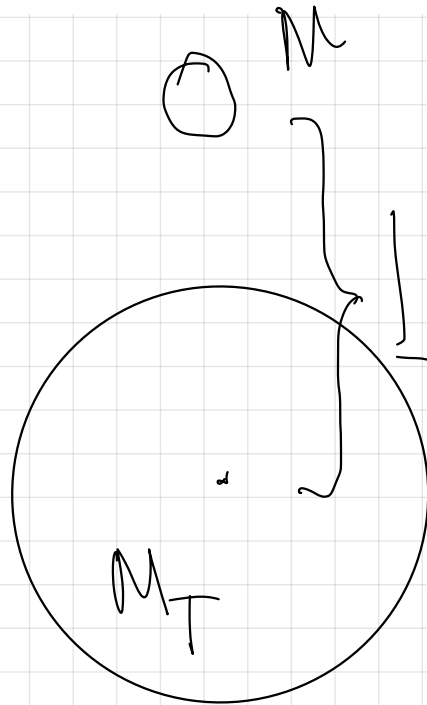
$$\boxed{v_{\text{orbital}} = \sqrt{G \cdot \frac{M_T}{r}}}$$

$$\Downarrow \boxed{\frac{v_0^2}{r}}$$

18.- Un satélite describe una órbita circular de radio  $2R_T$  en torno a la Tierra.

- Determinar su velocidad orbital
- Si el satélite pesa 5000 N en la superficie terrestre, ¿Cuál será su peso en la órbita?
- Explicar la fuerza que actúa sobre el satélite.
- Si otro satélite de masa doble al anterior se encontrase orbitando a la misma altura, ¿Con qué velocidad lo haría?

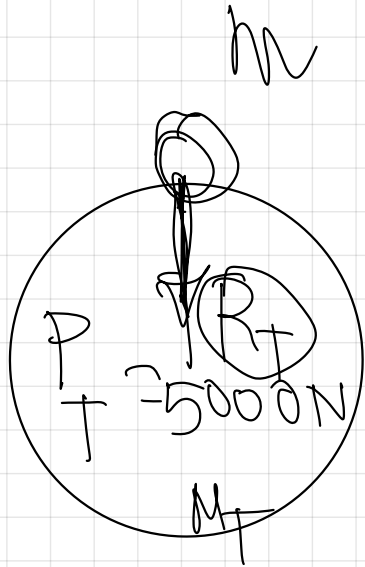
$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}, R_T = 6400 \text{ Km}, M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ Kg}$$



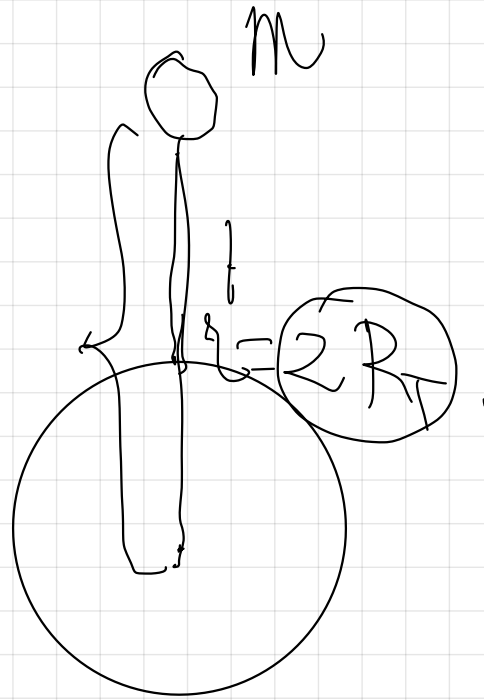
$$F_g = F_c$$
$$G \cdot \frac{M_T \cdot M}{r^2} = M \cdot \frac{v^2}{r}$$
$$v = \sqrt{G \cdot \frac{M_T}{r}} = \sqrt{G \cdot \frac{M_T}{2R_T}}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{2 \cdot (6.4 \cdot 10^6)}} = 5591.57 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b)



$$P_T = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T^2}$$



$$P = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{(2R_T)^2}$$

$$P_{2R_T} = G = \frac{M_T \cdot M}{4R_T^2}$$

$$P_{2R_T} = \frac{G \cdot M_T \cdot M}{4R_T^2}$$

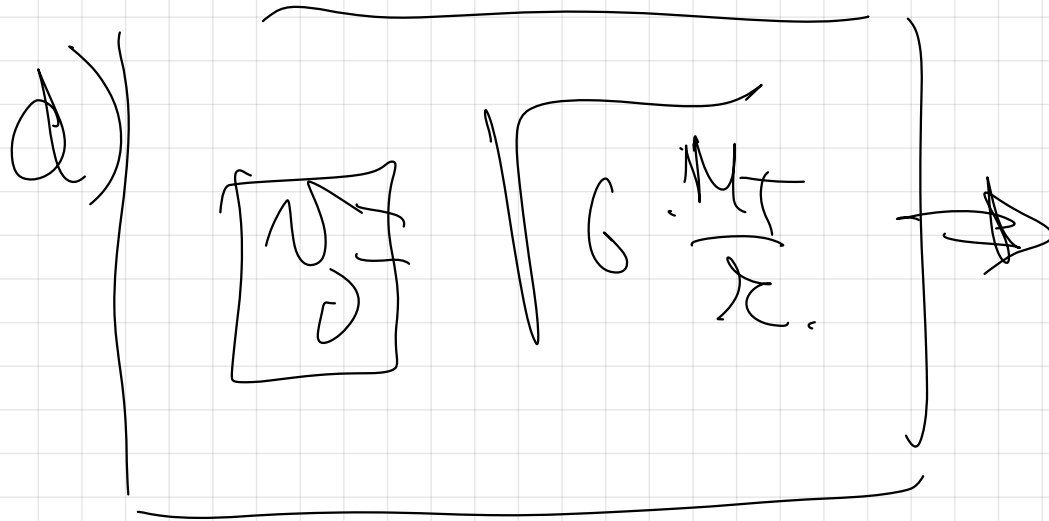
$$P_T = \frac{G \cdot M_T \cdot M}{R_T^2}$$

$$P_{2R_T} = \frac{1}{4} P_T$$

$$P_{2R_T} = \frac{1}{4} P_T$$

$$P_{2R_T} = \frac{1}{4} 5000 \text{ N} = 1250 \text{ N}$$

c) Ver Teoría de la Órbita.

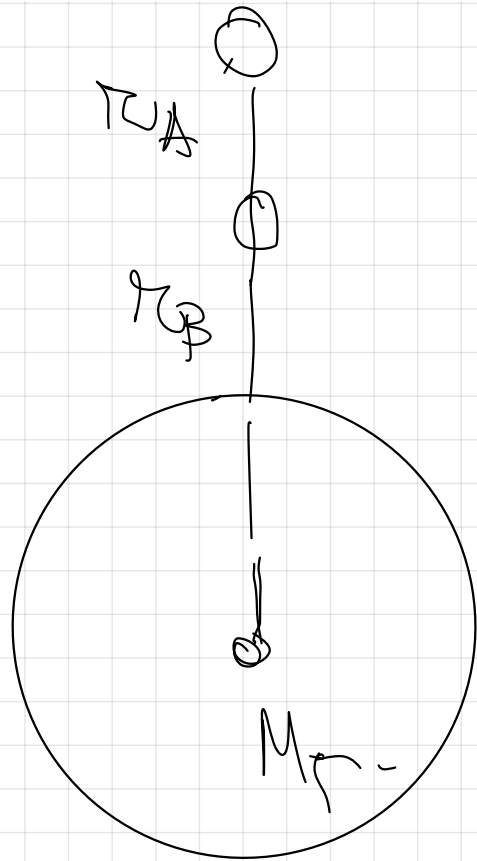


El satélite de  
masa  $m$  doble  
obtraría con la  
misma velocidad  
(no influye la  $m$ )

19.- Dos satélites idénticos A y B están orbitando en órbitas circulares de distinto radio alrededor de la Tierra, siendo  $R_A > R_B$ .

a) Indicar cuál de los dos satélites tiene mayor velocidad orbital.

b) Si la Tierra aumentase su masa al cuádruple manteniendo su radio, ¿Cómo se vería afectada la velocidad orbital de ambos satélites?

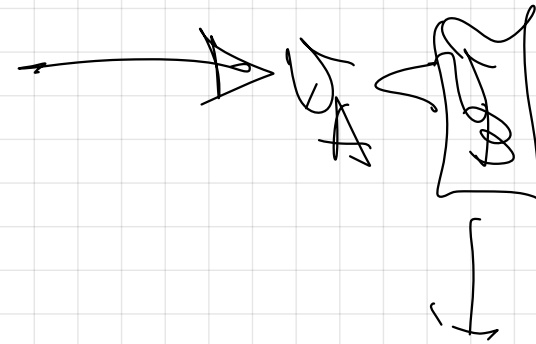


$$r_A > r_B$$

Reducción de la velocidad orbital

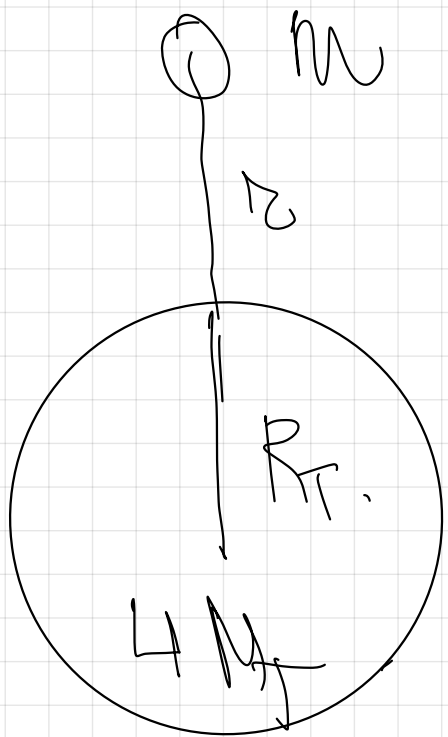
$$v = \sqrt{G \cdot \frac{M}{r}}$$

$$r_A > r_B$$



B tiene mayor velocidad orbital

g)



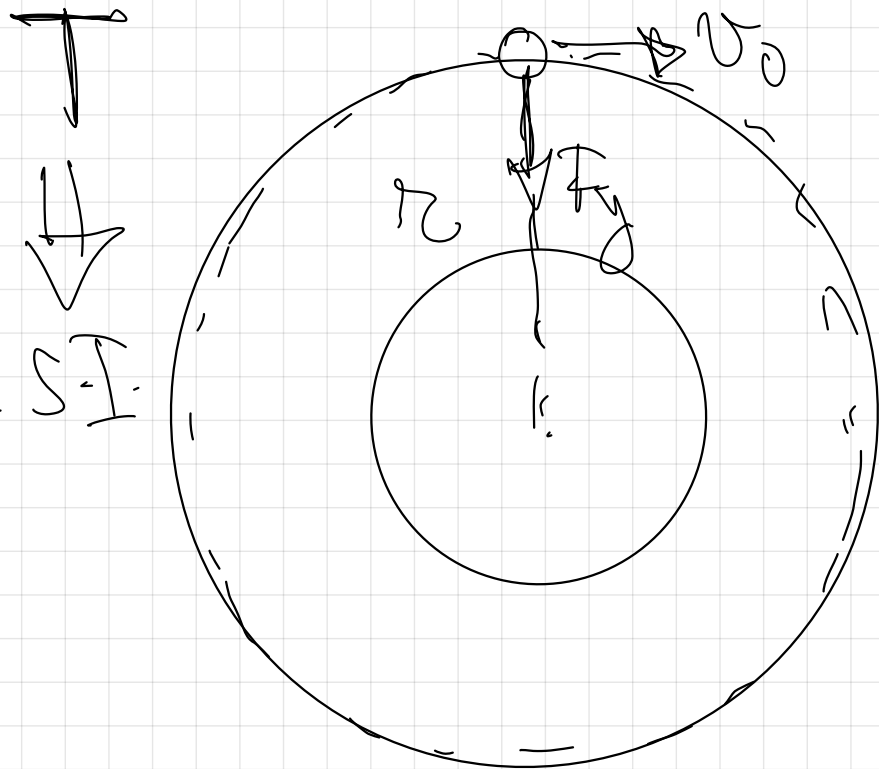
$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{\frac{G \cdot 4Mg}{\sigma}} \\ \sigma &= \sqrt{\frac{G \cdot Mg}{\sigma}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{\frac{G \cdot Mg}{\sigma}} \\ \sigma &= \sqrt{\frac{G \cdot 4Mg}{\sigma}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{4} \\ \sigma &= 2\sigma \end{aligned}$$

La velocidad de ambos satélites  
se duplicaría.

pag 14 del libro.



El satélite describe  
un M.C.V.

v cte en módulo.

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r}{t} \quad \left(\frac{m}{s}\right)$$

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{t} \quad \left(\frac{rad}{s}\right)$$

$$v = \omega \cdot r$$

**21.** - Suponiendo que la órbita de la Tierra en torno al Sol es una circunferencia de radio  $1,5 \cdot 10^{11}$  m y que la Tierra tarda  $3,15 \cdot 10^7$  s en completar dicha órbita:

a) Calcular la masa del Sol.

b) Calcular el potencial gravitatorio debido al Sol en el punto en el que se halla la Tierra.

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}$$

$$T = 3,15 \cdot 10^7 \text{ s}$$

$$r = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

# Condición de orbitación

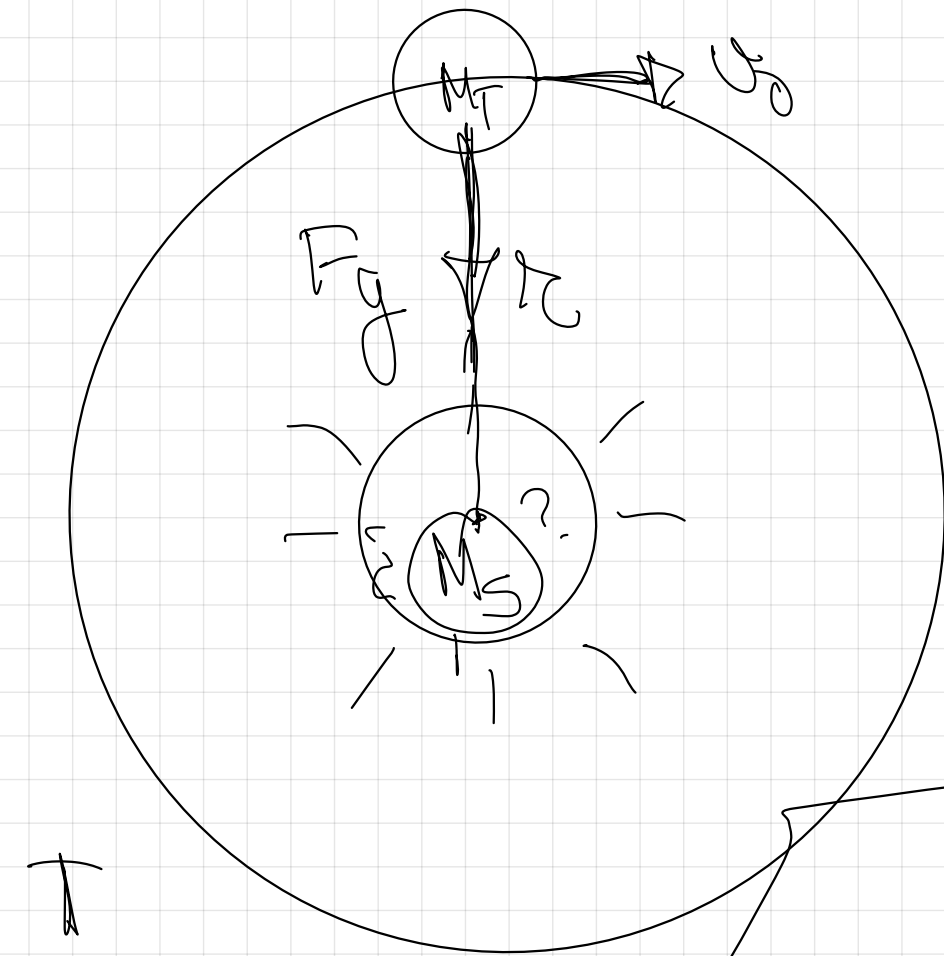
$$F_g = F_a$$

$$G \cdot \frac{M_s \cdot M_p}{r^2} = M_p \cdot \frac{v_0^2}{r}$$

$$G \frac{M_s}{r} = v_0^2$$

$$G \cdot \frac{M_s}{r} = \left( \frac{2\pi r}{T} \right)^2$$

$\vec{a} = ?$



$$v_0 = \frac{2\pi r}{T}$$

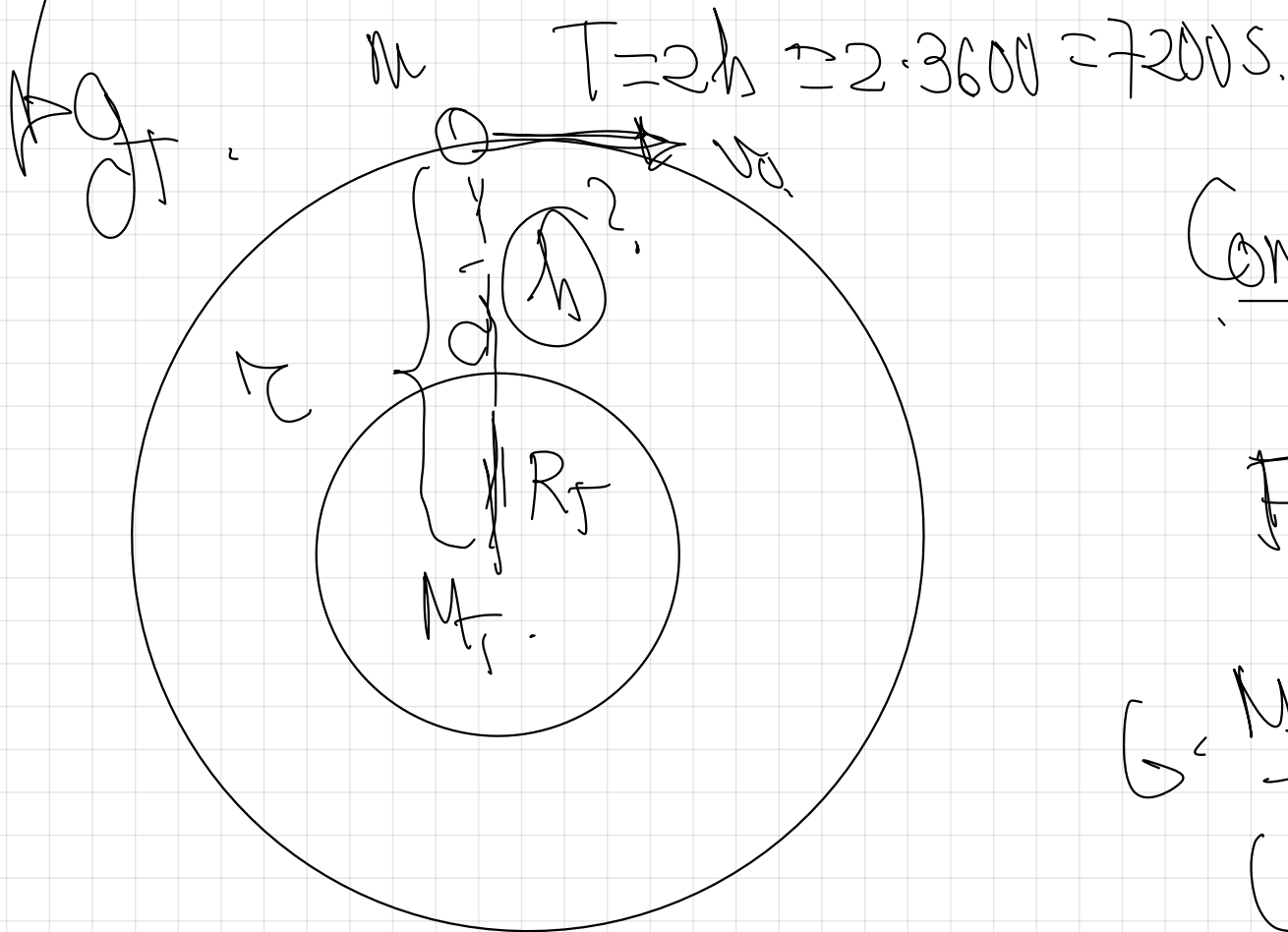
$$G \frac{M_s}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$$

$$G \cdot M_s \cdot T^2 = 4\pi^2 r^3$$

$$M_s = \frac{4\pi^2 r^3}{G \cdot T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot (15 \cdot 10^{11})^3}{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot (3.15 \cdot 10^7)^2} = 2.01 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

20.- ¿A qué altura de la superficie terrestre deberá estar situado un satélite si queremos que describa una órbita circular con un período de 2 horas?

$$g=9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}, R_T=6400 \text{ Km}$$



Condición de orbitación:

$$F_g = F_n.$$

$$G \cdot \frac{M \cdot m}{(R_T + h)^2} = m \cdot \frac{v_0^2}{(R_T + h)}$$

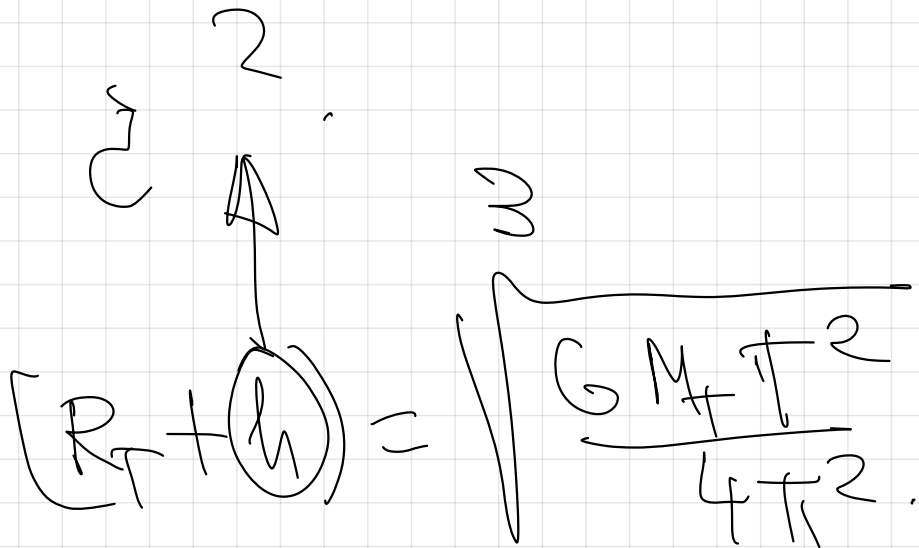
$$v_0 = \frac{2\pi(R_T + h)}{T}$$

$$G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)} = \left( \frac{2\pi(R_T + h)}{T} \right)^2$$

$$G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)} = \frac{4\pi^2(R_T + h)^2}{T^2}$$

$$G \cdot M_T \cdot T^2 = 4\pi^2(R_T + h)^3$$

$$\frac{G \cdot M_T \cdot T^2}{4\pi^2} = (R_T + h)^3$$

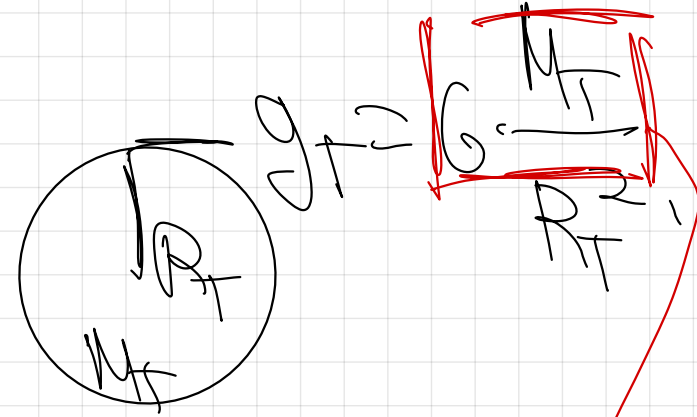

$$(R_T + h)^3 = \frac{G M_T T^2}{4\pi^2}$$

$$h = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G \cdot M_T \cdot T^2 \\ 4 \cdot T^2 \end{bmatrix}$$

$$= R_T$$

$$h = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_T \cdot R_T^2 \cdot T^2 \\ 4 \cdot T^2 \end{bmatrix}$$

$$= R_T$$



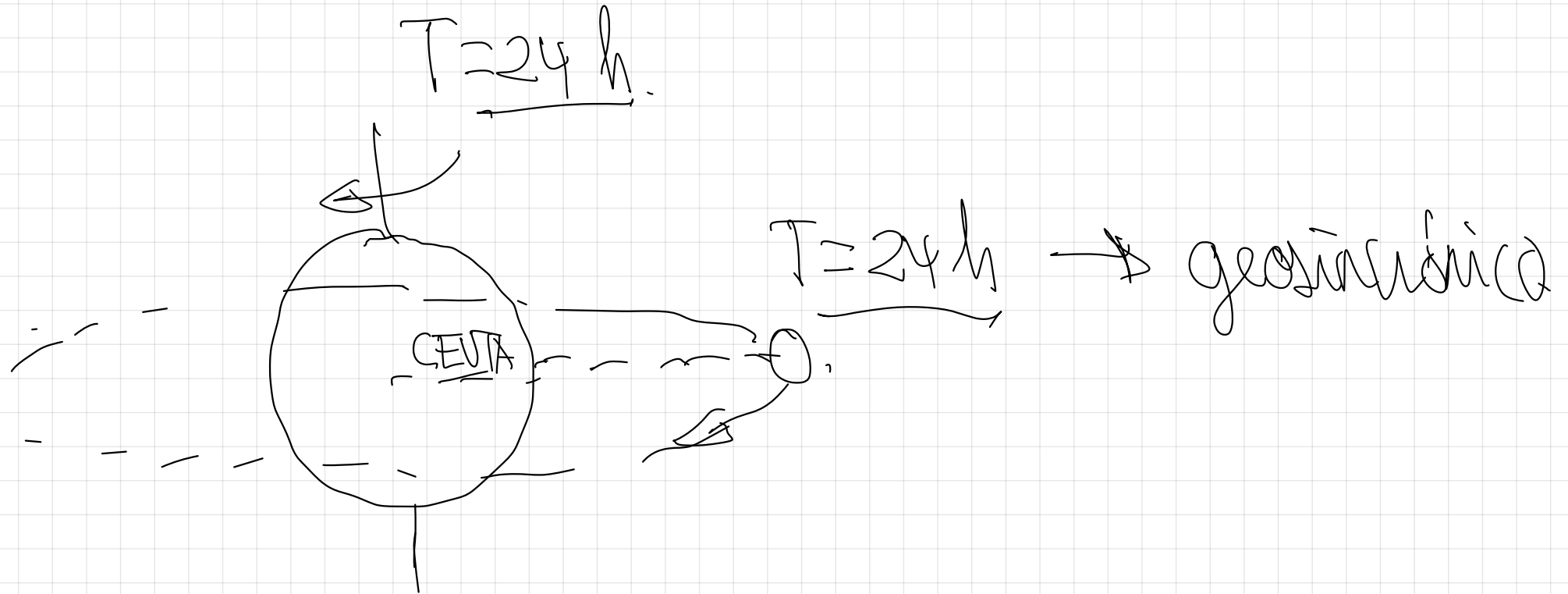
ESTE PRODUCTO  
 $G \cdot M_T$  lo podemos  
 sustituir así.

$$\boxed{G \cdot M_T} = G_T \cdot R_T^2$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{98 (64 \cdot 10^6)^2 \cdot (7200)^2}{4\pi^2}} = 64 \cdot 10^6 = 1'68 \cdot 10^6 \text{ m}$$

de altura sobre  
la superficie  
terrestre.

# Satélite geostacionario.



**25.-** Un satélite gira en una órbita geoestacionaria (es decir, la vertical del satélite siempre pasa por el mismo punto de la superficie terrestre)

a) Calcular su velocidad angular

b) Calcular la altura a la que se encuentra sobre la superficie terrestre

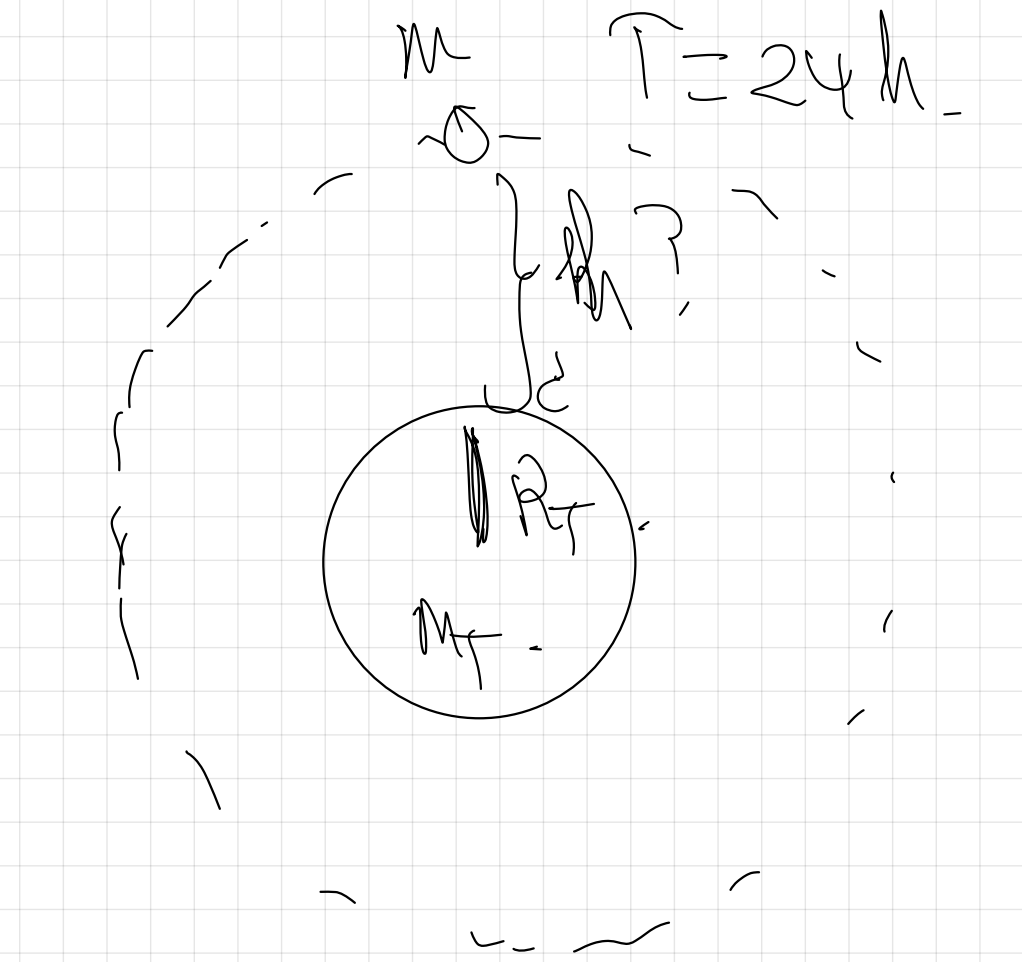
c) Calcular su aceleración normal

d) Explicar porqué el satélite no cae sobre la Tierra

$g=9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ ,  $R_T= 6400 \text{ Km}$

---

$$\text{a)} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} = 7,27 \cdot 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$



Condición de orbitación

$$F_g = F_n$$

$$G \cdot \frac{M_T \cdot m}{(R_T + h)^2} = m \cdot \frac{v_0^2}{r}$$

~~$$G \cdot \frac{M_T \cdot m}{(R_T + h)^2} = m \cdot \frac{v_0^2}{(R_T + h)}$$~~

~~$$G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)} = v_0^2$$~~

$$v_0 = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi (R_T + h)}{T}$$

$$R_{Th} = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_f \cdot T^2}{4\pi^2}}$$

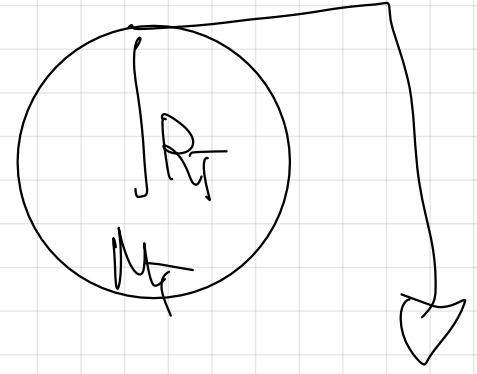
$$G \cdot \frac{M_f}{(R_{Th})^3} = \left( \frac{2\pi(R_{Th})^3}{T} \right)^3$$

$$G \cdot \frac{M_f}{(R_{Th})^3} = \frac{4\pi^2 (R_{Th})^3}{T^2}$$

$$G \cdot M_f \cdot T^2 = 4\pi^2 \cdot (R_{Th})^3$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_H \cdot r^2}{4 \pi^2}} - R_H$$

- R<sub>H</sub> ,



$$h = \sqrt[3]{\frac{g_H \cdot R_H^2 \cdot f^2}{4 \pi^2}} - R_H$$

- R<sub>H</sub> ,

$$g_H = \frac{G \cdot M_H}{R_H^2}$$

$$\frac{G \cdot M_H}{R_H^2} = g_H \cdot R_H^2$$

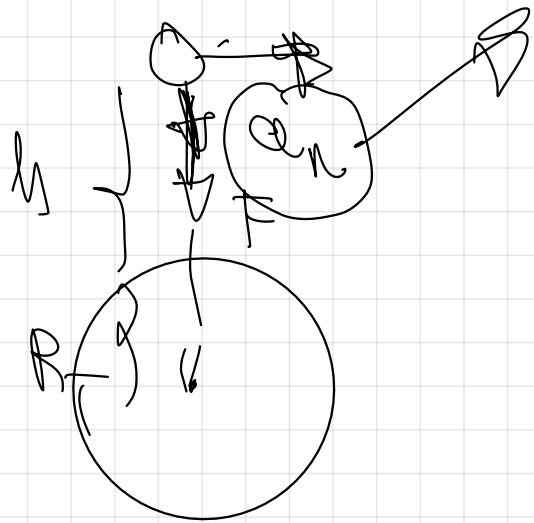
$$h = \sqrt[3]{\frac{918 \cdot (6.4 \cdot 10^6)^2 \cdot (24 \cdot 3600)^2}{4\pi^2} - 6.4 \cdot 10^6}$$

$$h = 3.5 \cdot 10^7 \text{ m} \rightarrow \text{altura sobre la superficie terrestre}$$

$$c) \quad a_n = \frac{v_0^2}{r} = \frac{\left( \frac{2\pi (R_T + h)}{T} \right)^2}{(R_T + h)} = \frac{4\pi^2 (R_T + h)^2}{T^2 \cdot (R_T + h)}$$

$$a_n = \frac{4\pi^2 (R_T + h)}{T^2} = 0.22 \text{ m/s}^2$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{v_0^2}{r} = \frac{(\omega \cdot r)^2}{r} = \frac{\omega^2 \cdot r^{\cancel{2}}}{\cancel{r}} \\
 &= \omega^2 (R + h) \approx (7.27 \cdot 10^{-5})^2 (6.4 \cdot 10^6 + 3.6 \cdot 10^7) \\
 &= 0.22 \text{ m/s}^2
 \end{aligned}$$



Coincidencia con la aceleración de la gravedad a esa altura.

$$g_h = G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24}}{(6,4 \cdot 10^6 + 3,6 \cdot 10^7)^2}$$

$$= 0,22 \text{ m/s}^2$$

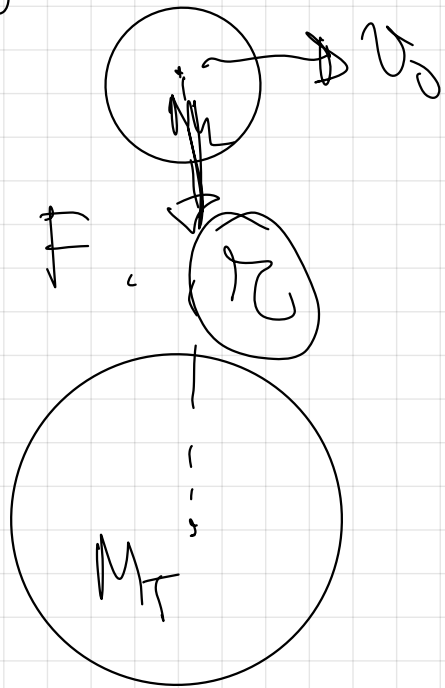
**22.-** La Luna describe una órbita circular en torno a la Tierra en 28 días

a) Calcular la distancia entre los centros de la Tierra y la Luna.

b) Calcular el valor de la masa de la Luna sabiendo que una partícula de masa  $m$  podría estar en equilibrio en un punto alineado con los centros de la Tierra y de la Luna, a una distancia del centro de la Tierra de  $3,4 \cdot 10^8 \text{ m}$ .

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}, M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ Kg}$$

a)  $T = 28$  días



Condición de orbitación.

$$F_g = F_n$$
$$G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2} = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

$$G \cdot \frac{M_T}{r} = \left( \frac{2\pi r}{T} \right)^2$$

$$G \cdot \frac{M_T}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$$

$$G \cdot M_T \cdot T^2 = 4\pi^2 r^3$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_T \cdot T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot (28 \cdot 24 \cdot 3600)^2}{4\pi^2}}$$

$$\Rightarrow 3.9 \cdot 10^8 \text{ m}$$

$$T = 28 \text{ ~~days~~ } \frac{24 \cdot 3600 \text{ s}}{1 \text{ ~~day~~}}$$

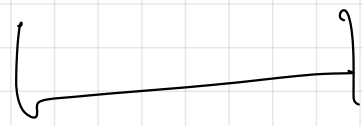
# Inicio. Repaso 1º BACH

## Energía potencial

Es la energía que posee un cuerpo en función de su posición (en un campo de fuerzas conservativas)

$$E_p = m \cdot g \cdot h \Rightarrow \text{J en el S.I.}$$

$$\begin{array}{c} \Downarrow \quad \Downarrow \\ \text{Kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{m} \end{array}$$



$$N \cdot m = J.$$

$$W = F \cdot d \cdot \cos \alpha$$

$$W = N \cdot m = J.$$

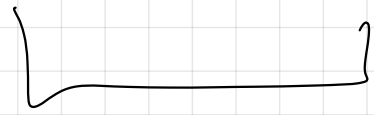
Energía cinética.

Energía que posee un cuerpo en función de su velocidad.

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot \overbrace{v^2} \quad J \text{ en S.I.}$$

$$E_c = kg \cdot \left( \frac{m}{s} \right)^2$$

$$\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{m}$$



$$\text{N} \cdot \text{m} = \text{J}$$

$$\underline{E_{\text{me}}}$$

$$E_{\text{m}} = E_{\text{c}} + E_{\text{p}} = \text{J en J}$$

# Principio de conservación de la Em.

En ausencia de rozamiento, sin pérdidas energéticas.

$$g = 10 \text{ m/s}^2$$

$$m = 1 \text{ kg}$$
$$v_0 = 0$$

$$E_{ph} = m \cdot g \cdot h$$

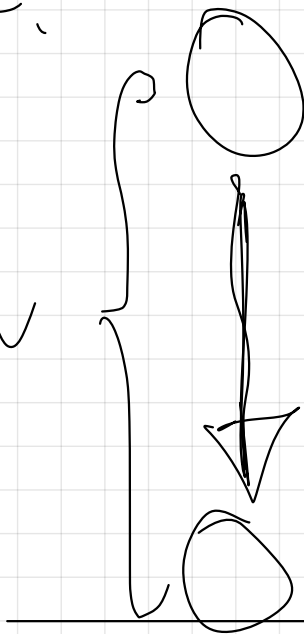
$$E_c = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$E_{ph} = 1 \cdot 10 \cdot 5 = 50 \text{ J}$$

$$E_c = 0 \text{ J}$$

$$h = 5 \text{ m}$$

$$g = 10 \text{ m/s}^2$$



$$E_{ph} = m \cdot g \cdot h = 0$$

$$E_c = 50 \text{ J}$$

$$\Delta E_m = 0.$$

$$(E_{P_{\text{zuelo}}} + E_{C_{\text{zuelo}}}) \Rightarrow (E_{Ph} - E_{Ch}) = 0.$$

$$E_{m_h} = E_{m_{\text{zuelo}}}.$$

$$E_{Ph} + E_{Ch} = E_{P_{\text{zuelo}}} + E_{C_{\text{zuelo}}}$$

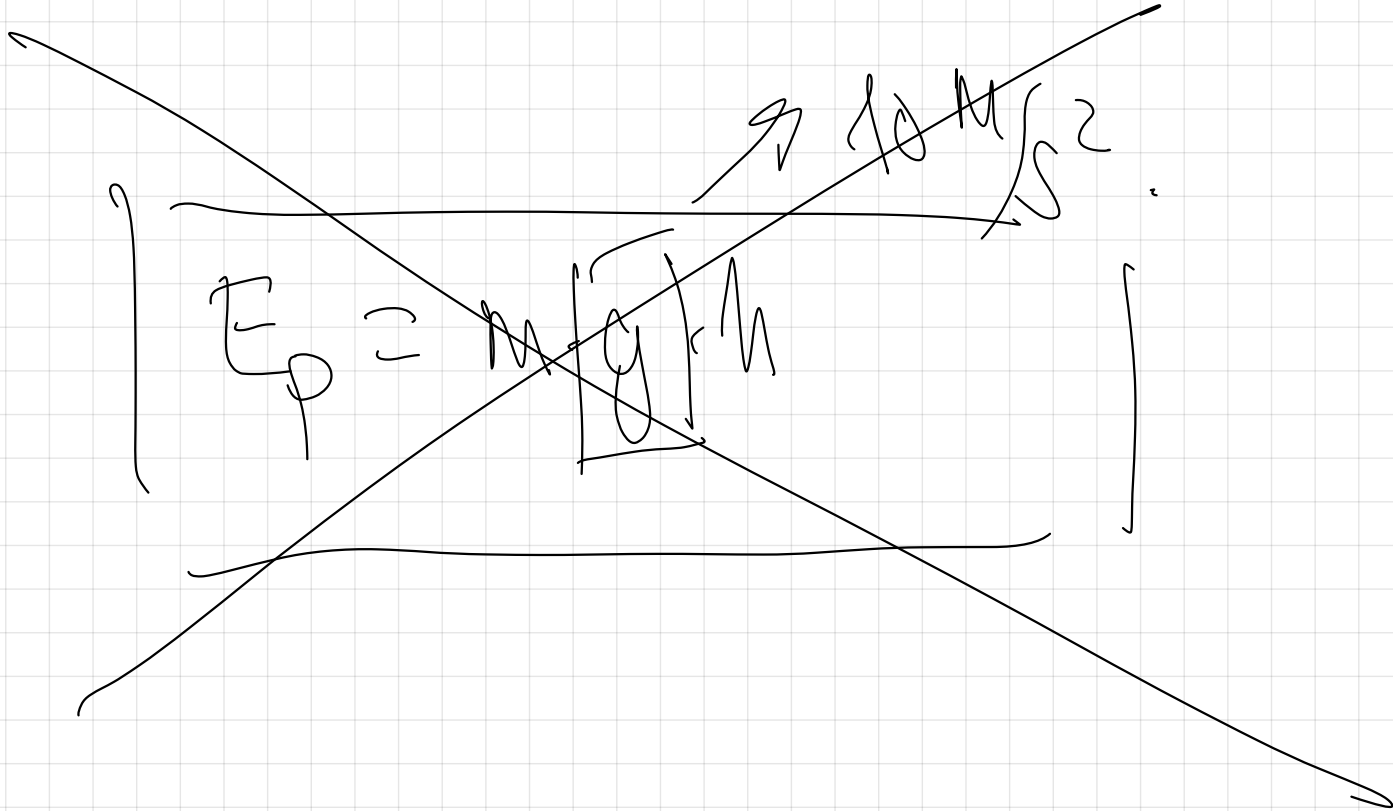
1<sup>o</sup> BACH

2º BACH

○ meteorito

miles de  
km -

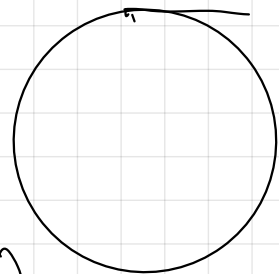
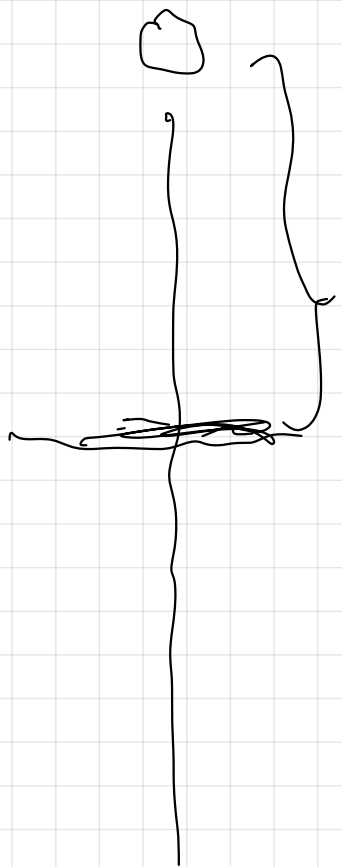
○ Tierra



BILBAO  
KM = 500

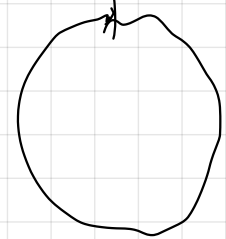
MADRID  
KM = 0

MÁLAGA  
KM = -500

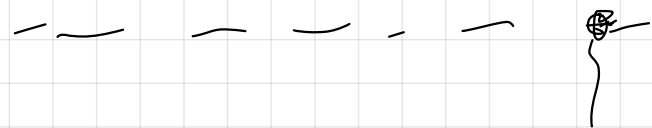


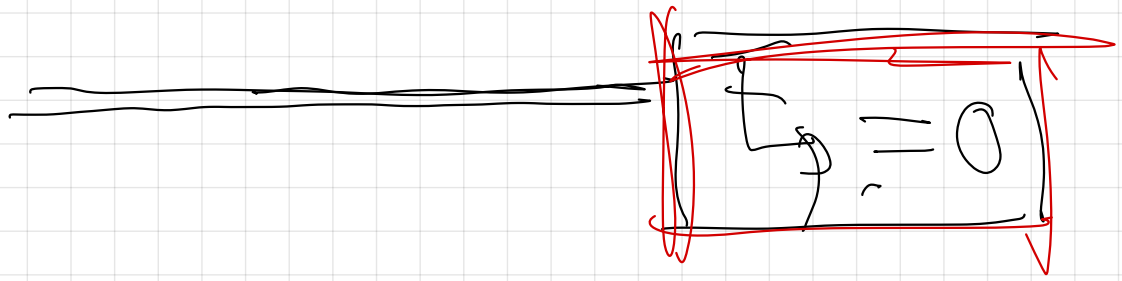
BILBAO  
KM 0

MADRID  
KM = 500

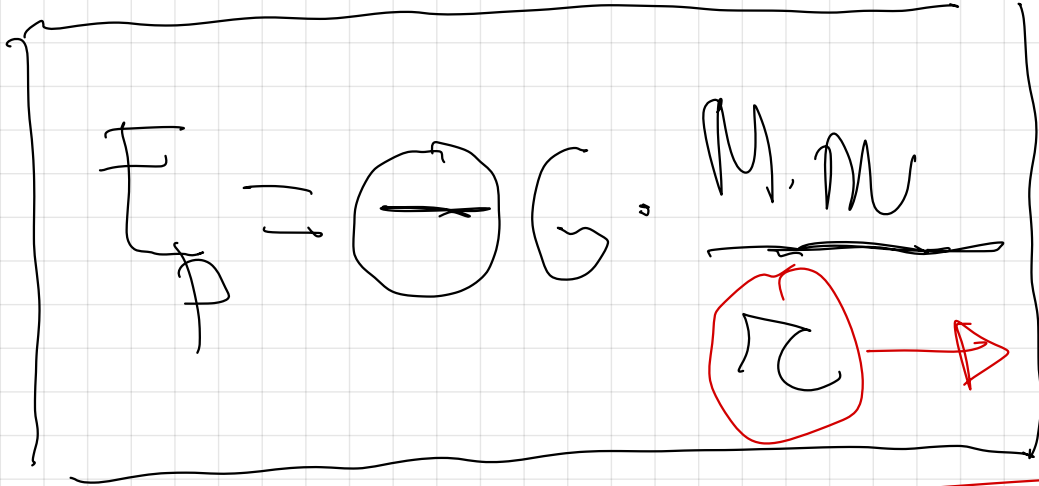


MÁLAGA  
KM = -1000



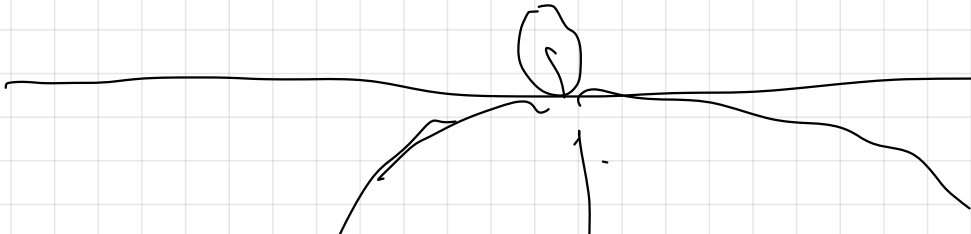
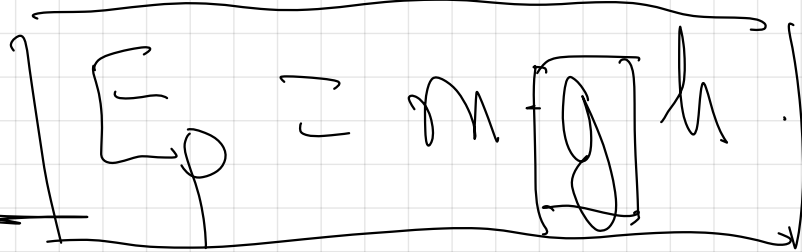


$$E_p = 0$$

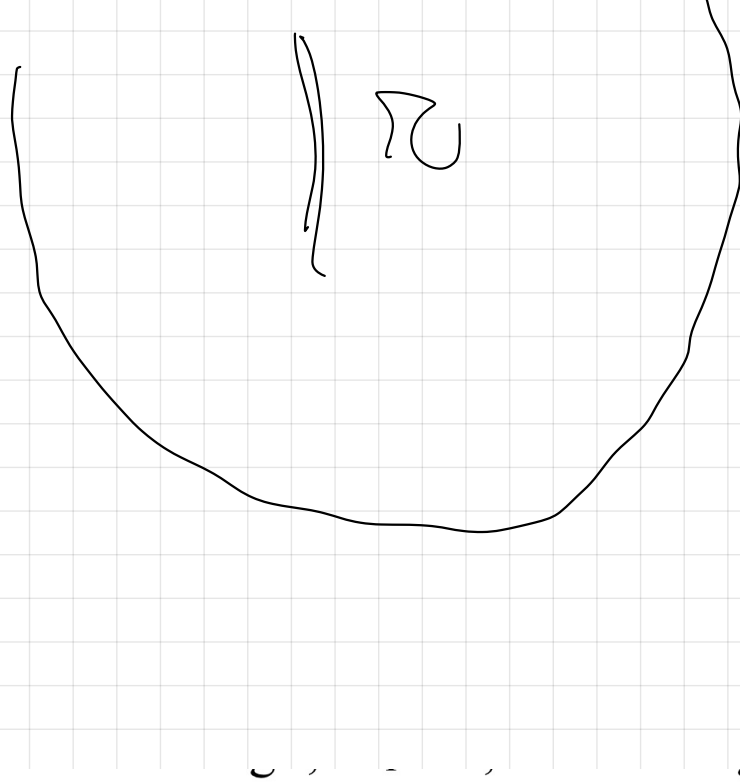


distancia  
centro  
centro

$E_p = 0$  en la  
sup tensada



$$E_p = -G \cdot \frac{M \cdot M}{r}$$



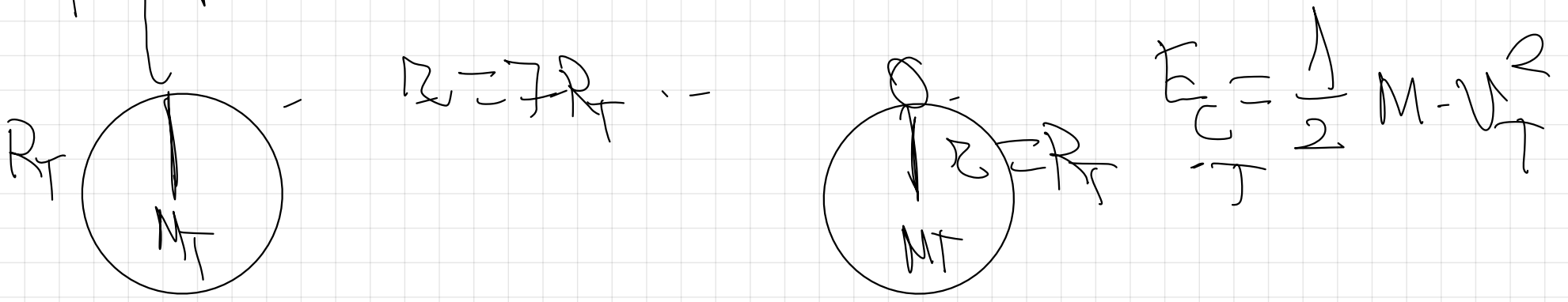
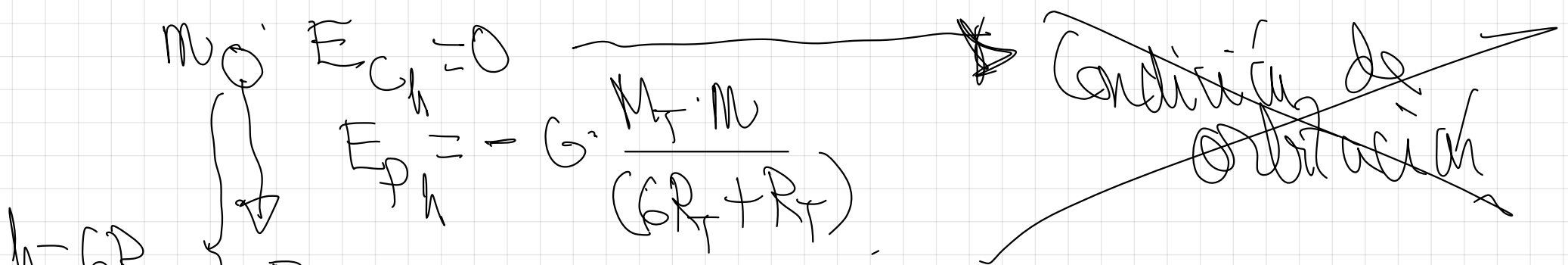
**29.-** Un meteorito de 1000 Kg colisiona con otro a una altura sobre la superficie terrestre de 6 veces el radio de la Tierra y pierde toda su Energía cinética.

a) ¿Cuánto pesa el meteorito en ese punto y cuál es su energía mecánica después de la colisión?

b) Si cae a la Tierra, haga un análisis energético del proceso de caída. ¿Con qué velocidad llega a la superficie terrestre?

c) ¿Dependerá esa velocidad de la trayectoria seguida?, ¿y del origen de energía potencial tomado?. Razonar las respuestas.

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}, R_T = 6400 \text{ Km}, M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ Kg}$$



a) 
$$P = G \frac{M_T \cdot M}{r^2} = G \frac{M_T \cdot M}{(6R_T + R_T)^2} = G \frac{M_T \cdot M}{49R_T^2}$$

$$= 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24} \cdot 1000}{49 \cdot (6,4 \cdot 10^6)^2} = 200 \text{ N.}$$

B)

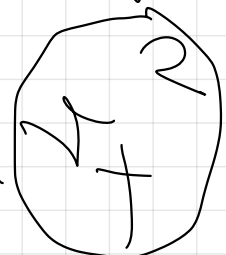
# Principio de conservación de la Em

$$E_{m_h} \approx E_{m_T}$$

$$E_{p_h} + E_{k_h} = E_{p_T} + E_{k_T}$$

$$G \cdot \frac{M \cdot m}{(R_T + R)} \neq 0 = G \cdot \frac{M \cdot m}{R_T} + \frac{1}{2} M v^2$$

$v^2 = ?$



$$m. \left( \begin{array}{c} 1 \\ G \cdot \frac{M}{R} \end{array} \right) = \cancel{m.} \left( \begin{array}{c} 1 \\ G \cdot \frac{M}{R} + \frac{1}{2} \frac{M}{R} \end{array} \right)$$

$$G \cdot \frac{M}{R} - G \cdot \frac{M}{R} = \frac{1}{2} \left( \frac{M}{R} \right)$$

$$\underline{N.} \left[ \begin{array}{c} 1 \\ G \cdot \frac{M}{R} \end{array} \right] = \underline{2.}$$

$$\frac{1}{2} \sigma_T^2 = \frac{6 \Gamma M_T}{\Gamma R_T} \cdot \frac{6 M_T}{\Gamma R_T}$$

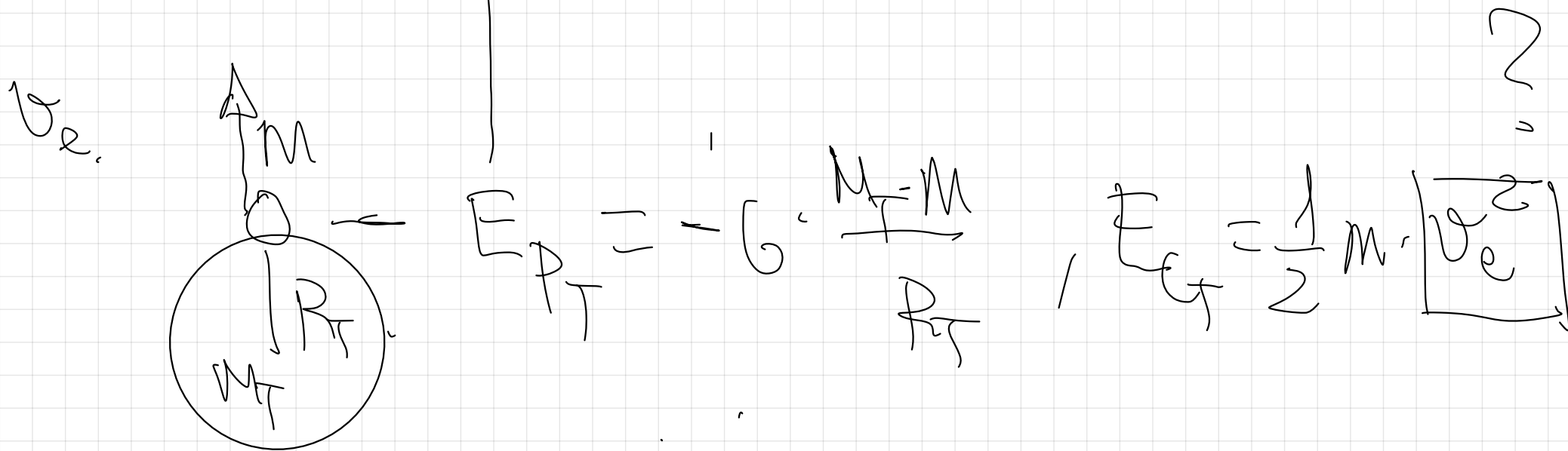
$$\frac{1}{2} \sigma_T^2 = \frac{\Gamma (6 M_T)}{\Gamma R_T} \cdot \frac{6 M_T}{\Gamma R_T}$$

$$\frac{1}{2} \sigma_T^2 = \frac{6 \Gamma M_T}{\Gamma R_T}$$

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{12 \Gamma M_T}{\Gamma R_T}} = 11035 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

Pag 15 3: Velocidad de escape de un cuerpo.

$\infty - \infty - E_p = 0 \quad \downarrow, \quad E_{cin} = 0.$



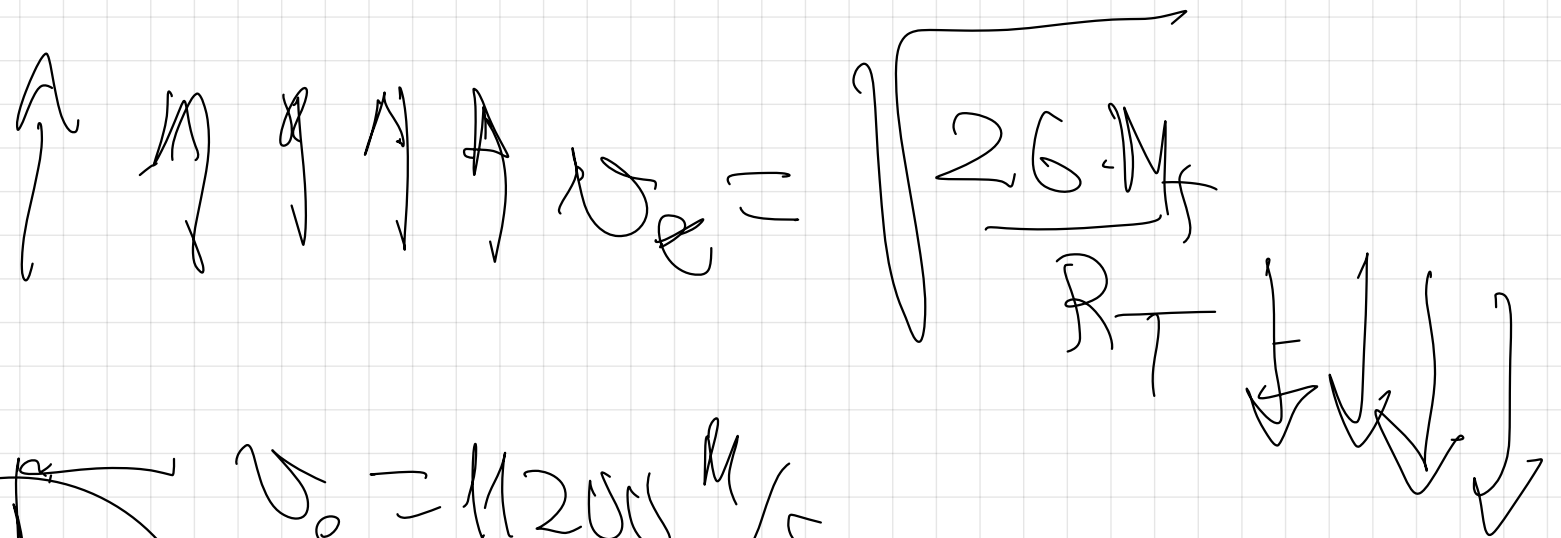
$$E_{PT} + E_{CT} = E_{PO} + E_{CO}$$

$$-G \frac{M \cdot M}{R_T} + \frac{1}{2} M \cdot v_e^2 = 0 + 0$$

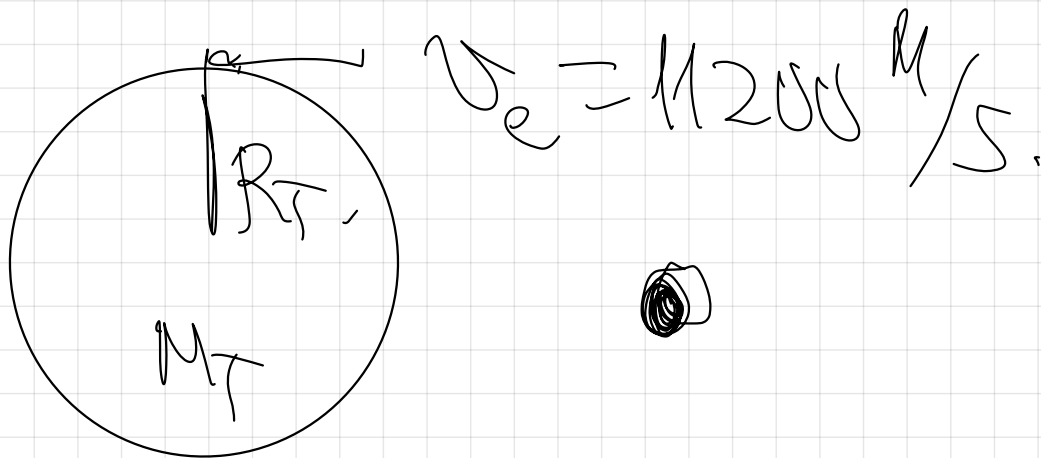
$$\frac{1}{2} M \cdot v_e^2 = G \frac{M \cdot M}{R_T}$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R_T}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{6.4 \cdot 10^6}}$$

$$= 11,200 \text{ M/s} = 11 \frac{1}{2} \frac{\text{km}}{\text{s}}$$



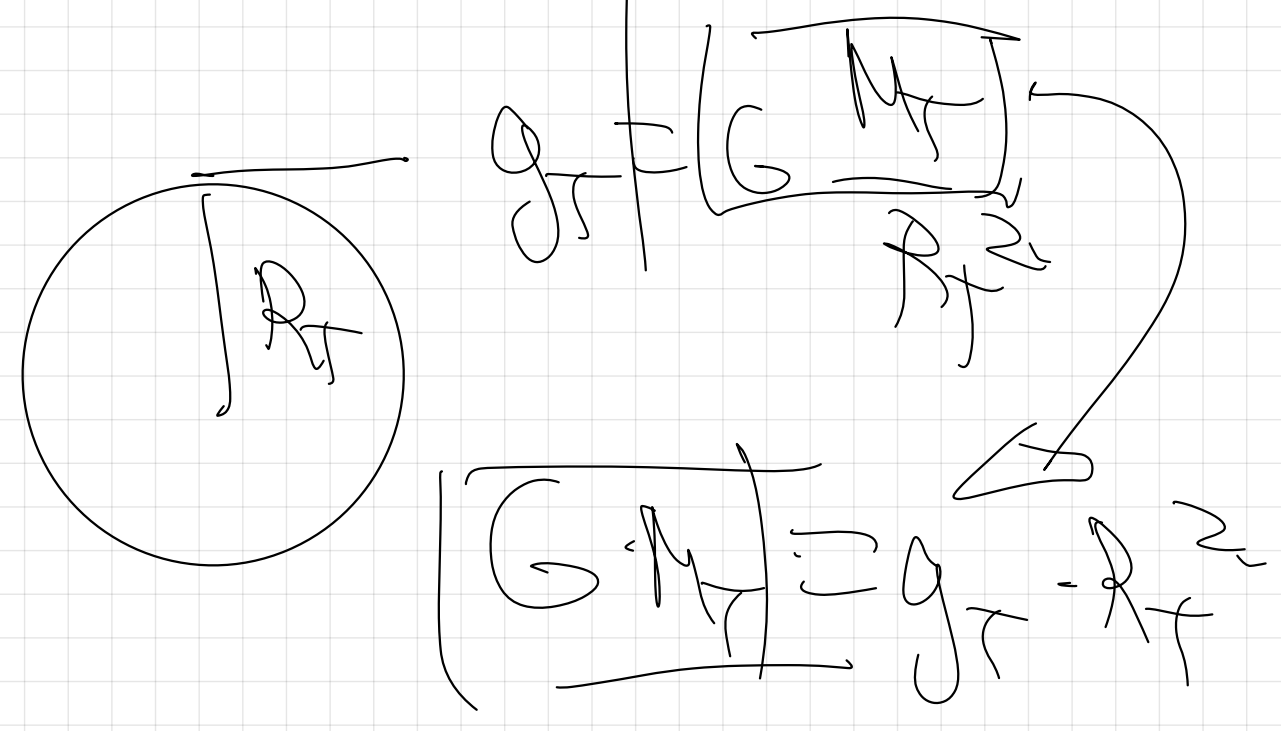
$$v_e = \sqrt{\frac{26 \cdot M_f}{R_T}}$$



$$v_e = 11200 \text{ M/s}$$

$$v_e = 300,000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

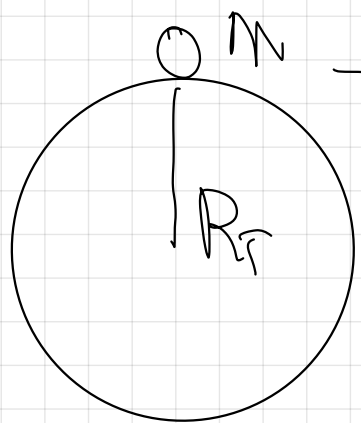
$$\begin{aligned}
 & \sigma_{21} \quad \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad = \quad \sqrt{\frac{2gR}{R}} \quad = \quad \sqrt{2g}
 \end{aligned}$$



31.- Calcular la velocidad de escape de un cuerpo situado en la superficie terrestre

$$g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}, R_T = 6400 \text{ Km}$$

$$\infty \rightarrow E_{p\infty} = 0, \quad E_{c\infty} = 0.$$



A diagram of Earth represented as a circle with center 'O'. A vertical line from the center to the top edge is labeled  $R_T$ . A mass  $m$  is indicated at the top edge of the circle.

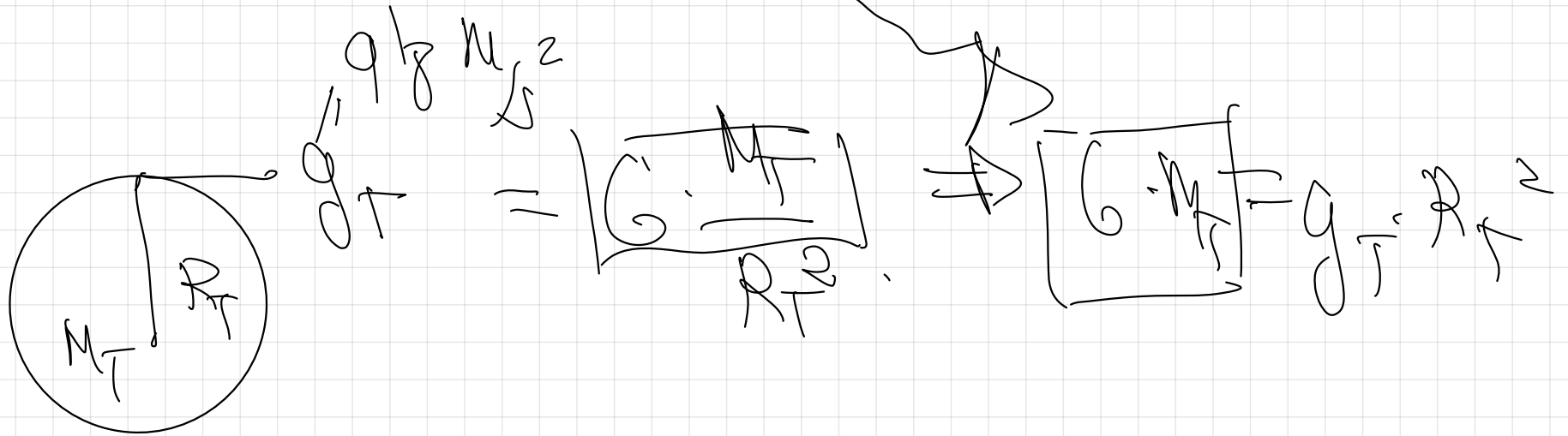
$$E_{p_T} = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T}, \quad E_{c_T} = \frac{1}{2} m v_e^2$$

$$E_{p_T} + E_{c_T} = E_{p\infty} + E_{c\infty}$$

$$-G \frac{M_T m}{R_T} + \frac{1}{2} m v_e^2 = 0 \neq 0.$$

$$\frac{1}{2} m v_e^2 = G \frac{M_T m}{R_T}$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} \Rightarrow \boxed{v_e = \sqrt{2g_T R_T}}$$



$$\sigma_e = \sqrt{2gR_1} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot (64 \cdot 10^6)} = 11.200 \text{ m/s}$$

$$11.2 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

$$\boxed{11.2 \text{ km/s}}$$

$$|\sigma_e| = \sqrt{\frac{2GM}{R_1}}$$

$$c = \sqrt{\frac{2GM}{R_{\text{an}}}} \quad ?$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$C^2 = \left( \frac{2GM}{R_{an}} \right)^2$$

$$R_{an} = \frac{2GM}{C^2}$$

32.- Un astronauta, con 100 Kg de masa (incluyendo el traje) está en la superficie de un asteroide de forma prácticamente esférica, con 2,4 Km de diámetro y densidad media de  $2,2 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ .

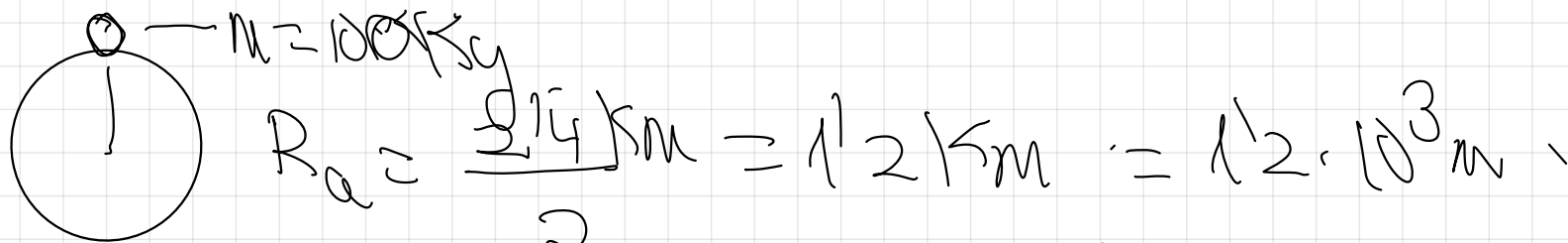
a) ¿Con qué velocidad debe impulsarse el astronauta para abandonar el asteroide?

b) ¿Cómo se denomina rigurosamente tal velocidad?

c) El astronauta carga ahora con una mochila de 40 Kg. ¿Le será más fácil salir del planeta. Razónese

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}$$

$\infty$  - - - -  $v_{\text{escape}}$

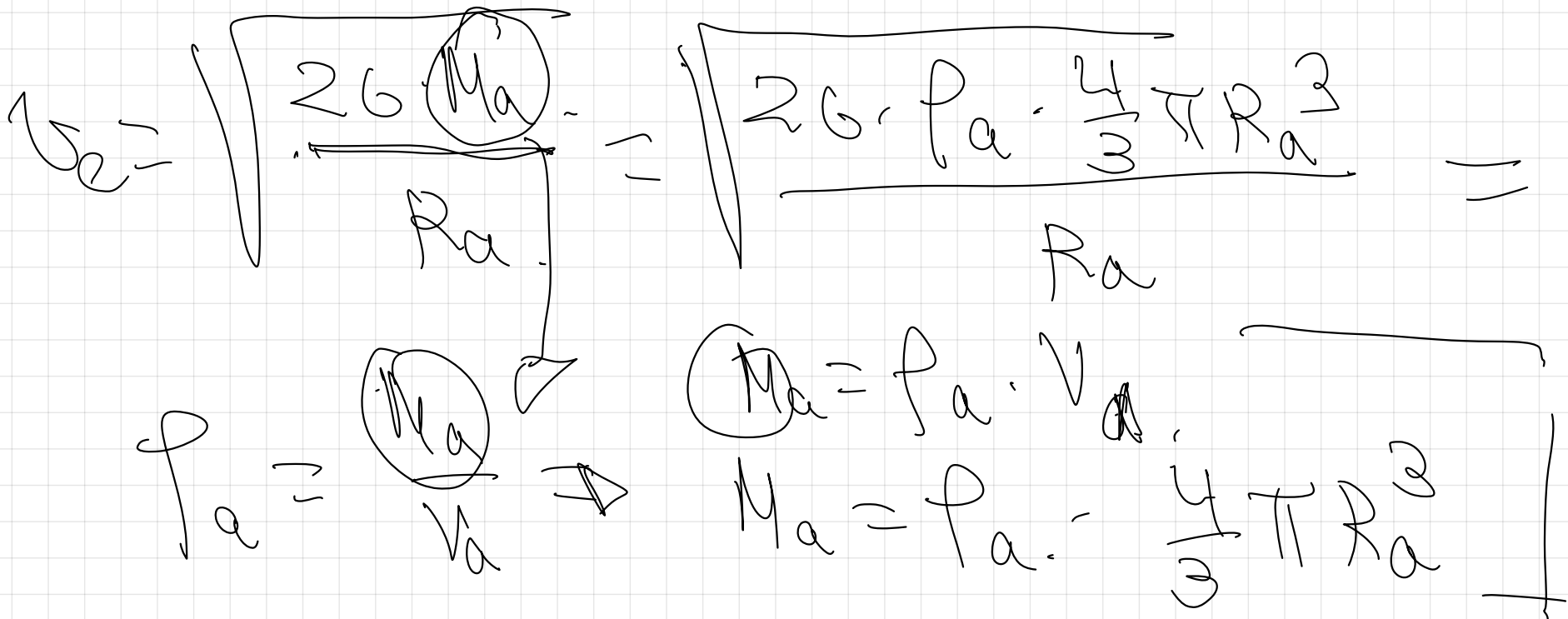


$$\rho_a = 2,2 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot \frac{1 \text{ Kg}}{10^3 \text{ g}} \cdot \frac{10^6 \text{ cm}^3}{1 \text{ m}^3} = 2,2 \cdot 10^3 \text{ Kg} / \text{m}^3$$

$$E_{pa} + E_{ca} = E_{p\infty} + E_{c\infty}$$

$$\Rightarrow G \frac{M_a - m}{R_a} + \frac{1}{2} m v_e^2 = 0 + 0$$

$$\frac{1}{2} m v_e^2 = G \frac{M_a - m}{R_a}$$



$$v_e = \sqrt{2 \cdot G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R_a^2} = \sqrt{2 \cdot 667 \cdot 10^{-11} \cdot 22 \cdot 10^3 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot (12 \cdot 10^3)^2}$$

a)  $v_e = 133 \text{ m/s}$ .

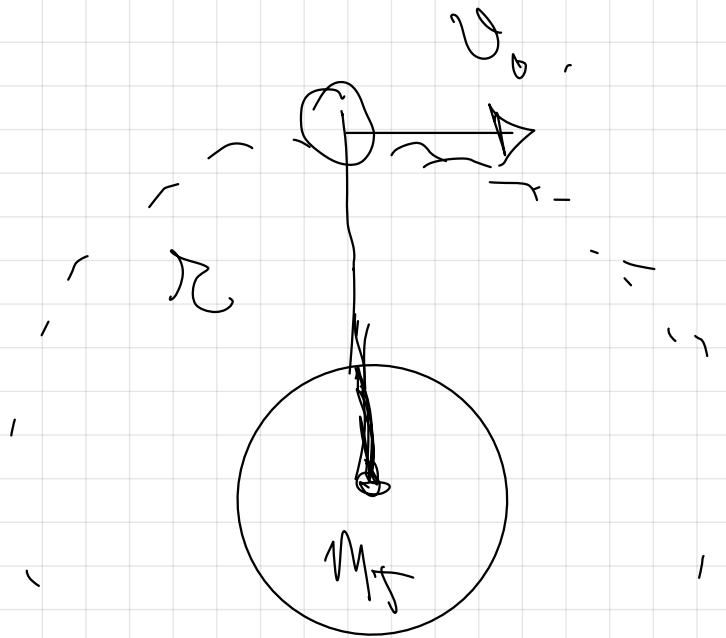
b) velocidad de escape.

c)  $v_e = \sqrt{2 G \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R_a^2}$

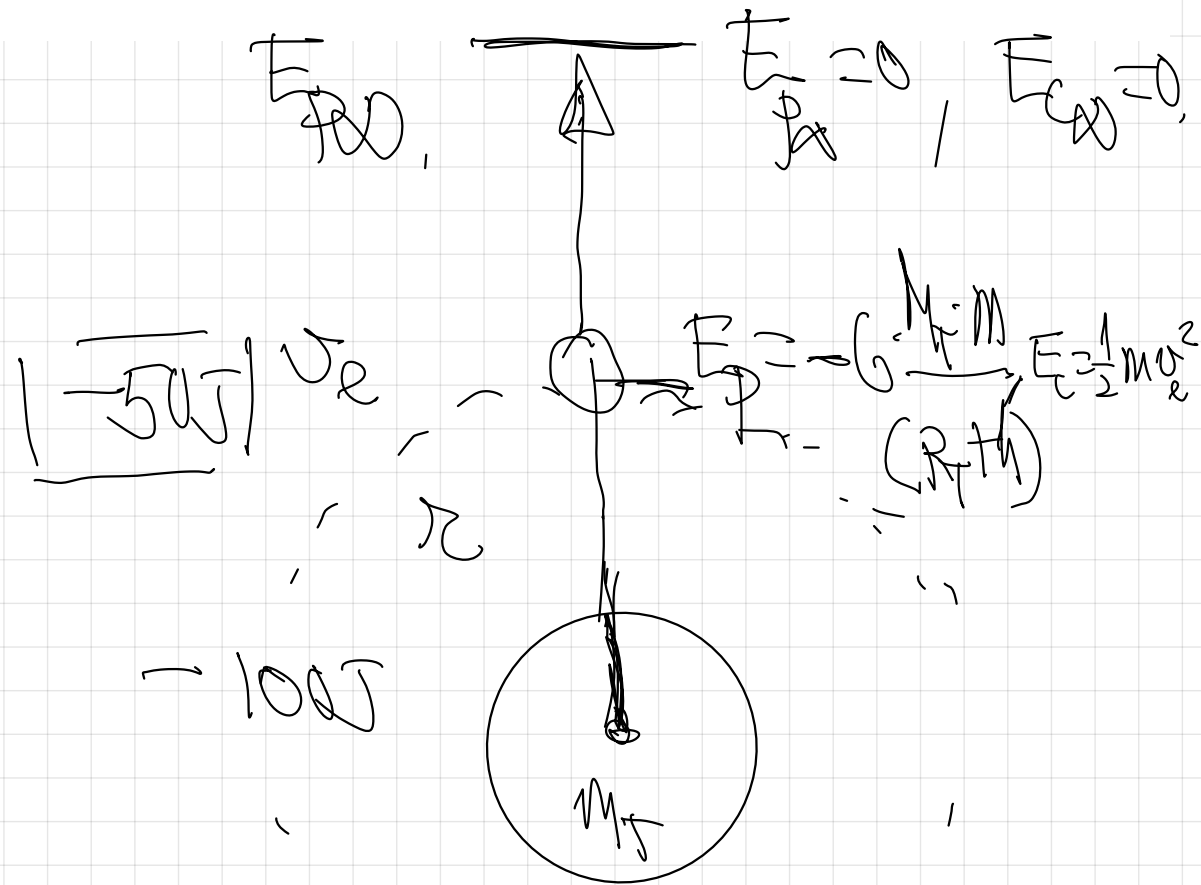
le es indiferente porque la masa del astronauta no influye en su velocidad

de escape,

35.- Un satélite se encuentra orbitando en torno a la Tierra. Determine una relación entre su velocidad de escape desde ese punto y su velocidad de orbitación en torno a la Tierra.



Condición de orbitación

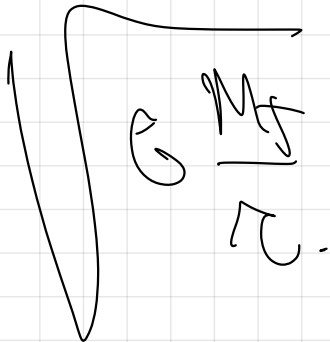


Conservación de la energía,

$$F_g = F_a.$$

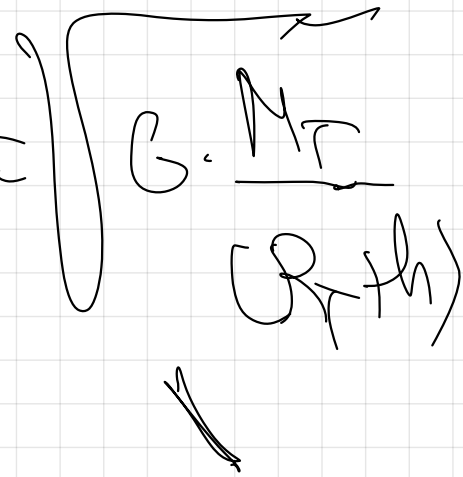
$$G \cdot \frac{M_T \cdot M}{R^2} = M \cdot \frac{v_{\text{orbital}}^2}{R}$$

$v_{\text{orbital}}$




$G \frac{M_T}{R^2}$

$v_{\text{orbital}} = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{(R_T + h)}}$



$$E_p + E_k = E_{p0} + E_{k0}$$
$$-G \cdot \frac{M_T \cdot M}{(R_T + h)} + \frac{1}{2} M v_e^2 = 0 + 0.$$

$$\frac{1}{2} M v_e^2 = G \cdot \frac{M_T \cdot M}{(R_T + h)}$$

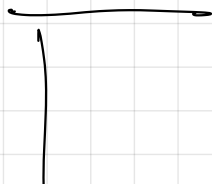
$$v_e = \sqrt{\frac{2 G M_T}{(R_T + h)}}$$


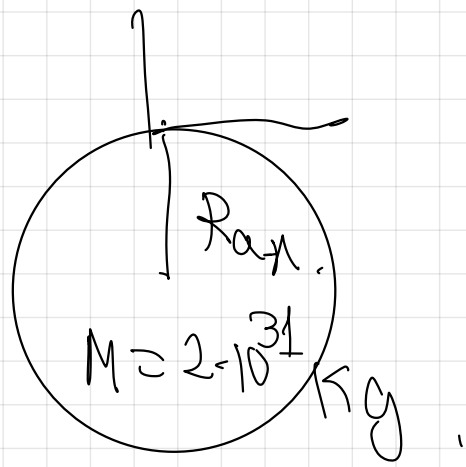
Divide ambas expresiones

$$\frac{v_2}{v_0} = \frac{\sqrt{\frac{2GM}{R_2 + h}}}{\sqrt{\frac{GM}{R_1 + h}}} \Rightarrow v_2 = \sqrt{2} v_0$$

49.- La masa de una estrella es de  $2 \cdot 10^{31}$  Kg. Si en un momento dado, la estrella se contrae debido a la presión gravitatoria, determinar el radio por el que la estrella se convierte en un agujero negro y la densidad del mismo.

$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}$ , velocidad de la luz en el vacío  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$





Deducción de la velocidad de escape.

$$C = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$v_{e,an} = \sqrt{\frac{2G \cdot M_{an}}{R_{an}}}$$

$$C = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_{an}}{R_{an}}}$$

$$C^2 = \frac{2G M_{an}}{R_{an}}$$

$$R_{an} = \frac{2G M_{an}}{C^2} \Rightarrow \frac{2 \cdot 667 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{31}}{(3 \cdot 10^8)^2}$$

$$R_{an} = 2.97 \cdot 10^4 \text{ m}$$

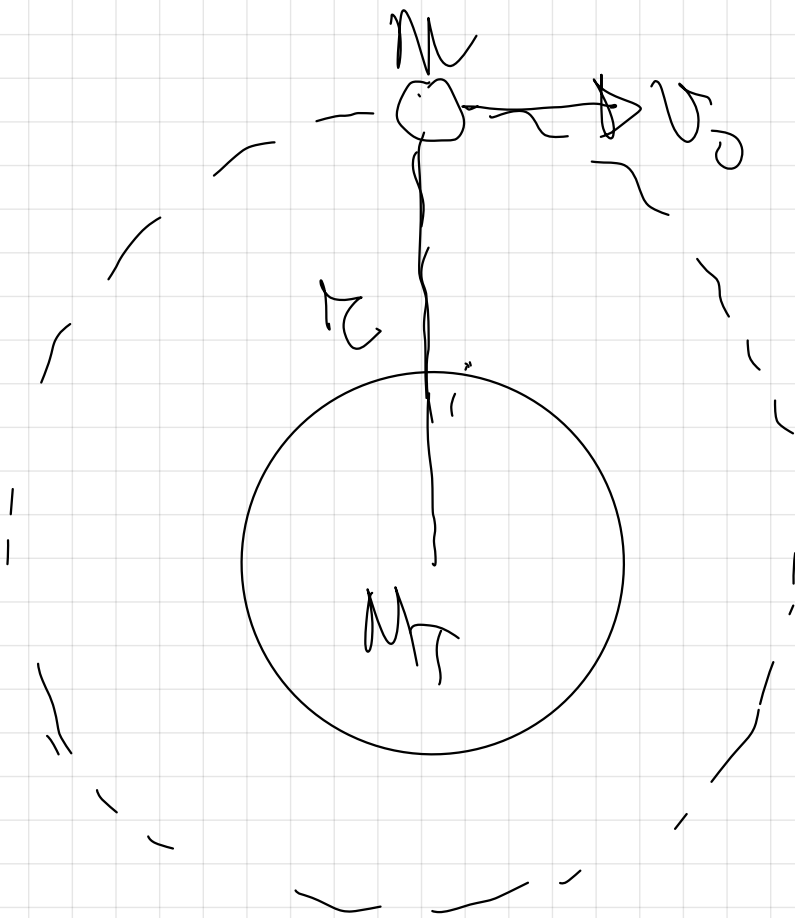
$$\rho_{an} = \frac{M_{a,n}}{V_{a,n}} = \frac{M_{a,n}}{\frac{4}{3} \pi R_{an}^3}$$

$$= \frac{2 \cdot 10^{31} \text{ kg}}{\frac{4}{3} \pi (2.97 \cdot 10^4)^3 \text{ m}^3}$$

$$\rho_a = 1.82 \cdot 10^{17} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

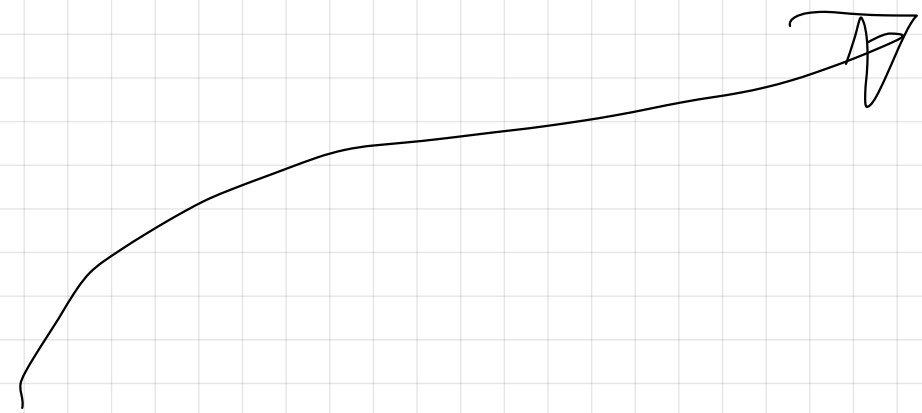
2.- ENERGÍA ORBITAL DE UN SATÉLITE

Es la  $E_m$  del satélite cuando se haya orbitando



$$E_{\text{orbital}} = E_p + E_c$$

$$E_{\text{orbital}} = -G \frac{M_T m}{r} + \frac{1}{2} m v_0^2$$



Condición de orbitación

$$F_g = F_c$$

$$G \frac{M_T \cdot m}{r^2} = m \frac{v_{\text{orbital}}^2}{r}$$

$$v_{\text{orbital}} = \sqrt{G \frac{M_T}{r}}$$

$$E_{\text{orbital}} = -G \frac{M_T \cdot m}{2r} + \frac{1}{2} m \left( \sqrt{G \frac{M_T}{r}} \right)^2$$



$$E_{\text{orbital}} = -G \frac{M_T \cdot m}{2r} + G \frac{M_T \cdot m}{2r}$$

$$E_m = G \frac{M_T \cdot m}{2r} - G \frac{M_T \cdot m}{2r}$$

$$E_m = G \cdot M_T \cdot m \left( \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{\pi} \right)$$

$$E_m = G \cdot M_T \cdot m \left( \frac{1}{2\pi} - \frac{2}{2\pi} \right)$$

$$E_m = G \cdot M_T \cdot m \left( -\frac{1}{2\pi} \right)$$

$$\boxed{E_m = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{2\pi}}$$

$$E_m = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{2\pi}$$

38.- Se eleva un cuerpo de 200 Kg desde la superficie de la Tierra hasta una altura de 5000 Km.

a) Explicar las transformaciones energéticas que tienen lugar y calcular el trabajo mínimo necesario o energía cinética que habrá que suministrarle.

b) Si quisiéramos elevar a este cuerpo de manera que permaneciese orbitando a dicha altura. ¿Qué trabajo o energía cinética hubiese sido preciso suministrarle?

c) Explicar cómo variarán las energías potencial, cinética y mecánica mientras el cuerpo permanece orbitando

d) ¿Cuánto valdrá el trabajo que realiza la fuerza gravitatoria sobre el cuerpo orbitando durante un semiperíodo?

$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}$ ,  $R_T = 6400 \text{ Km}$ ,  $M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ Kg}$

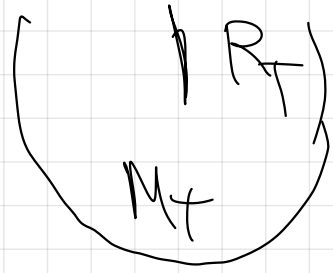
a)

$h = 5000 \text{ Km}$

¡OJO! Solo elevar, se queda quieto en esa altura.

$$E_{Ph} = -G \frac{M \cdot m}{(R_T + h)} \quad / \quad E_{Ch} = 0 \text{ J}$$

$$E_{Pt} = -G \frac{M \cdot m}{R_T} \quad / \quad E_G = \frac{1}{2} M \cdot v^2$$



Conservación de la Energía

''''

$$E_P + E_G = E_{P_u} + E_{Ch}$$

$$G \frac{M \cdot M}{h} + \textcircled{E_G} = G \frac{M \cdot M}{(R_T + h)} + 0$$

$$E_{CF} = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T} = G \frac{M_T \cdot m}{(R_T + h)}$$

$$E_{CF} = G \cdot M_T \cdot m \left( \frac{1}{R_T} - \frac{1}{(R_T + h)} \right)$$

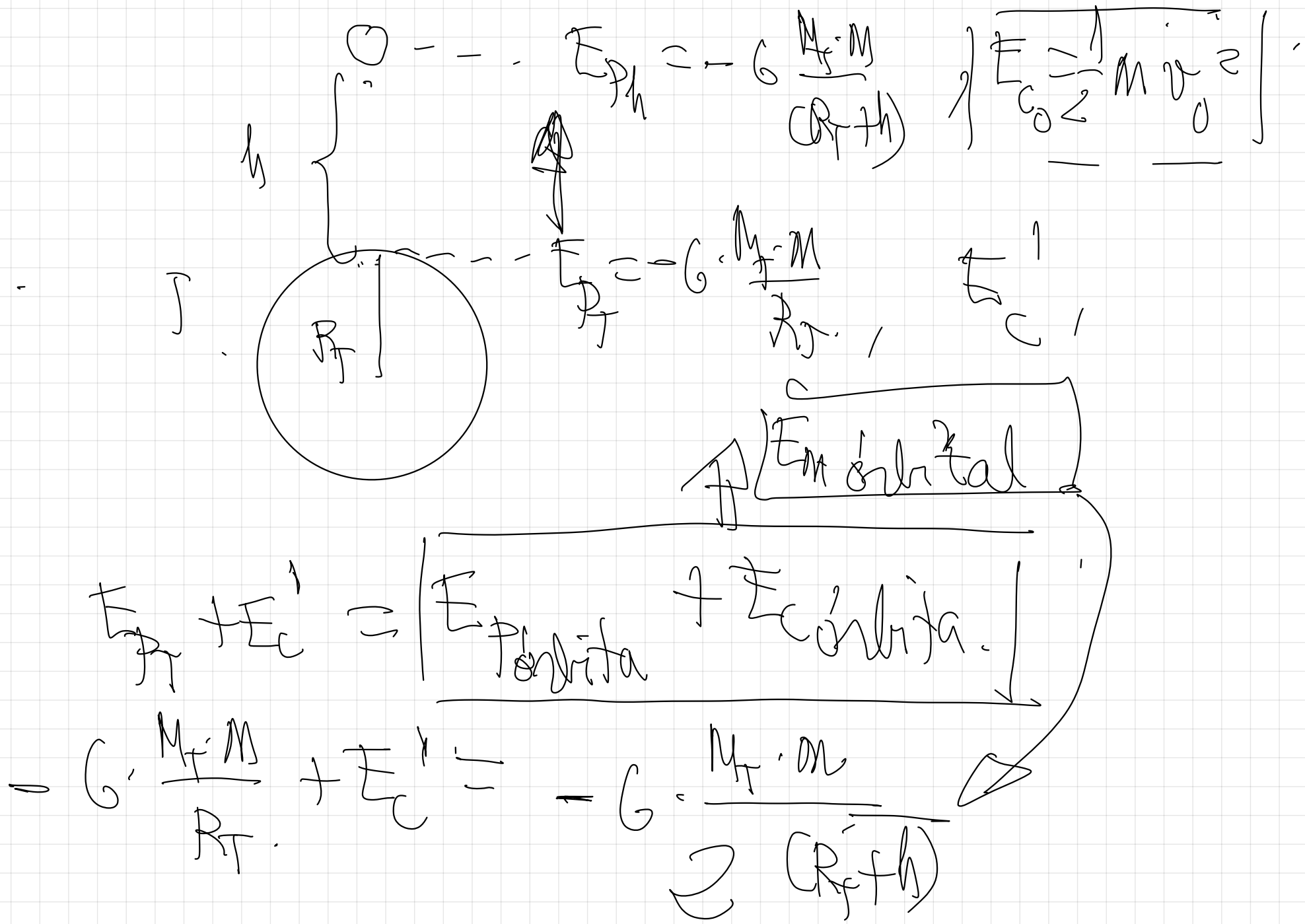
$$\boxed{E_{CF} = 5,52 \cdot 10^9 \text{ J}}$$

$$\boxed{E_{CF} = 5,52 \cdot 10^9 \text{ J}}$$

En el ascenso gana  $E_p$   
y toda la  $E_c$  que se  
le suministró la

pierde, coincidiendo  
el valor con la  
ganancia de  $E_p$ .

(La suma de los dos permanece  
cte conservándose la  $E_m$ )



$$E_c^u = G \cdot \frac{M_H \cdot m}{R_f} = G \cdot \frac{M_H \cdot m}{2(R_f + h)}$$

$$E_c^l = G M_H m \left( \frac{1}{R_f} - \frac{1}{2(R_f + h)} \right)$$

$$E_{cf} = 9.04 \cdot 10^9 \text{ J}$$



La  $E_c$  suministrada ha de ser mayor que en el caso anterior, (debe orbitar)

**38.-** Se eleva un cuerpo de 200 Kg desde la superficie de la Tierra hasta una altura de 5000 Km.

a) Explicar las transformaciones energéticas que tienen lugar y calcular el trabajo mínimo necesario o energía cinética que habrá que suministrarle.

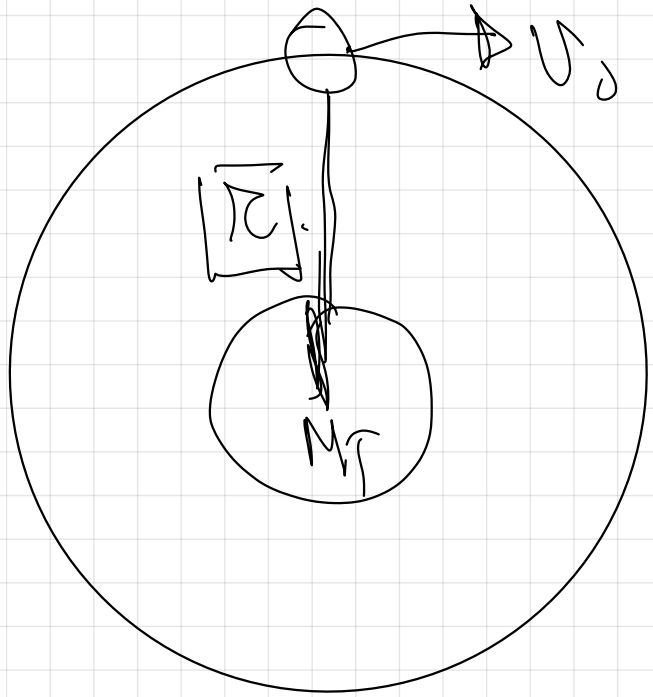
b) Si quisiéramos elevar a este cuerpo de manera que permaneciese orbitando a dicha altura. ¿Qué trabajo o energía cinética hubiese sido preciso suministrarle?

c) Explicar cómo variarán las energías potencial, cinética y mecánica mientras el cuerpo permanece orbitando

d) ¿Cuánto valdrá el trabajo que realiza la fuerza gravitatoria sobre el cuerpo orbitando durante un semiperíodo?

$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}$ ,  $R_T = 6400 \text{ Km}$ ,  $M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ Kg}$

Mientras orbita.



$$E_{\text{pot}} = -G \frac{M_T M}{r} = \text{cte.}$$

$\downarrow$  orbita.       $r \rightarrow \text{cte}$

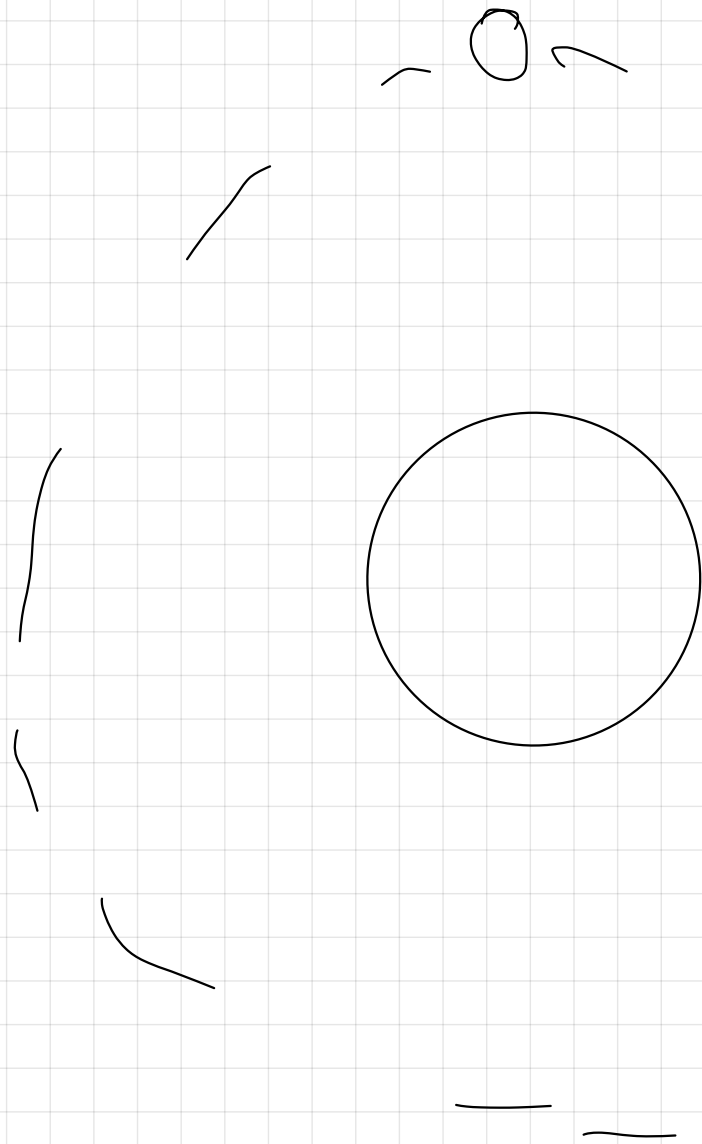
$$E_{\text{cinética}} = \frac{1}{2} M \left[ \begin{matrix} v_0^2 \\ 0 \end{matrix} \right] = \text{cte.}$$

$\downarrow$  cte.

$$E_m = -G \frac{M_T M}{2r} = \text{cte.}$$

$$E_m = E_{\text{pot}} + E_{\text{cinética}} = \text{cte.}$$

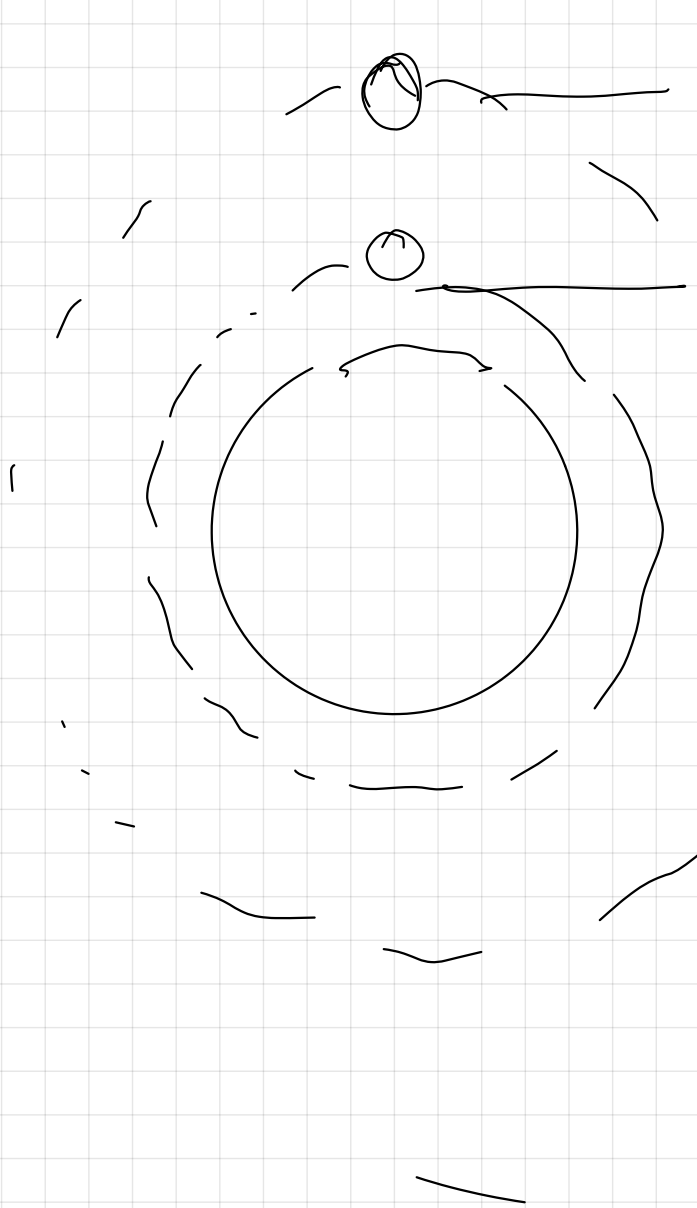
$\downarrow$  cte       $\downarrow$  cte



En orbital.

$E_{ph}$ ,  $E_{ch}$

$E_A$ ,  $E_{\text{satelización}}$

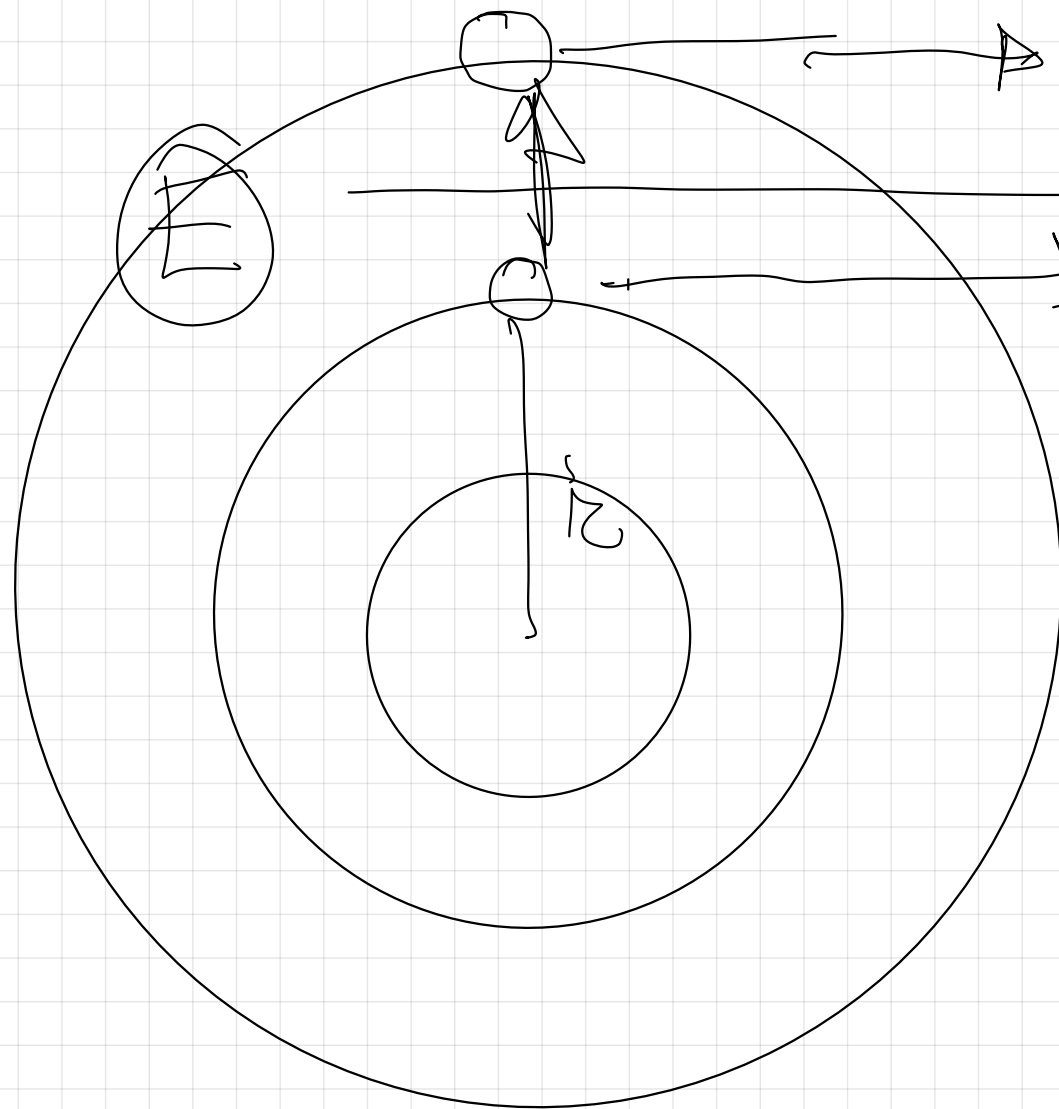


$$E_M = -G \frac{M_1 M_2}{2r}$$

$$E_M = -G \frac{M_1 M_2}{2r}$$

has negative.

distinguish  
@  $F_M$



$$E_{in} = -G \cdot \frac{M \cdot M}{2r} \rightarrow \text{MAXOS}$$

$$E_{in} = -G \cdot \frac{M \cdot M}{2r} \rightarrow \text{MINOR}$$

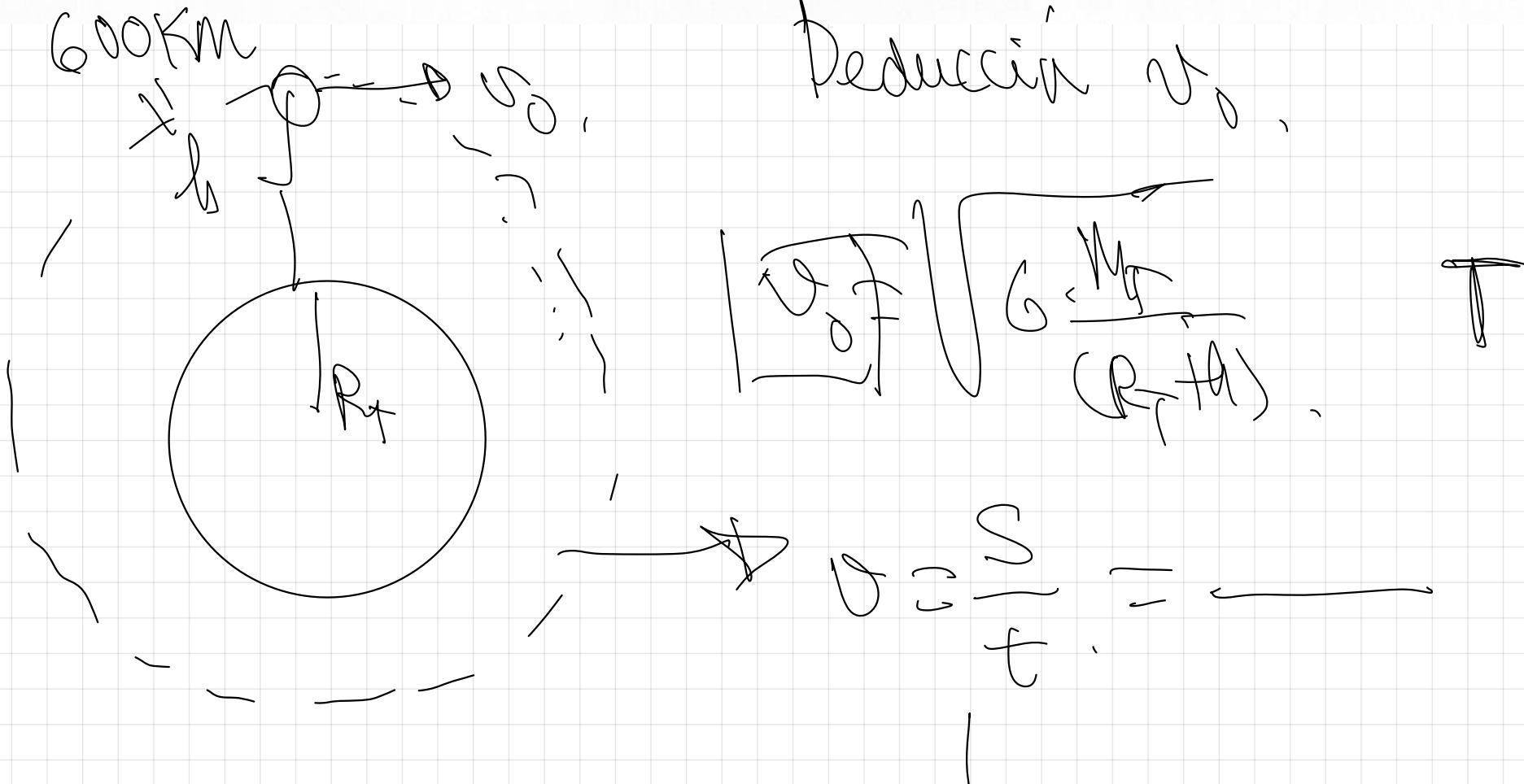
183

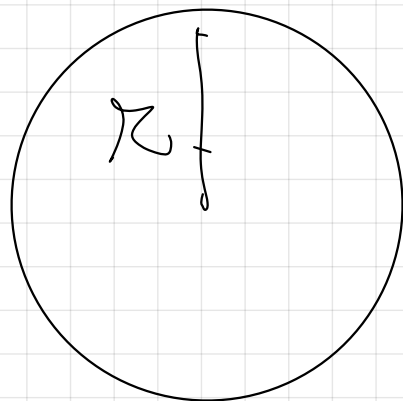
(09-R) El telescopio espacial Hubble se encuentra orbitando en torno a la Tierra a una altura de 600 km.

a) Determine razonadamente su velocidad orbital y el tiempo que tarda en completar una vuelta.

b) Si la masa del Hubble es de 11.000 kg, calcule la fuerza con la que la Tierra lo atrae y compárela con el peso que tendría en la superficie terrestre.

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}; R_t = 6400 \text{ km}; M_t = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$



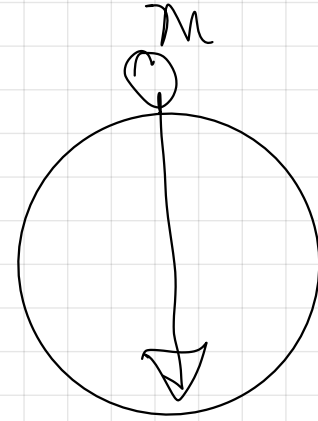
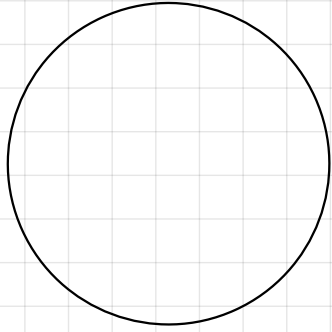
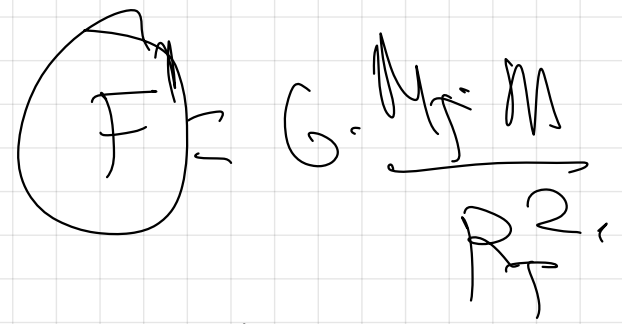
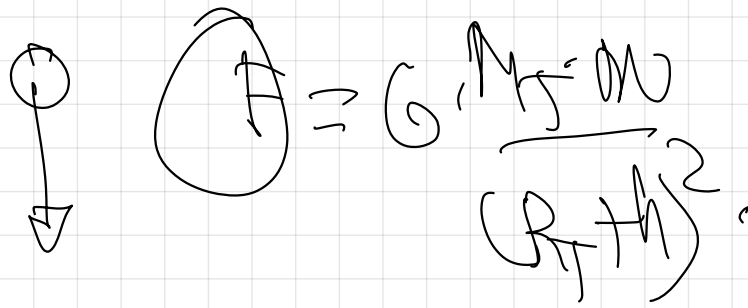


$$L = 2\pi r$$

---

$$C = 2\pi (R + h)$$





41.- Un satélite artificial de 100 Kg de masa describe una órbita circular alrededor de la Tierra a una altura de 500 Km de la superficie terrestre.

a) Calcular la energía cinética, la energía potencial y la energía mecánica del satélite en la citada órbita.

b) Si quisiésemos transferir ese satélite de forma que orbitase a una altura de 1690 Km sobre la superficie terrestre, calcular el trabajo que sería necesario realizar. *Energía que es necesario aplicar.*

c) Explicar las variaciones que habrán experimentado la energía potencial, la energía cinética y la energía mecánica en dicho tránsito.

$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}$ ,  $R_T = 6370 \text{ Km}$ ,  $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ Kg}$

*Energía que es necesario aplicar.*

Diagram showing Earth with radius  $R_T$  and a satellite at height  $h = 500 \text{ Km}$  from the surface. The satellite's mass is  $m = 100 \text{ Kg}$ . The distance from the center of Earth to the satellite is  $R_T + h$ .

$$E_p = - \left[ \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T + h} \right] =$$

$$= \Rightarrow \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 100}{(6370 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^5)} = \boxed{-58,10^9}$$

$500 \text{ Km} = 5 \cdot 10^5 \text{ m}$

$$E_C = \frac{1}{2} M v_0^2 = \frac{1}{2} m \left( \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_T + h}} \right)^2 \rightarrow \text{ORBITA CIRCULAR.}$$

(INCISO)

$$E_C = \frac{1}{2} G \cdot \frac{M_T \cdot m}{(R_T + h)} \quad \left\{ \begin{array}{l} E_C = \frac{1}{2} G \cdot \frac{M_T \cdot m}{(R_T + h)} \\ E_p = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{(R_T + h)} \end{array} \right.$$

ORBITA CIRCULAR.  $\rightarrow$   $E_C = \frac{1}{2} |E_p|$

$$E_c = \frac{1}{2} G \frac{M_1 M_2}{(R_1 + R_2)}$$

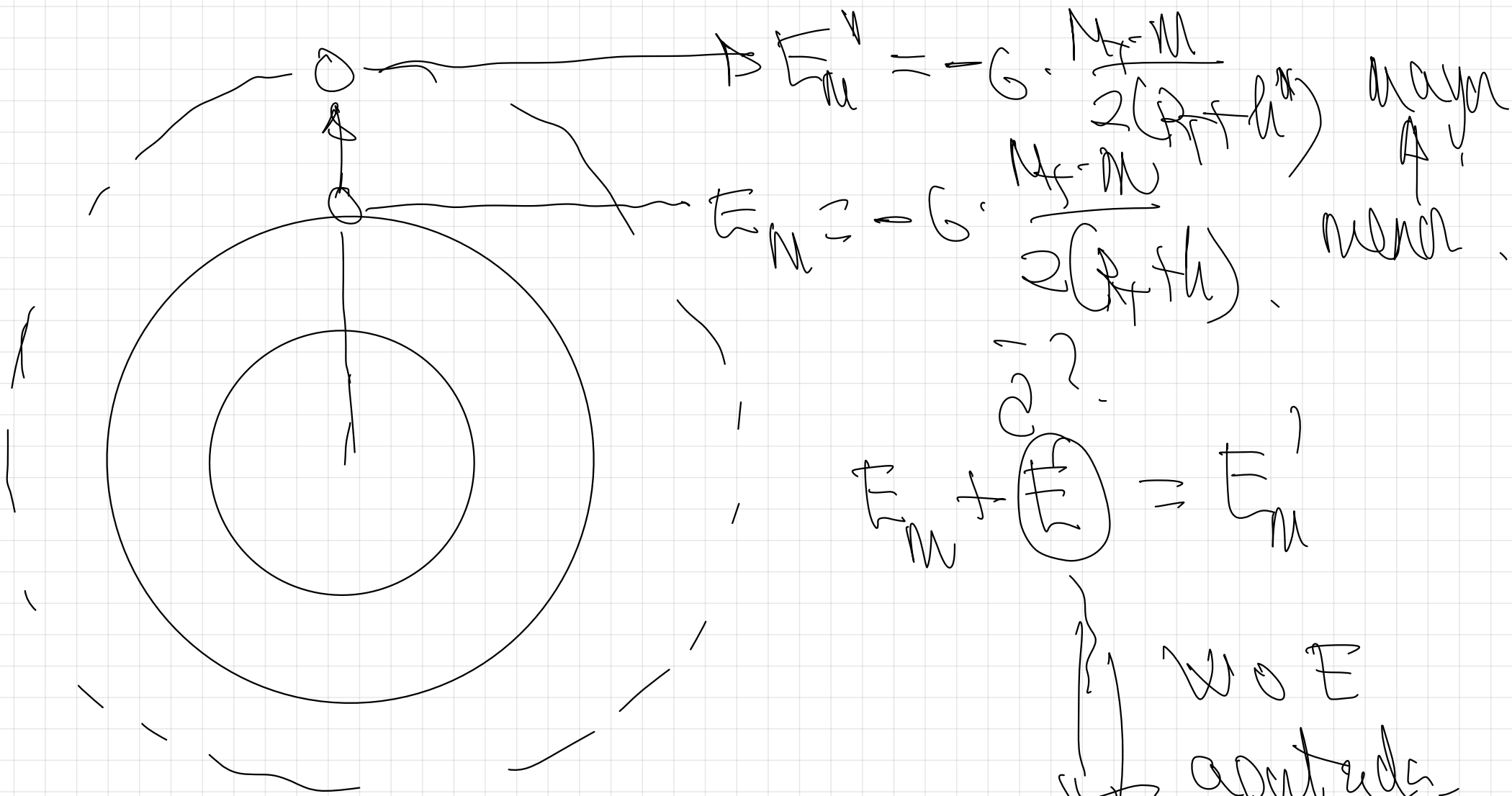
$$E_c = \frac{1}{2} 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5.98 \cdot 10^{24} \cdot 200}{(6.37 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^4)} = \boxed{2.9 \cdot 10^9 \text{ J}}$$

$$E_c = \frac{1}{2} |E_p| = \frac{1}{2} 5.8 \cdot 10^9 = \boxed{2.9 \cdot 10^9 \text{ J}}$$

$$E_p = -5.8 \cdot 10^9 \text{ J}$$

  
 ORBITA CIRCULAR

$$E_m = E_p + E_c = \ominus 2.9 \cdot 10^9 \text{ J}$$



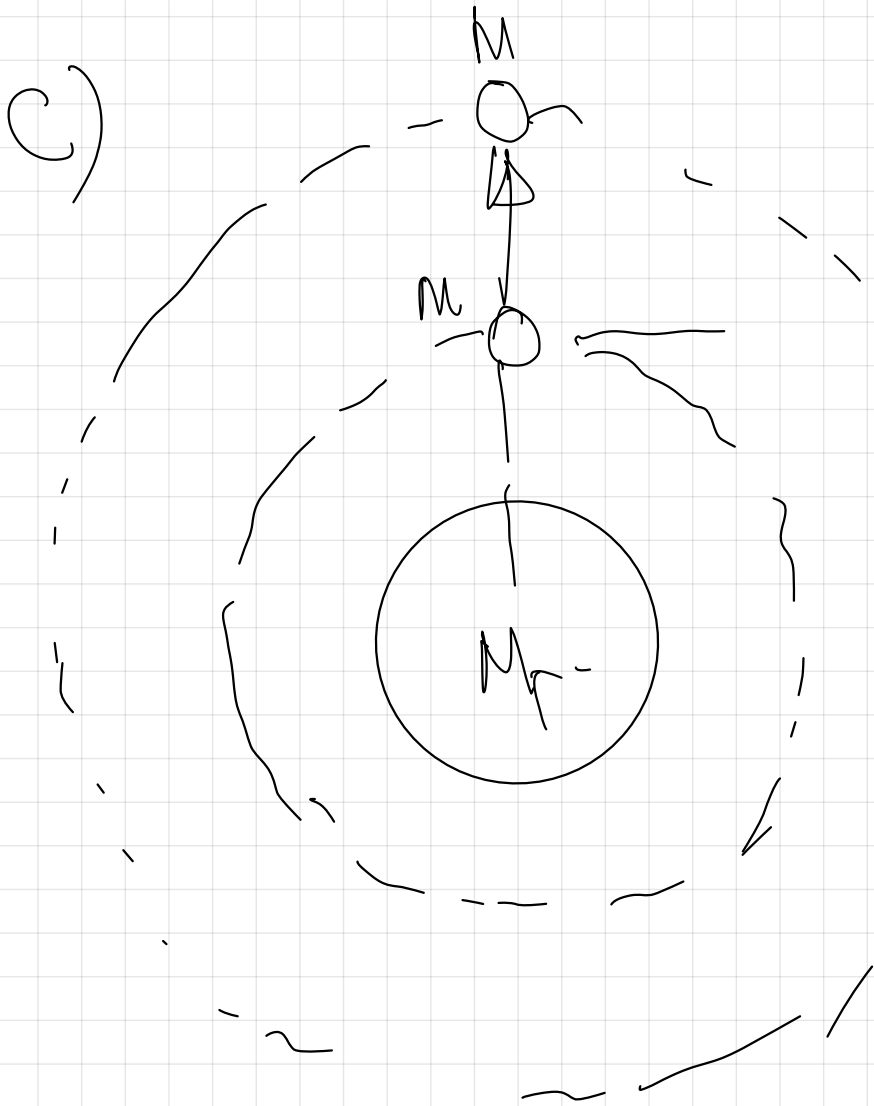
$$E = E_m^v - E_m$$

$$E_{\text{ext}} = G \cdot \frac{M_1 \cdot M_2}{2(R_1 + R_2)} \Rightarrow \left( - G \cdot \frac{M_1 \cdot M_2}{2(R_1 + R_2)} \right)$$

$$E_{\text{ext}} = G \cdot \frac{M_1 \cdot M_2}{2(R_1 + R_2)} - G \cdot \frac{M_1 \cdot M_2}{2(R_1 + R_2)}$$

$$E_{\text{ext}} = \frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{M_1 \cdot M_2}{R_1 + R_2} \left( \frac{1}{(R_1 + R_2)} - \frac{1}{(R_1 + R_2)} \right)$$

$$E_{\text{ext}} = 4.3 \cdot 10^8 \text{ J}$$



$$F_m = -G \frac{M \cdot m}{2R} \uparrow$$

$$F_p = -G \frac{M \cdot m}{R} \uparrow$$

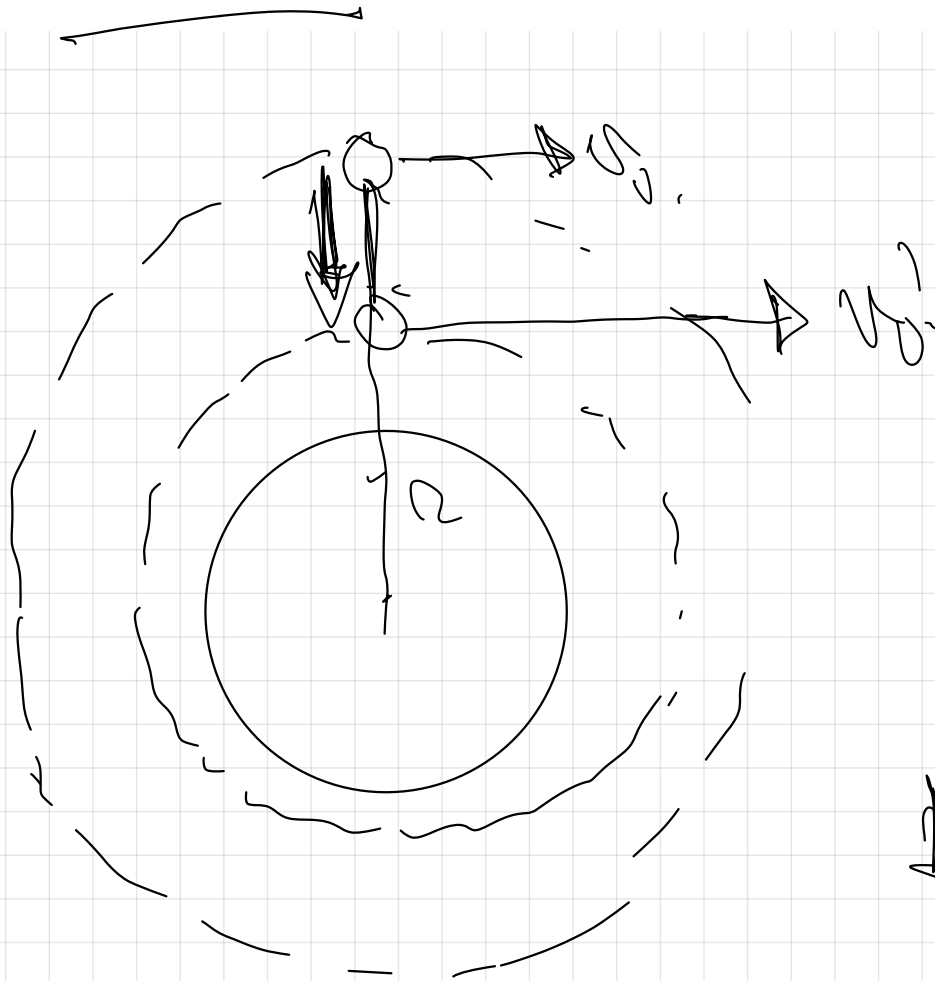
$$F_c = \frac{1}{2} m \left( \frac{v_0}{R} \right)^2 =$$

$$v_0 = \sqrt{G \frac{M}{R}} \uparrow$$

$F_p, F_c, F_m.$

$$g=10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}, R_T= 6400 \text{ Km}$$

40.- Un satélite se encuentra orbitando a una altura determinada sobre la superficie terrestre. Si quisiésemos que este satélite pasase a estar orbitando a otra altura con una velocidad orbital ~~mayor~~, explique si el satélite estará más cerca o más lejos de la Tierra, e indicar las variaciones que experimentarían la energía potencial, la energía cinética y la energía mecánica del satélite.



$$E_m = -G \frac{M \cdot m}{2r} \downarrow$$

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r} \downarrow$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \uparrow$$

pag 18.

## 6.- RELACIÓN ENTRE ENERGÍA Y MOVIMIENTO ORBITAL.



$$E_m > 0$$

$$E_m = 0$$

$$E_m < 0$$

$$E_m < 0$$

$$E_m < 0$$

NO ESCAPA.

HÍPERBOLA

$$E_c > |E_p| \text{ ESCAPA}$$

PARÁBOLA

$$E_c = |E_p| \text{ ESCAPA}$$

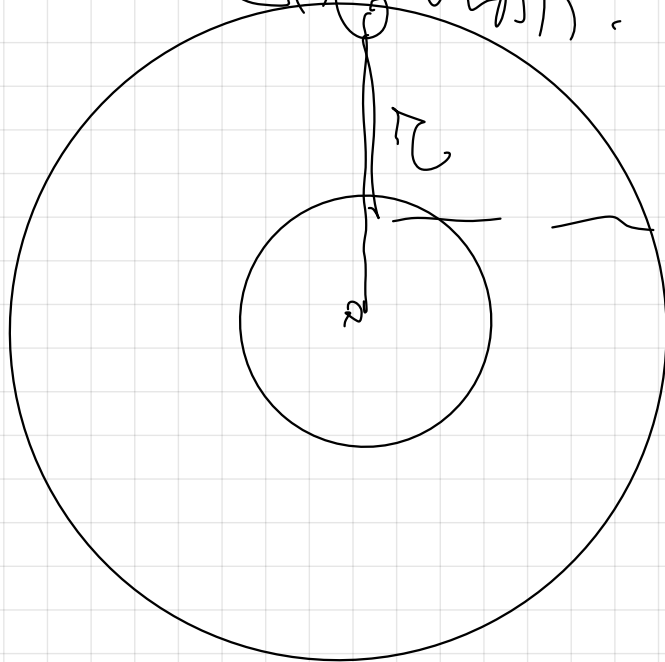
ELÍPTICA

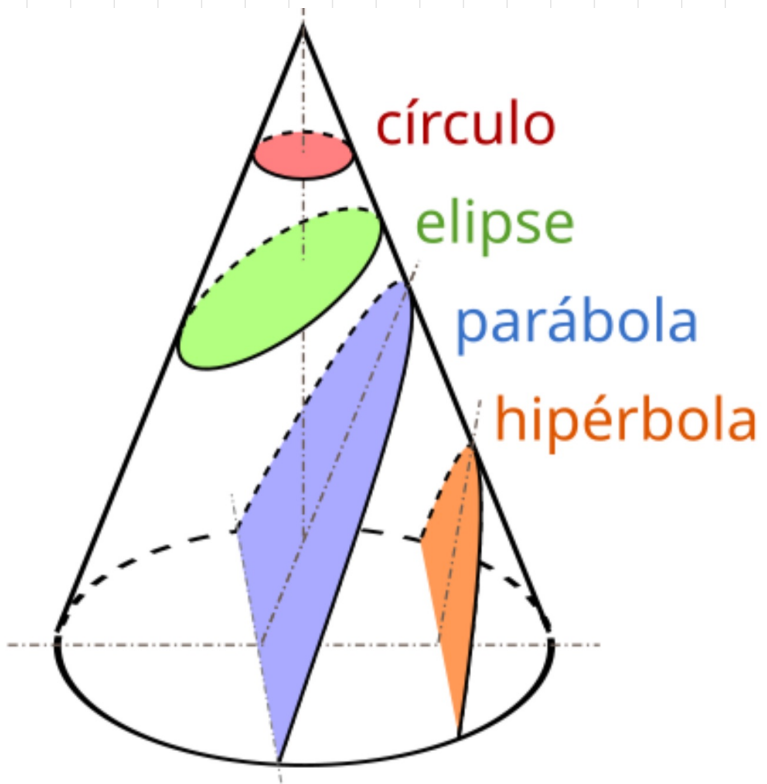
$$\frac{1}{2}|E_p| < E_c < |E_p|$$

CIRCULAR

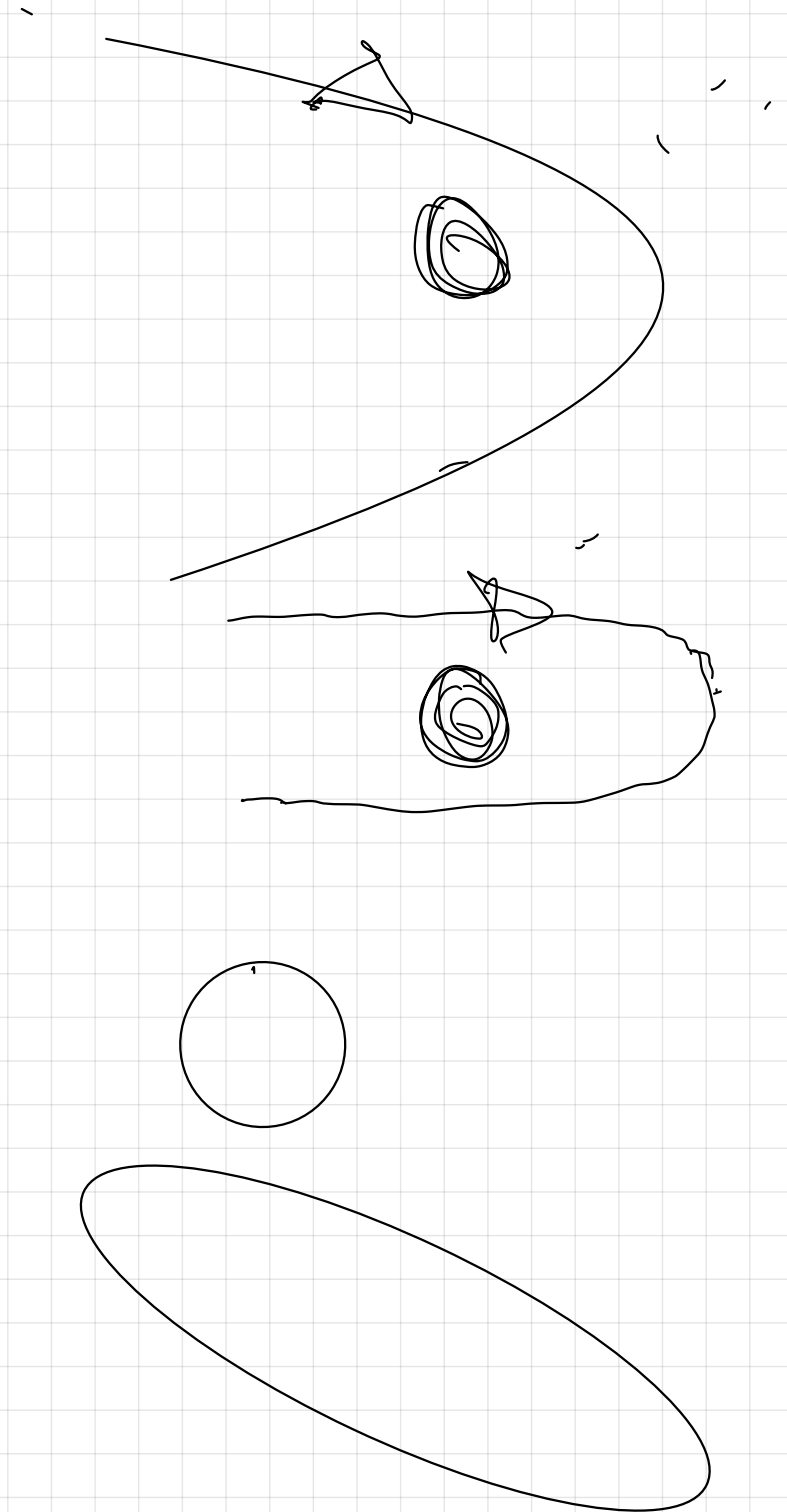
$$E_c = \frac{1}{2}|E_p| \text{ NO ESCAPA}$$

$$E_c < \frac{1}{2}|E_p| \text{ COLAPSA}$$





# Perspectiva de las secciones cónicas



232 (17-R) a) Indique razonadamente la relación que existe entre las energías cinética y potencial gravitatoria de un satélite que gira en una órbita circular en torno a un planeta.

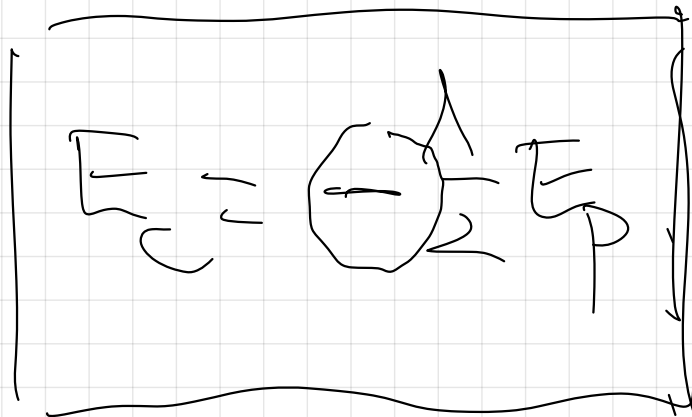
b) La masa del planeta Júpiter es, aproximadamente, 300 veces la de la Tierra y su diámetro 10 veces mayor que el terrestre. Calcule razonadamente la velocidad de escape de un cuerpo desde la superficie de Júpiter.

$$R_T = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}; g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$$

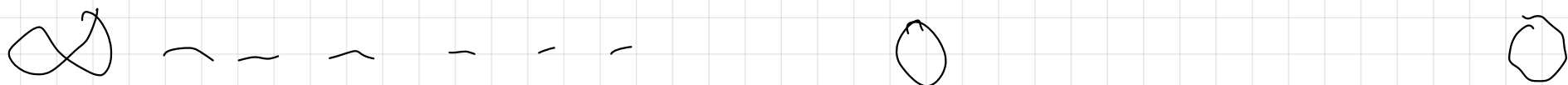
$$E_C = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left( \sqrt{G \frac{M_T \cdot m}{R}} \right)^2 = \frac{1}{2} G \frac{M_T \cdot m}{R}$$

$$E_P = -G \frac{M_T \cdot m}{R}$$

$$\frac{E_C}{E_P} = \frac{\frac{1}{2} G \frac{M_T \cdot m}{R}}{-G \frac{M_T \cdot m}{R}}$$
$$\Rightarrow E_C = \frac{1}{2} |E_P|$$



Relación entre la Energía y el  
movimiento orbital,



$E_M > 0$  ESCADA,  
HIPÉRBOLA.

$$E_C > E_M$$

$E_M = 0$   
ESCADA, PARÁBOLA.

$$E_C = |E_P|$$

$E_M < 0$  NO ESCADA  
ELIPSE

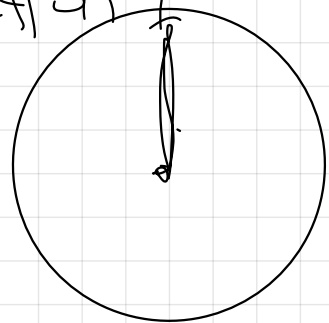
$$\frac{1}{2} |E_P| < E_C < |E_P|$$

$E_M < 0$   
ÓRBITA CIRCULAR.

$$E_C = \frac{1}{2} |E_P|$$

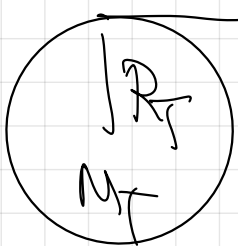
$E_M < 0$  COLAPSA

$$E_C < \frac{1}{2} |E_P|$$

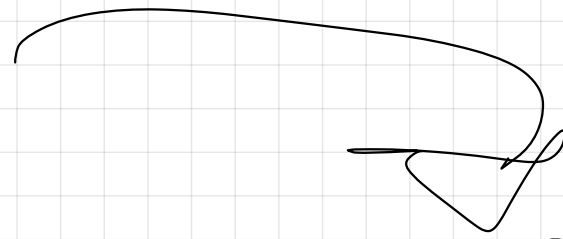


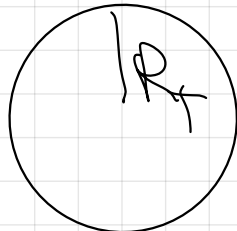
¿ A que altura sobre la superficie terrestre se reduce la gravedad a la cuarta parte?

$$g = G \frac{M_T}{R^2}$$



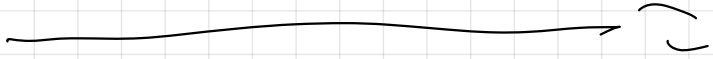
$$g = G \frac{M_T}{R^2}$$





$$g = G \frac{M_T}{(4R)^2}$$

$$\frac{g}{R_T} \cdot \frac{1}{4}$$



$$\frac{g}{R_T} \cdot \frac{1}{(R_T + h)^2}$$



$$\frac{g}{R_T} \cdot \frac{1}{4} \approx \frac{g}{R_T} \cdot \frac{1}{(R_T + h)^2}$$

$$\frac{g}{R_T} \cdot \frac{1}{R_T^2}$$

$$\frac{1}{4} \approx \frac{1}{(R_T + h)^2}$$

$$\frac{1}{4} \approx \frac{1}{(R_T + h)^2}$$

$$R_T + h = 2R_T$$

$$h = 2R_T - R_T$$

$$h = R_T$$

46.- Un satélite artificial de masa 100 Kg orbita en torno a un planeta describiendo una órbita circular, teniendo una energía potencial gravitatoria de valor  $-5 \cdot 10^8 \text{ J}$ .

a) Calcula la velocidad lineal a la que se desplaza

b) Si mediante un propulsor se duplica, sin cambiar la dirección, la velocidad lineal del satélite, ¿Qué tipo de órbita seguirá?

a)

$$E_c = \frac{1}{2} |E_p|$$
$$v_0 = \sqrt{\frac{|E_p|}{m}}$$
$$\frac{1}{2} m \cdot v_0^2 = \frac{1}{2} |E_p|$$
$$v_0 = \sqrt{\frac{5 \cdot 10^8}{100}} = 2236 \text{ m/s}$$

b)

$$E_c = \frac{1}{2} m (2v_0)^2 = \frac{1}{2} m 4v_0^2 = 2 m v_0^2 =$$
$$= 2 \cdot 100 \cdot (2236)^2 = [919 \cdot 10^8 \text{ J}]$$

$$E_c = 9 \cdot 9 \cdot 10^8 \text{ J}$$

$$E_p = -5 \cdot 10^8 \text{ J}$$

$$E_c > |E_p|$$



$$E_m = E_p + E_c > 0 \Rightarrow$$

Es capa, instata hiperbolică (altă)

47.- La Luna es un satélite natural de la Tierra con una órbita prácticamente circular.

Razone si las siguientes afirmaciones acerca de ella son verdaderas o falsas

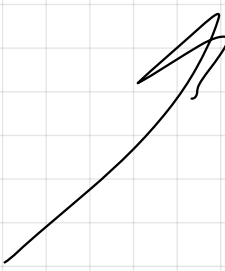
- a) La energía potencial gravitatoria de la Luna es igual, en valor absoluto, a su energía cinética
- b) La energía mecánica de la Luna es positiva
- c) La energía potencial gravitatoria de la Luna es igual, en valor absoluto, al doble de su energía cinética
- d) La energía cinética de la Luna no está relacionada con su energía potencial gravitatoria

a)  $|E_p| = E_c \Rightarrow$  Falsa  $E_m = 0 \Rightarrow$  Escape, órbita parabólica.

b)  $E_m > 0 \Rightarrow$  Falsa  $E_m > 0$  Escape, hiperbólica.

c)  $|E_p| = 2E_c \Rightarrow$  Verdoppeln der  
dunkelheit.

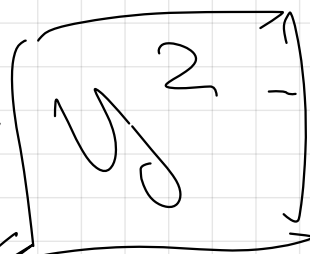
$E_c = \frac{1}{2} |E_p|$



d) Falsch.

$E_c = \frac{1}{2} M \cdot \left[ \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right]$

~~$E_p$~~



48.- Un satélite orbita en torno a un planeta con una órbita circular. Razone la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones

- a) Su energía mecánica es cero
- b) Su energía mecánica es igual a menos su energía cinética
- c) Su energía potencial es igual a menos su energía cinética partido dos

a)  $E_m = 0 \Rightarrow E_m < 0$

b)  $E_m = - \frac{G \cdot M_T \cdot M}{2r}$

$E_c = \frac{1}{2} M \cdot v^2 = \frac{1}{2} M \cdot \left( \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} \right)^2 = \frac{1}{2} G \cdot \frac{M_T \cdot M}{r}$

$$\begin{array}{l}
 \frac{1}{2} \frac{1}{c} \frac{1}{\rho} \frac{1}{\rho} \\
 \frac{1}{2} \frac{1}{c} \frac{1}{\rho} \frac{1}{\rho} \\
 \frac{1}{2} \frac{1}{c} \frac{1}{\rho} \frac{1}{\rho} \\
 \frac{1}{2} \frac{1}{c} \frac{1}{\rho} \frac{1}{\rho}
 \end{array}$$

$$E_m = -E_c$$

Verdadero.

$$E_m = -E_c$$

c)

$$\frac{1}{2} \frac{1}{c} \frac{1}{\rho} \frac{1}{\rho}$$

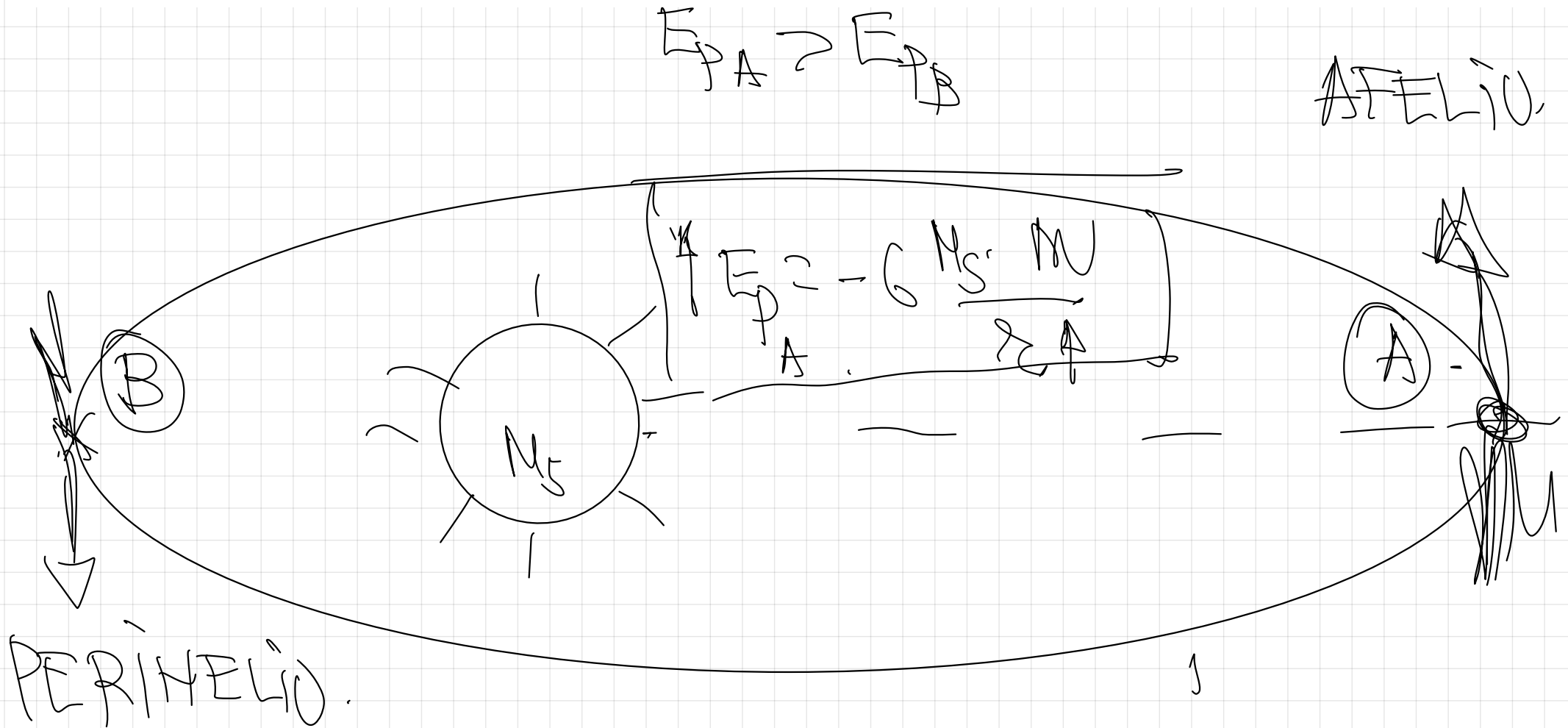
~~Orbita circular.~~

$$E_c = -2E_p$$

$$E_c = 2E_p$$

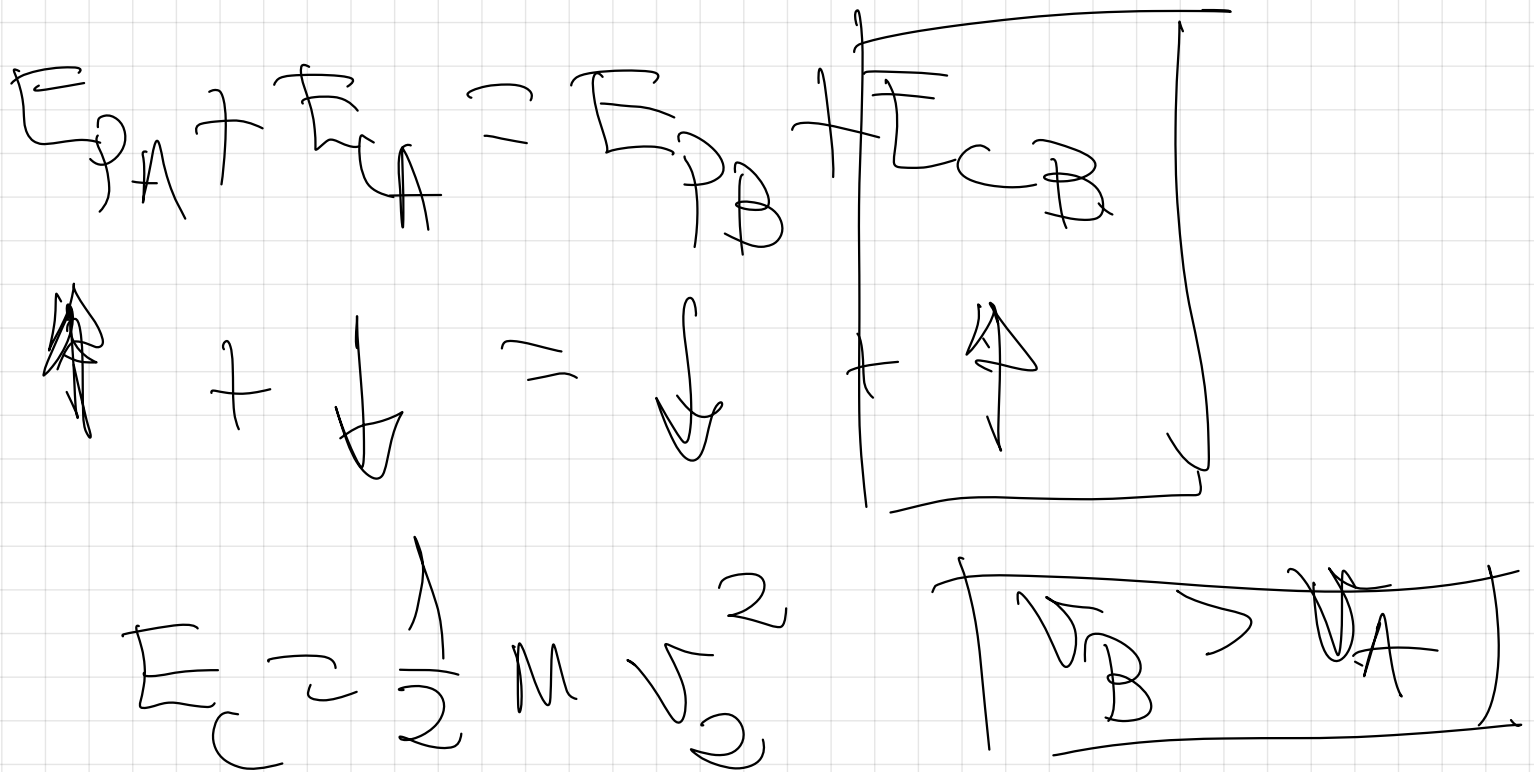
> **44.** Sean A y B dos puntos de la órbita elíptica de un cometa alrededor del Sol, estando A más alejado del Sol que B.

- ¿En cuál de los dos puntos es mayor el módulo de la velocidad?, ¿y el de la aceleración?
- Comparar los valores de energía cinética y potencial en A y en B



$E_m = cte \Rightarrow$  solo a ctia la  
F constanta.

$$E_m = cte.$$

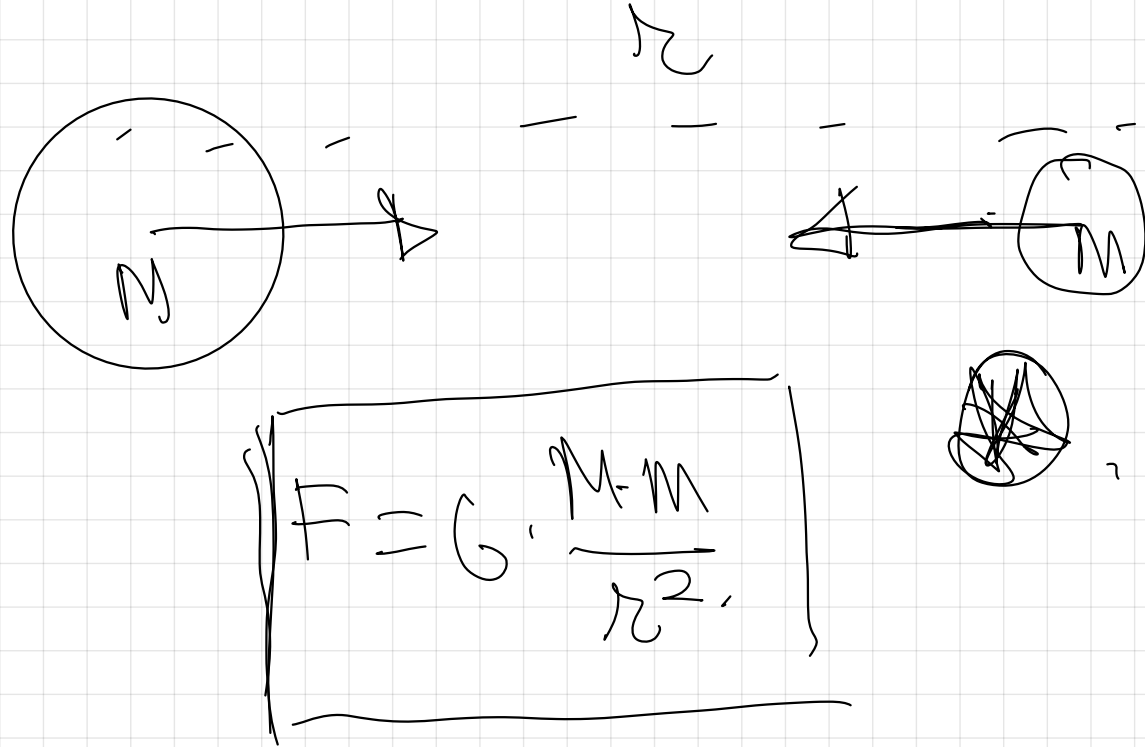


$\downarrow g = G \cdot \frac{M}{S} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{1}$

$a \rightarrow \cancel{a} \rightarrow b$

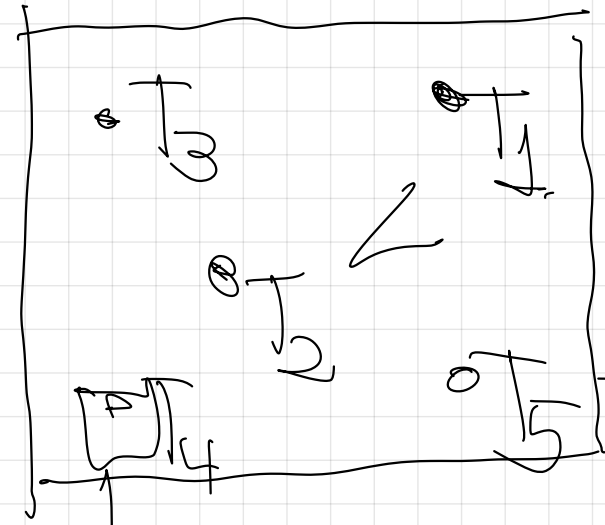
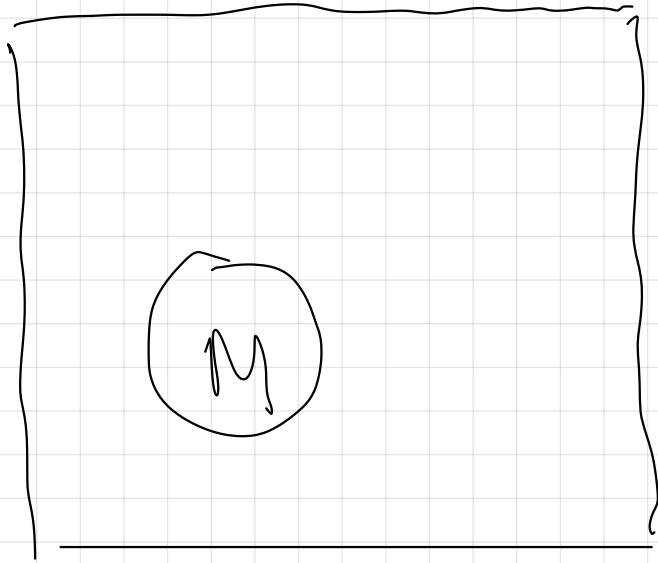
pag 2.

## 2.- INTERACCIONES A DISTANCIA: CONCEPTO DE CAMPO



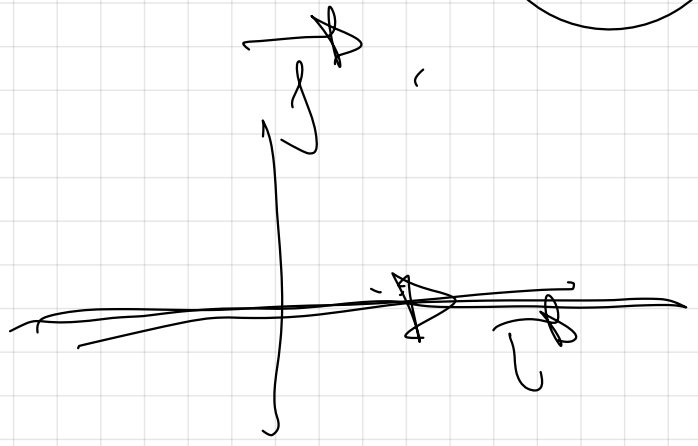
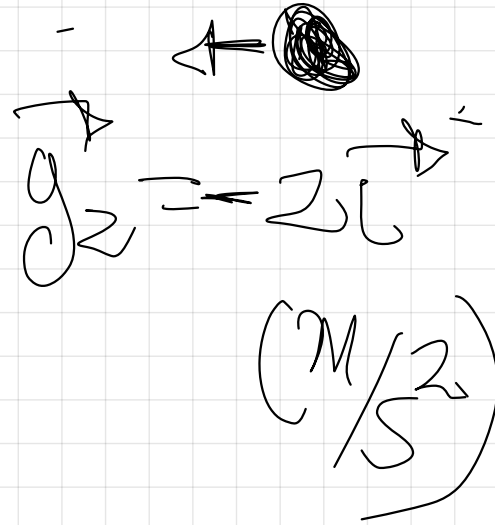
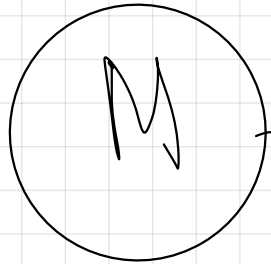
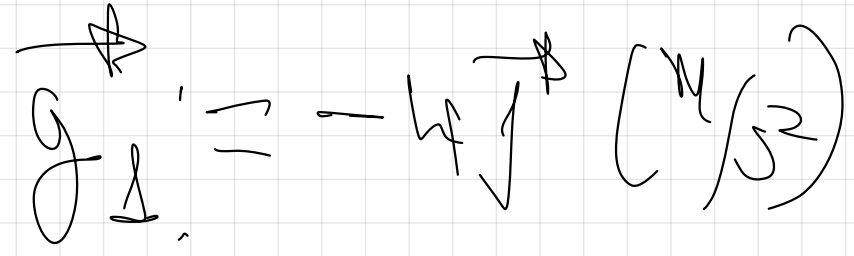
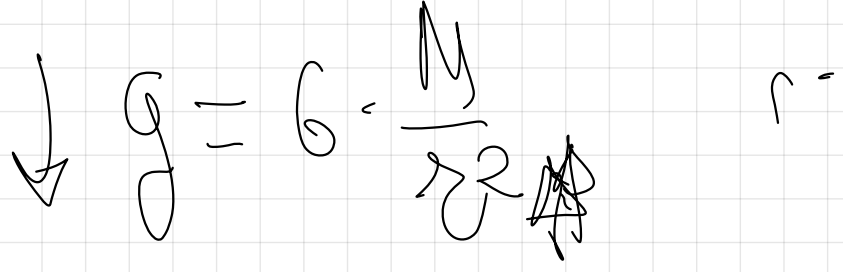
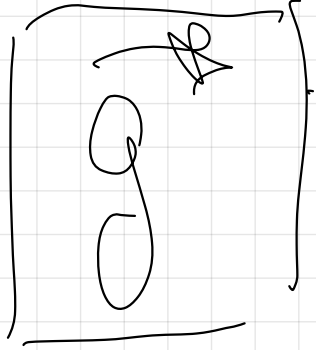
$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$

Concepto de campo.

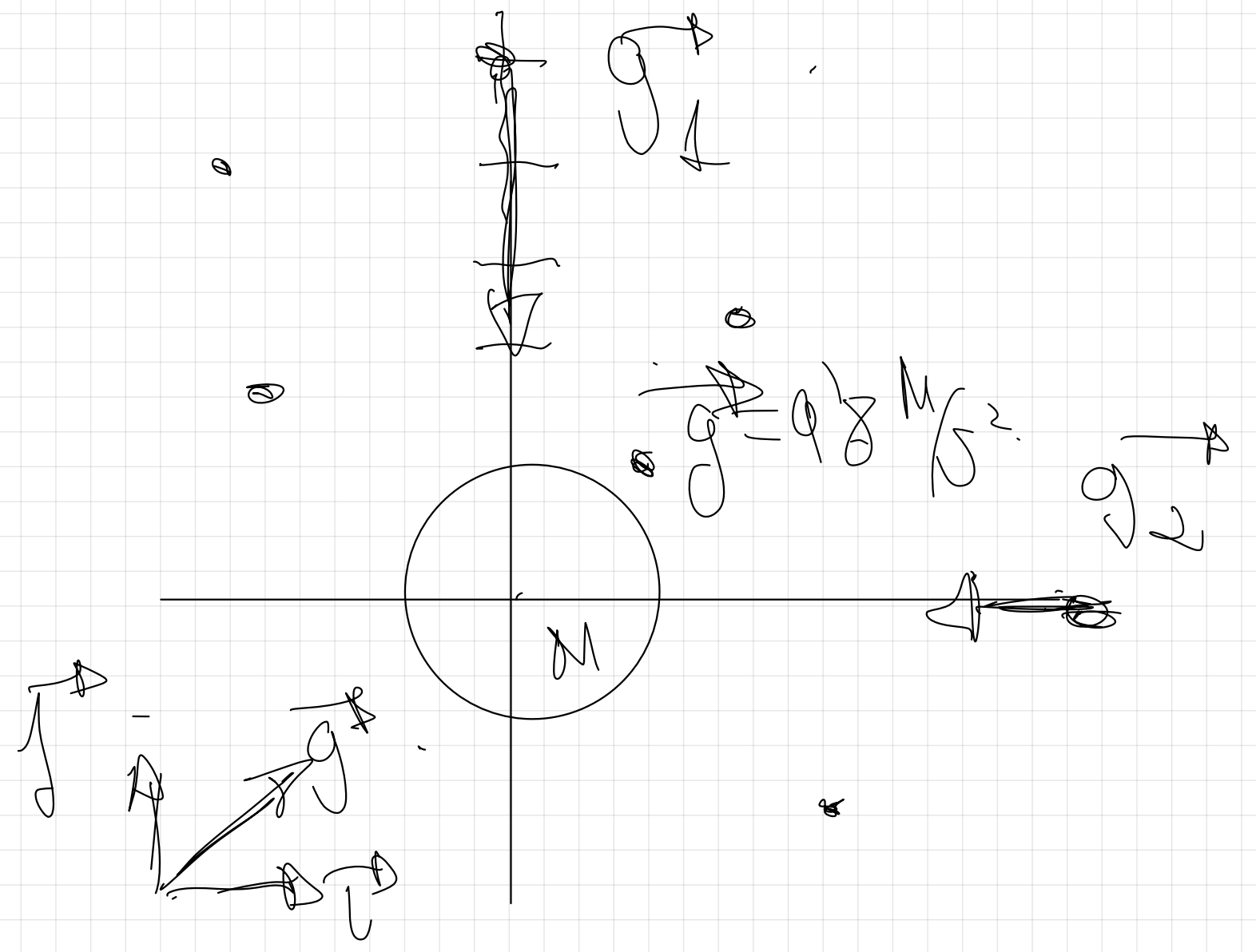


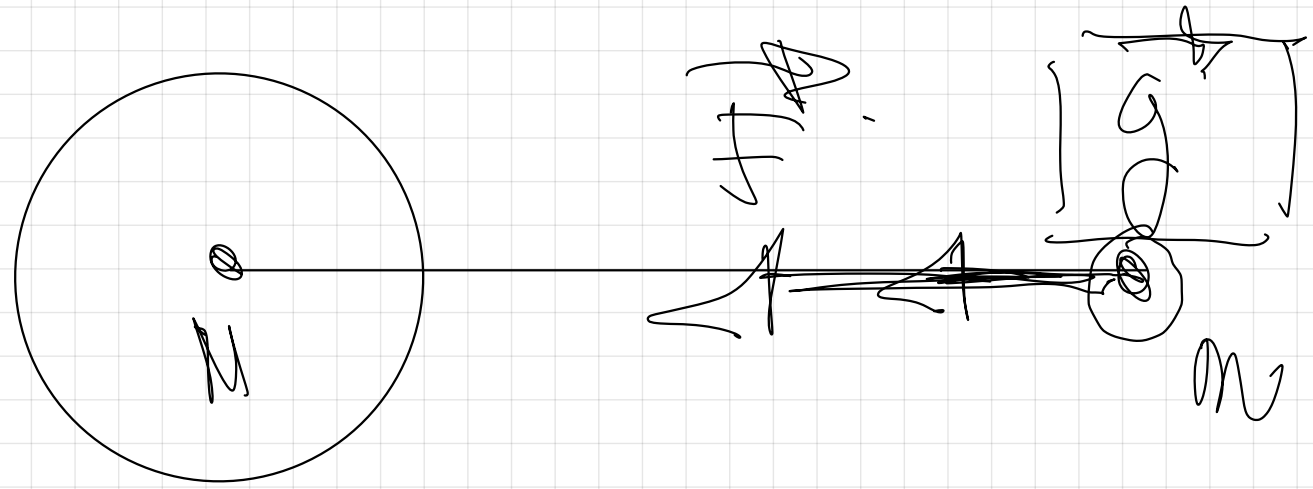
Única palabra.

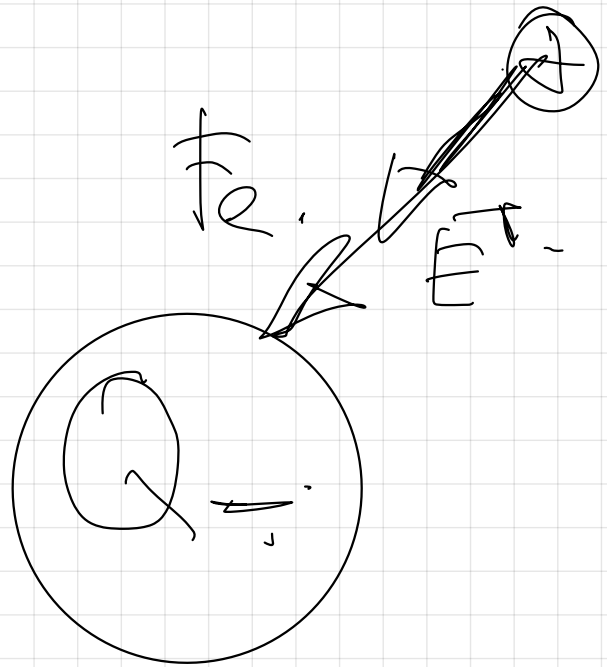
Campo escolar.

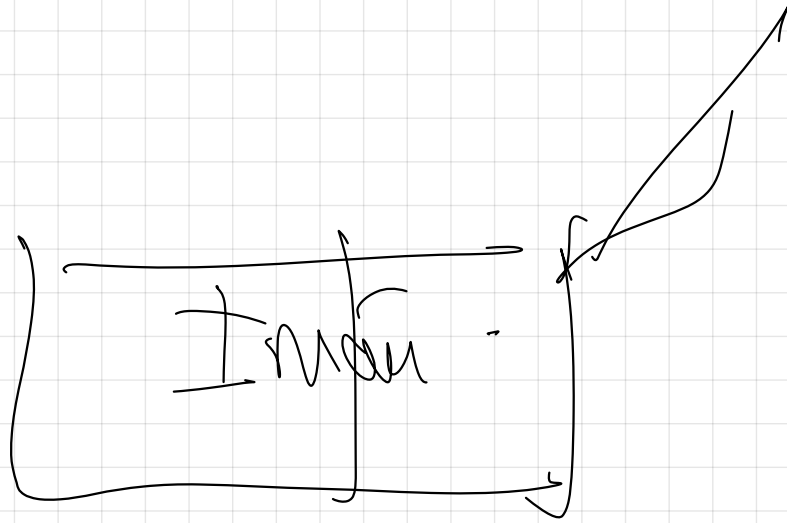


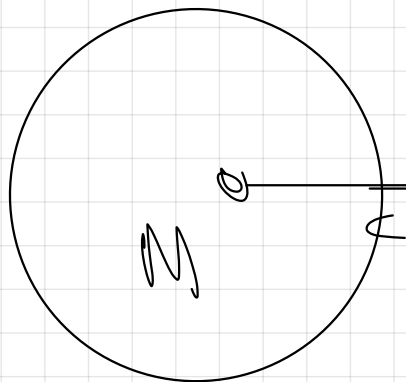
$$\vec{S} = +3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 \quad \left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)$$











$$g = 10 \frac{N}{kg} \quad \left( 10 \frac{M}{s^2} \right)$$

$$F = m \cdot g$$

$$g = \frac{F}{m} = \frac{G \cdot \frac{M}{r^2}}{m}$$

$$g = \frac{F}{m} = \frac{N}{kg}$$

$$g = G \frac{M}{r^2}$$

$$\frac{N}{Kg} = \frac{Kg \cdot \frac{M}{s^2}}{Kg}$$

**10.-** Según la Ley de la gravitación, la fuerza que ejerce la Tierra sobre un cuerpo es proporcional a la masa de éste. Si es así, ¿Porqué no caen más deprisa los cuerpos con mayor masa?

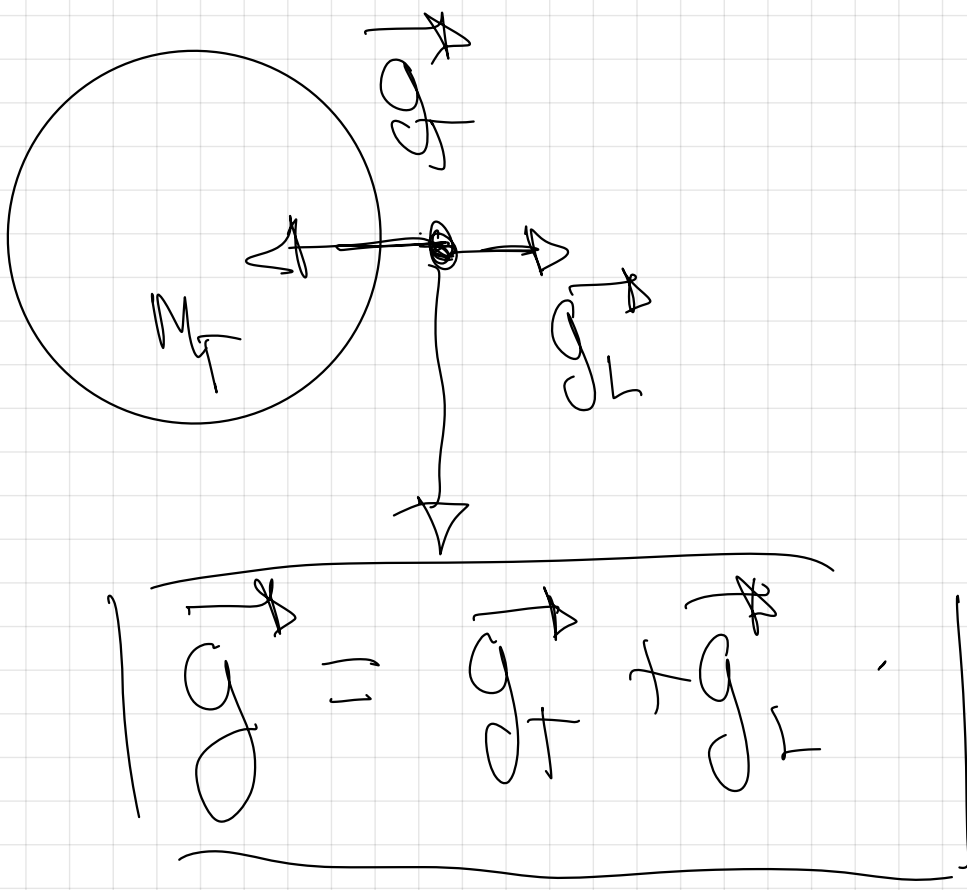
Cuerpo de mayor masa  $M$ .

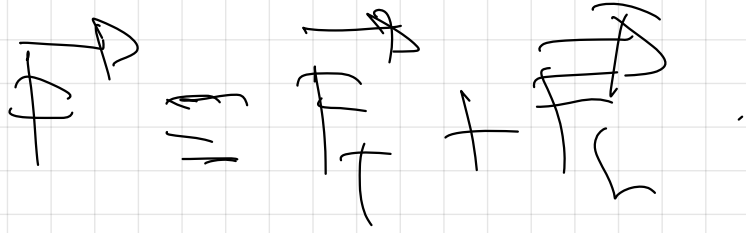
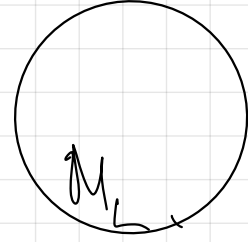
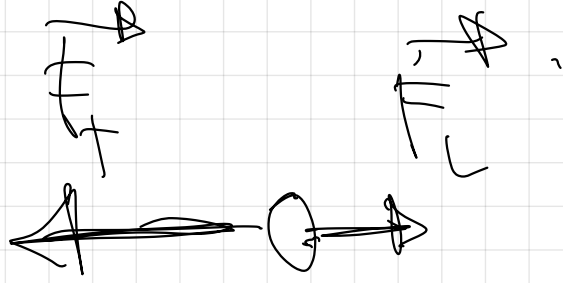
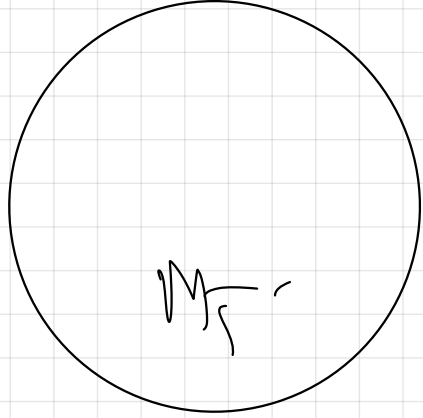
$$g \Rightarrow \frac{F}{M} = \frac{G \cdot \frac{M_T \cdot M}{R_T^2}}{M} = \left[ \frac{G \cdot M_T}{R_T^2} \right] = [9.8 \frac{m}{s^2}]$$

Cuerpo de menor masa  $m$ .

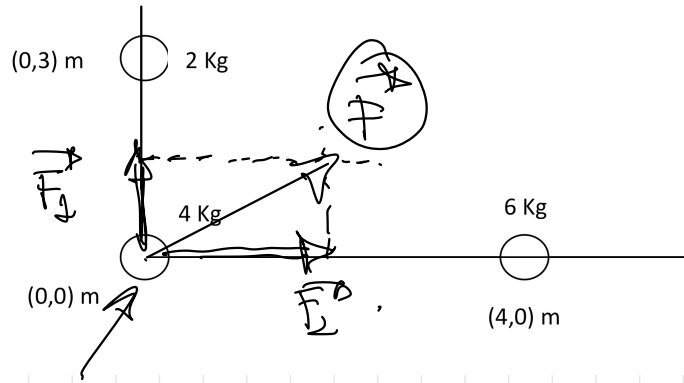
$$\begin{aligned}
 \mathfrak{g} &\cong \frac{\mathfrak{h}^a}{\mathfrak{m}} \cong \frac{G \cdot \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{R}^2}{\mathfrak{m}} \cong \left[ \frac{G \cdot \mathfrak{M}}{\mathfrak{R}^2} \right] \cong \left[ \mathfrak{g} \cdot \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{R}^2 \right]
 \end{aligned}$$

5.º - Princípio de Zsigmondy.

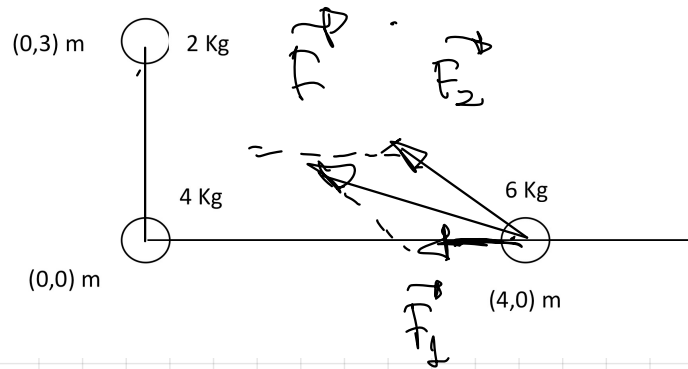
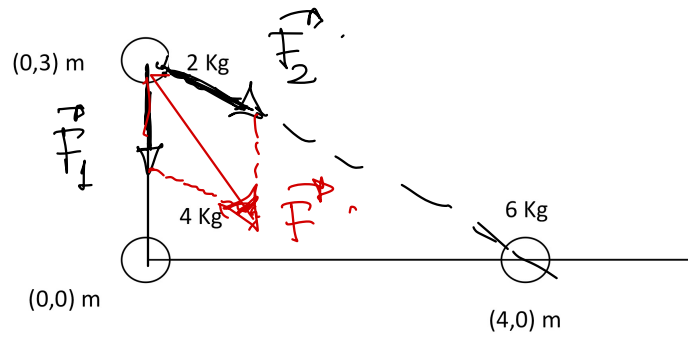




# Ejercicio 11.



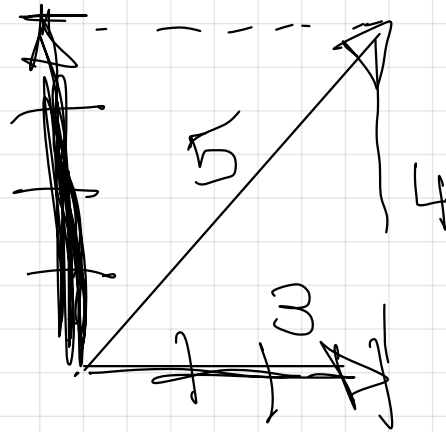
$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$$



$$F = F_1 + F_2$$

líneas de campo.

$$\vec{F}_2 = +4\vec{j}$$

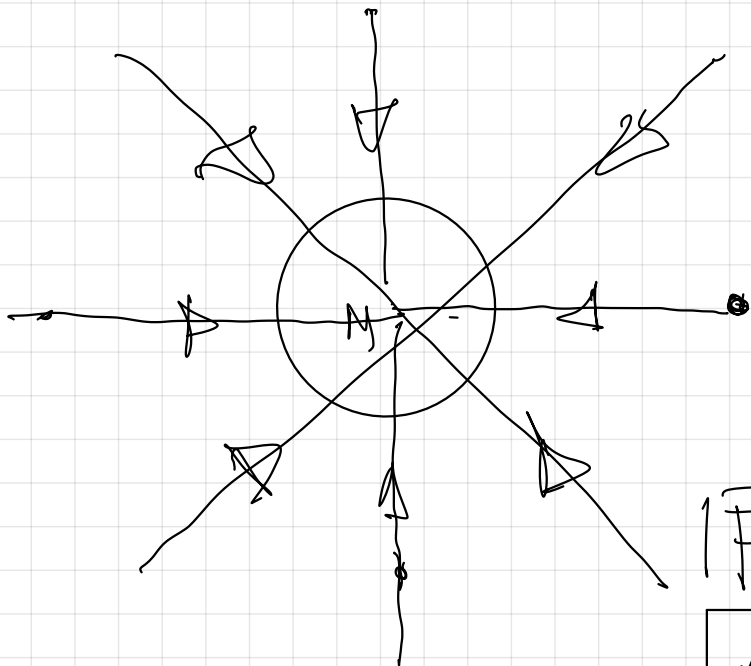


$$\vec{F}_1 = +3\vec{i}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = +3\vec{i} + 4\vec{j}$$

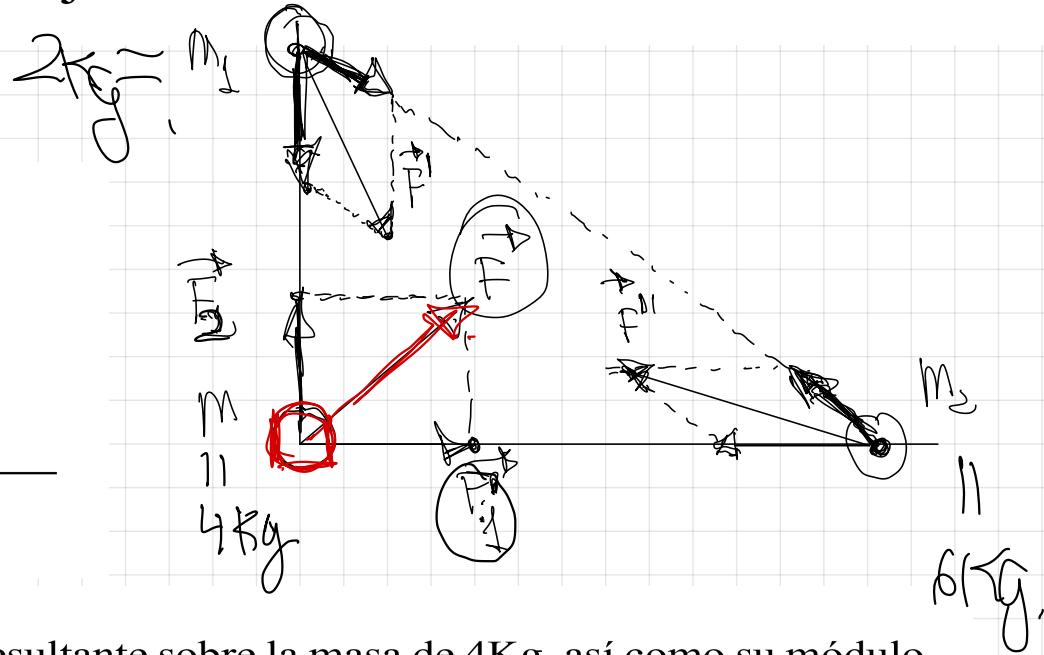
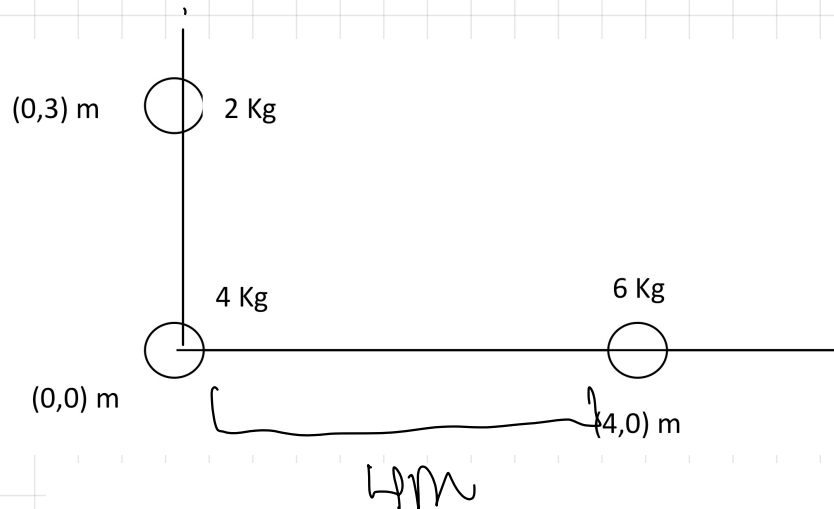
$$\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$$

$$|\vec{F}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$



[www.fisicacurricula.centa.es](http://www.fisicacurricula.centa.es)

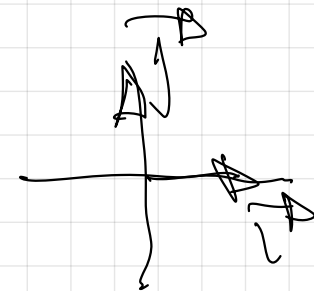
11.- Tres esferas uniformes de masas 2 Kg, 4 Kg y 6 Kg se sitúan en los vértices de un triángulo como se indica en la figura adjunta



Calcula el vector fuerza gravitatoria resultante sobre la masa de 4Kg, así como su módulo y dibuja en un esquema todas las fuerzas que aparecen

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}$$

$\vec{F}_1$   $\Rightarrow$  ley de la gravitación universal -  
Calculo primero el módulo.



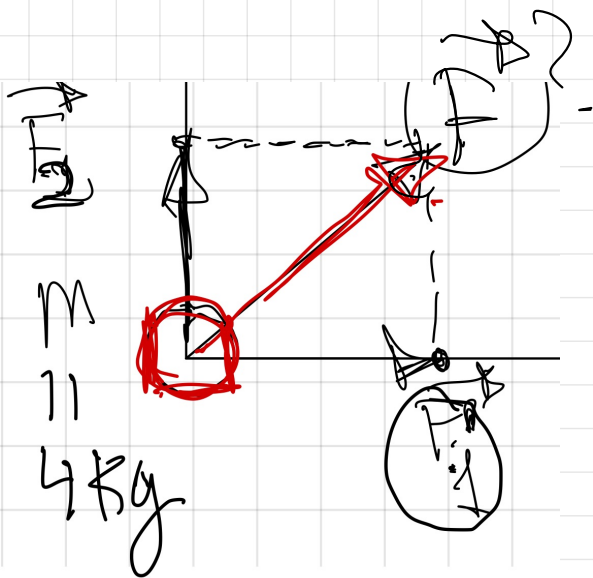
$$|\vec{F}_1| = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{4 \cdot 6}{4^2} = 10^{-10} \text{ N}$$

Después pongo dirección y sentido.

$$\vec{F}_1 = + 10^{-10} \vec{c} \text{ (N)}$$

$$|\vec{F}_2| = G \cdot \frac{m \cdot M_2}{r^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{4 \cdot 2}{0.2^2} = 5.193 \cdot 10^{-11} \text{ N}$$

$$\vec{F}_2 = + 5.193 \cdot 10^{-11} \vec{j} \text{ (N)}$$



Principio de superposición.

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{F} = 10^{-10} \vec{c} + 5.193 \cdot 10^{-11} \vec{j} \text{ (N)}$$

$$|\vec{F}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(10^{-10})^2 + (5.93 \cdot 10^{-11})^2} = 1.16 \cdot 10^{-10} \text{ N}$$

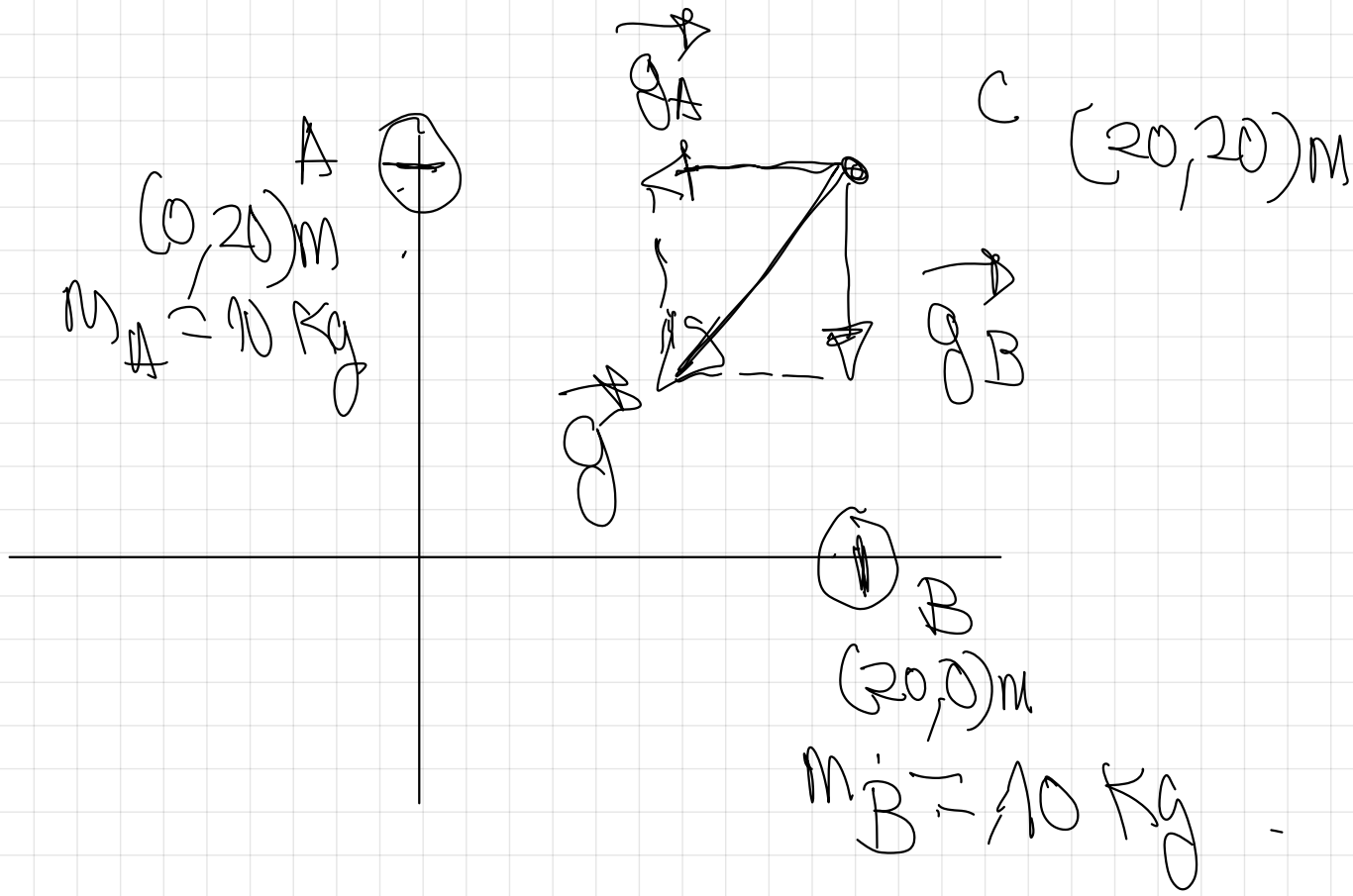
①

En dos puntos A y B de coordenadas  $(20, 0) \text{ m}$  y  $(0, 20) \text{ m}$  se sitúan dos masas puntuales de  $10 \text{ kg}$  cada una.

a) Dibuja y calcula el vector campo gravitatorio producido por cada una de estas dos masas y el total en el punto **C**  $(20, 20) \text{ m}$

b) Halla la Fuerza sobre una masa puntual de  $5 \text{ kg}$  situada en el punto C.

$$G = 6.7 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$$



$$g = g_A + g_B$$

$$g = G \cdot \frac{M}{r^2}$$

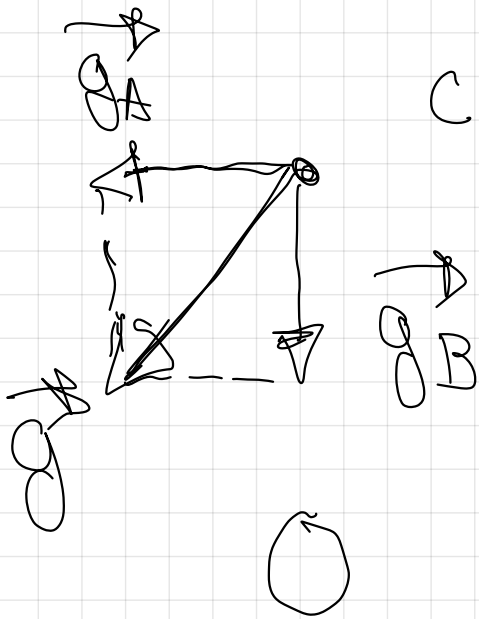
Primeros el módulo  $\Rightarrow g_A = G \cdot \frac{m_A}{r^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{10}{20^2} = 1.7 \cdot 10^{-12} \frac{\text{N}}{\text{kg}}$

$$g_A = -1.7 \cdot 10^{-12} \rightarrow \left( \frac{\text{N}}{\text{kg}} \right)$$

$$g_B = G \cdot \frac{m_B}{r_B^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{10}{20^2} = 1.7 \cdot 10^{-12} \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

$$\vec{g}_B = -1.7 \cdot 10^{-12} \vec{e}_r \quad \left( \frac{\text{N}}{\text{kg}} \right)$$

Prinzipio de superposiții:

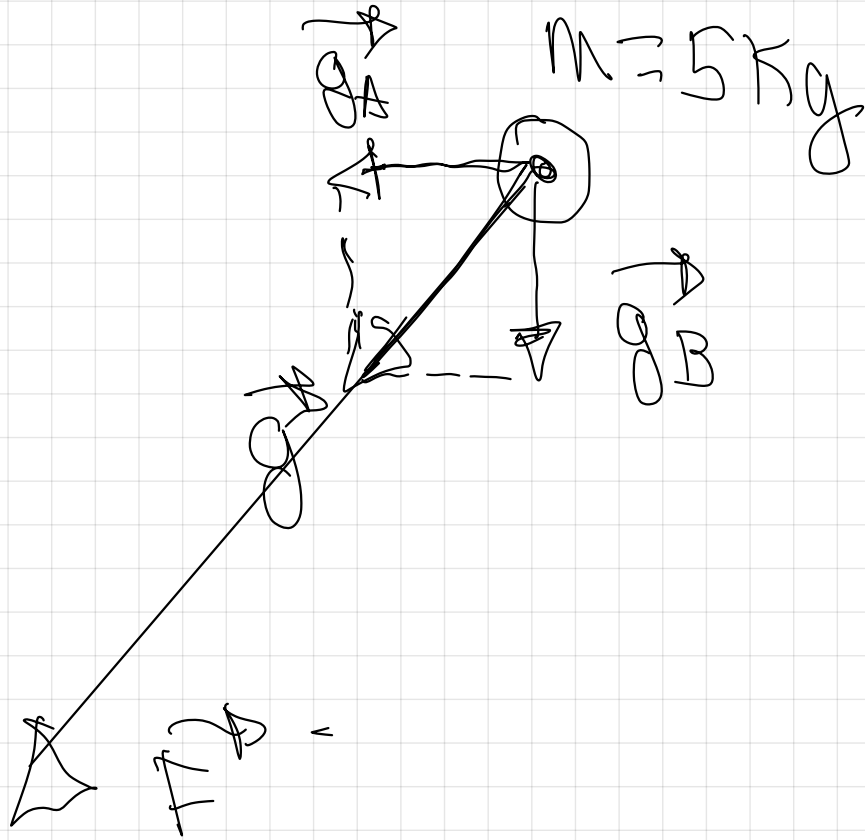


$$\vec{g} = \vec{g}_A + \vec{g}_B$$

$$\vec{g} = -1.7 \cdot 10^{-12} \vec{e}_A - 1.7 \cdot 10^{-12} \vec{e}_B \quad \left( \frac{\text{N}}{\text{kg}} \right)$$

$$|\vec{g}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1.7 \cdot 10^{-12})^2 + (-1.7 \cdot 10^{-12})^2}$$

$$|\vec{g}| = 2.4 \cdot 10^{-12} \text{ m/s}^2$$



$$\vec{F} = m \cdot \vec{g}$$

$$\vec{F} = 5 \cdot \left( -1.7 \cdot 10^{-12} \vec{e}_x - 1.7 \cdot 10^{-12} \vec{e}_y \right)$$

$$\vec{F} = m \cdot \vec{g}$$

$$\vec{F} = 5 \cdot \left( -1.7 \cdot 10^{-12} \vec{e}_x - 1.7 \cdot 10^{-12} \vec{e}_y \right) \text{ (N)}$$

$$\vec{F} = -8.5 \cdot 10^{-12} \vec{e}_x - 8.5 \cdot 10^{-12} \vec{e}_y \text{ (N)}$$

$$|\vec{F}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-8.5 \cdot 10^{-12})^2 + (-8.5 \cdot 10^{-12})^2}$$

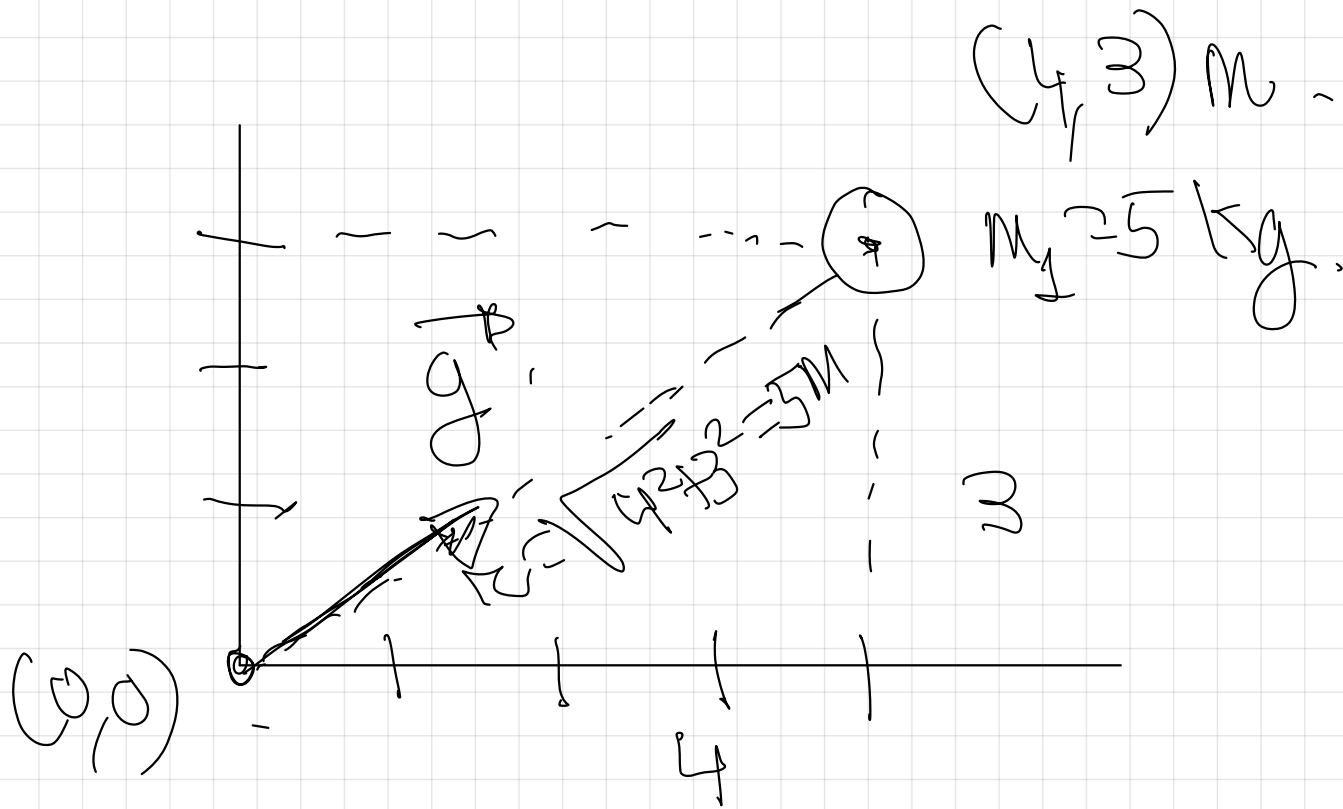
$$|\vec{F}| = 1.2 \cdot 10^{-11} \text{ N}$$

$$|\vec{F}| = m \cdot |\vec{g}|$$

$$|\vec{F}| = 5 \text{ kg} \cdot 2.4 \cdot 10^{-12} \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 1.2 \cdot 10^{-11} \text{ N}$$

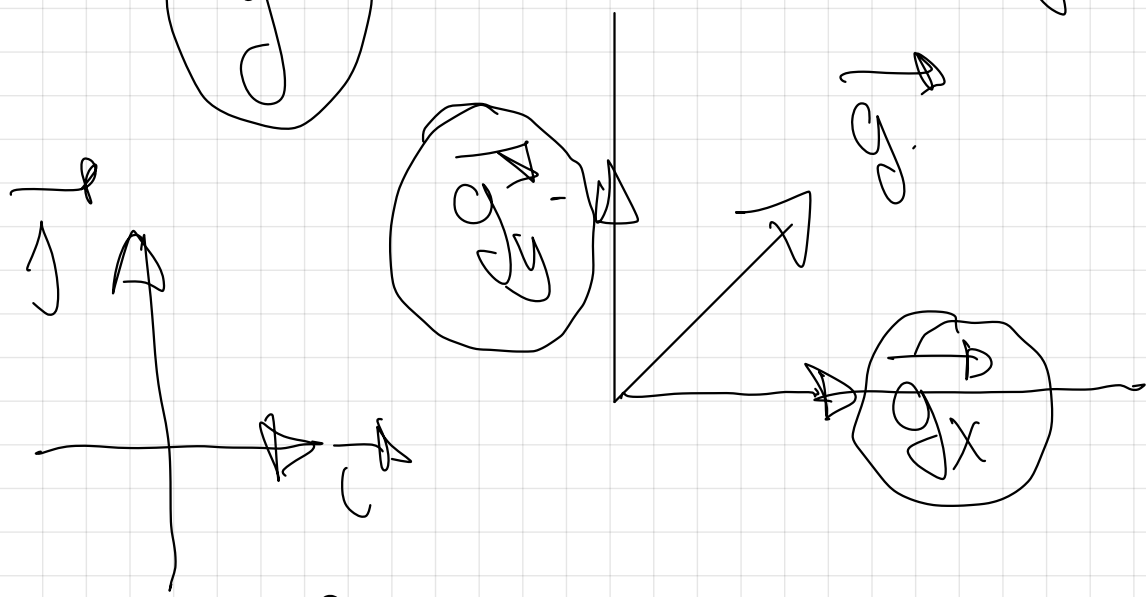
2

Una masa puntual  $m_1 = 5 \text{ kg}$  está en el punto  $(4, 3) \text{ m}$ . Determina el valor del campo gravitatorio creado por la masa  $m_1$  en el origen de coordenadas.  
 $G = 667 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ .

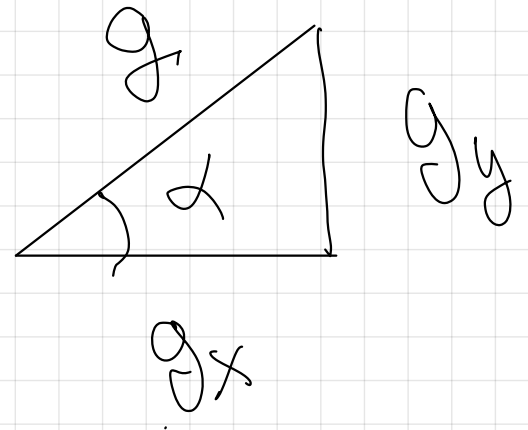


$$g = G \cdot \frac{M_1}{R^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{5}{(5.2)^2} = 33 \cdot 10^{-11} \frac{N}{s^2}$$

$$g = 133 \cdot 10^{-11} \frac{N}{s^2}$$

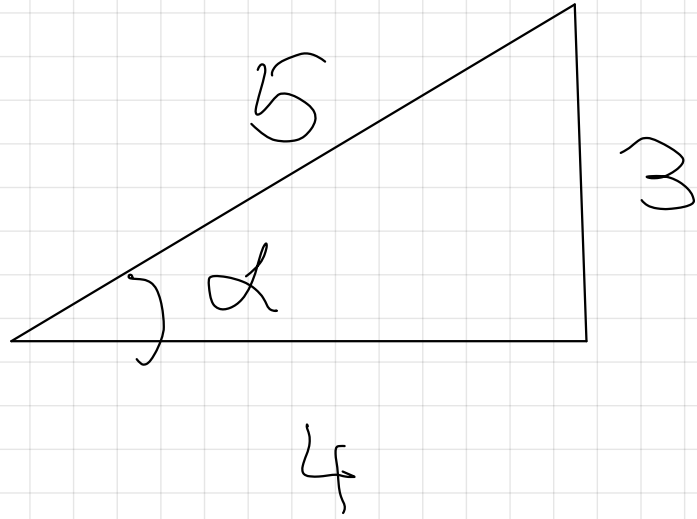


$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$   
 $\text{cos } \alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}$



$$\text{sen } \alpha = \frac{g_y}{g}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{g_x}{g}$$



$$\sin \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\alpha = \arcsin \frac{3}{5} = 36'9''$$

$$\sin \alpha = \frac{g_y}{g} \Rightarrow g_y = g \cdot \sin \alpha = 9.81 \cdot \sin 36'9''$$

$$g_y = 7.198 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}^2$$

$$g_y = +7.198 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}^2 \quad \left( \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)$$

$$\cos \alpha = \frac{g_x}{g} \Rightarrow g_x = g \cdot \cos \alpha = 1.33 \cdot 10^{-11} \cdot \cos 36.9^\circ$$

$$g_x = 1.064 \cdot 10^{-11} \text{ N/S}^2. \quad \vec{g}_x = + 1.064 \cdot 10^{-11} \vec{e}_x \text{ (N/S)}$$

$$\vec{g} = 1.064 \cdot 10^{-11} \vec{e}_x + 7.98 \cdot 10^{-12} \vec{e}_y \text{ (N/S)}$$

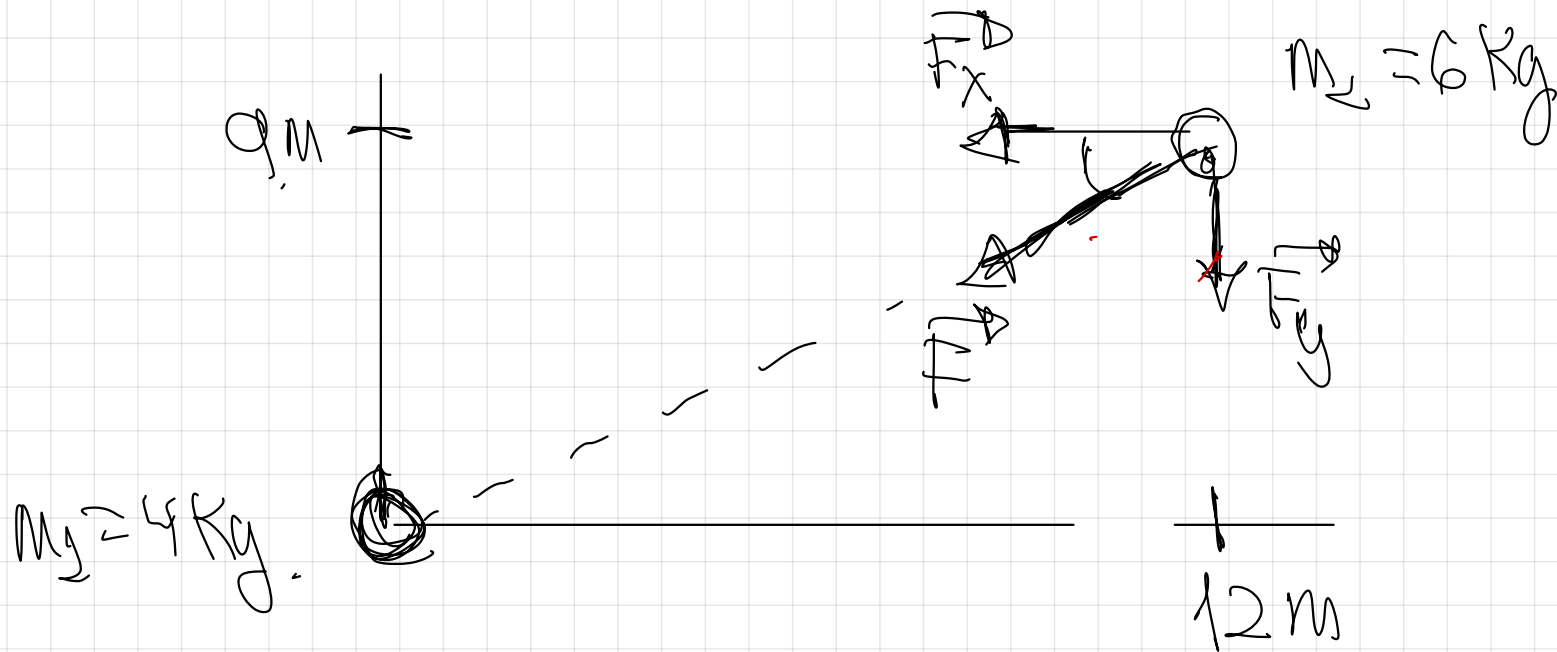
Publicarea.

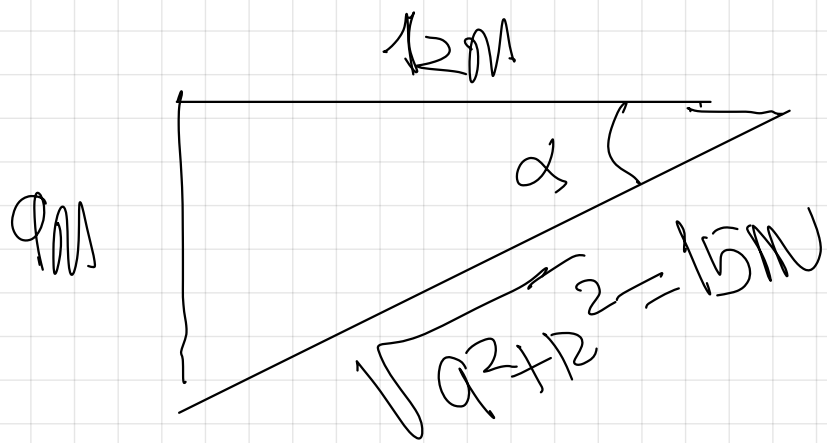
③ Una masa puntual  $m_1 = 4 \text{ kg}$  está situada en el origen de coordenadas y otra masa puntual  $m_2 = 6 \text{ kg}$  está situada en el punto  $(12, 9) \text{ m}$ .

a) Calcula el vector Fuerza que aparece sobre la masa  $m_2$  y halla su módulo.

b) Calcula el vector Fuerza que aparece sobre la masa  $m_1$  y halla su módulo.

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \text{ kg}^{-2}$$



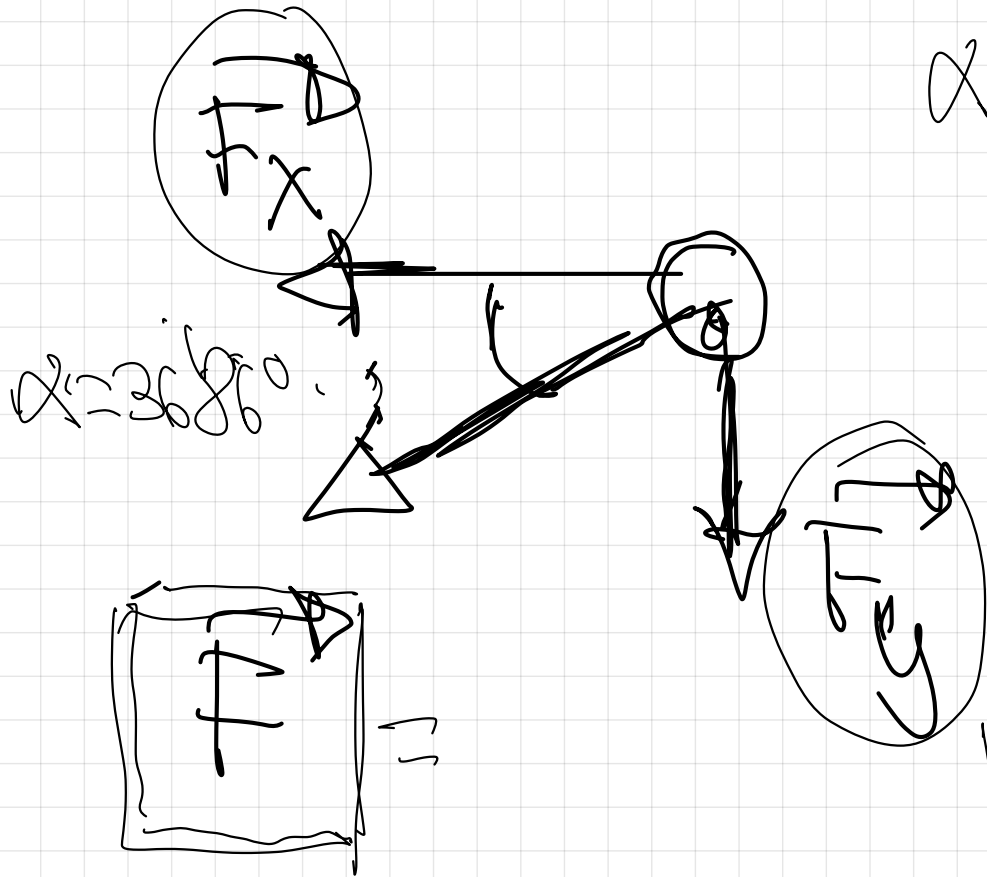


$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto op}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{9}{15}$$

$$\alpha = \arcsen \frac{9}{15} = 36.86^\circ$$

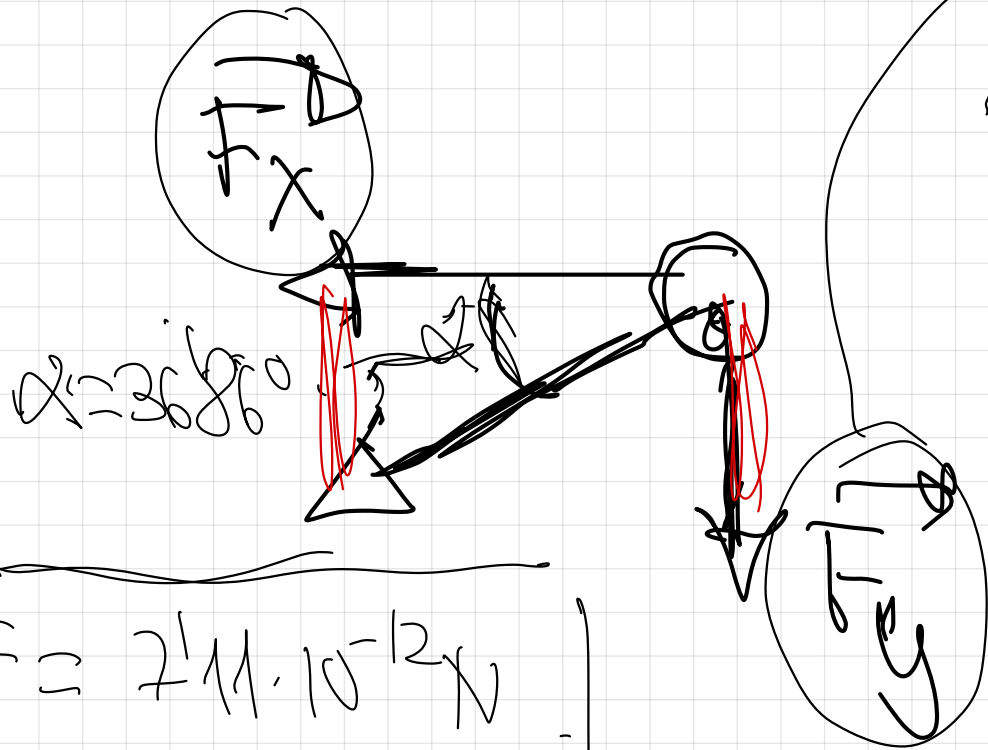
$$\cos \alpha = \frac{12}{15}$$



ley de la gravitación  
Universal.

$$F = G \cdot \frac{M_1 \cdot M_2}{R^2}$$


$$|\vec{F}| = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6.4}{152} = 2.11 \cdot 10^{-12} \text{ N}$$



$\sin 36.86^\circ = \frac{F_y}{F}$   
 hipotenuza

$$F_y = F \cdot \sin 36.86^\circ = 2.11 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{9}{15} = 1.26 \cdot 10^{-12} \text{ N}$$

$$\vec{F}_1 = -4,26 \cdot 10^{-12} \vec{j} \text{ (N)}$$

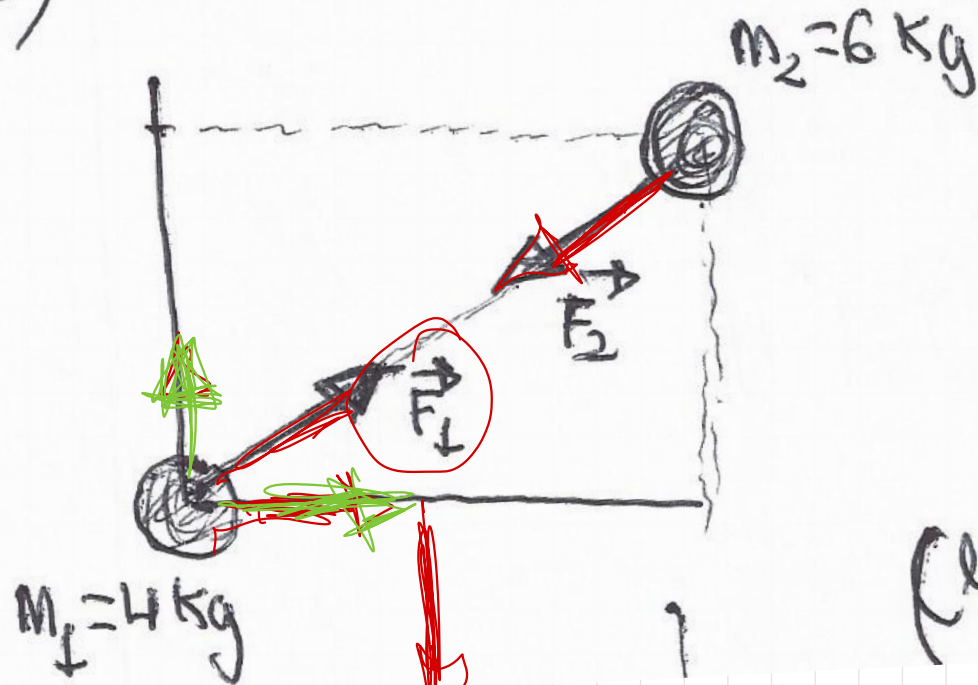
$\cos 36,86^\circ = \frac{F_x}{F}$   cateto antigo

$$F_x = F \cdot \cos 36,86^\circ = 7,17 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{12}{15} = 5,68 \cdot 10^{-12} \text{ N}$$

$$\vec{F}_x = -5,68 \cdot 10^{-12} \vec{i} \text{ (N)}$$

$$\vec{F}_2 = -5,68 \cdot 10^{-12} \vec{i} \rightarrow -4,26 \cdot 10^{-12} \vec{j} \text{ (N)}$$

b)

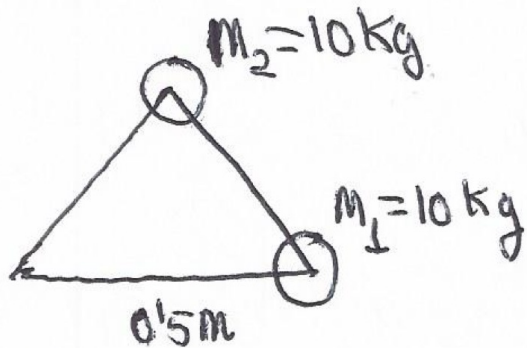


$$F_1 = F_2$$

$$F_1 = \left[ 568 \cdot 10^{-12} \right] + \left[ 4126 \cdot 10^{-12} \right] \text{ (N)}$$

$$|F_2| = 711 \cdot 10^{-12} \text{ N}$$

4) Dos cuerpos de 10 kg de masa se encuentran en dos de los vértices del triángulo equilátero de la figura, que posee 0,5 m de lado.

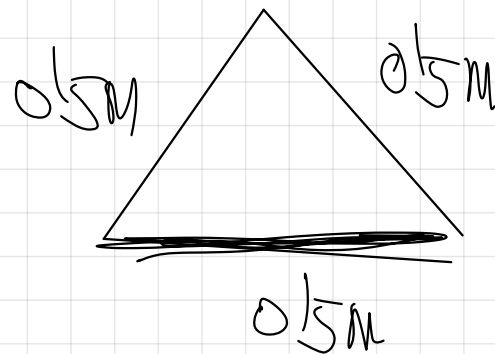
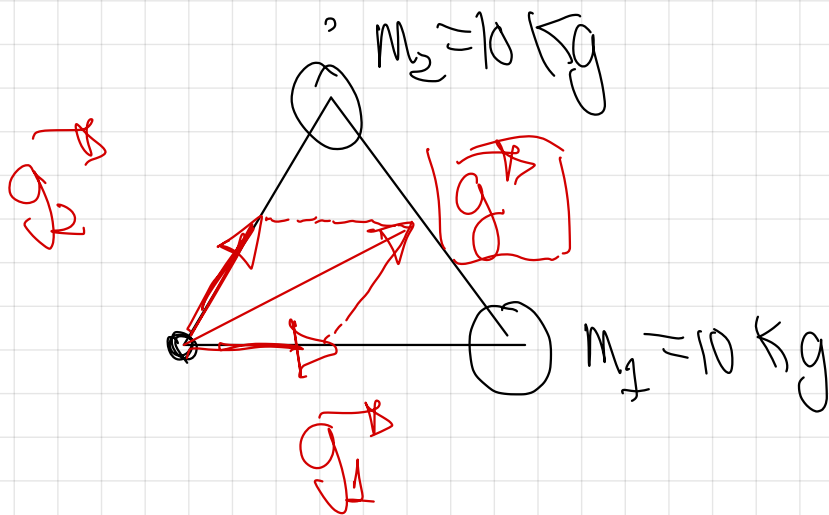


a) Calcula el campo gravitatorio que estas dos masas generan en el tercer vértice del triángulo  
 $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ .



Principio de superposición

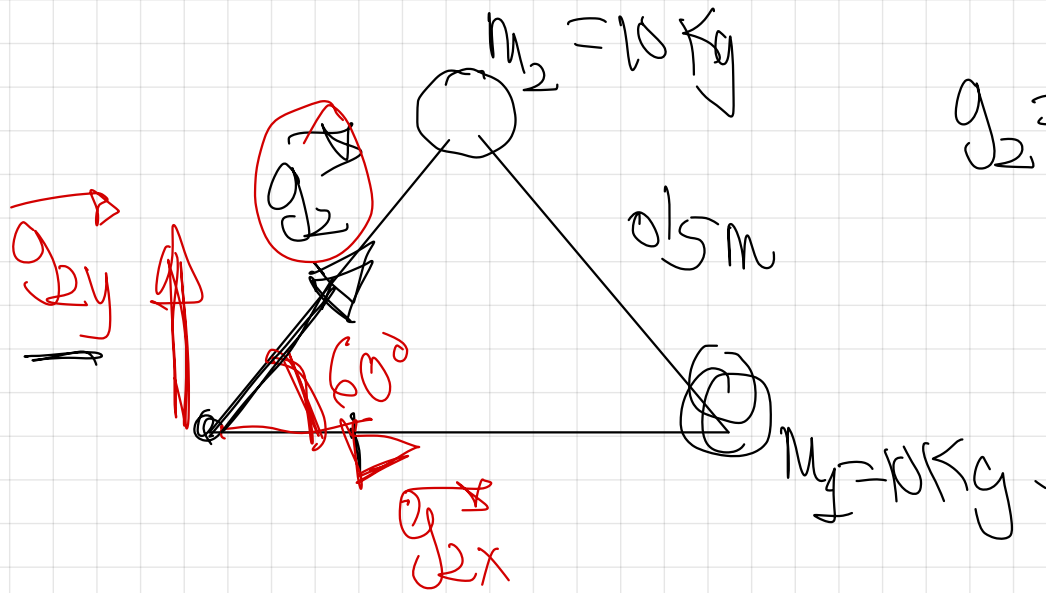
$$g = g_1 + g_2$$



$$g_1 = G \cdot \frac{M_1}{r^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{10}{(0,5)^2}$$

$$g_2 = 2167 \cdot 10^{-9} \text{ N} / \sqrt{2}$$

$$\vec{g}_2 = +2167 \cdot 10^{-9} \text{ c}^* \left( \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)$$



$$g_2 = G \cdot \frac{m_2}{r^2} = 2167 \cdot 10^{-9} \text{ N} / \sqrt{2}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{g_{2y}}{g_2} \Rightarrow |g_{2y}| = g_2 \cdot \sin 60^\circ = 2167 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$|g_{2y}| = 2131 \cdot 10^{-9} \text{ N} / \sqrt{2} \quad \vec{g}_2 = +2131 \cdot 10^{-9} \left( \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)$$

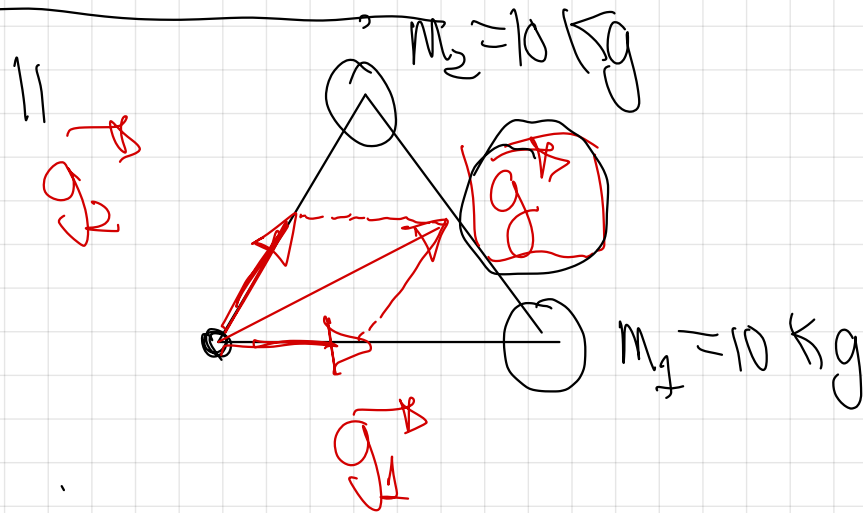
$$\cos 60^\circ = \frac{g_{2x}}{g_2} \Rightarrow |g_{2x}| = g_2 \cdot \cos 60^\circ = 2167 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{1}{2}$$

$$|\vec{g}_1| = 1135 \cdot 10^{-9} \frac{m}{s^2} \quad \vec{g}_1 = +1135 \cdot 10^{-9} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{g}_2 = +1135 \cdot 10^{-9} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2131 \cdot 10^{-9} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$+1135 \cdot 10^{-9} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2131 \cdot 10^{-9} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \left( \frac{m}{s^2} \right)$$

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$$



$$= +2167 \cdot 10^{-9} \frac{m}{s^2}$$

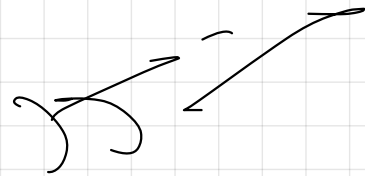
$$\vec{g} = +2167 \cdot 10^{-9} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1135 \cdot 10^{-9} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2131 \cdot 10^{-9} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

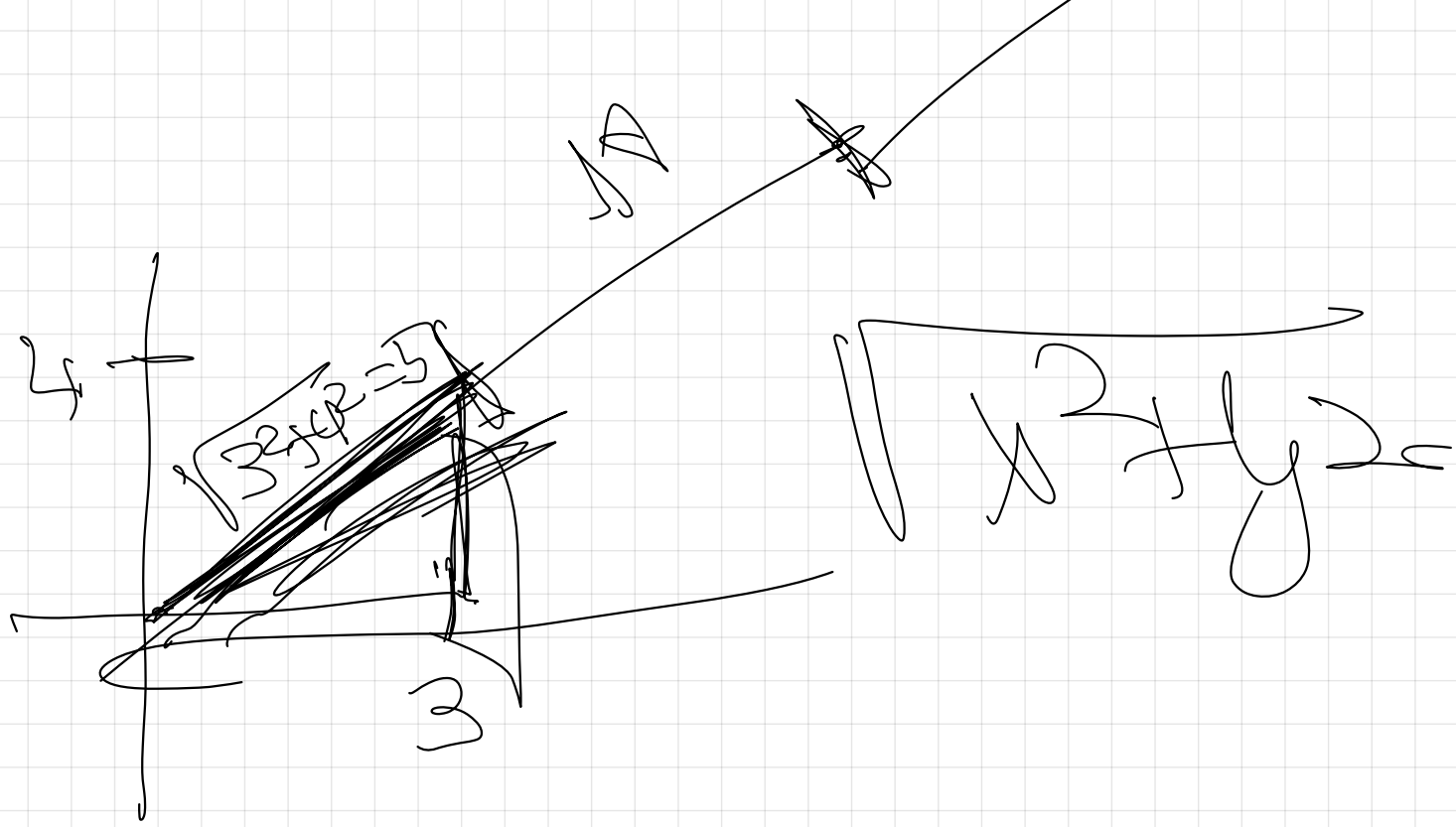
$$y = y_1 + y_2 = 4.67 \cdot 10^{-9} + 2.34 \cdot 10^{-9}$$

$$\vec{g} = 4.01 \cdot 10^{-9} \vec{i} + 2.31 \cdot 10^{-9} \vec{j} \quad \left( \frac{M}{s^2} \right)$$

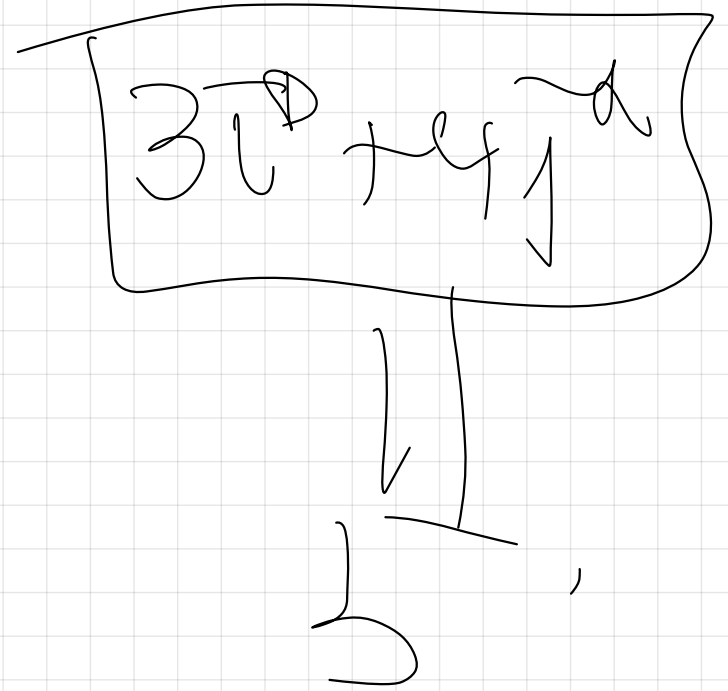
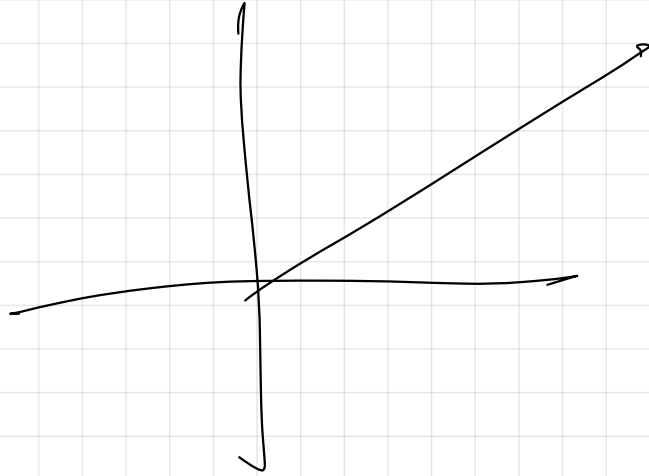
Para calcular el módulo de  $\vec{g}$  y saber el valor del campo gravitatorio

$$|\vec{g}| = g = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(4.01 \cdot 10^{-9})^2 + (2.31 \cdot 10^{-9})^2} = 4.62 \cdot 10^{-9} \frac{M}{s^2}$$





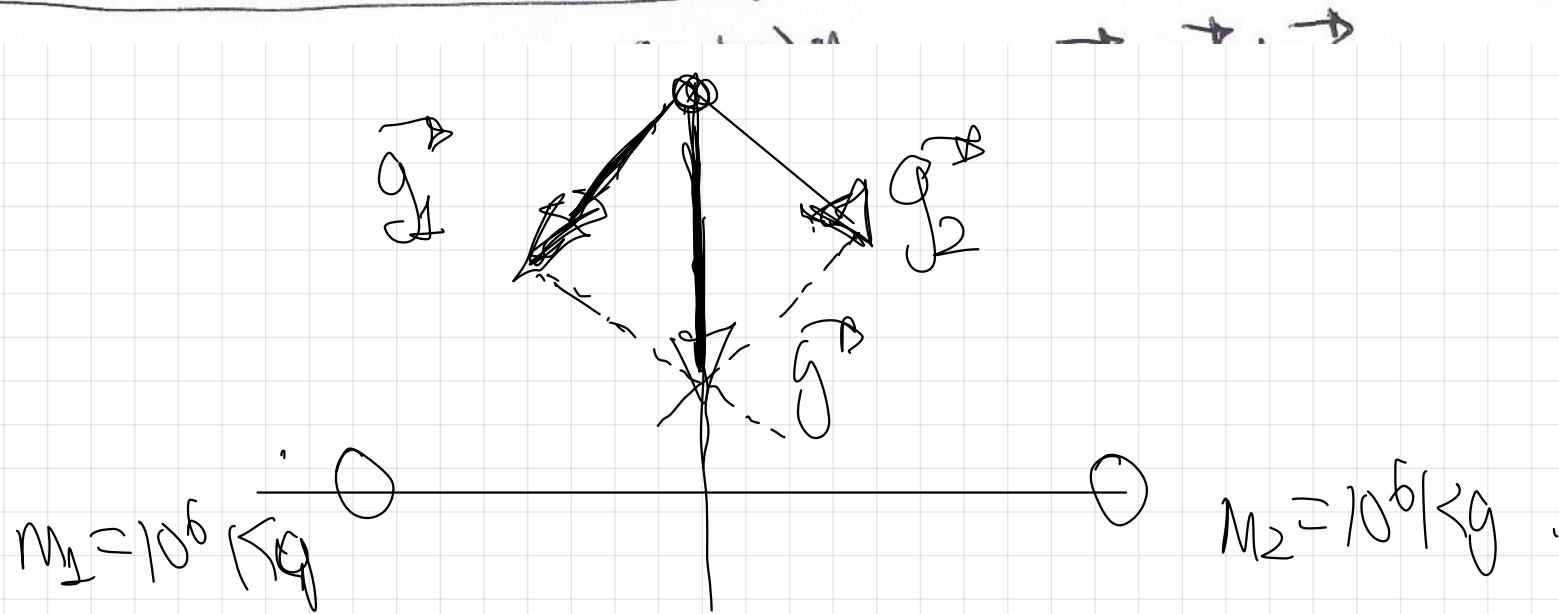
-



5) Dos masas puntuales de  $10^6$  kg cada una, se encuentran en los puntos  $(-100, 0)$  m y  $(100, 0)$  m respectivamente.

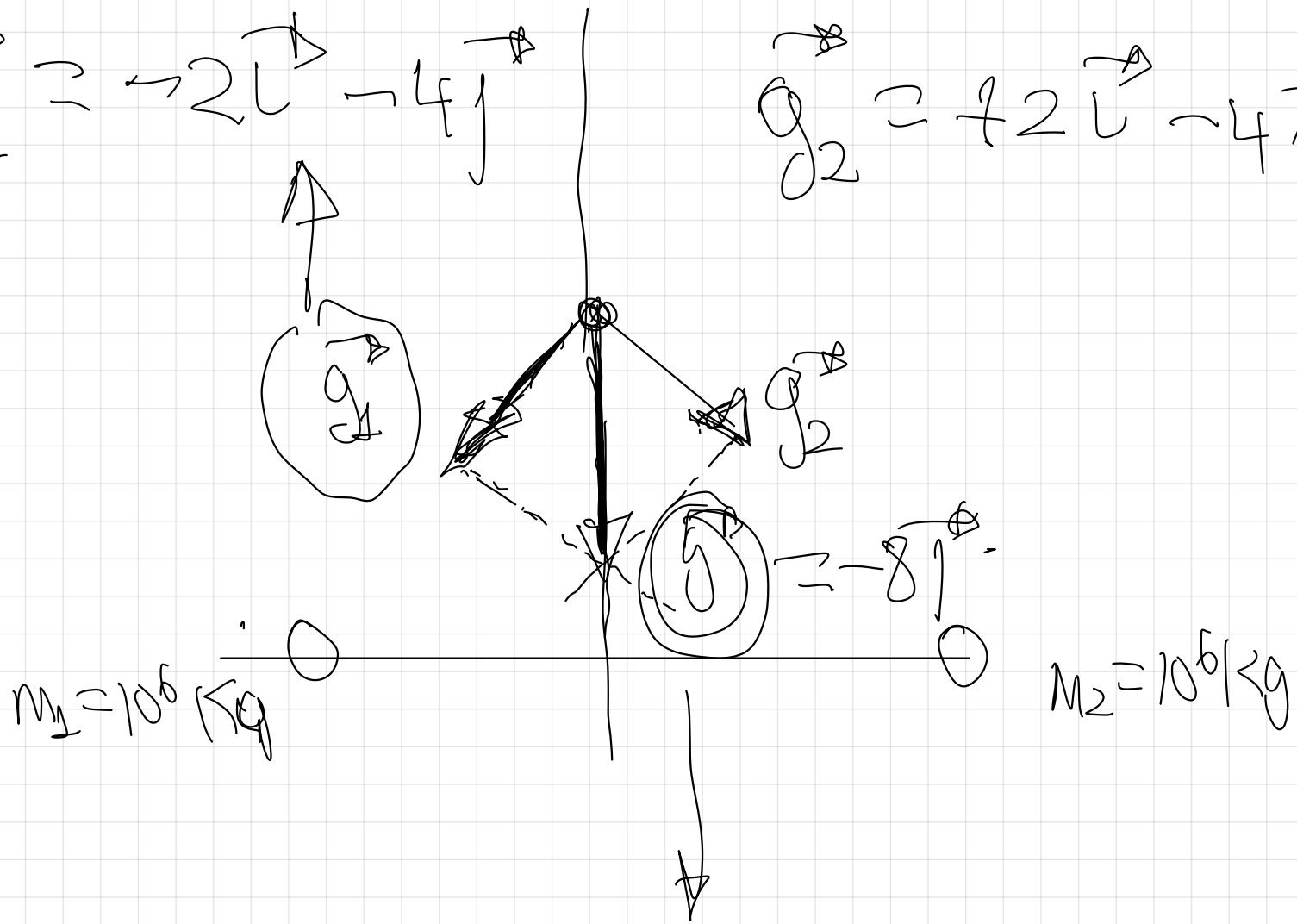
a) Calcula el campo gravitatorio ( $\vec{g}$ ) en el punto  $(0, 100)$  m y su módulo

b) Si en el punto  $(0, 100)$  m situásemos una masa de 10 kg, hallar la fuerza (vector y módulo) que experimentaría dicha masa.  $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ .

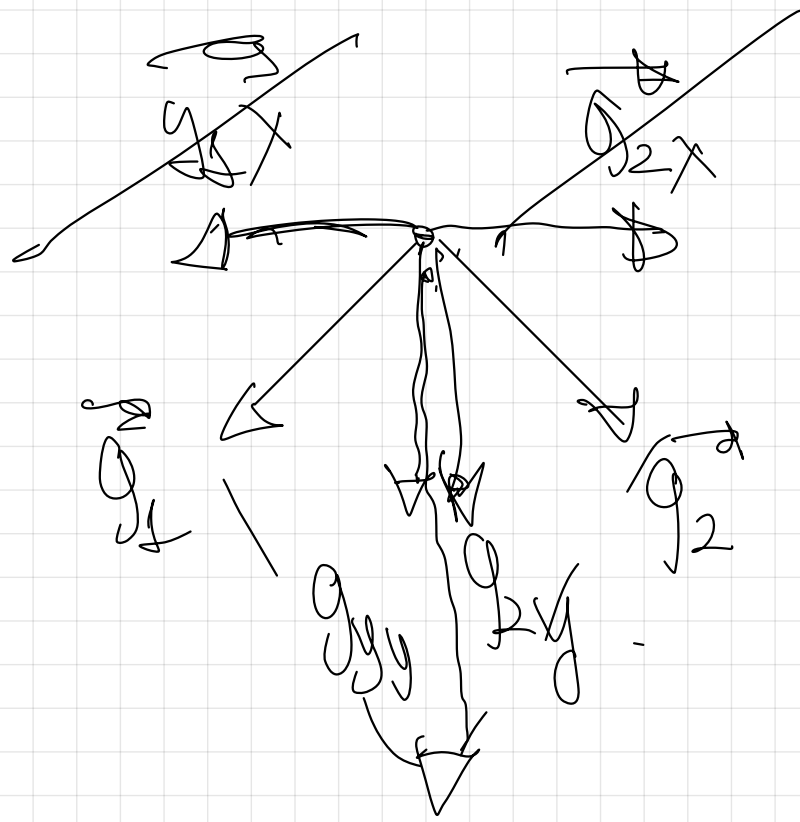


$$g_1 = 2\vec{i} - 4\vec{j}$$

$$g_2 = 72\vec{i} - 4\vec{j}$$



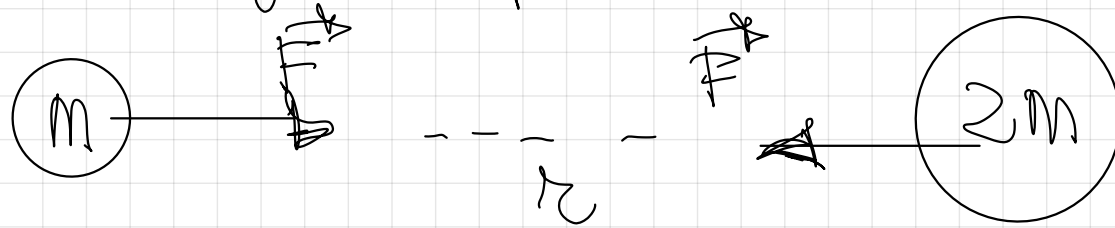
$$g = \frac{g_1}{4} + g_2 = \frac{2\vec{i} - 4\vec{j}}{4} + 72\vec{i} - 4\vec{j} = \vec{i} - \vec{j} + 72\vec{i} - 4\vec{j} = 73\vec{i} - 5\vec{j}$$



# TEORÍA (VER PREGUNTA DEL LIBRO)

- 55 (a) Explique las características del campo gravitatorio creado por una masa puntual
- b) Dos partículas de masas  $m$  y  $2m$  están separadas una cierta distancia. Explique qué fuerza actúa sobre cada una de ellas y cuál es la aceleración de dichas partículas

Ley de gravitación universal.



$$F = G \cdot \frac{m \cdot 2m}{r^2} = G \cdot \frac{2m^2}{r^2}$$

$$F = G \cdot \frac{M \cdot 2M}{r^2} = G \cdot \frac{2M^2}{r^2}$$

$$g = \frac{F}{m} = \frac{G \cdot \frac{2m^2}{r^2}}{m} = G \cdot \frac{2m}{r^2}$$

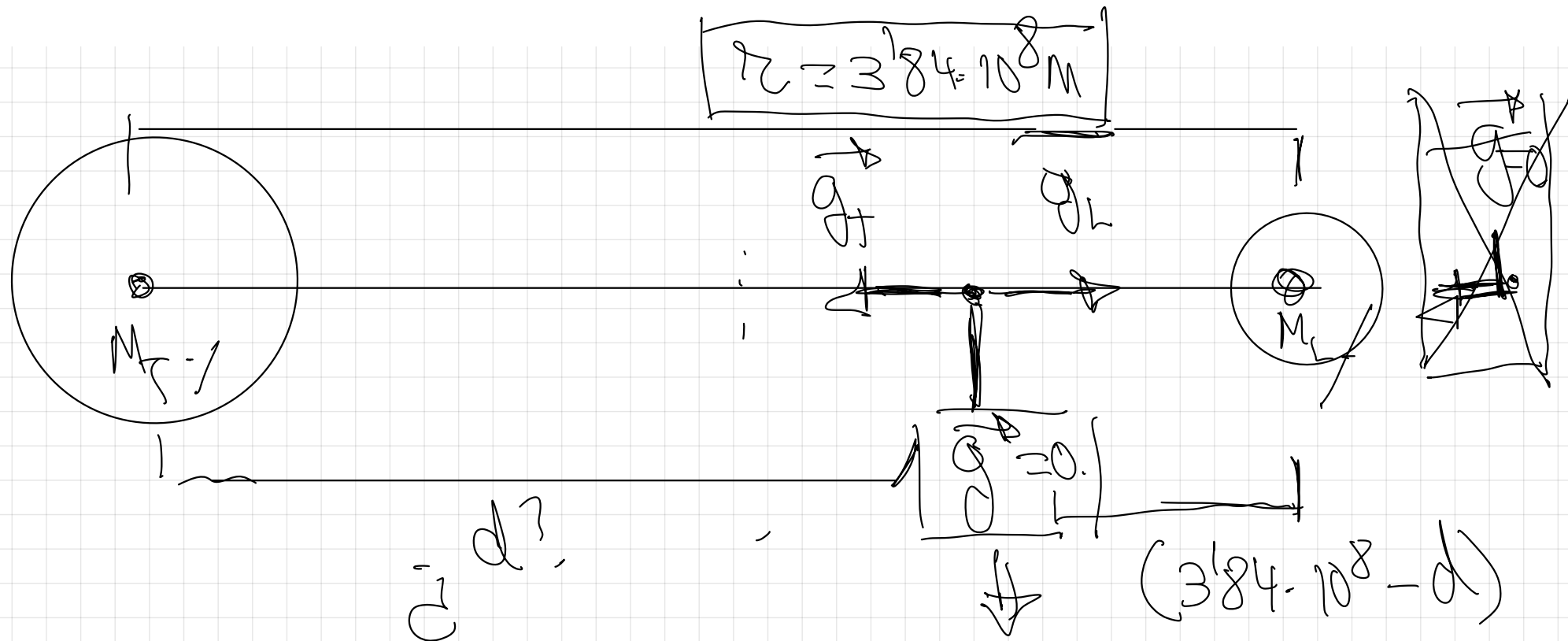
$$g' = \frac{F}{2m} = \frac{G \cdot \frac{2m^2}{r^2}}{2m} = G \cdot \frac{m}{r^2}$$



Aquí la aceleración tiene  
un mayor valor.

**56.** ¿A qué distancia del centro de la Tierra se compensaría el campo gravitatorio terrestre con el Lunar?

$M_T = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ Kg}$  ,  $M_L = 7,35 \cdot 10^{22} \text{ Kg}$ . Distancia Tierra-Luna (centro a centro) es de  $3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$



$$g = G \cdot \frac{M}{r^2}$$

$$|g_{\uparrow}| = |g_{\downarrow}|$$

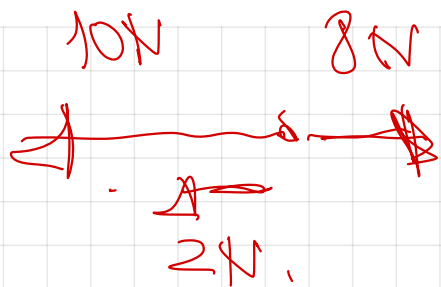
$$G \cdot \frac{M_{\uparrow}}{d^2} = G \cdot \frac{M_{\downarrow}}{(384 \cdot 10^8 - d)^2}$$

$$\sqrt{\frac{M_{\uparrow}}{d^2}} = \sqrt{\frac{M_{\downarrow}}{(384 \cdot 10^8 - d)^2}}$$

$$5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot \sqrt{\frac{M_{\uparrow}}{d^2}} = 7.35 \cdot 10^{22} \text{ kg} \cdot \sqrt{\frac{M_{\downarrow}}{(384 \cdot 10^8 - d)^2}}$$

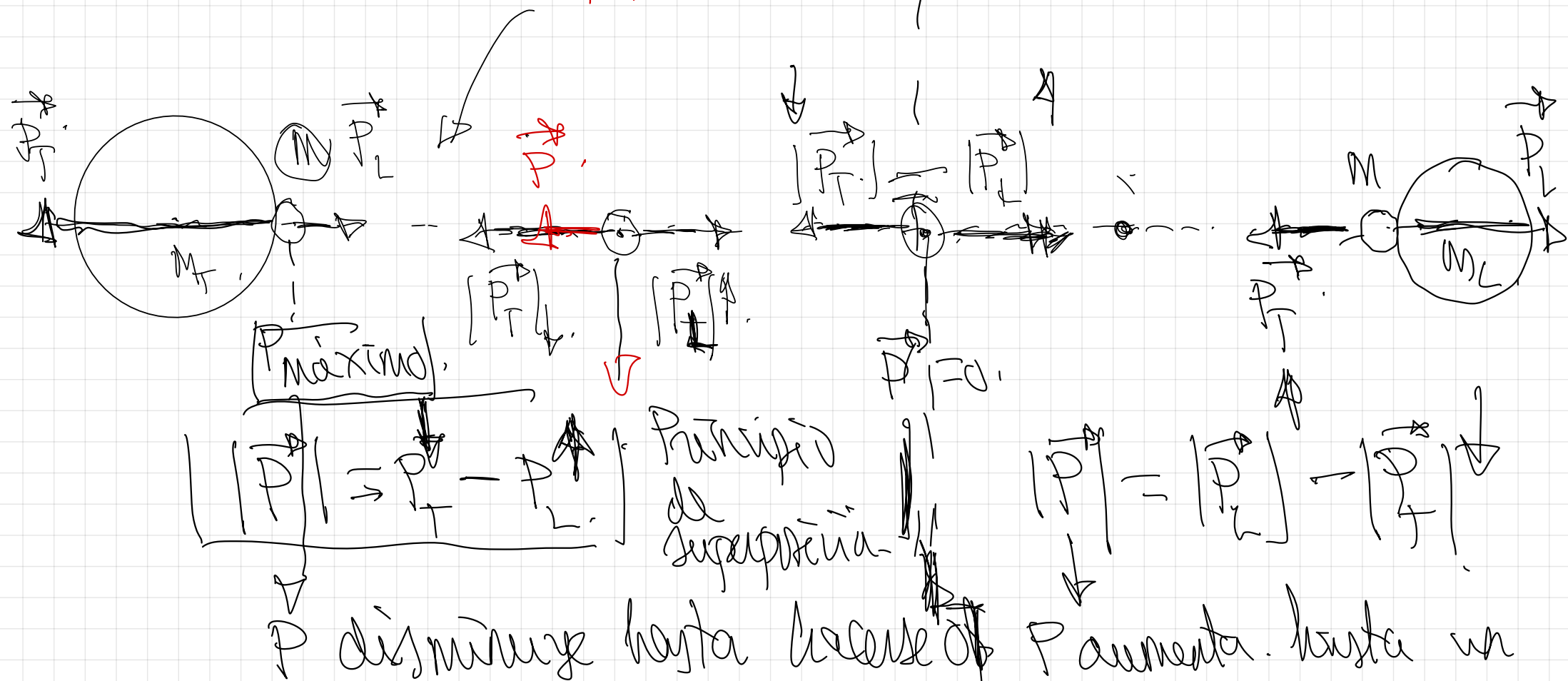
$$d = 346 \cdot 10^8 \text{ m}$$

**23** - Describir cualitativamente el cambio de peso que sufre una nave espacial de masa  $m$  en un viaje de la Tierra a la Luna. Suponer que la Tierra y la Luna se encuentran en reposo y que la nave se mueve según la dirección que une sus centros.



$$P = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$

$$P_L = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$



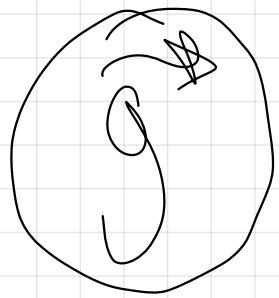
valor que no alcanza  
el valor máximo.

Ver resolución detallada  
en el libro

#### 4.- CAMPO GRAVITATORIO CREADO POR UNA MASA PUNTUAL

→  
Pag 4 del libro.

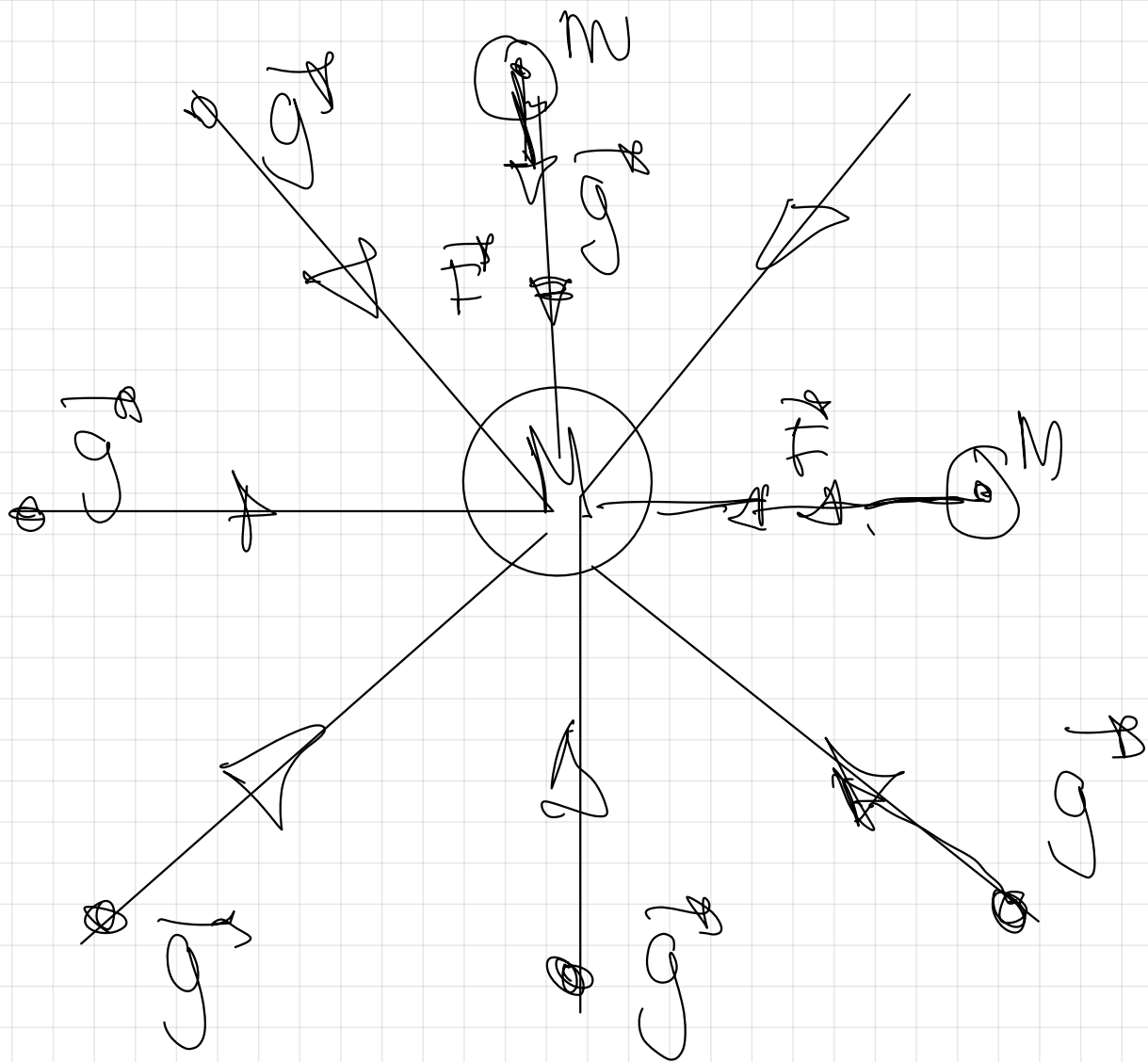
Las líneas de campo gravitatorio son las hipotéticas trayectorias que seguiría una masa  $m$  en reposo abandonada en dicho campo.

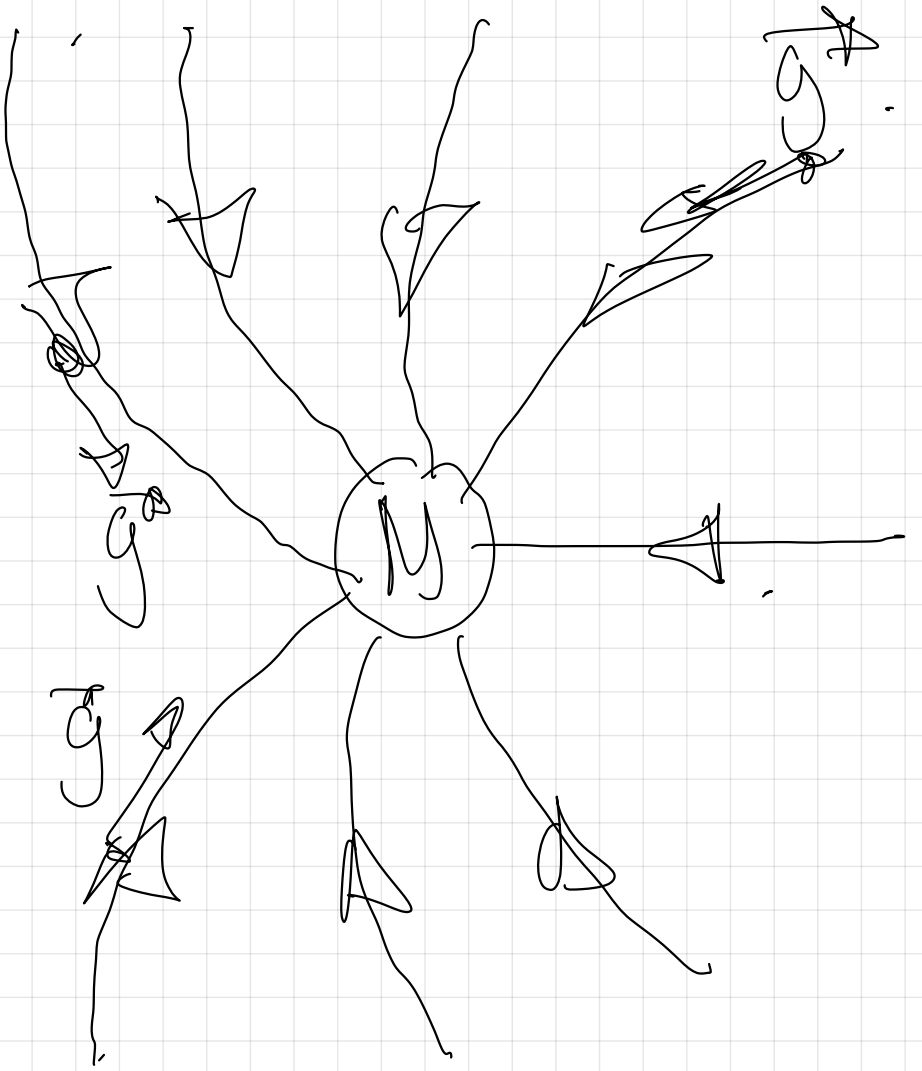
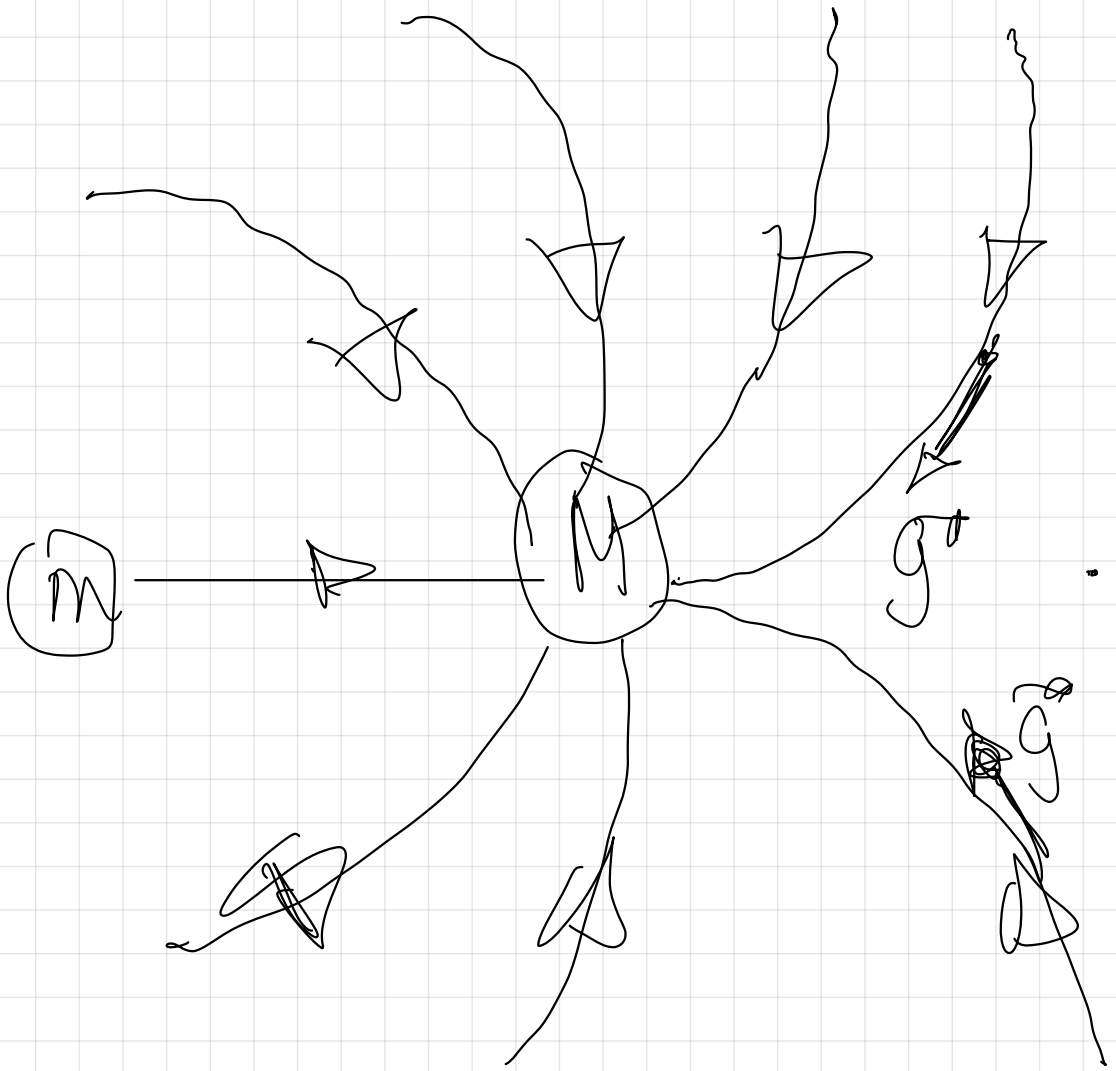


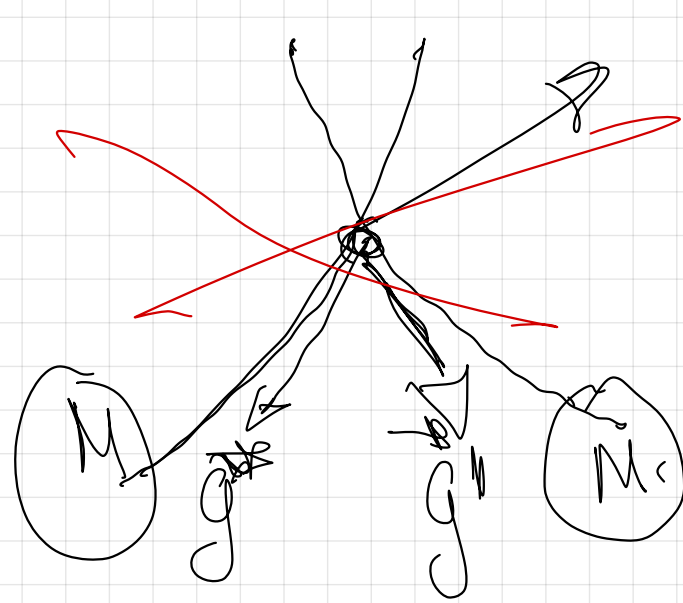
módulo,  $|g^*| = G \cdot \frac{M}{r^2}$

dirección  $\Rightarrow$  tangente en cada pto a las líneas de campo

sentido  $\Rightarrow$  atractivo hacia la masa que lo crea.



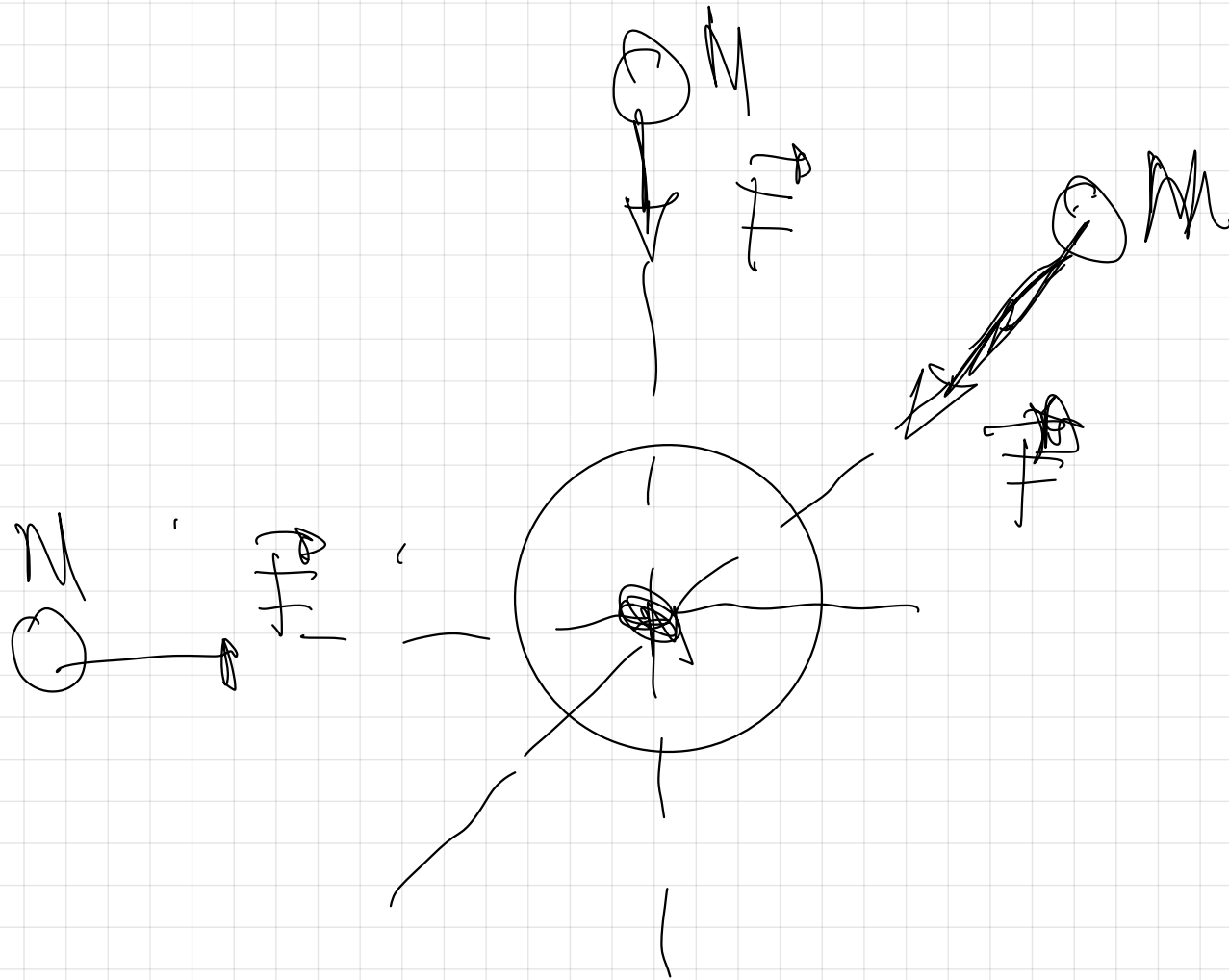




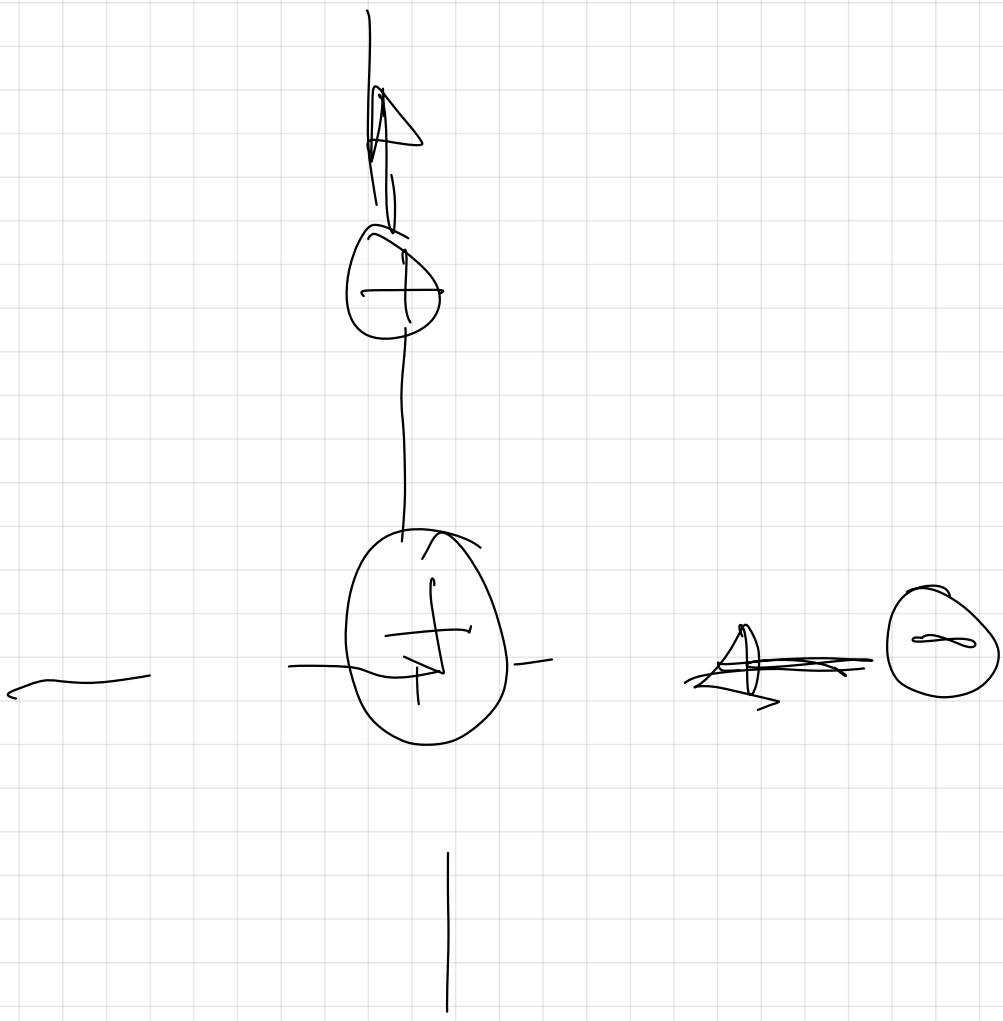
Por el propio concepto  
de campo no  
pueden existir  
dos valores de

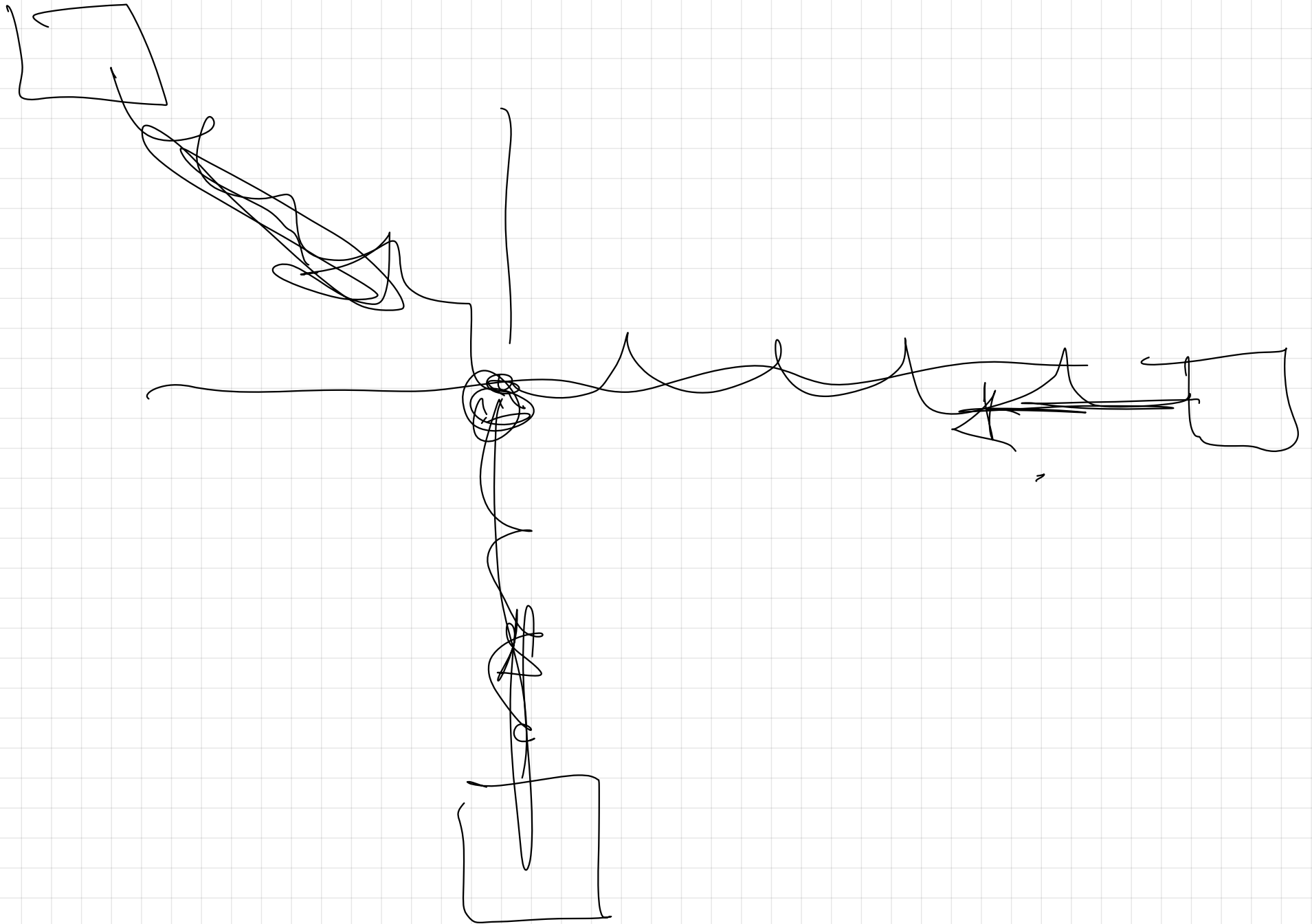
$g$  en el el  
mismo punto  
luego 2 líneas de campo  
nunca se pueden cortar.

# Fuerza central.



$F_g$  es una fuerza

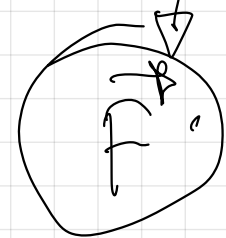




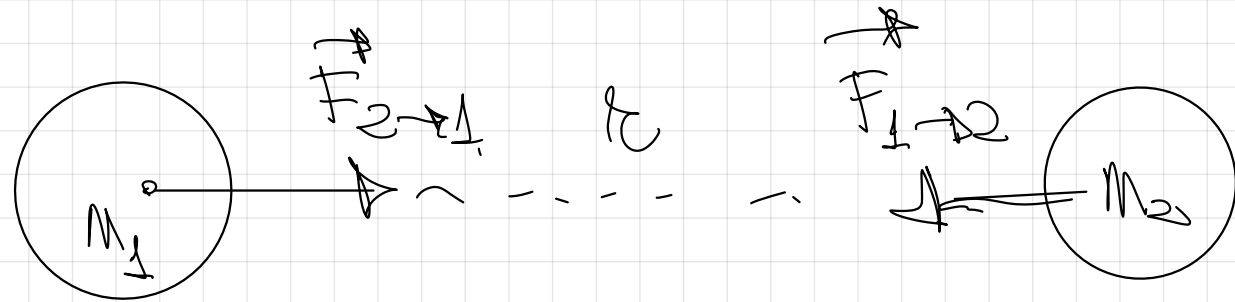
54.- a) Analice las características de la interacción gravitatoria entre dos masas puntuales

b) ¿Cómo se ve afectada la interacción gravitatoria descrita en el apartado anterior si en las proximidades de las dos masas, se coloca una tercera masa, también puntual?. Haga un esquema de las fuerzas gravitatorias que actúan sobre la tercera masa.

pag 33



Ambas fuerzas son iguales en módulo.

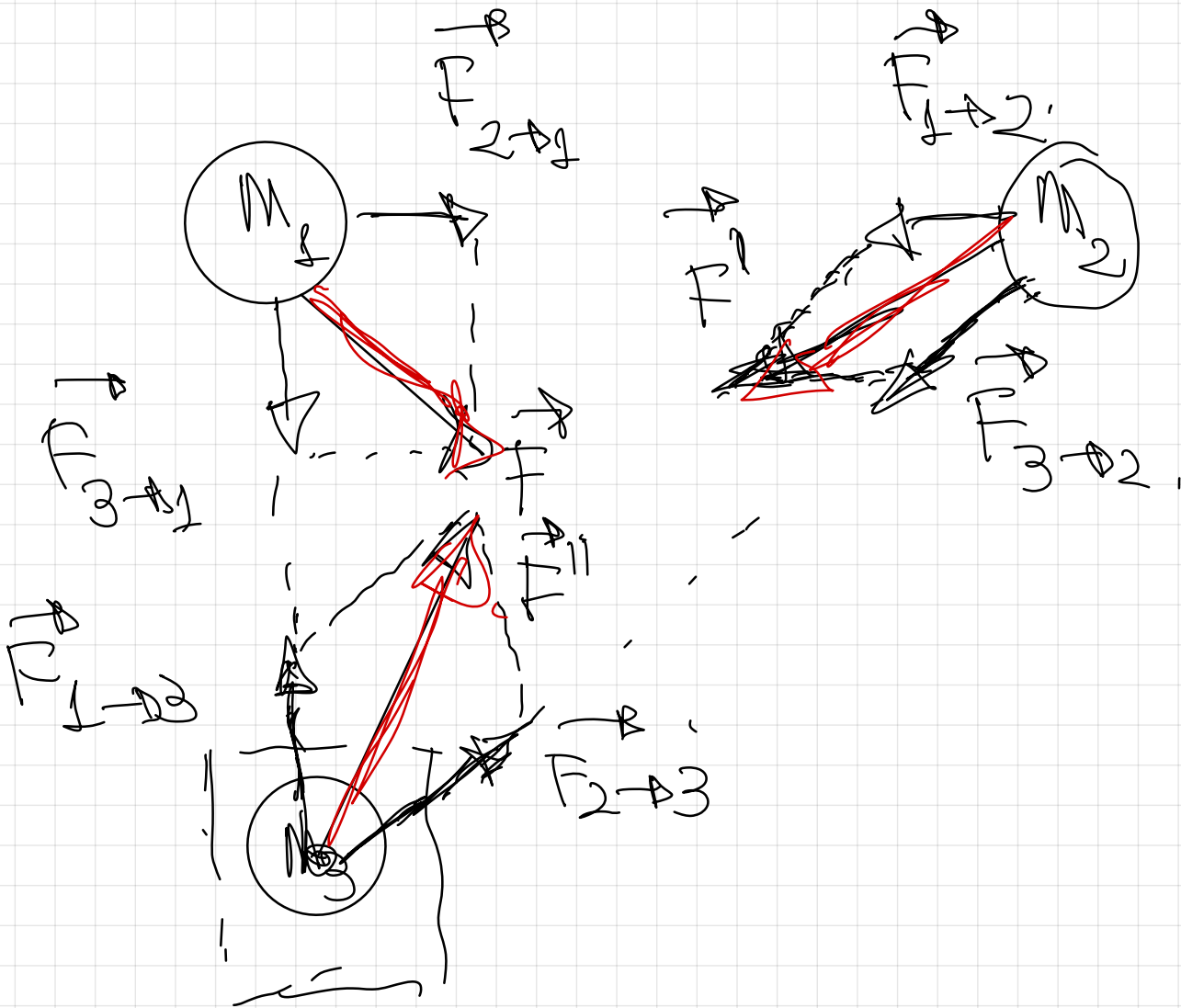


ley de la gravitación universal

$$F = G \frac{M_1 \cdot M_2}{r^2}$$

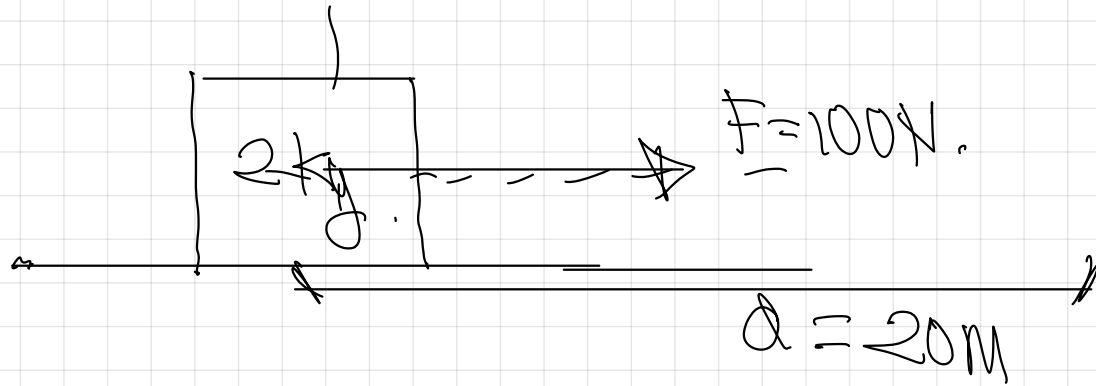
Explicaría todas las magnitudes que aparecen.

# Princípio de superposição

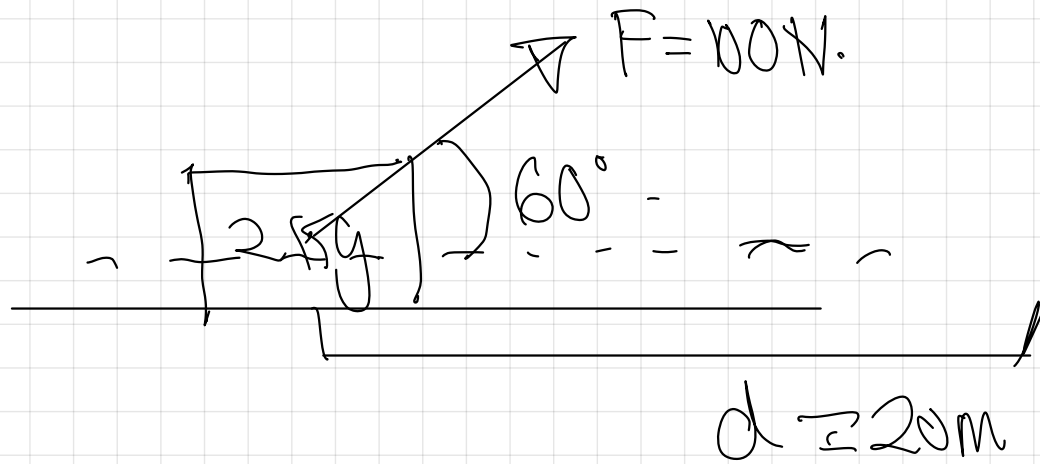


Trabajo (W)

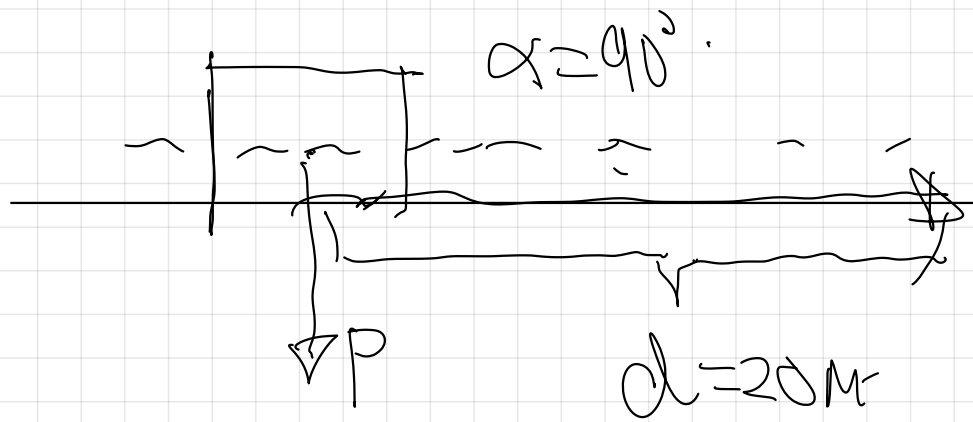
$$W = F \cdot d \cdot \cos \alpha = N \cdot m = J$$



$$W = F \cdot d \cdot \cos 0^\circ$$
$$W_{\max} = 100N \cdot 20m = 2000J$$



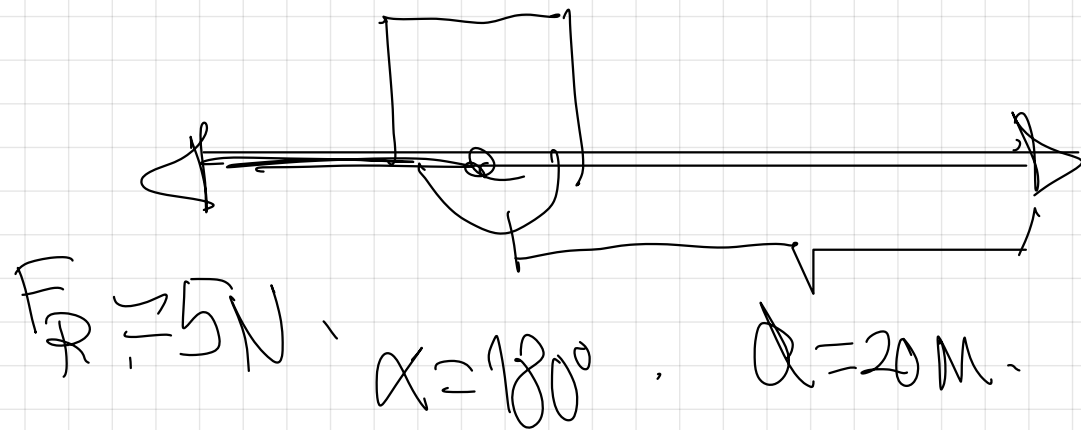
$$W_{\text{mena}} = F \cdot d \cdot \cos 60^\circ$$
$$W_{\text{mena}} = 100N \cdot 20m \cdot 0.5 = 1000J$$



$$W_{\text{rot}} = F \cdot d \cdot \cos 90^\circ$$

$$W_{\text{rot}} = 0 \quad (\text{nula})$$

$$W_{\text{rot}} = F \cdot d \cdot \cos 180^\circ$$



$$W_{\text{rot}} = F \cdot d$$

$$W_{\text{rot}} = 5 \cdot 20 = -100\text{J}$$

Campo  
gravitatorio.

$W > 0 \Rightarrow$  El desplazamiento  
lo produce la  
fuerza gravitatoria  
espontáneamente.

$W < 0 \Rightarrow$  El desplazamiento  
se hará por parte  
de una fuerza  
externa, no lo  
realiza la  $F_g$   
espontáneamente.

$$g = 10 \text{ m/s}^2$$



$$h = 20 \text{ m}$$

$$d = 20 \text{ m}$$



$$F_{\text{grav}} = m \cdot g \cdot h = 2 \cdot 10 \cdot 20 = 400 \text{ J}$$

$$W = F \cdot d \cdot \cos \theta$$

$$W = F \cdot h = m \cdot g \cdot h$$

$$W = 2 \text{ kg} \cdot 10 \text{ N/kg} \cdot 20 \text{ m} = 400 \text{ J}$$

$$W_{\text{push}} = N \cdot g \cdot h = 0 \text{ J}$$

$$\Delta E_{\text{pot}} = W = \Delta E_{\text{c}}$$

Todas las Fuerzas centrales son fuerzas  
conservativas.

Fuerza Conservativa,

\* Son fuerzas bajo cuya exclusiva acción se conserva la  $E_m$ .

$$\Delta E_p = W = \Delta E_c,$$

$$= \Delta E_p = \Delta E_c.$$

$$0 = \Delta E_p + \Delta E_c$$

$$\Delta E_m = 0 \Rightarrow \boxed{E_m = 0}$$

\* Son fuerzas que llevan asociada una magnitud llamada  $E_p$ .

$F$  gravitatoria  $\Rightarrow E_p$  gravitatoria.  
 $F$  eléctrica  $\Rightarrow E_p$  eléctrica.

\* Son fuerzas cuyo trabajo es independiente de la trayectoria seguida (solo depende de las posiciones inicial y final pero no del camino efectuado).

El trabajo que realizan en una trayectoria cerrada es 0.

$$E_{pA} = 1000 \text{ J}$$

A

$$m = 1 \text{ kg}$$

$$g = 10 \text{ m/s}^2$$



900m



$$E_{pB} = 70 \text{ J}$$



$$- \Delta E_p = W = \Delta E_c$$

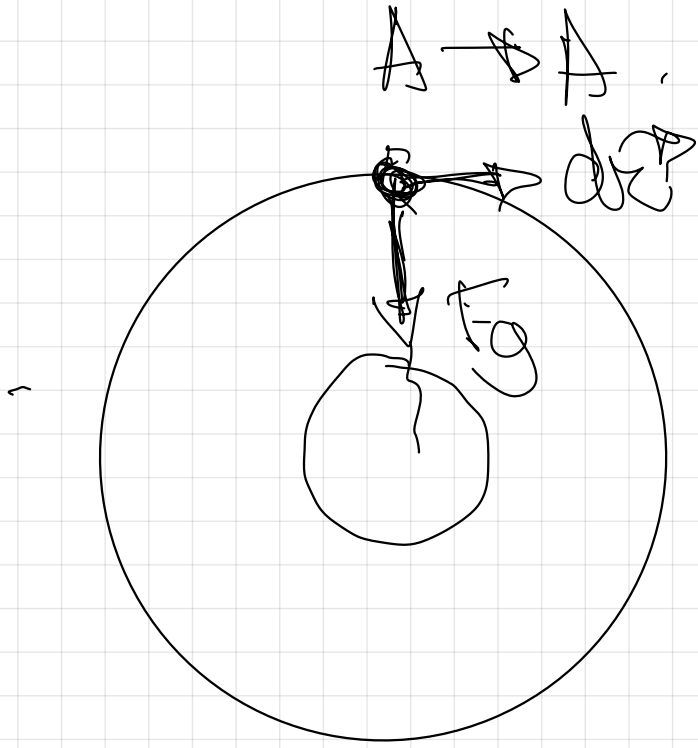
A → B

$$- (E_{PB} - E_{PA}) = W_{A \rightarrow B} = \Delta E_C$$

$$- (0 - 1000\text{J}) = W_{A \rightarrow B} = \Delta E_C$$

$$1000\text{J} = W_{A \rightarrow B} = \Delta E_C$$

$$\Delta E_C = 1000\text{J}$$



$$\cancel{A} \rightarrow A = 0.$$

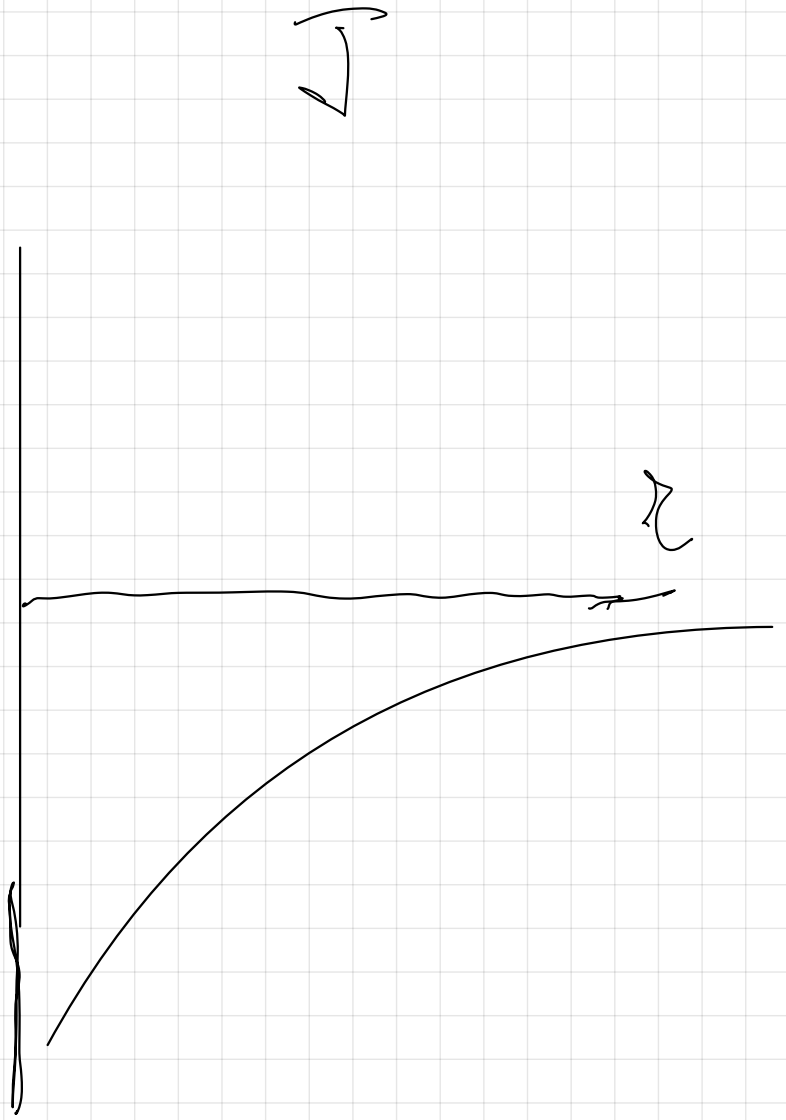
$$\sim \frac{A}{G} = \cancel{A} \rightarrow A = \cancel{A}.$$

$$0 = \cancel{A} \rightarrow \cancel{A} = \cancel{A}.$$

$$E_p = m \cdot g \cdot h$$

$$E_p = G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$$

$E_p$



## Magnitudes vectoriales

Fuerza  $\vec{F}$

$$F = G \frac{M \cdot m}{r^2} \quad [N]$$

## Magnitudes escalares

Energía potencial

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r} \quad [J]$$

Campo gravitatorio  $\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}$

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{G \frac{M \cdot m}{r^2}}{m} = G \frac{M}{r^2}$$

Diagrama de fuerzas:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{g}$$

Potencial gravitatorio  $V$

$$V = \frac{E_p}{m} = \frac{-G \frac{M \cdot m}{r}}{m} = -G \frac{M}{r}$$

Diagrama de unidades:

$$E_p = m \cdot V$$

Trabalho 2.

$$\mathbb{R}_{A \rightarrow B} = \mathbb{R}_{A \rightarrow B} \cdot \mathbb{R}_{A \rightarrow B}$$

$$\mathbb{R}_{A \rightarrow B} = \mathbb{R}_{A \rightarrow B}$$

$$\mathbb{R}_{A \rightarrow B} = \left( \mathbb{R}_B - \mathbb{R}_A \right)$$

$$\mathbb{R}_{A \rightarrow B} = \mathbb{R}_A - \mathbb{R}_B$$

$$\mathbb{R}_{A \rightarrow B} = n - \mathbb{R}_A = n - \mathbb{R}_B$$

$$\Delta A \rightarrow \Delta B \approx n \cdot (V_A - V_B)$$

$> 0$  effort.

$< 0$  no effort.

.

## Magnitudes vectoriales

$$\vec{F}_g \quad (\text{N en S.I.})$$

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$

$$g \quad \left( \frac{\text{N}}{\text{kg}} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \text{ en S.I.} \right)$$
$$g = \frac{F}{m} = \frac{G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}}{m} = G \cdot \frac{M}{r^2}$$

$$\left( \vec{F} = m \cdot \vec{g} \right)$$

## Magnitudes escalares

$$E_p \quad (\text{J en S.I.})$$

$$E_p = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$$

Potencial gravitatorio  $\checkmark$   
(J/kg en S.I.)

$$V = \frac{E_p}{m} = \frac{G \cdot \frac{M \cdot m}{r}}{m} = G \cdot \frac{M}{r}$$

$$\left( E_p = m \cdot V \right)$$

Trabajo W.

Fuerza conservativa.

$$W_{A \rightarrow B} = -\Delta E_{PA \rightarrow B}$$

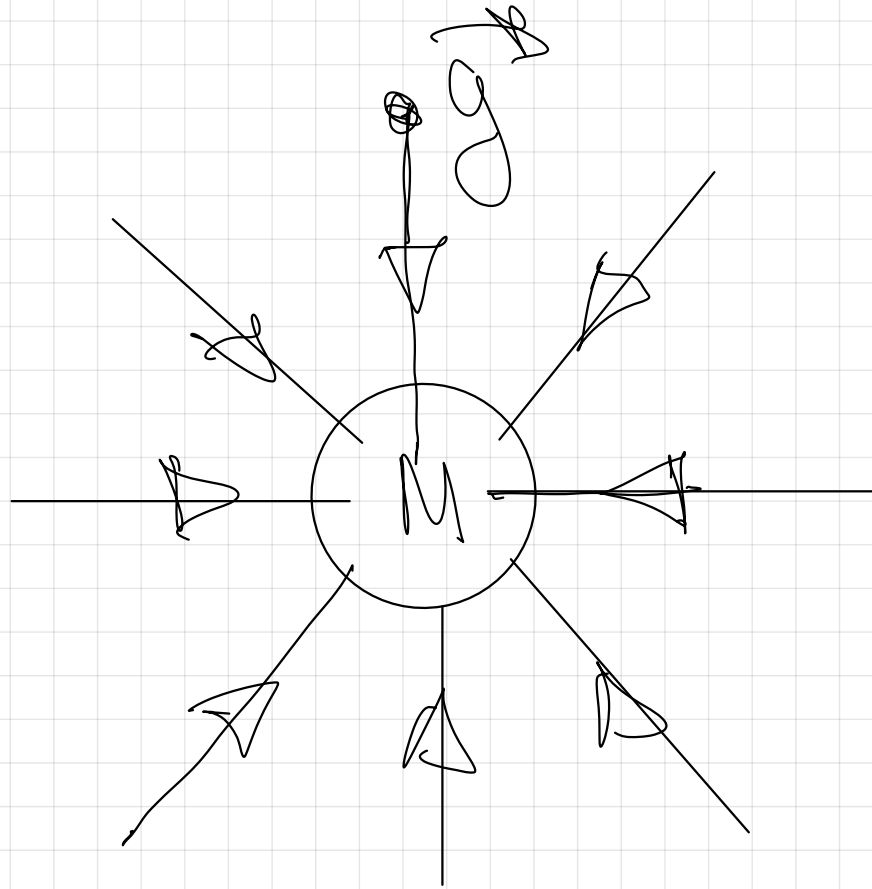
$$W_{A \rightarrow B} = -(E_{PB} - E_{PA})$$

$$W_{A \rightarrow B} = E_{PA} - E_{PB}$$

$$W_{A \rightarrow B} = m \cdot v_A - m \cdot v_B$$

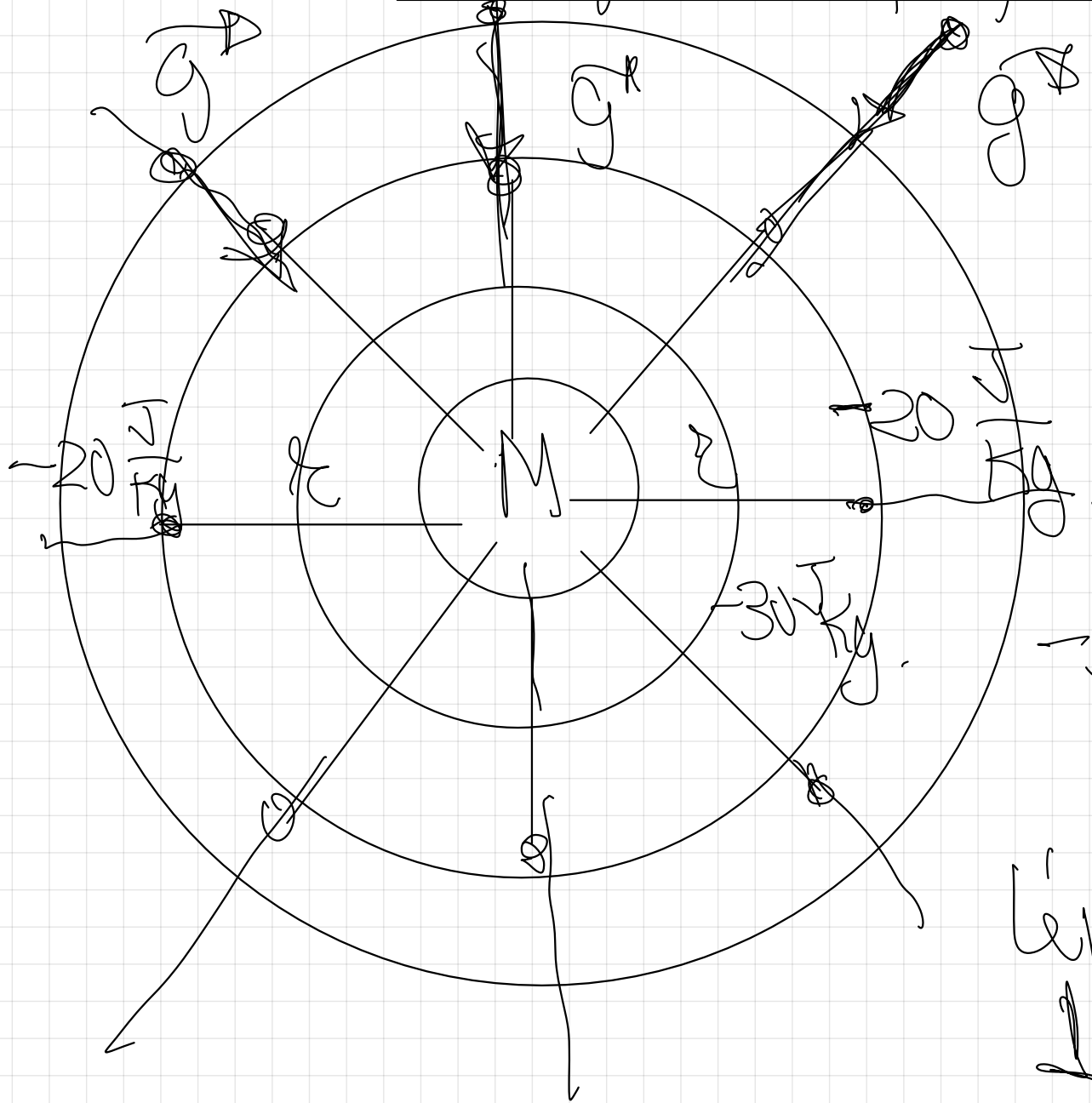
$$W_{A \rightarrow B} = m (v_A - v_B)$$

$\chi > 0$  Espontáneo.  
 $\chi < 0$  No espontáneo.



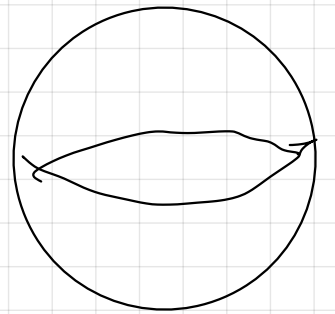
$$g = G \frac{M}{r^2}$$

# Superficies equipotenciales



$$V = G \frac{M}{r}$$

$50$   
 $g$



líneas de campo son  
perpendiculares a las superficies

# Principio de superposición Equipotenciales.

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i$$

$$E_p = \sum E_{p_i}$$

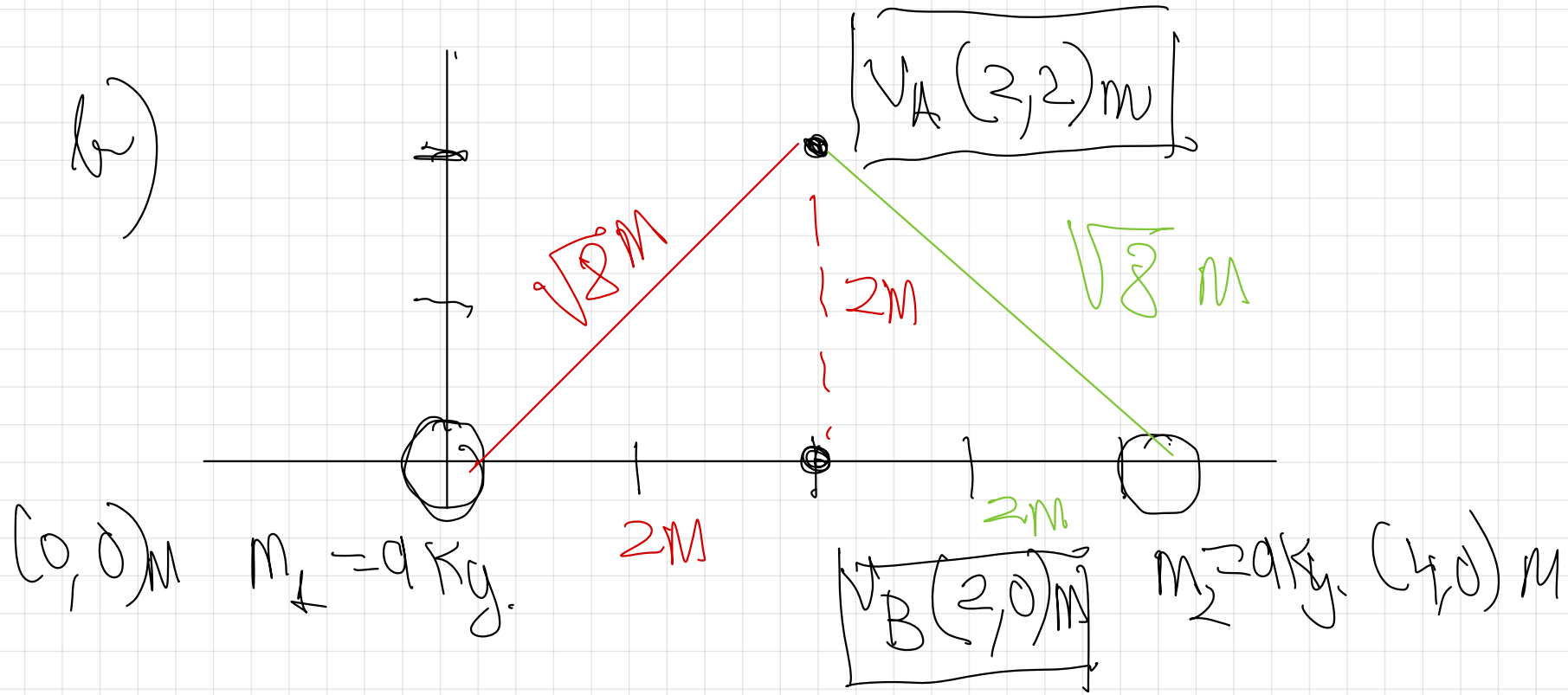
$$\vec{g} = \sum \vec{g}_i$$

$$V = \sum V_i$$

**16.** Dos masas puntuales  $m_1 = 9 \text{ Kg}$  y  $m_2 = 9 \text{ Kg}$  se sitúan en los puntos  $(0,0) \text{ m}$  y  $(4,0) \text{ m}$ .

- Calcular el campo gravitatorio en los puntos  $(2,0) \text{ m}$  y  $(9,0) \text{ m}$
- Calcular el potencial gravitatorio en los puntos  $(2,0) \text{ m}$  y  $(2,2) \text{ m}$
- Calcular la Energía potencial gravitatoria si situamos una masa de  $2 \cdot 10^{-3} \text{ Kg}$  en el punto  $(2,2) \text{ m}$
- Calcular el trabajo realizado al desplazarse la masa  $m = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Kg}$  desde el punto  $(2,2) \text{ m}$  hasta el punto  $(2,0) \text{ m}$ .

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}$$



Princípio da superposição.

$$\vec{V}_A = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$$

$$\vec{V}_A = G \cdot \frac{m_1}{r_1^2} + \left( -G \cdot \frac{m_2}{r_2^2} \right)$$

$$v_A = -667 \cdot 10^{-11} \frac{g}{\sqrt{8}} = 667 \cdot 10^{-11} \frac{g}{\sqrt{8}}$$

$$v_A = 424 \cdot 10^{-10} \text{ J} \quad \left( \frac{\text{Kg}}{g} \right)$$

Principiul de superpoziție.

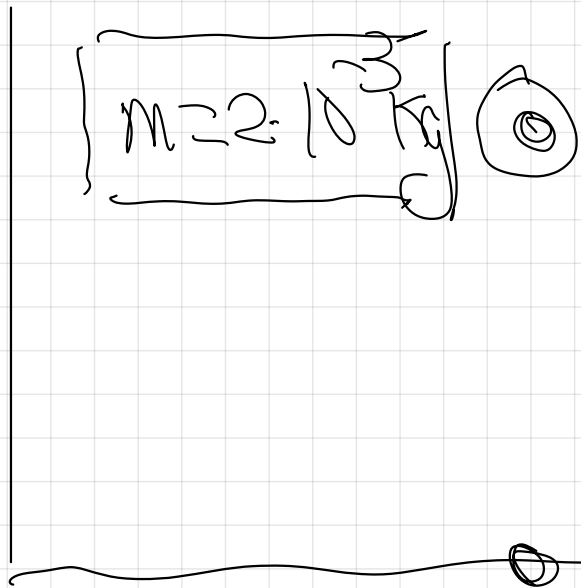
$$v_B = v_1 + v_2$$

$$v_B = 1 \cdot G \cdot \frac{M_1}{R_1^2} + \left( -G \cdot \frac{M_2}{R_2^2} \right)$$

$$v_B = -667 \cdot 10^{-11} \frac{g}{2} = -667 \cdot 10^{-11} \frac{g}{2}$$

$$v_B = 6 \cdot 10^{-10} \frac{g}{kg}$$

c)



$$v_A = 6 \cdot 10^{-10} \frac{g}{kg}$$

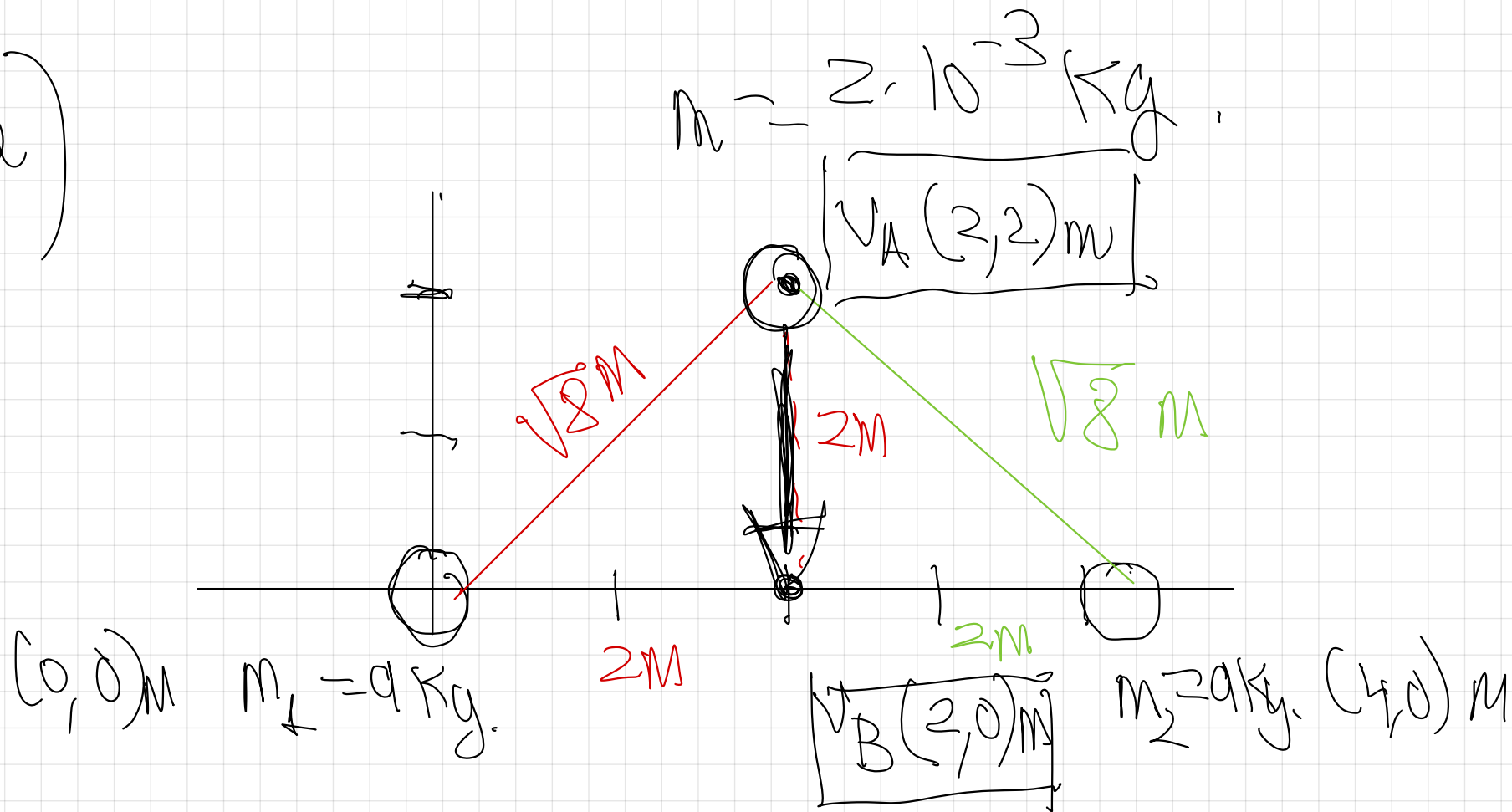
$$E_{pA} = m \cdot v_A = 2 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 6 \cdot 10^{-10} \frac{g}{kg} = 12 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

$$E_{pA} = 848 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

$$(-424 \cdot 10^{-10} \text{ J})$$

$$v_B = -424 \cdot 10^{-10} \frac{g}{kg}$$

d)



$$W = -\Delta E_p$$

$A \rightarrow B$        $A \rightarrow B$

$$W_{A \rightarrow B} = - \left( E_{pB} - E_{pA} \right)$$

$$W_{A \rightarrow B} = E_{PA} - E_{PB}$$

$$W_{A \rightarrow B} = m \cdot v_A - m \cdot v_B$$

$$W_{A \rightarrow B} = m \cdot (v_A - v_B)$$

$$W_{A \rightarrow B} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \left( -424 \cdot 10^{-10} - (-6 \cdot 10^{-10}) \right)$$

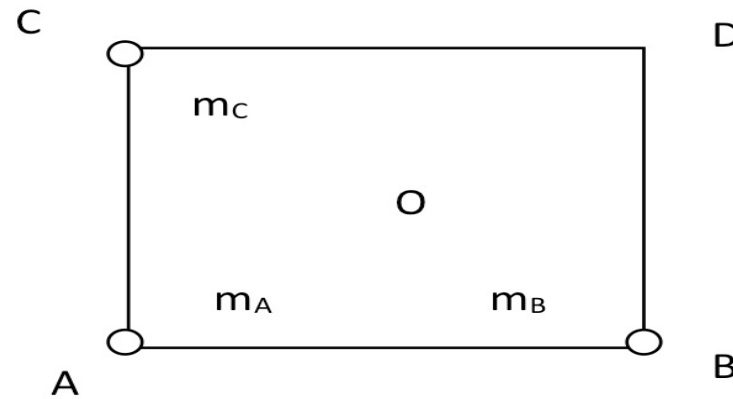
$$W_{A \rightarrow B} = 352 \cdot 10^{-13} \text{ J} > 0$$

Trabajo espontáneo.

**17.** Dadas tres masas puntuales de valores  $m_a=1\text{Kg}$  ,  $m_b=2\text{Kg}$ ,  $m_c=3\text{Kg}$  situadas en los tres vértices A,B y C de un cuadrado de lado  $l=1\text{m}$ .

- Calcular el potencial gravitatorio en el centro del cuadrado O y en el cuarto vértice D.
- Calcular la Energía potencial gravitatoria de una hipotética masa  $m= 10^{-4}\text{ Kg}$  en caso de que estuviese situada en el punto O y en caso de que estuviese situada en el punto D.
- Calcular el trabajo necesario para desplazar la masa  $m= 10^{-4}\text{ Kg}$  desde el punto O hasta el punto D.

$$G= 6,67 \cdot 10^{-11}\text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}$$



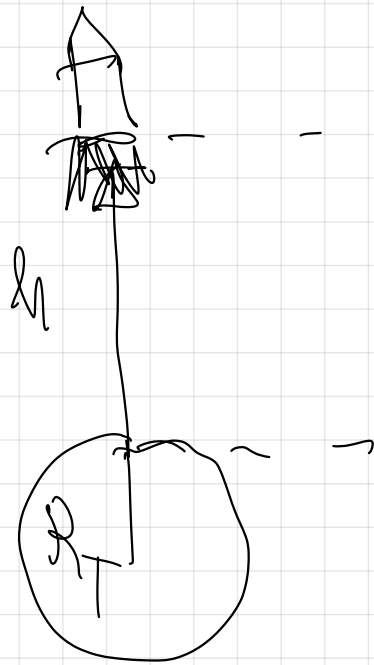
202 (12-E) Se lanza un cohete de 600 kg desde el nivel del mar hasta una altura de 1200 km sobre la superficie de la Tierra. Calcule:

a) Cuánto ha aumentado la energía potencial gravitatoria del cohete.

b) Qué energía adicional habría que suministrar al cohete para que escapara a la acción del campo gravitatorio terrestre desde esa altura.

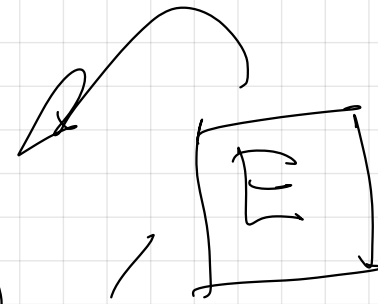
$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2 \text{ kg}^{-2}; \quad M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}; \quad R_T = 6370 \text{ km}$$

$$\infty \quad E_{p\infty} = 0 \quad / \quad E_{c\infty} = 0$$



$$E_{ph} = G \frac{M_T m}{R_T}$$

(with)

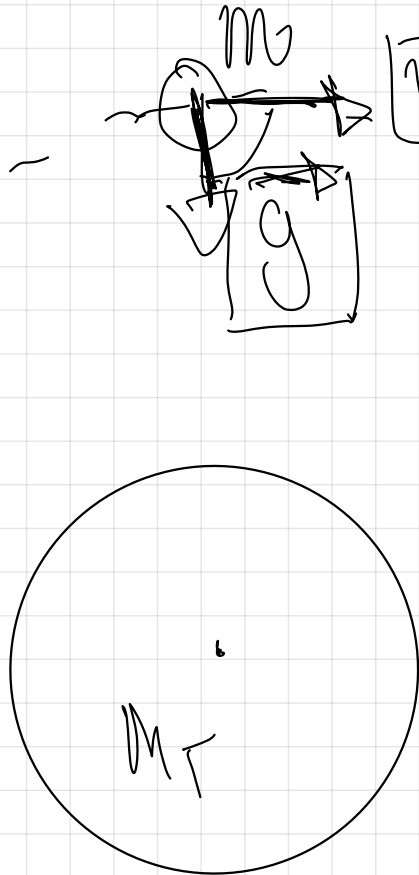


$$E_{ph} + E = 0 \neq 0$$

(14-R) a) La Estación Espacial Internacional orbita en torno a la Tierra a una distancia de 415 km de su superficie. Calcule el valor del campo gravitatorio que experimenta un astronauta a bordo de la estación.

b) Calcule el periodo orbital de la Estación Espacial Internacional.

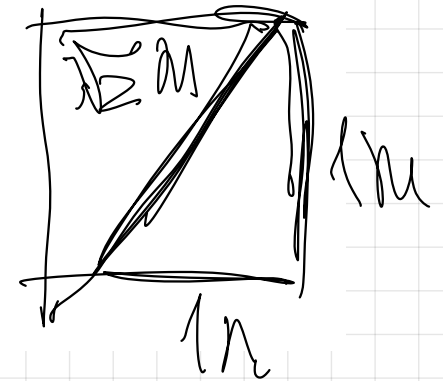
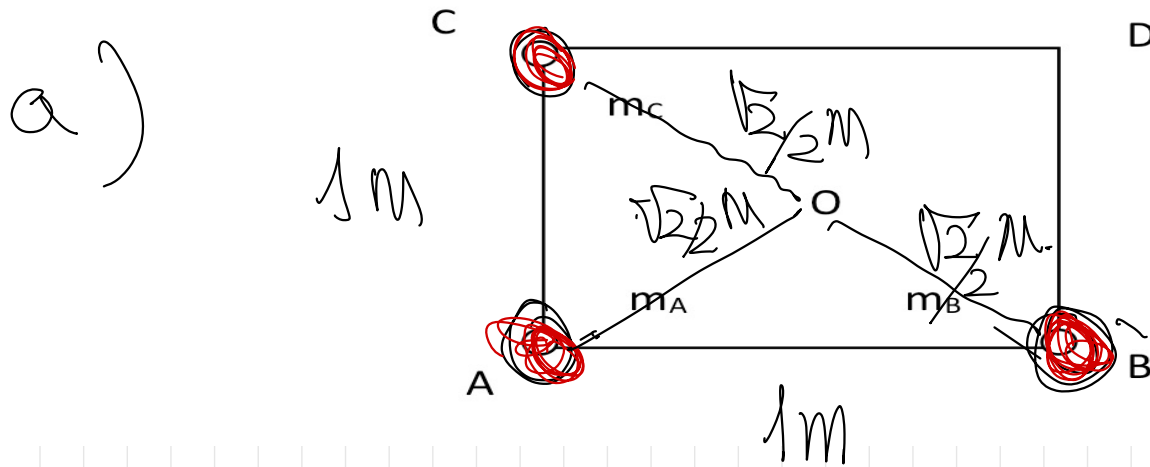
$$g = 9,8 \text{ m s}^{-2} ; R_T = 6370 \text{ km}$$



17.- Dadas tres masas puntuales de valores  $m_a=1\text{Kg}$  ,  $m_b=2\text{Kg}$ ,  $m_c=3\text{Kg}$  situadas en los tres vértices A,B y C de un cuadrado de lado  $l=1\text{m}$ .

- Calcular el potencial gravitatorio en el centro del cuadrado O y en el cuarto vértice D.
- Calcular la Energía potencial gravitatoria de una hipotética masa  $m= 10^{-4}\text{ Kg}$  en caso de que estuviese situada en el punto O y en caso de que estuviese situada en el punto D.
- Calcular el trabajo necesario para desplazar la masa  $m= 10^{-4}\text{ Kg}$  desde el punto O hasta el punto D.

$$G= 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}$$



Principio de superposición,

$$V_O = V_A + V_B + V_C$$

$$V = -G \frac{M}{r}$$

$$V_0 = -G \frac{M_A}{r_{AO}} - G \frac{M_B}{r_{BO}} - G \frac{M_C}{r_{CO}}$$

principio de superposición.

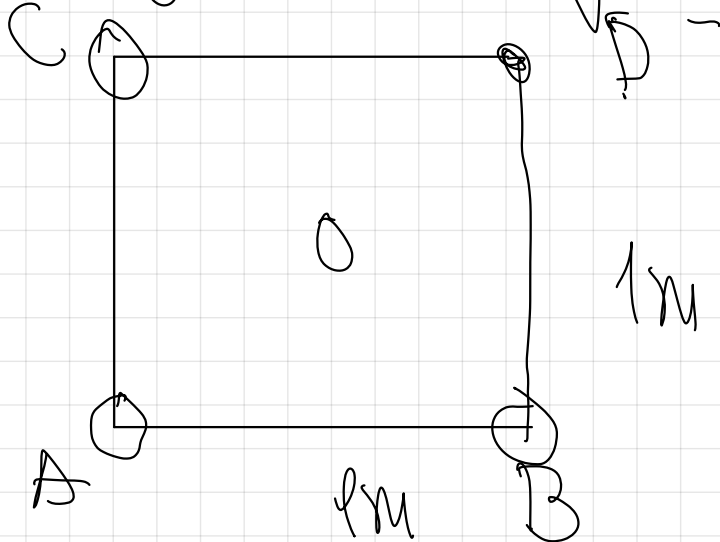
$$V_0 = V_{AO} + V_{BO} + V_{CO} = -G \frac{M_A}{r_{AO}} + \left( -G \frac{M_B}{r_{BO}} \right) + \left( -G \frac{M_C}{r_{CO}} \right)$$

$$V_0 = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}/2} - 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}/2} - 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}/2}$$

$$V_0 = -5,66 \cdot 10^{-10} \text{ J} \cdot \text{Kg}^{-1}$$

Princípio da superposição

$$m_C = 3 \text{ Kg}$$



$$v_D = v_{AD} + v_{BD} + v_{CD}$$

$$m_A = 1 \text{ Kg}$$

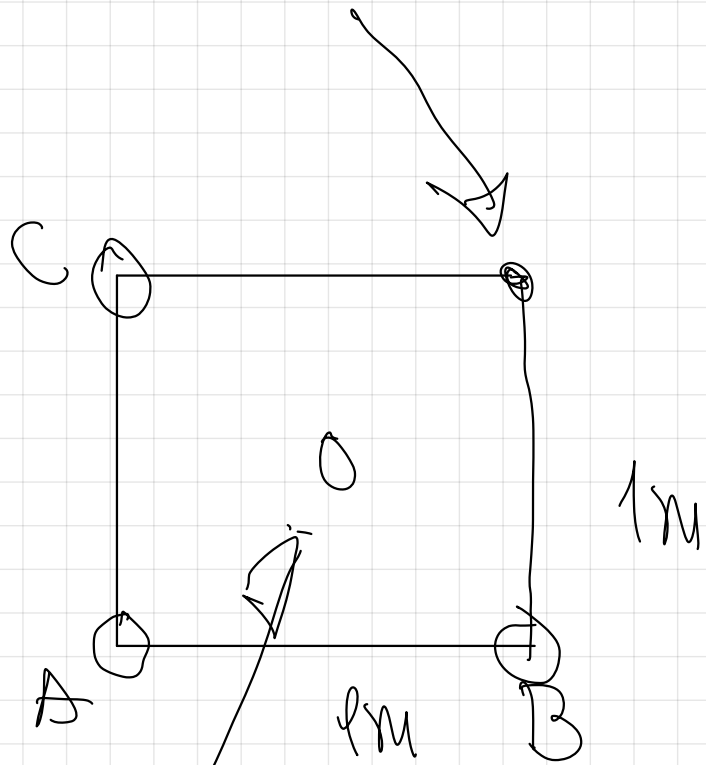
$$m_B = 2 \text{ Kg}$$

$$v_D = -G \cdot \frac{m_A}{r_{AD}} - G \cdot \frac{m_B}{r_{BD}} - G \cdot \frac{m_C}{r_{CD}}$$

$$v_D = -667 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 667 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{2}{1} - 667 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{3}{1}$$

$$v_D = -381 \cdot 10^{-10} \text{ J} \cdot \text{Kg}^{-1}$$

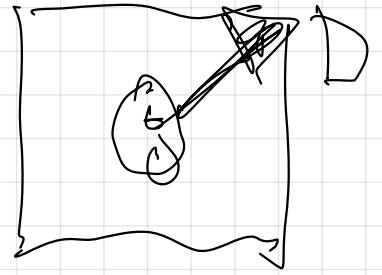
g)



$$V_0 = -5,66 \cdot 10^{-10} \text{ J/Kg}$$

$$E_{P_0} = m \cdot V_0 = 10^{-4} \text{ Kg} \cdot (-5,66 \cdot 10^{-10} \text{ J/Kg}) =$$

$$E_{pD} = -5168 \cdot 10^{-14} \text{ J}$$



$$E_{pD} = m \cdot v_D = 10^{-4} \text{ Kg} \left( -3181 \cdot 10^{-10} \text{ J} / \text{Kg} \right)$$

$$E_{pD} = -3181 \cdot 10^{-14} \text{ J}$$

$$W_{0 \rightarrow D} = m \cdot (v_0 - v_D) = \dots$$

$$W_{0 \rightarrow D} = 10^{-4} \left( -5168 \cdot 10^{-10} - (-3181 \cdot 10^{-10}) \right)$$

$$W_{0 \rightarrow 1} = 0.1185 \cdot 10^{14} \text{ J.}$$



No espontâneo,

$$W = -\Delta F_p.$$

$$\Delta F_p > 0.$$

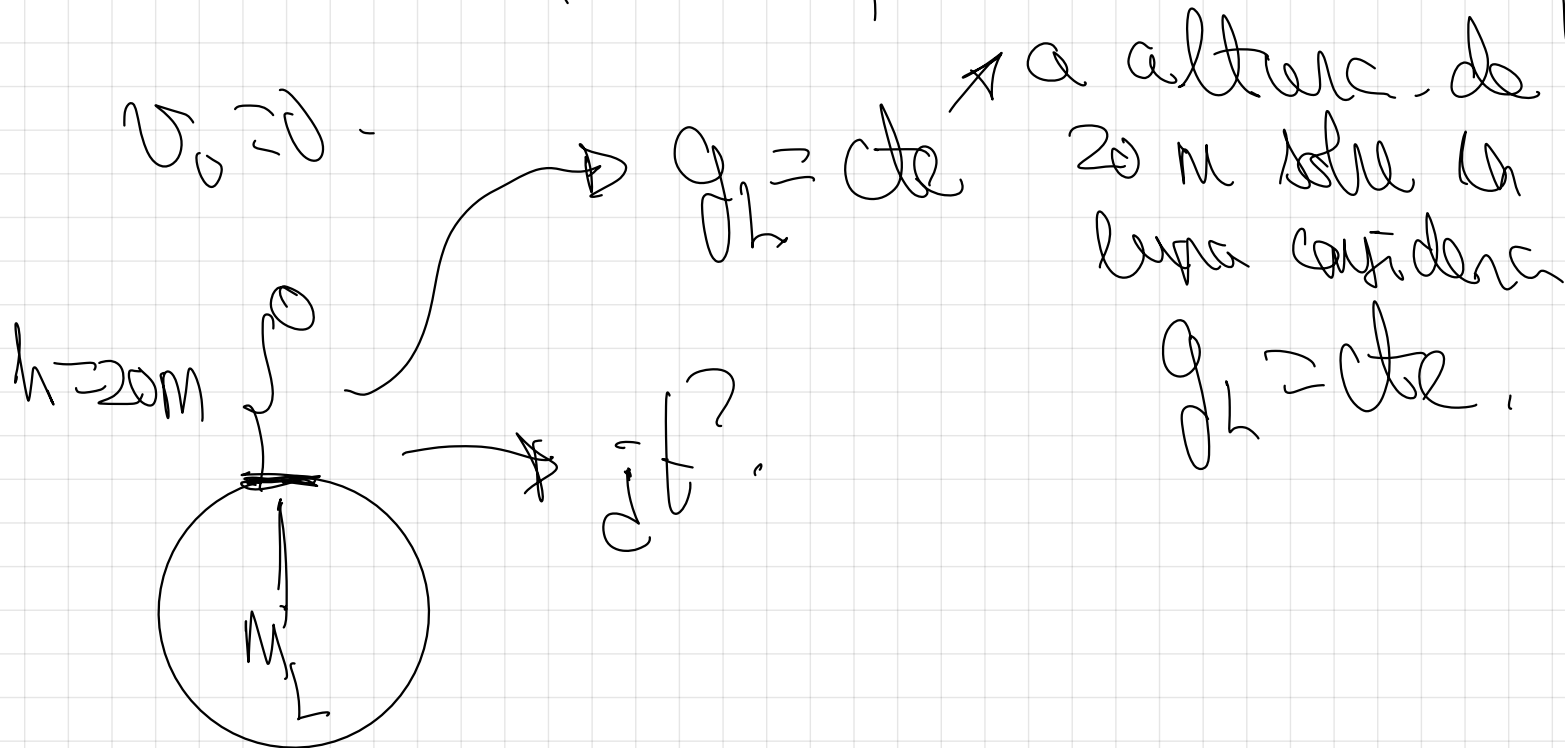
53.- Se deja caer desde 20 m de altura sobre la superficie lunar un cuerpo.

a) Calcular el tiempo que tardará en tocar el suelo

b) Si desde el suelo volvemos a lanzar el cuerpo con una velocidad de 5 m/s, calcular la altura máxima que alcanzará, así como el tiempo que tardará en alcanzar dicha altura máxima.

$$M_L = 7,36 \cdot 10^{22} \text{ Kg} \quad R_L = 1740 \text{ Km} \quad G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}$$

El tiempo solo puedo calcularlo por cinemática.



$$g_L = G \cdot \frac{M_L}{R_L^2}$$

$$g_L = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{7.36 \cdot 10^{22}}{(1.74 \cdot 10^6)^2}$$

$$g_L = 1.62 \text{ m/s}^2$$

CAÍDA.

$$v = v_0 + g \cdot t$$

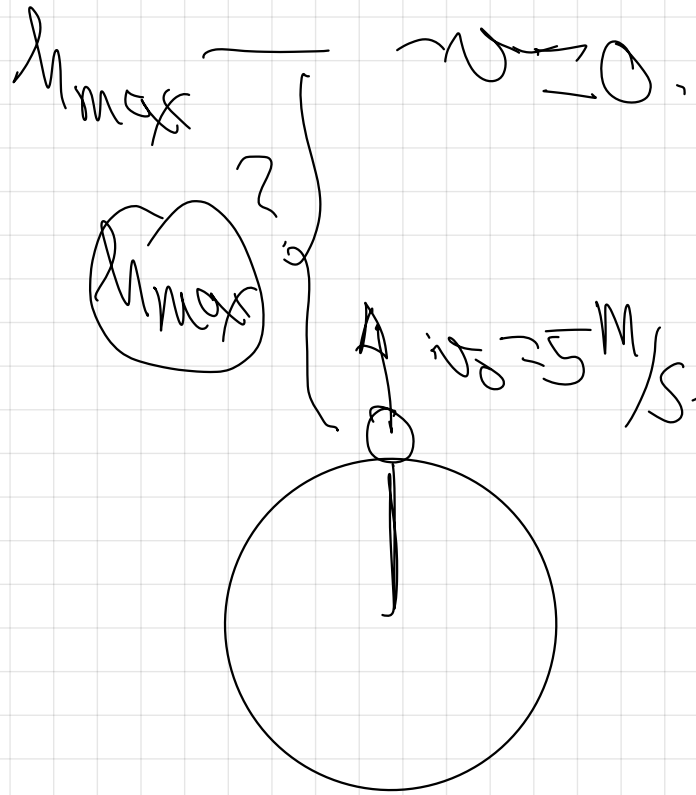
$$h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2g h$$

$$h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} g_L \cdot t^2$$

$$h = \frac{1}{2} g_L \cdot t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g_L}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{1.62}} = 4.97 \text{ s}$$



$h_{max}$  se puede calcular por cinemática y por energía.

ASCENSO  $v^2 = v_0^2 - 2g \cdot h$

Se para.  $0^2 = v_0^2 - 2g \cdot h_{max}$

$2g \cdot h_{max} = v_0^2$

$h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{5^2}{2 \cdot 9.8} = 7.71 \text{ m}$

Tambien se puede calcular  $h_{max}$  por energia.

**PREFERENTEMENTE SE DEBE HACER POR ENERGIA**

$$E_{pL} + E_{cL} = E_{p_{h_{max}}} + E_{c_{h_{max}}}$$

$$m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} m \cdot v_0^2 = m \cdot g \cdot h_{max} + 0$$

$$h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{5^2}{2 \cdot 10} = 7.5 \text{ m}$$

El tiempo solo se puede hacer  
por cinemática.

ascenso  $\Rightarrow v = v_0 - g_L t$ .

$t_{max} \Rightarrow 0 = v_0 - g_L t_{ascenso}$ .

$$g_L t_{ascenso} = v_0$$

$$t_{ascenso} = \frac{v_0}{g_L} = \frac{5}{1.62} = 3.08 \text{ s.}$$

71.- Un astronauta aterriza sobre un planeta de radio  $0,71R_T$  y mide la gravedad, que resulta ser de  $6,32 \text{ m/s}^2$

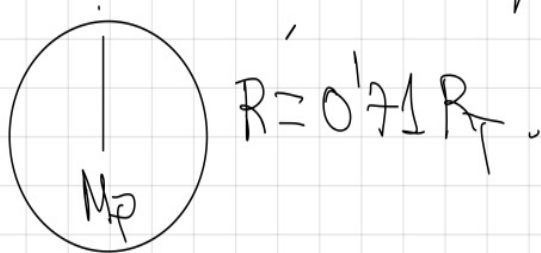
a) Expresa la relación entre la masa del planeta y la masa de la Tierra

b) Si en la Tierra, y cargando con el mismo equipo que en el planeta, el astronauta alcanzaba una altura de 20 cm al saltar verticalmente hacia arriba, ¿Qué altura alcanzará en dicho planeta?

$$g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

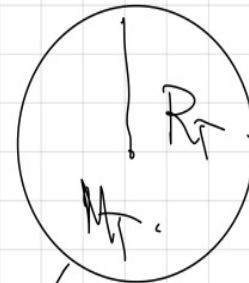
a)

$$g_P = 6,32 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



$$g_P = G \cdot \frac{M_P}{(0,71 R_T)^2}$$

$$g_T = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



$$g_T = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}$$

$$\frac{g_P}{g_T} = \frac{G \cdot \frac{M_P}{(0.71 R_T)^2}}{G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}}$$

$$\frac{M_P}{M_T} = \frac{g_P}{g_T} \cdot (0.71)^2$$

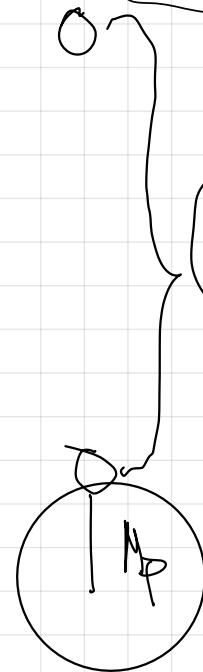
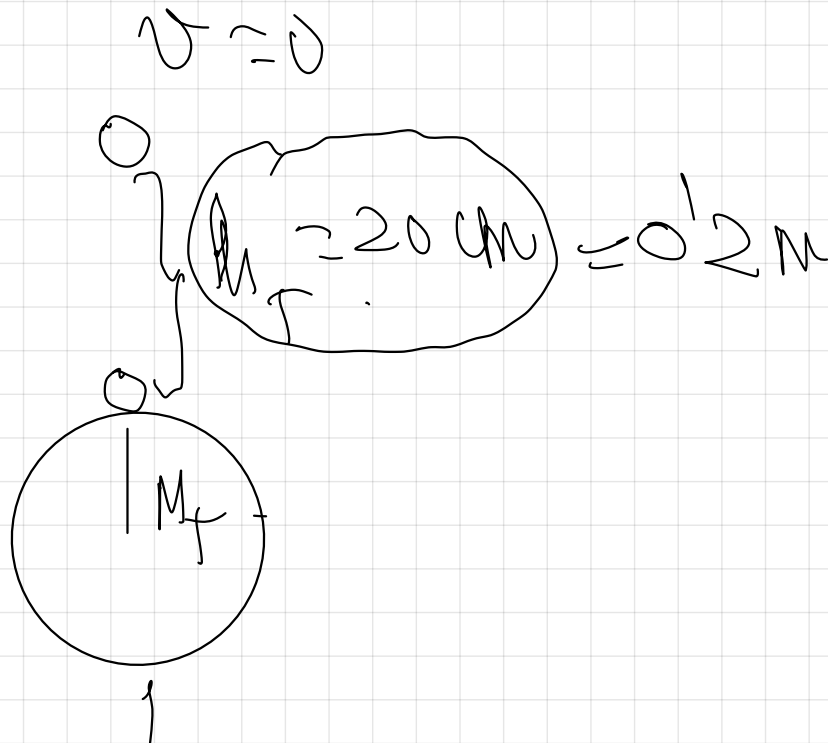
$$\frac{M_P}{M_T} = \frac{6.32 \frac{M}{s^2}}{9.8 \frac{M}{s^2}} \cdot (0.71)^2$$

$$\frac{M_P}{M_T} = 0.325$$

$$\boxed{M_P = 0.325 M_T, \quad v = 0}$$

b)

$$\frac{g_P}{g_T} = 9.8 \frac{M}{s^2}$$



$$g_P = 6.32 \frac{M}{s^2}$$

$$E_{Pt} + E_C = E_{P_{h_T}} + E_C \rightarrow 0$$

$$E_{P_P} + E_C = E_{P_{h_P}} + E_C \rightarrow 0$$

$$m g_P \cdot h + E_C = m \cdot g_T \cdot h_T + 0$$

$$m g_P \cdot h + E_C = m \cdot g_P \cdot h_P + 0$$

se suministra la misma  $E_C$  en los dos planetas

Siempre que se pueda utilizar conservación de la E

$$m g_T \cdot h_T = m \cdot g_P \cdot h_P$$

$$h_P = \frac{g_T}{g_P} \cdot h_T$$

$$h_P = \frac{9.8}{6.32} \cdot 0.2 = 0.31 \text{ m}$$

Salta 31 cm en ese planeta con menor gravedad  
o sea a mas altura

**MUY IMPORTANTE**

# ESTRUCTURA DEL EXAMEN.

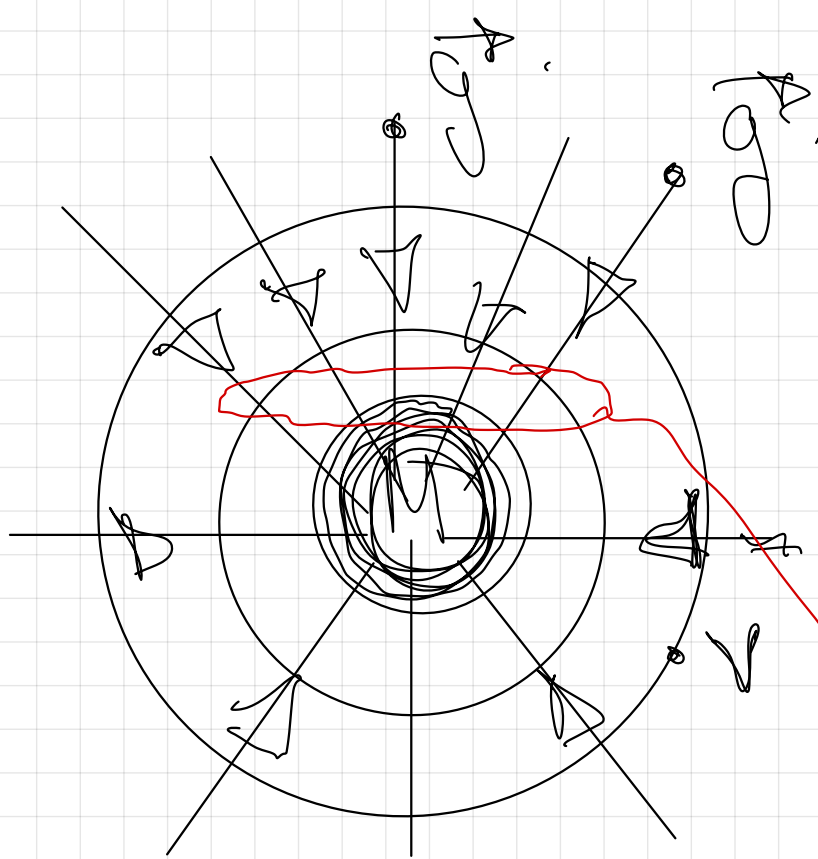
①  $\nearrow$  a) Cuestión — 1p }  
 $\searrow$  b) Ejercicio — 1,5p }

②  $\nearrow$  a) Cuestión — 1p }  
 $\searrow$  b) Ejercicio — 1,5p }

③  $\nearrow$  a) Cuestión — 1p. }  
 $\searrow$  b) Ejercicio — 1,5p }

④  $\nearrow$  a) Cuestión — 1p. }  
 $\searrow$  b) Ejercicio — 1,5p }

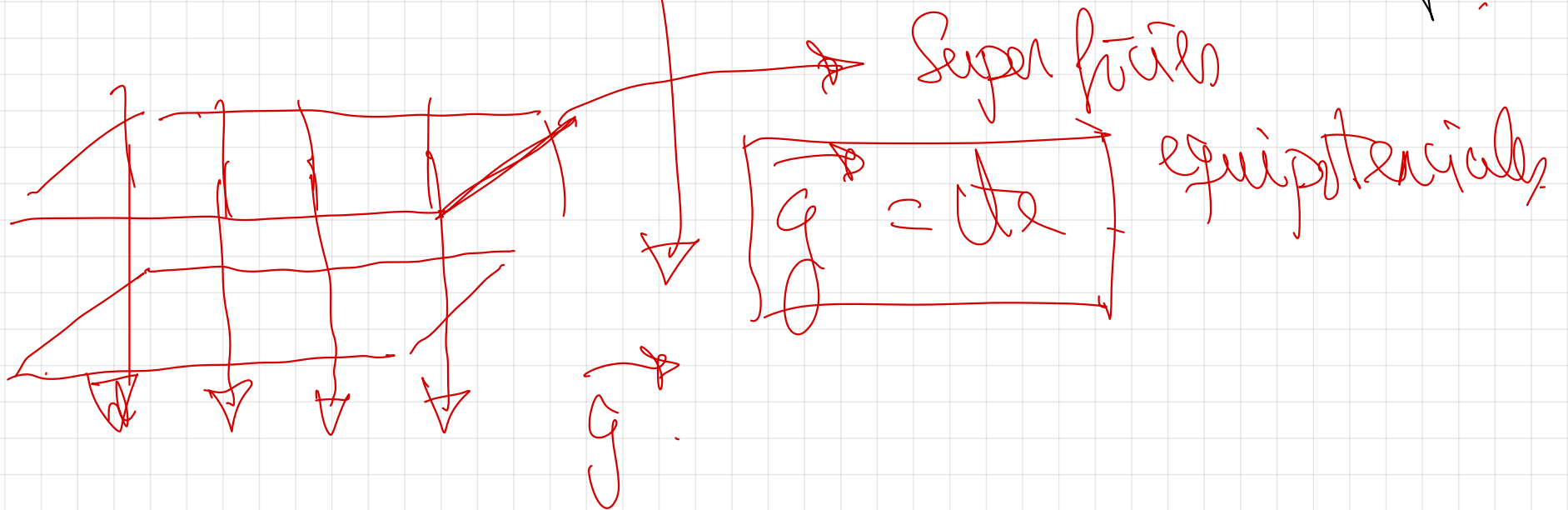
TIEMPO.  
90'



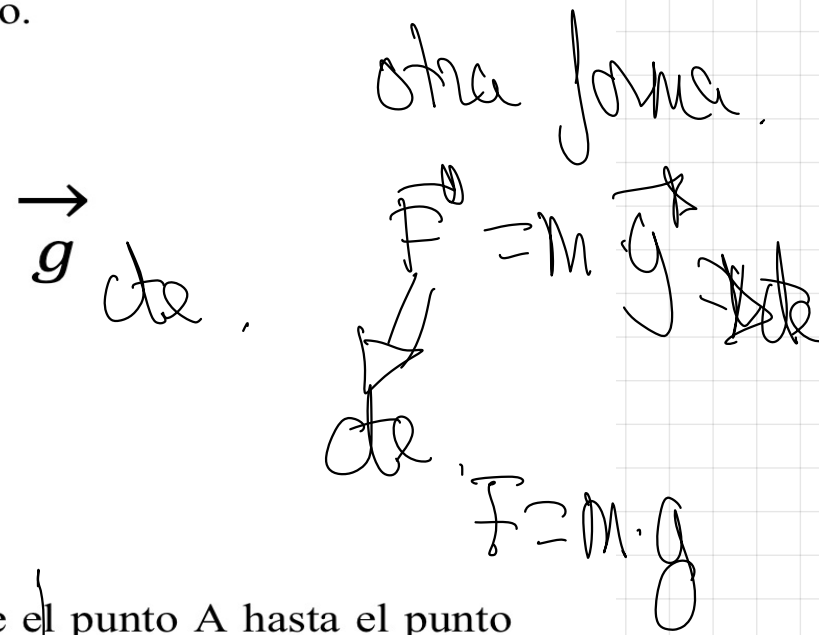
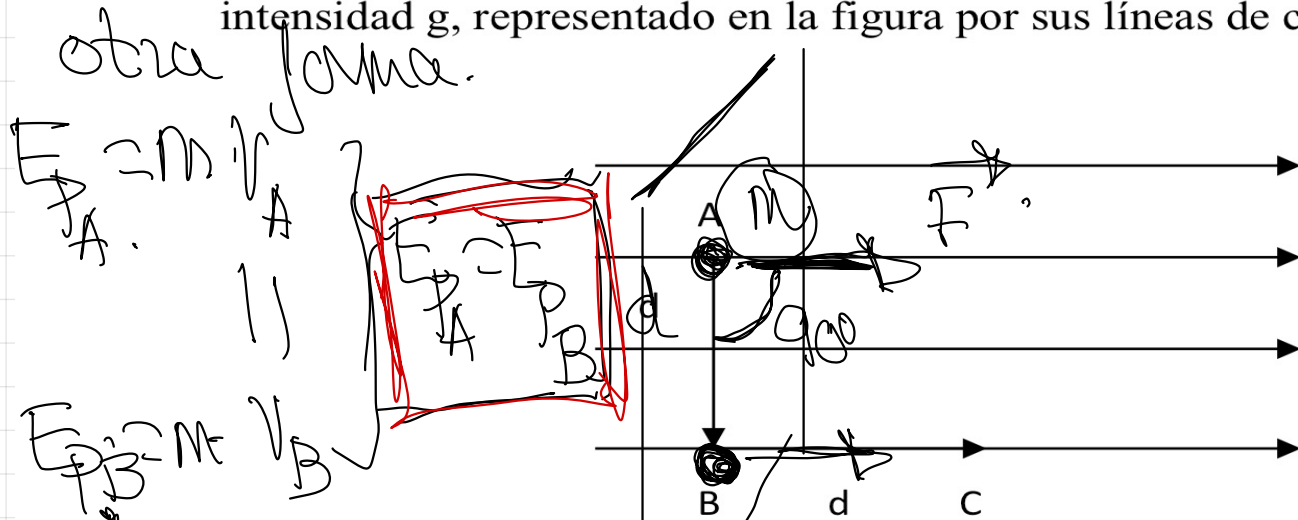
$$g = G \frac{M}{r^2}$$

$$V = -G \frac{M}{r}$$

Surf equipotenciales  $\perp$   
a las líneas campo.



14.- En una región del espacio existe un hipotético campo gravitatorio uniforme de intensidad  $g$ , representado en la figura por sus líneas de campo.



a) ¿Qué trabajo se realizará para trasladar una masa  $m$  desde el punto A hasta el punto B? ¿Cómo varía la energía potencial?

Superficie equipotencial.  $V_A = V_B$

$$W_{A \rightarrow B} = m \cdot (V_A - V_B)$$

$W_{A \rightarrow B} = 0$   $F$  conservativa.

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = F \cdot d \cdot \cos \alpha$$

$$W_{A \rightarrow B} = mg \cdot d \cdot \cos 90^\circ$$

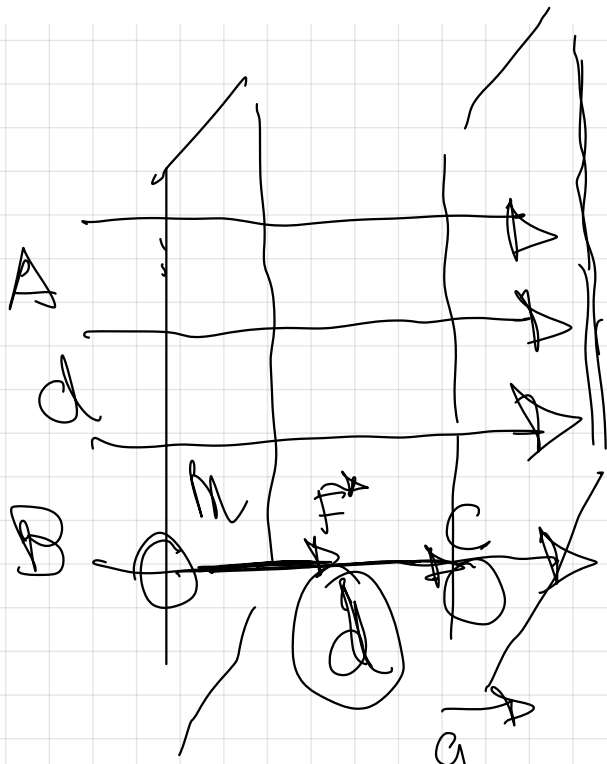
$$W_{A \rightarrow B} = 0$$

$$W_{A \rightarrow B} = -\Delta E_{PA \rightarrow B}$$

$$0 = -\Delta E_{PA \rightarrow PB} - \Delta E_{PB \rightarrow PC} \quad \boxed{E = 0}$$

b) ¿Qué trabajo se realizará para trasladar una masa  $m$  desde el punto B hasta el punto C?. ¿Aumentará o disminuirá su Energía potencial gravitatoria?.

c) ¿Qué trabajo se realizará para llevar la masa  $m$  desde C hasta A?, ¿cómo varía su energía potencial?



$$F_g = \text{cte}$$

$$F_g = m \cdot g$$

$$g = \text{cte}$$

$$W_{B \rightarrow C} = F \cdot d \cdot \cos 0^\circ$$

$$W_{B \rightarrow C} = m \cdot g \cdot d$$

En cualquier fuerza  
conservativa.

$$W_{B \rightarrow C} = -\Delta E_{PB \rightarrow PC}$$

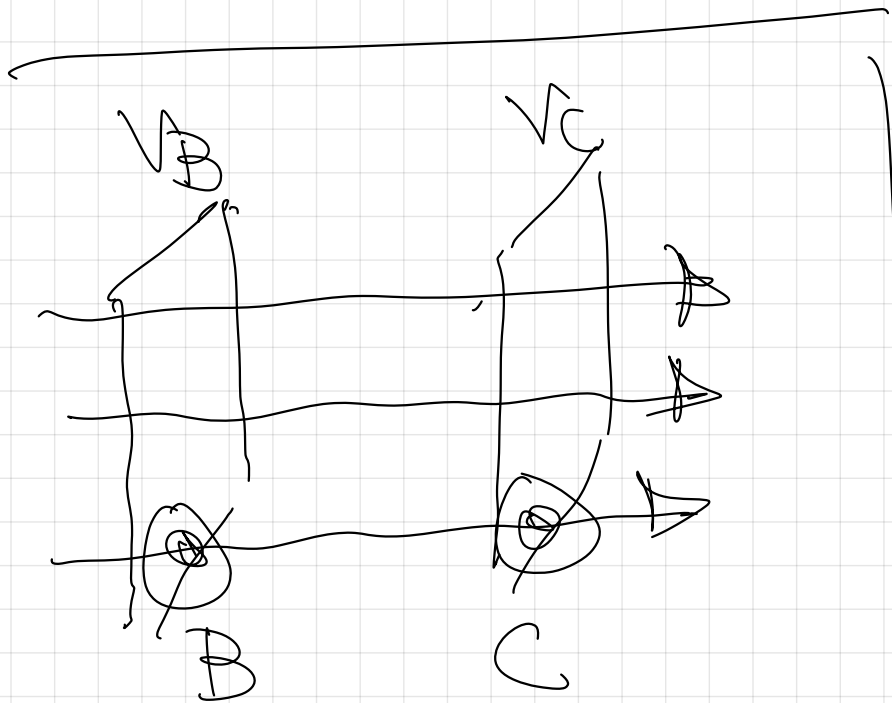
Disminuye se  
 $E_p$  gravitatoria  $\leftarrow$

$$m \cdot g \cdot d = -\Delta E_{p_{B \rightarrow C}}$$

$$\Delta E_{p_{B \rightarrow C}} = m \cdot g \cdot d$$



Este incremento negativo  
 significa que la  $E_p$ .



$$W = m \cdot g \cdot d > 0 \quad \text{Espontánea}$$

$$m \cdot (v_B - v_C) > 0$$

↑     ↑

$$F = m \cdot v$$

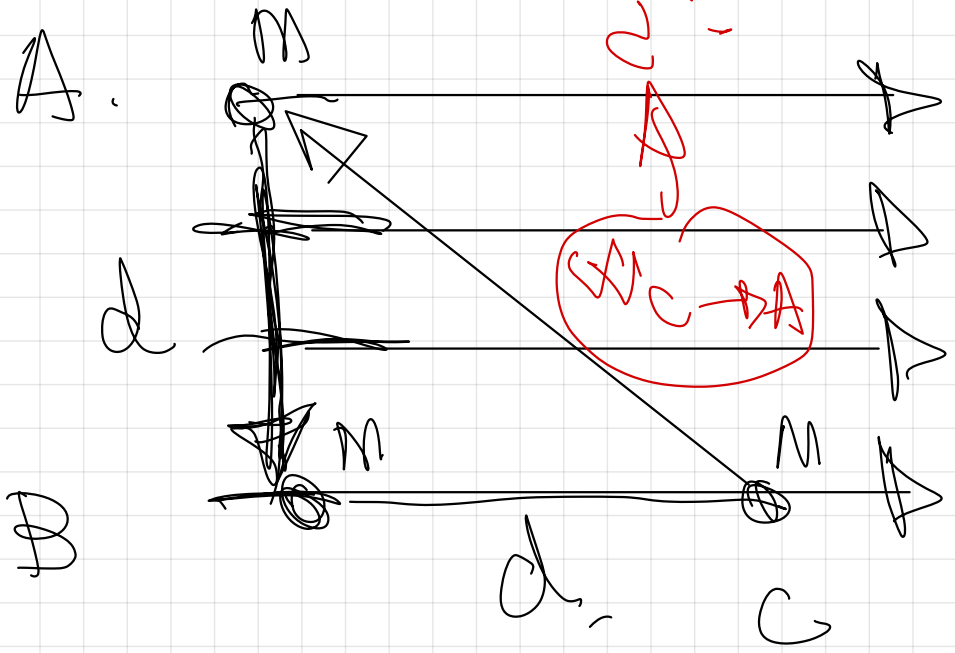
~~$$F_B > F_C$$~~

$$v_B > v_C$$

$$F_B > F_C \rightarrow$$

Disminuye la  $F$ .

Es cualquier fuerza conservativa.



$$W_{A \to A} = 0$$

$$W_{A \to A} = m \cdot (v_A - v_A) = 0$$

$$W_{A \rightarrow B} = 0$$

$$W_{B \rightarrow C} = m \cdot g \cdot d > 0$$

$$W_{A \rightarrow B} + W_{B \rightarrow C} + W_{C \rightarrow A} = 0$$

$$0 + m \cdot g \cdot d + W_{C \rightarrow A} = 0$$

$$W_{C \rightarrow A} = -m \cdot g \cdot d$$

$$W_{C \rightarrow A} = -\Delta E_{p_{C \rightarrow A}}$$

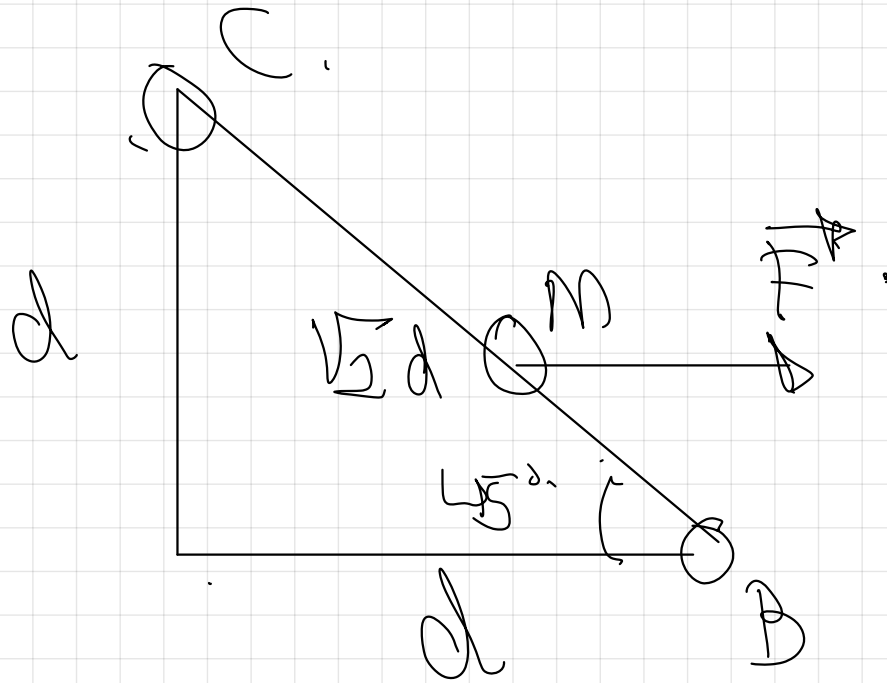
$$-m \cdot g \cdot d = -\Delta E_{p_{C \rightarrow A}}$$

$$\Delta E_{p_{C \rightarrow A}} = m \cdot g \cdot d > 0 \Rightarrow$$

La  $E_p$  aumenta

$d \cos \alpha$

---

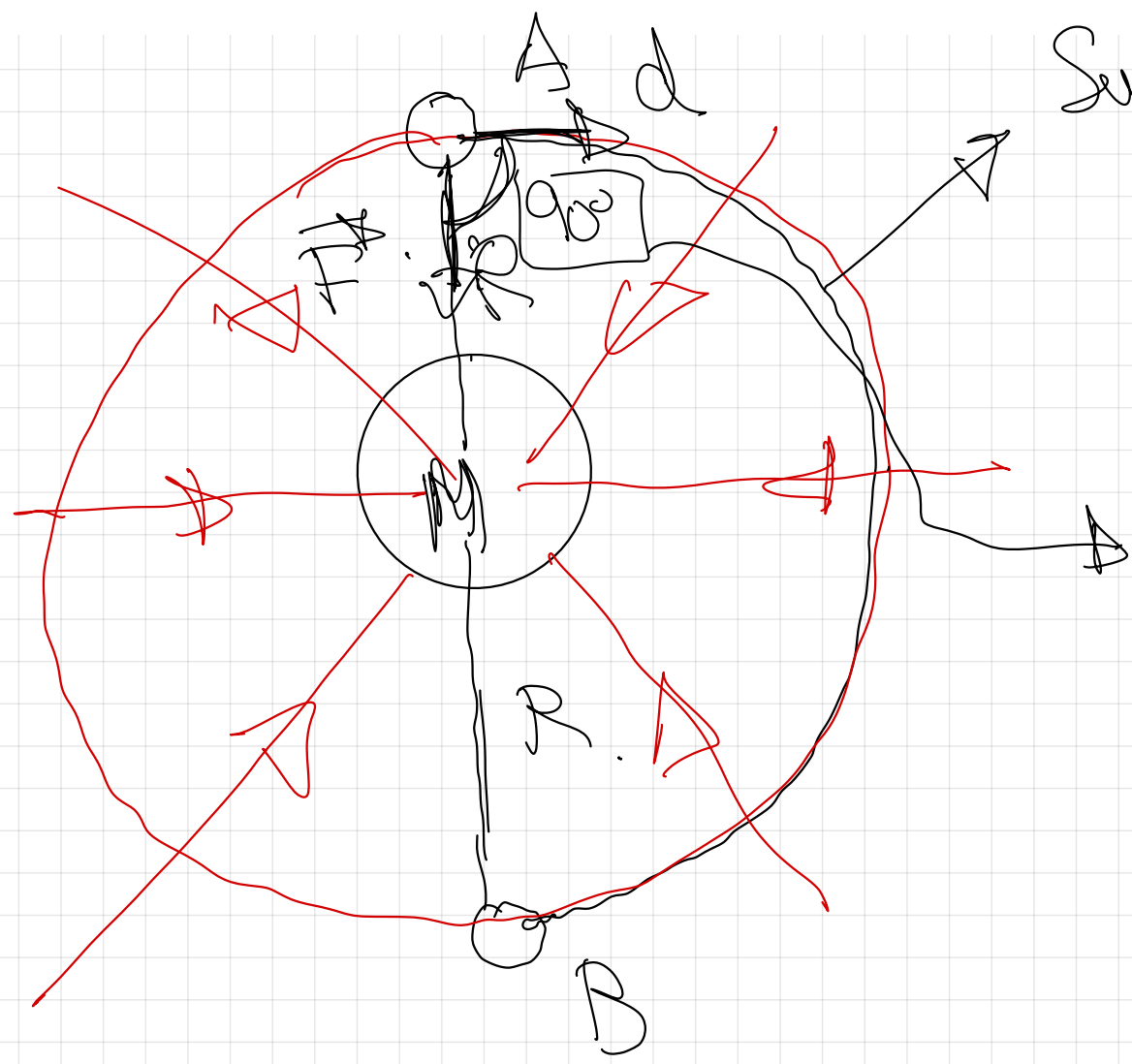


$$W = F \cdot d \cdot \cos \alpha$$

$$W_{B \rightarrow C} = m \cdot g \cdot d$$

Se explica  $\rightarrow$

66.-a) Explique las características de la interacción gravitatoria entre dos masas puntuales  
b) ¿Qué trabajo realiza la fuerza que actúa sobre una de las dos masas puntuales al describir media órbita circular de radio R alrededor de la otra?, ¿Y si se desplazara desde esa distancia R hasta el infinito?. Razone las respuestas.



Superficie equipotencial -

$$V_A = V_B$$

$$W_{A \rightarrow B} = m \cdot (V_A - V_B) = 0$$

$$W_{A \rightarrow B} = F \cdot d \cdot \cos 90^\circ = 0$$

$$W_{A \rightarrow B} = \Delta E_{P_{A \rightarrow B}}$$

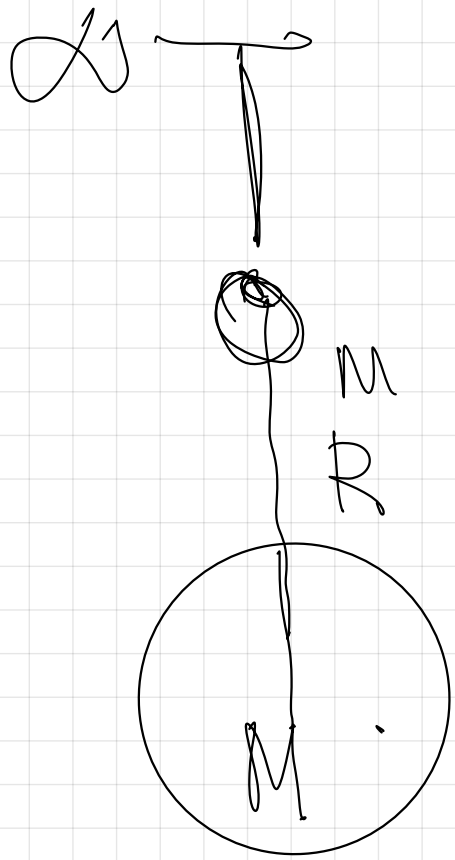
$$E_{PA} = G \cdot \frac{M \cdot M}{R}$$

$$E_{PB} = G \cdot \frac{M \cdot M}{R}$$

$$W_{A \rightarrow B} = 0$$

A curved arrow points from the equation  $W_{A \rightarrow B} = \Delta E_{P_{A \rightarrow B}}$  to the equation  $E_{PB} = G \cdot \frac{M \cdot M}{R}$ . A triangle points from the boxed equation  $E_{PA} = E_{PB}$  to the equation  $W_{A \rightarrow B} = 0$ .

$$E_{PA} = E_{PB}$$



$$W_{R \rightarrow \infty} = -\Delta E_{p_{R \rightarrow \infty}}$$

$$W_{R \rightarrow \infty} = - \left( E_{p_{\infty}} - E_{p_R} \right)$$

$$W_{R \rightarrow \infty} = - \left( 0 - E_{p_R} \right)$$

$$W_{R \rightarrow \infty} = E_{p_R}$$

$$W_{R \rightarrow \infty} = G \cdot \frac{M \cdot m}{R}$$

$E_p$  de ese sistema de dos cuerpos es el  $W$  realizado por la  $F$  gravitatoria

para llegar a n

desde el pt P al  $\infty$

pag 28

24.- Si tenemos dos masas puntuales y de igual valor separadas por una distancia  $d$

a) ¿Existe algún punto en donde el campo gravitatorio sea nulo?. En caso afirmativo, indica dónde

b) ¿Existe algún punto en donde el potencial gravitatorio sea nulo?. En caso afirmativo, indica dónde

a)

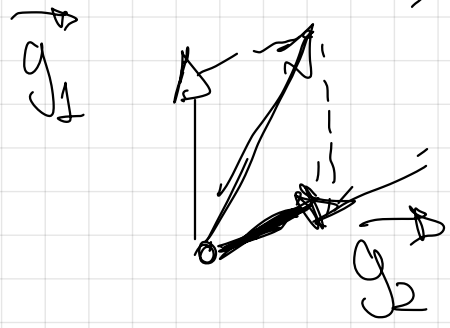
$g = G \cdot \frac{M}{r^2}$

Fuera de la recta que contiene a  $M_1$  y  $M_2$  no se anula porque  $g_1$  y  $g_2$  poseen distinta dirección.

No se anulan al tener

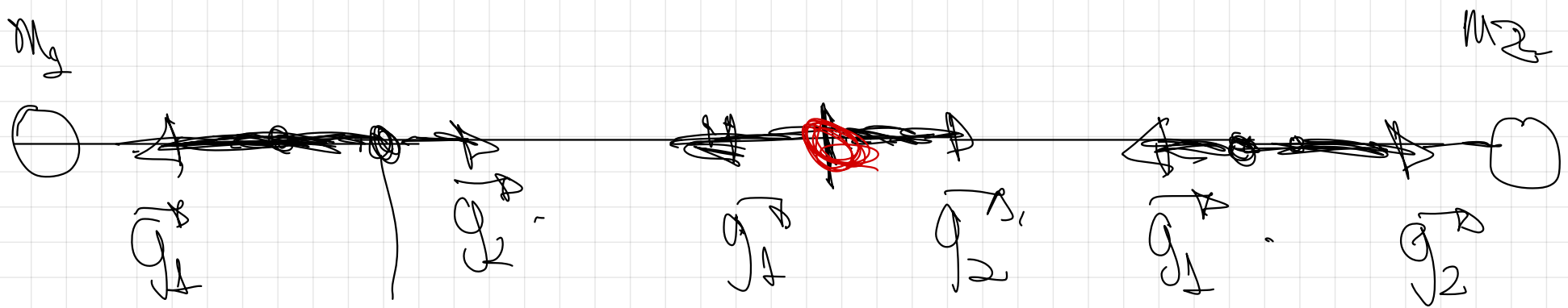
$g = 0$

el mismo sentido.



$$g = G \frac{M}{R^2}$$

$$|g_1| = |g_2|$$



$$|g_1| > |g_2|$$

No es constante.

$g \neq 0$   
 mismo módulo, misma  
 dirección, sentido contrario

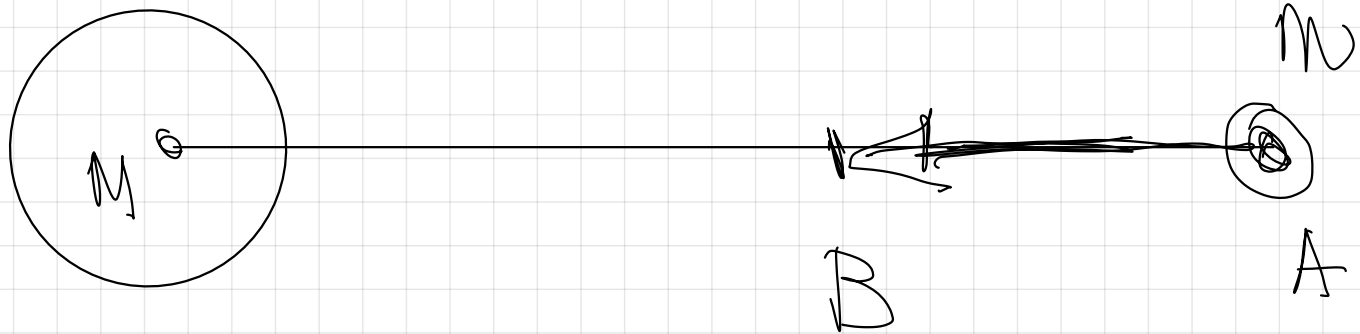
b) Según el principio de superposición  $V = \sum V_i$  el potencial (magnitud escalar) será la suma de

~~$g = 10 \text{ m/s}^2$~~

potenciales negativos que nunca se anulan (exceptuando el  $\infty$  donde por definición es nulo)

**43** - Una partícula de masa  $m$  se mueve desde un punto A hasta un punto B bajo la acción de un campo gravitatorio creado por una masa  $M$ , hacia la que se acerca

- a) Indicar cuál de los dos puntos estará a un menor potencial gravitatorio
- b) Indicar cómo variarán sus energías potencial, cinética y mecánica al pasar desde A hasta B



Otra forma: desplazamiento espontáneo

$$W_{A \rightarrow B} = m \cdot (V_A - V_B) > 0$$

$$(V_A - V_B) > 0$$

$$V_A > V_B$$

$$\uparrow V = -G \cdot \frac{M}{r \cdot \uparrow}$$

$$V_A > V_B$$

Cuando actúan fuerzas  
coger velocidades,

$$\uparrow E = -G \cdot \frac{M \cdot M}{r \cdot \uparrow}$$

$$-DE_{A \rightarrow B} = W_{A \rightarrow B} + DE_{A \rightarrow B}$$

$$E_{PA} > E_{PB}$$

$$\rightarrow \Delta E_{p_{A \rightarrow B}} > 0.$$

$$\rightarrow (E_{p_B} - E_{p_A}) > 0.$$

$$E_{p_A} - E_{p_B} > 0.$$

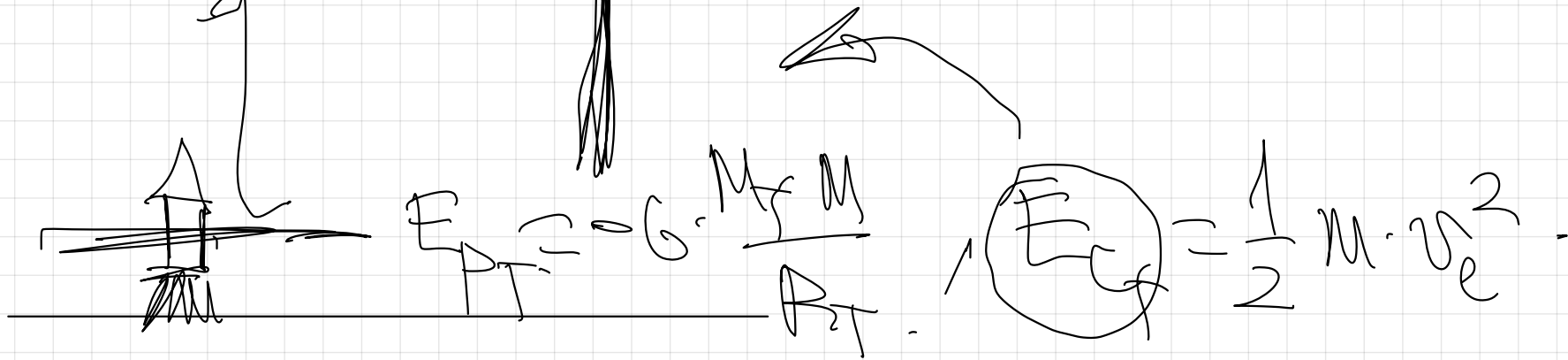
$$E_{p_A} > E_{p_B}$$

↓  
La  $E_p$  disminuye.

La disminución de  $E_p$  por medio del trabajo realizado por la fuerza conservativa provoca un aumento de  $E_c$ . La  $E_m$  se conserva (es cte)

- 36.** - Se lanza un cohete desde la superficie de la Tierra tal que escapa a la atracción gravitatoria terrestre.
- Realizar un análisis energético de dicho proceso
  - ¿Dependerá la energía cinética que es preciso comunicar al cohete del origen de energía potencial tomado?

$$E_{\infty} \geq 0, \quad E_{\infty} = 0.$$



La  $E_G$  suministrada coincide con la variación de  $E_p$  entre los 2 niveles (la Tierra y el  $\infty$ )

$$\rightarrow E_{\text{pot}} = 0.$$

$$\rightarrow E_{\text{pot}} = -G \frac{M \cdot m}{R}$$

→ Esa diferencia no cambia al variar el origen de  $E_{\text{pot}}$

La  $E_c$  suministrada es la misma. ( $E_c = \frac{1}{2} m v^2$ ), la

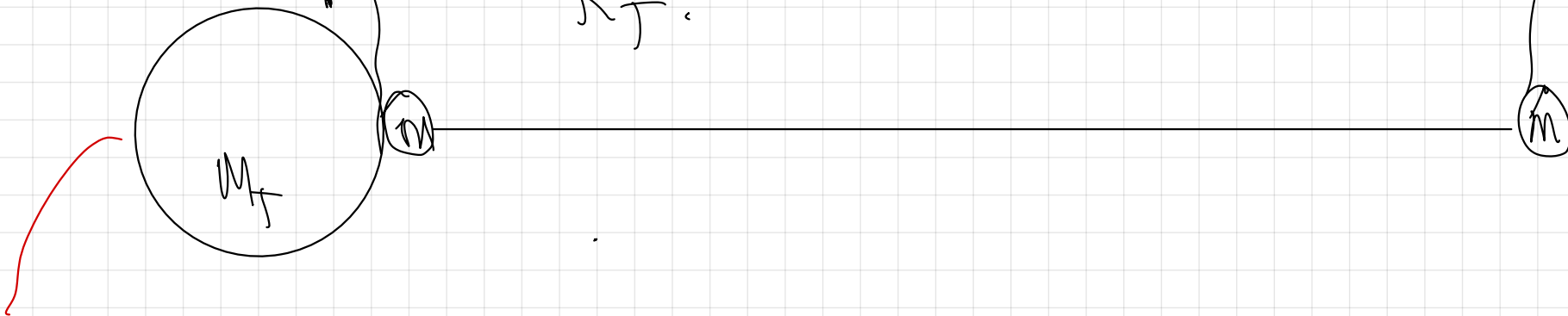
o escape también.

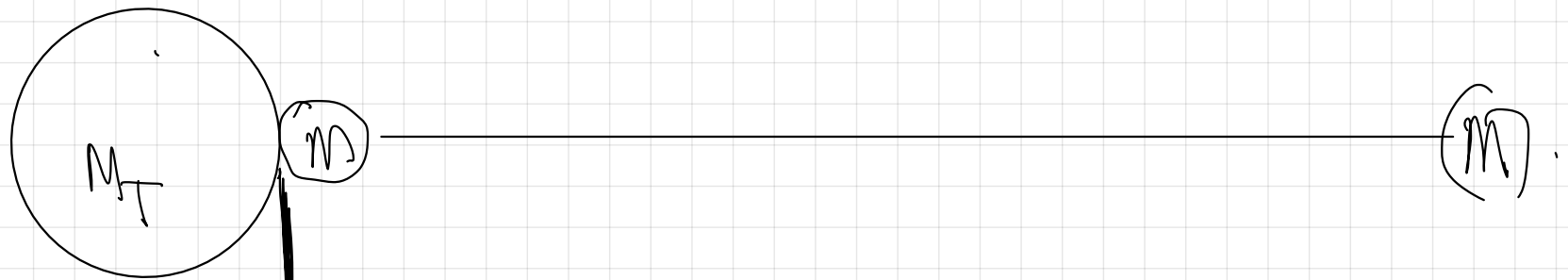
**15.** Si hipotéticamente colocásemos el cero de energía potencial gravitatoria de una partícula de masa  $m$  en la superficie de la Tierra, ¿Cuál sería el valor de la energía potencial gravitatoria de la partícula cuando ésta se encontrase a una distancia infinita de la Tierra?

Con el origen de  $E_p$  en el  $\infty$ .

$$E_p = -G \frac{M_T \cdot m}{R_T}$$

$$E_p = 0.$$





$$E_{PT} = 0.$$

$$E_{P\infty} = E^{\circ} + G \cdot \frac{M_T \cdot M}{RT}$$

La diferencia de  $E_p$  es neutra.

per caso,

$$E_{P\infty} - E_{PT} = + G \cdot \frac{M_T \cdot M}{RT}$$

2º caso.

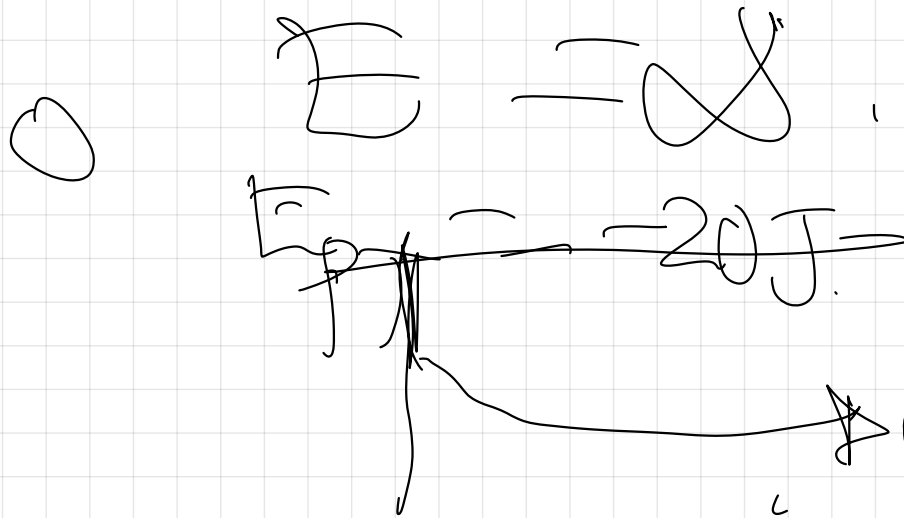
$$F_{\text{pz}} - F_{\text{PT}} = + G \cdot \frac{M_T \cdot M}{R_T^2}$$

$$F_{\text{pz}} = + G \cdot \frac{M_T \cdot M}{R_T^2}$$

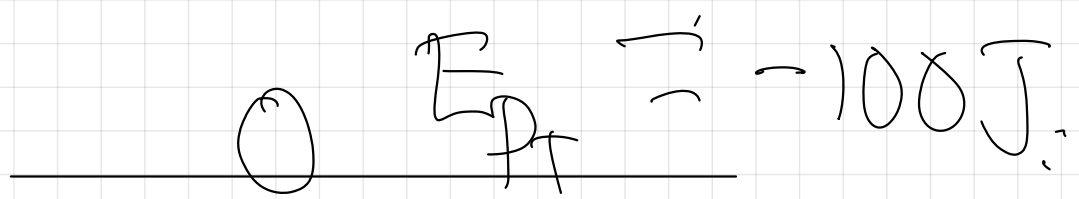
~~potencia total:~~

Page 30

37. ¿Qué ocurriría en la realidad si lanzamos un cohete desde la Tierra con una velocidad igual a la velocidad de escape?

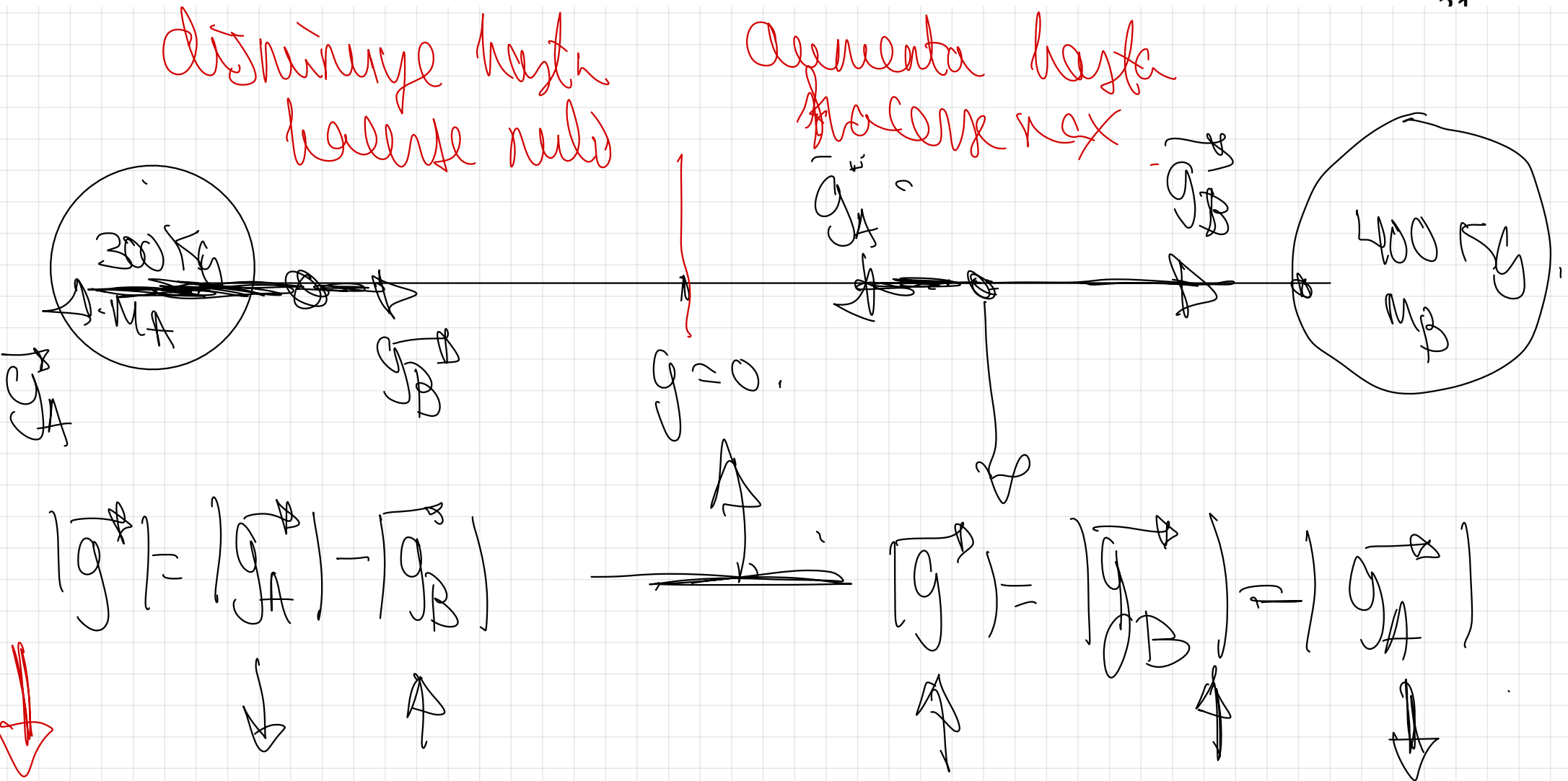


$E_c = 0J$



$E_c = 20J$

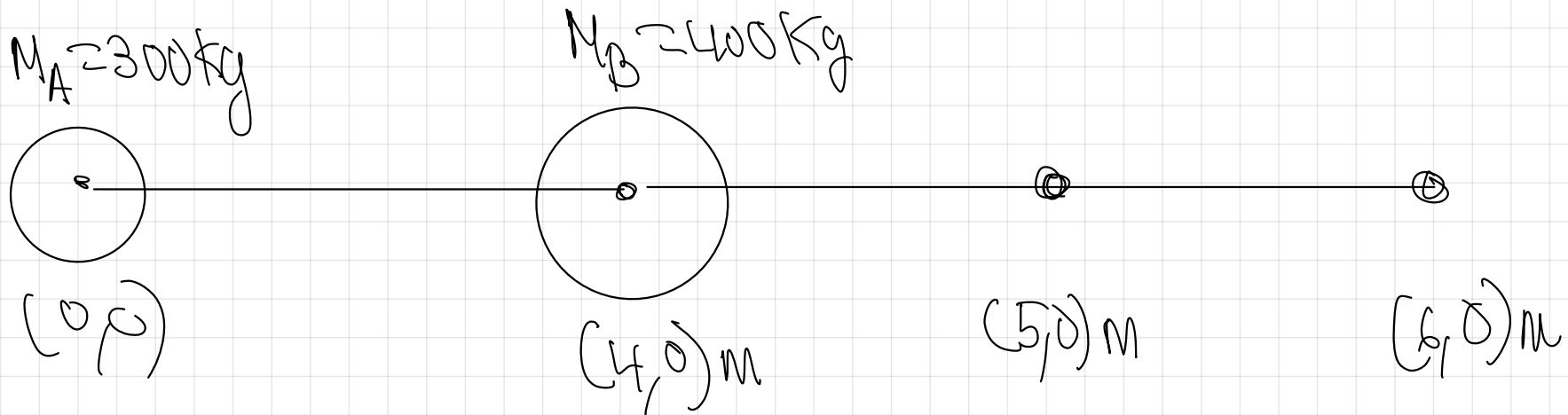
- 45.** Si tenemos una masa  $M_A=300$  Kg en  $(0,0)$  m y otra masa  $M_B=400$  Kg en  $(4,0)$  m  
 a) Describir cualitativamente la variación que experimentará el campo gravitatorio al pasar de  $M_A$  a  $M_b$



b) Calcular los potenciales gravitatorios en los puntos (5,0)m y (6,0)m

c) Calcular la velocidad con la que una partícula, partiendo desde el reposo en (6,0) m llegaría al punto (5,0) m

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}$$



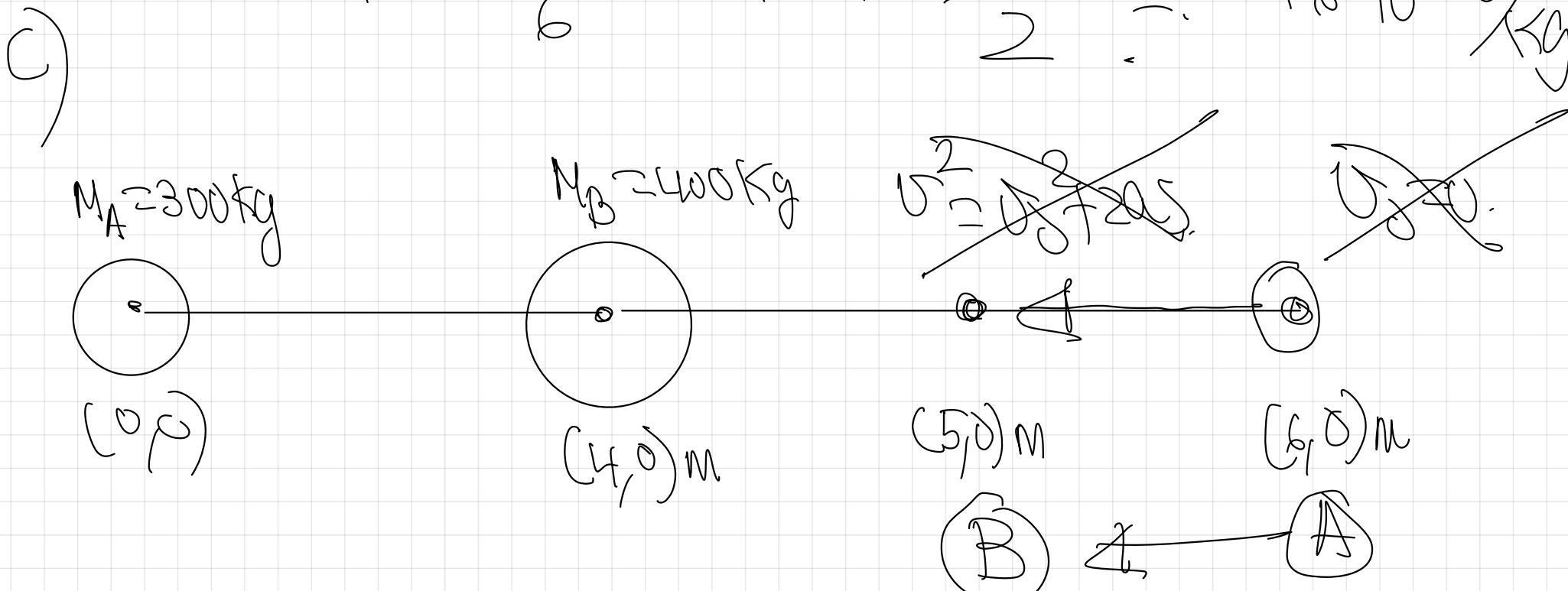
Principio de superposición.

$$V_{(5,0) \text{ m}} = V_A + V_B = -G \frac{M_A}{r_A} + \left( -G \frac{M_B}{r_B} \right)$$

$$= -6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{300}{5} - 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{400}{1} = -3 \cdot 10^{-8} \text{ J/Kg}$$

$$V(6,0)\text{m} = V_A + V_B = -G \cdot \frac{M_A}{r_A} + \left( -G \cdot \frac{M_B}{r_B} \right) =$$

$$= -6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{300}{6} - 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{400}{2} = -1.6 \cdot 10^{-8} \text{ J/Kg}$$



Forma lins.

$$\Rightarrow \Delta E_p = W = \Delta E_c$$

~~URVA~~

$$\Delta E_{pA \rightarrow B} = \Delta E_{cA \rightarrow B}$$

$$\Delta E_p = \Delta E_c$$

$$E_p = E_c$$

$$m \cdot v_A = m \cdot v_B = \frac{1}{2} m v_B^2$$

Forma Sabrin Abde

$$W_{A \rightarrow B} = \Delta E_{cA \rightarrow B}$$

$$m \cdot (v_A - v_B) = E_c - E_c$$

$$m \cdot (v_A - v_B) = \frac{1}{2} m v_B^2$$

$$\cancel{m} (v_A - v_B) = \frac{1}{2} \cancel{m} v^2$$

$$v = \sqrt{2(v_A - v_B)}$$

$$v = \sqrt{2(v_A - v_B)}$$

$$v_{(5,0)M} = \sqrt{2 - (-16 \cdot 10^{-8} - (-3 \cdot 10^8))}$$
$$v_{(5,0)M} = 167 \cdot 10^{-4} \frac{m}{s}$$

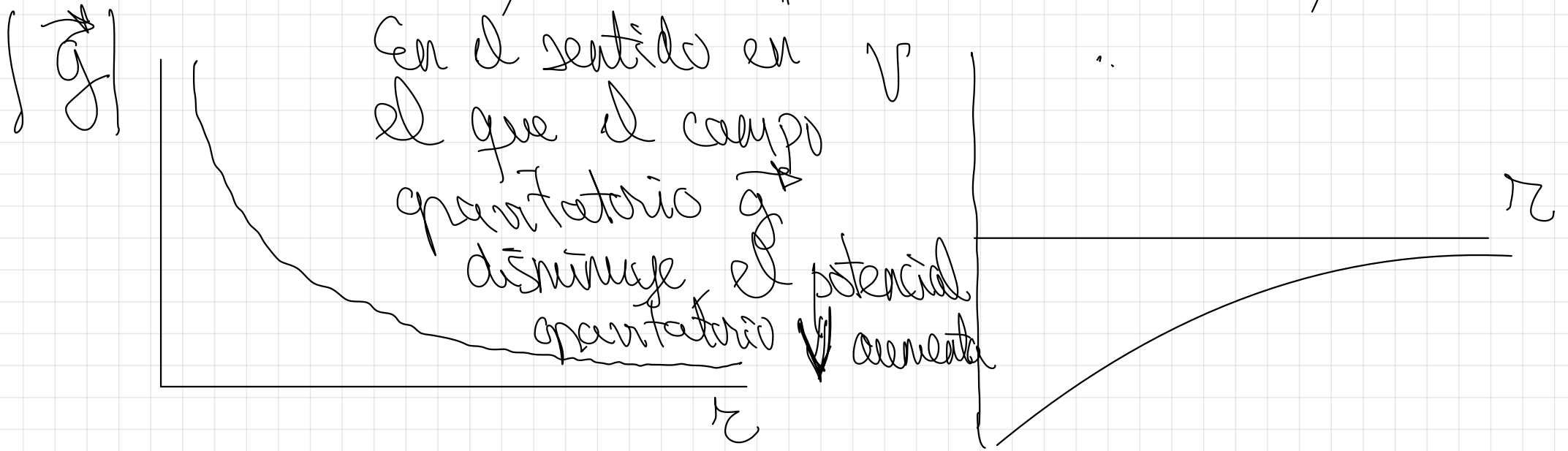
# 65.- Relación entre el campo y el potencial gravitatorios

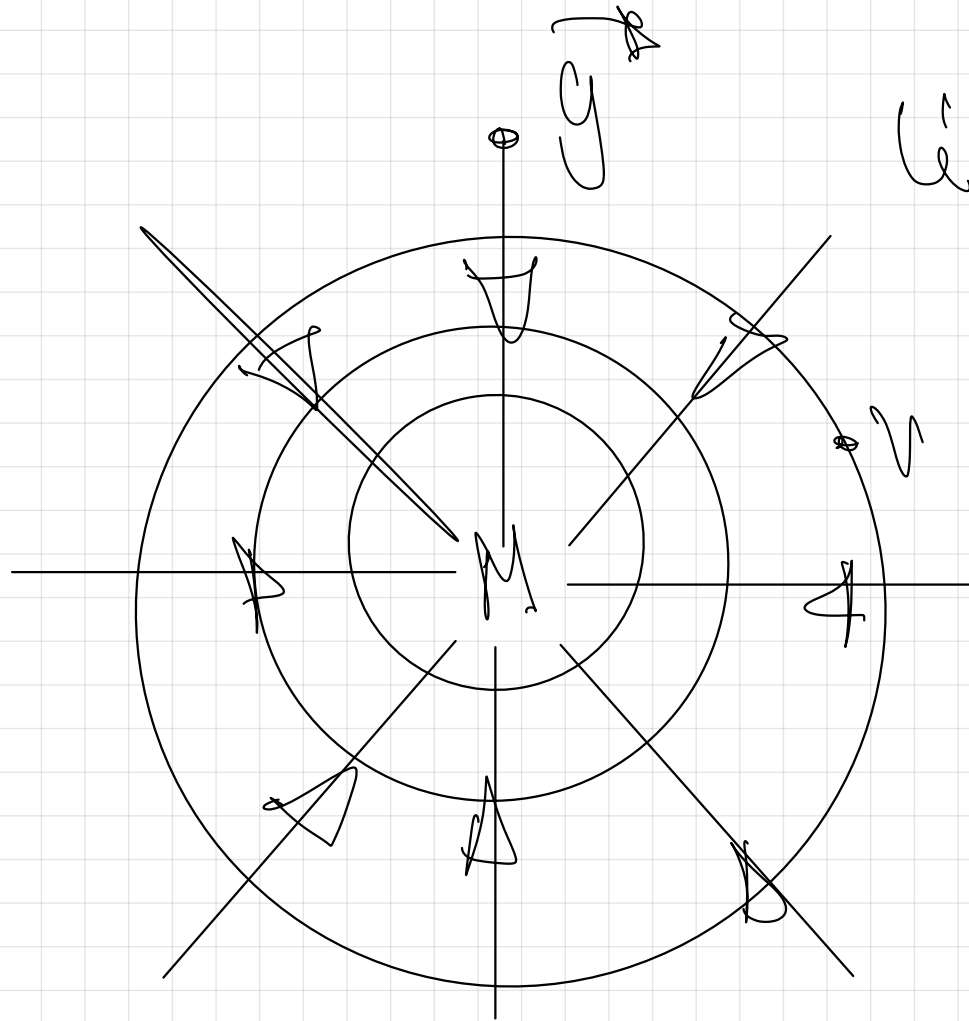
Campo gravitatorio  
vectorial

Potencial gravitatorio,  
Escalar

$$g = \frac{F}{m} = \frac{G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}}{m} = G \cdot \frac{M}{r^2}$$

$$V = \frac{E_p}{m} = \frac{-G \cdot \frac{M \cdot m}{r}}{m} = -G \cdot \frac{M}{r}$$





líneas de campo  $\perp$   
a las superficies  
equipotenciales.

(14-E) a) Explique las características de la interacción gravitatoria entre dos masas puntuales.

b) Dos partículas puntuales de masa  $m$  están separadas una distancia  $r$ . Al cabo de un cierto tiempo la masa de la primera se ha reducido a la mitad y la de la segunda a la octava parte. Para que la fuerza de atracción entre ellas tenga igual valor que el inicial, ¿es necesario acercarlas o alejarlas? Razone la respuesta.

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$



A diagram showing a force vector  $F$  pointing to the left towards a particle of mass  $m/2$ . The force is labeled  $F = G \cdot \frac{m^2}{r^2}$ .

Ha de ser igual.



$$\leftarrow \begin{array}{c} \downarrow \\ \textcircled{F} \end{array} \cdot \frac{\frac{m}{2} \cdot \frac{m}{8}}{(r^1)^2}$$

$$\cancel{6} \cdot \frac{\cancel{m^2}}{r^2} = \frac{\cancel{6} \cdot \frac{\cancel{m^2}}{16}}{(r^1)^2}$$

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\frac{1}{16}}{(r^1)^2}$$

$$(r^1)^2 = \frac{1}{16} r^2$$

$$\sqrt{(r^1)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} r^2}$$

$$F \approx G \cdot \frac{\frac{M}{2} \cdot \frac{M}{8}}{\left(\frac{1}{4} r\right)^2} \approx G \cdot \frac{1}{16} \frac{M^2}{r^2}$$

$$r' = \frac{1}{4} r$$

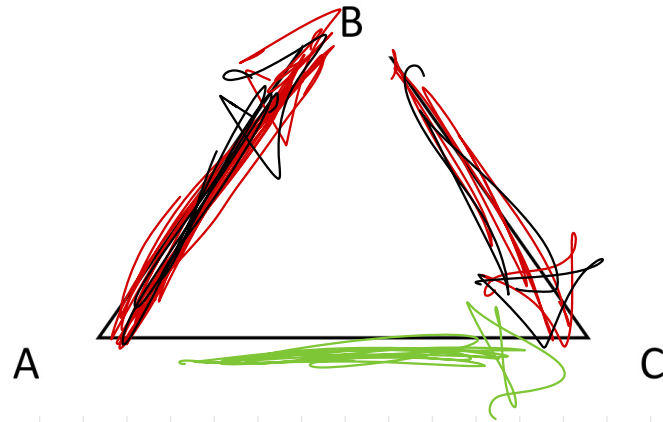
$$G \cdot \frac{1}{16} \frac{M^2}{r^2} = G \cdot \frac{M^2}{r^2}$$

63.- Una masa  $M$  se mueve desde el punto A hasta el punto B de la figura y posteriormente descende hasta el C. Compare el trabajo mecánico realizado en el desplazamiento A-B-C con el que se hubiera realizado en un desplazamiento horizontal desde A hasta C

a) Si no hay rozamiento

b) En presencia de rozamiento

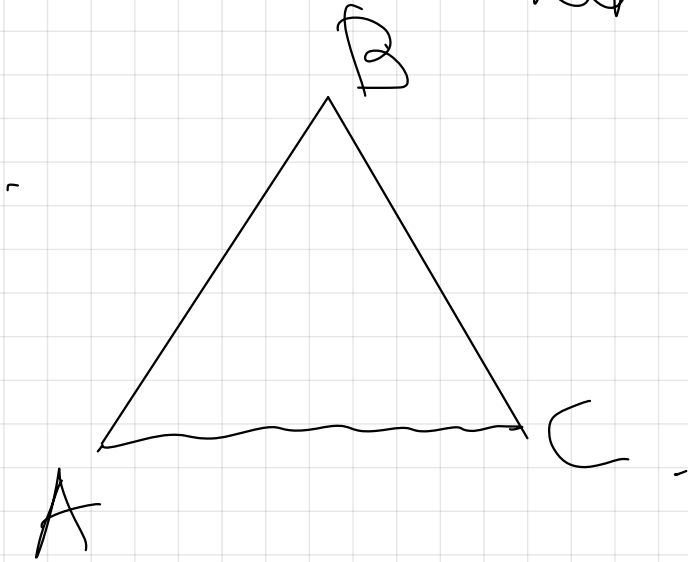
Justifique las respuestas



$$W_{A \rightarrow B \rightarrow C} = m \cdot (v_A - v_C)$$
$$W_{A \rightarrow C} = m \cdot (v_A - v_C)$$

$F_{\text{gravit}}$  es  
 $F$  conservativa  
; trabajo  
Independiente  
de la  
trayectoria;

Si existe estancamiento -



$$W_{A \rightarrow B \rightarrow C} > W_{AC}$$

Ya que la pérdida energética es mayor,

22.- La Luna describe una órbita circular en torno a la Tierra en 28 días

a) Calcular la distancia entre los centros de la Tierra y la Luna.

b) Calcular el valor de la masa de la Luna sabiendo que una partícula de masa  $m$  podría estar en equilibrio en un punto alineado con los centros de la Tierra y de la Luna, a una distancia del centro de la Tierra de  $3,4 \cdot 10^8$  m.

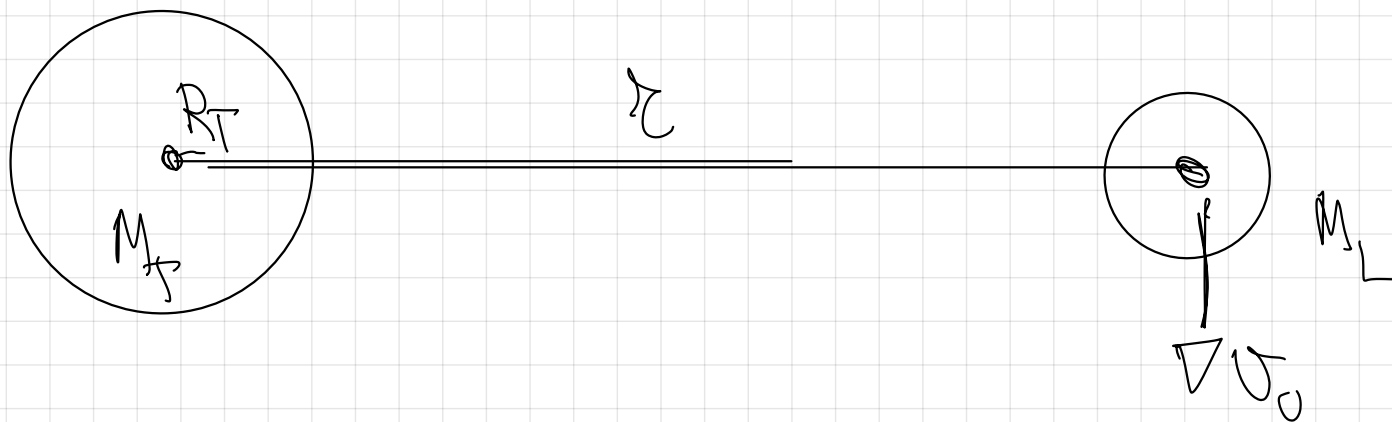
$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}, M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ Kg}$$

## SELECTIVIDAD 2018

18-E) a) Si la masa y el radio de la Tierra se duplican, razone si las siguientes afirmaciones son correctas: (i) El periodo orbital de la Luna se duplica; (ii) su velocidad orbital permanece constante.

b) La masa de Marte es aproximadamente la décima parte de la masa de la Tierra y su radio la mitad del radio terrestre. Calcule cuál sería la masa y el peso en la superficie de Marte de una persona que en la superficie terrestre tuviera un peso de 700 N.

$$g_T = 9,8 \text{ m s}^{-2}$$



deduzco la  
expresión del  
periodo  $T_2$ .



Conductivity  $\sigma$  abhängig

$$f_g = \frac{1}{m}$$

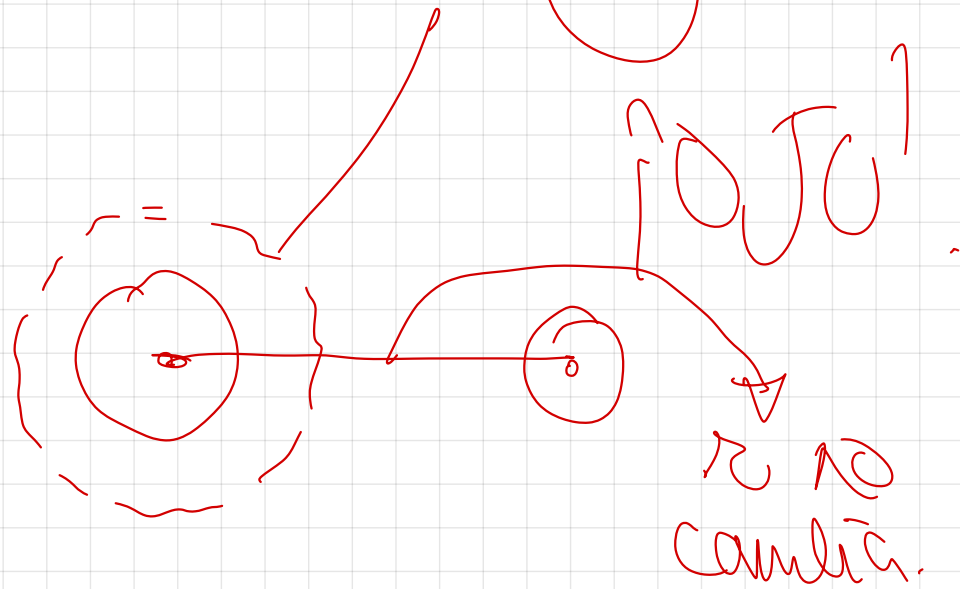
$$G = \frac{N \cdot N}{r^2} = \frac{N^2}{r^2} \cdot \frac{v_0^2}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

$$2\pi r = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

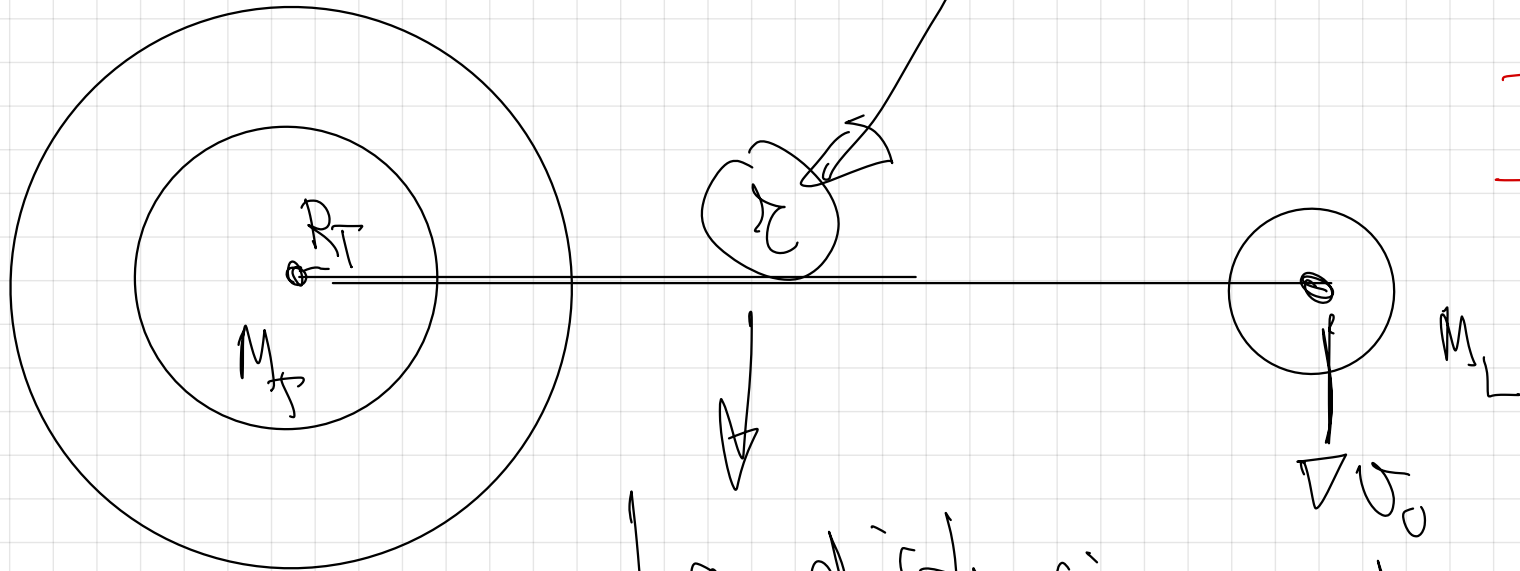
$$\Rightarrow v' = \sqrt{\frac{G \cdot 2M}{r}}$$

$$v' = \sqrt{2} v$$



$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{GM_T}}$$

$$T' = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{G \cdot 2M_T}}$$



La distancia centro-centro

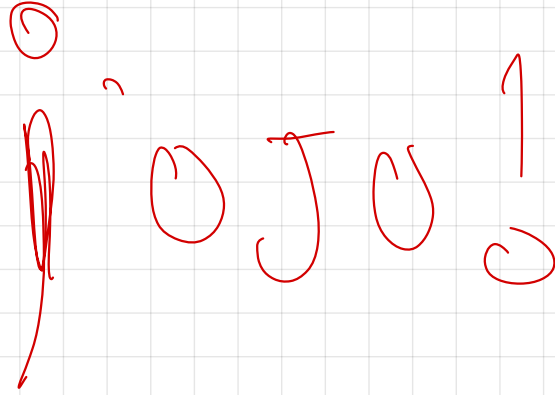
$$\frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{G \cdot 2M_T}}$$

La masa de la  
Terra se duplica  
y  $R_T$  también.

$$\frac{T'}{T} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$T' = \frac{T}{\sqrt{2}}$$

Siempre siendo la misma.



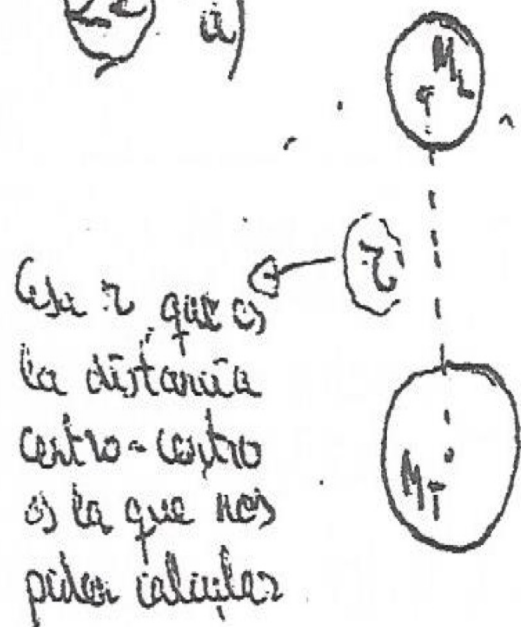
**22.** La Luna describe una órbita circular en torno a la Tierra en 28 días

a) Calcular la distancia entre los centros de la Tierra y la Luna.

b) Calcular el valor de la masa de la Luna sabiendo que una partícula de masa  $m$  podría estar en equilibrio en un punto alineado con los centros de la Tierra y de la Luna, a una distancia del centro de la Tierra de  $3,4 \cdot 10^8$  m.

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}, M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ Kg}$$

22) a)



$F_g = F_n \Rightarrow$  Ya que la luna orbita en torno a la Tierra

$$G \cdot \frac{M_T \cdot M_L}{r^2} = M_L \cdot \frac{v^2}{r} \quad \rightarrow \quad v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$G \cdot \frac{M_T}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$$

$$G \cdot M_T \cdot T^2 = 4\pi^2 r^3$$

misso pte

$$r^3 = \frac{G \cdot M_T}{4\pi^2} \cdot T^2$$

Con esto demostramos la 3ª ley de Kepler

$$T^2 = \text{cte} \cdot r^3$$

$$T^2 = C \cdot r^3$$

a) (continuación)

$$G \cdot M_T \cdot T^2 = 4\pi^2 r^3$$

Nos piden la distancia entre los centros  $r$

$$r^3 = \frac{G \cdot M_T}{4\pi^2} \cdot T^2$$

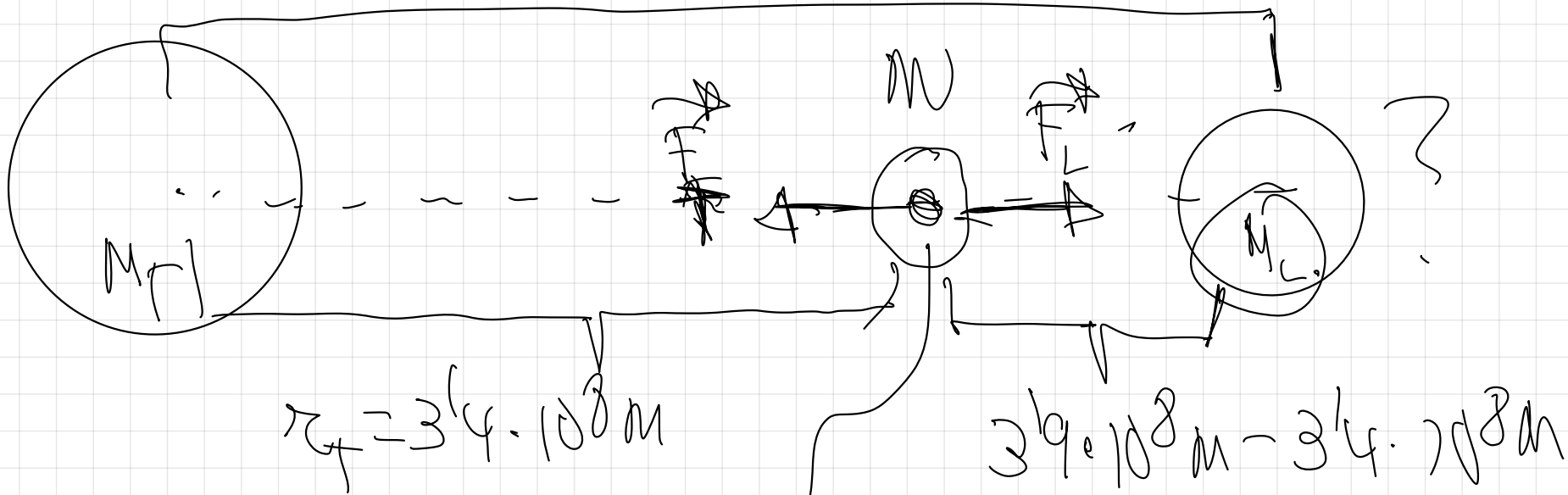
$$\Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_T \cdot T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot (28 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60)^2}{4\pi^2}}$$

$\rightarrow T$  pasado a segundos

$$r = 3.9 \cdot 10^8 \text{ m}$$

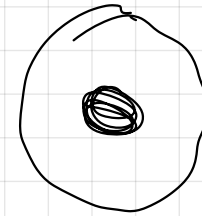
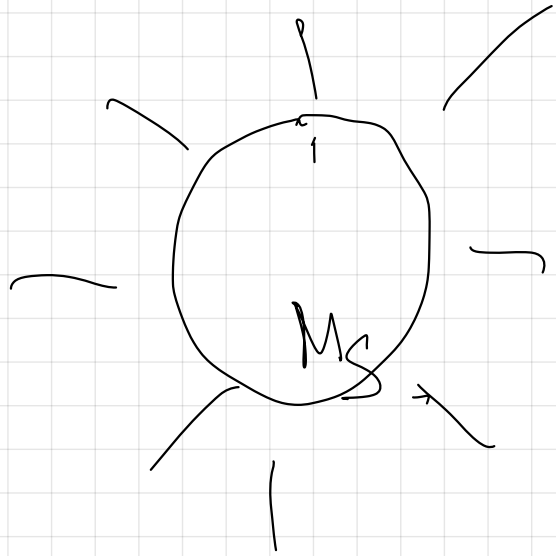
Esta distancia la hemos

$$r = 3.9 \cdot 10^8 \text{ m}$$



$$G \cdot \frac{M_1 \cdot M}{r_1^2} = G \cdot \frac{M \cdot M_2}{r_2^2}$$

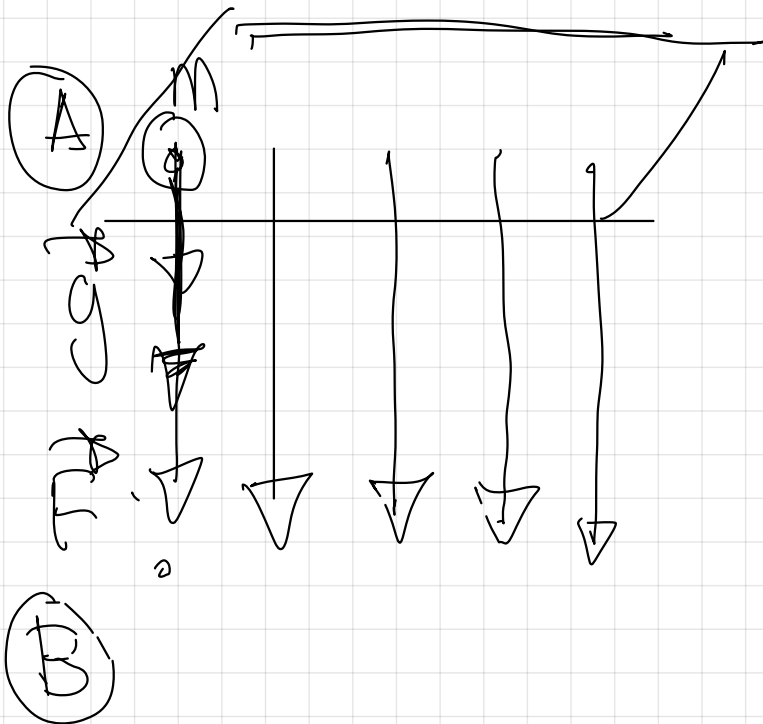
8 min.



HT

68, 52, 61, 73, 8, 9, 226 - 6, 28

**68** - Una partícula se mueve en un campo gravitatorio uniforme, ¿aumenta o disminuye su energía potencial al moverse en la dirección y el sentido de la fuerza ejercida por el campo?, ¿y si se moviera en una dirección perpendicular a dicha fuerza?. Razone las respuestas



$$W_{A \rightarrow B} > 0$$

$$W = -\Delta E_{PA \rightarrow B}$$

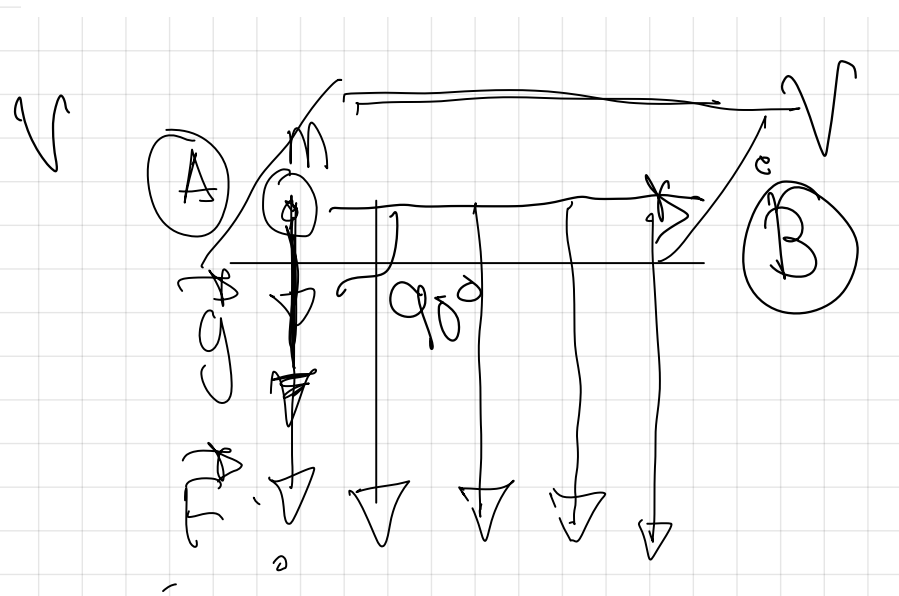
$$-\Delta E_{PA \rightarrow B} > 0$$

$$= (E_{P_B} - E_{P_A}) > 0.$$

$$E_{P_A} - E_{P_B} > 0.$$

La  $E_p$  diminue  $\leftarrow \left[ E_{P_A} > E_{P_B} \right]$

68.- Una partícula se mueve en un campo gravitatorio uniforme, ¿aumenta o disminuye su energía potencial al moverse en la dirección y el sentido de la fuerza ejercida por el campo?, ¿y si se moviera en una dirección perpendicular a dicha fuerza?. Razone las respuestas



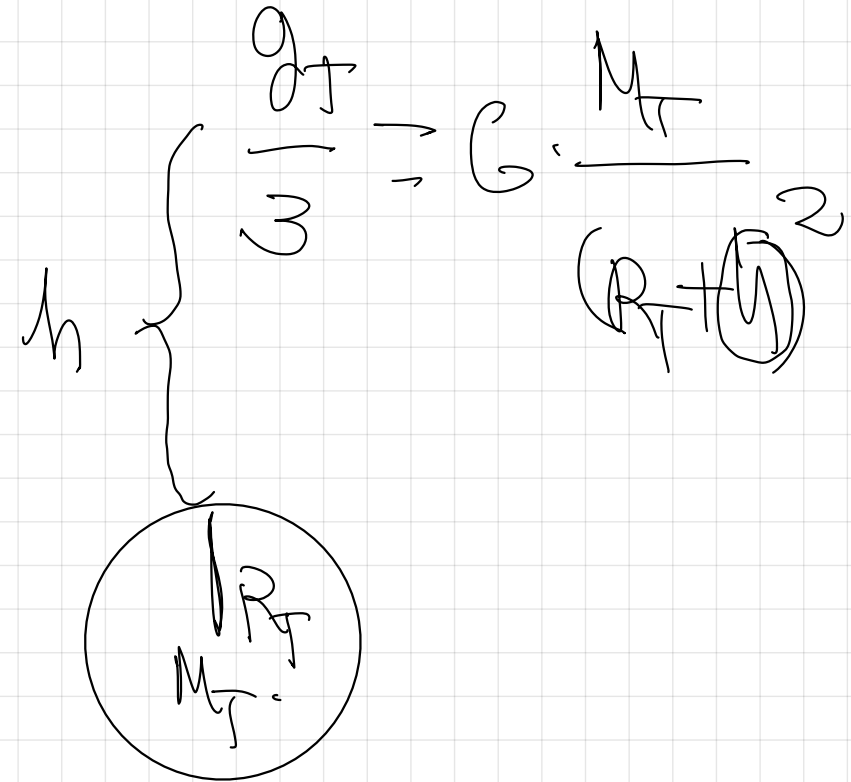
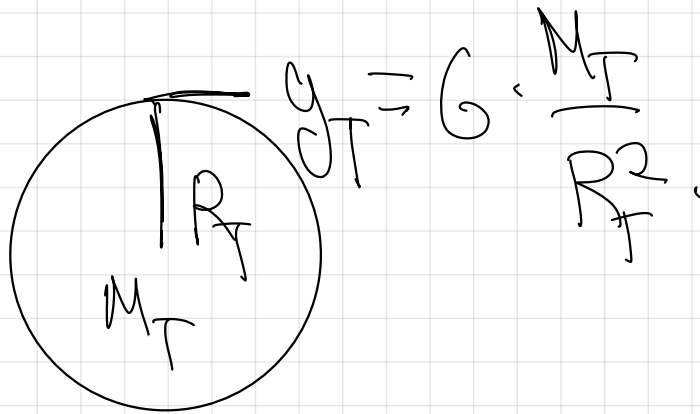
$$W_{A \rightarrow B} = F \cdot d \cdot \cos 90^\circ$$

$$W_{A \rightarrow B} = 0$$

$$m \cdot v_A = m \cdot v_B$$

$$E_{pA} = E_{pB}$$

52. ¿A qué ~~altura~~ sobre la superficie de la Tierra la gravedad terrestre se reduce a la tercera parte?  $R_T = 6370$  Km



$$\cancel{g} = \cancel{G} \cdot \frac{\cancel{M_T}}{R_T^2}$$

$$\cancel{g} \cdot \frac{3}{3} = \cancel{G} \cdot \frac{\cancel{M_T}}{(R_T \cdot \cancel{3})^2}$$

$$3 = \frac{(R_T \cdot 3)^2}{R_T^2}$$

$$\sqrt{3} = \frac{(R_T \cdot 3)}{R_T}$$

$$\sqrt{3} = \frac{R_T + h}{R_T} \quad ?$$

$$\sqrt{3} R_T = R_T + h \quad ?$$

$$h = \sqrt{3} R_T - R_T$$

$$h = R_T (\sqrt{3} - 1)$$

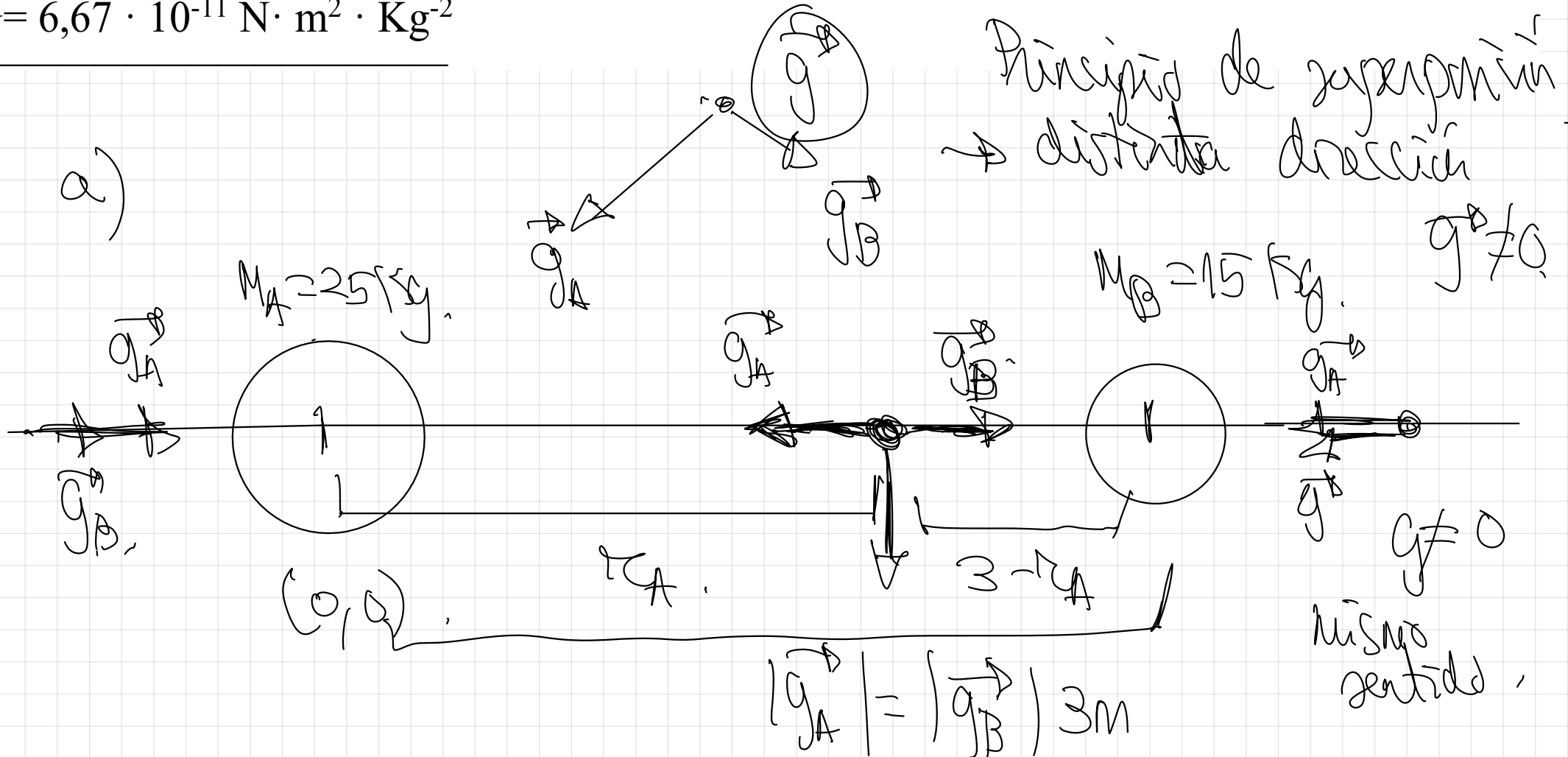
$$h = 637 \cdot 10^6 (\sqrt{3} - 1) = 465 \cdot 10^6 \text{ m}$$

61.- Una pequeña esfera de 25 Kg está situada en el punto (0,0)m y otra de 15 Kg en el punto (3,0)m

a) Razone en qué punto(s) del plano XY es nulo el campo gravitatorio resultante

b) Calcule el trabajo efectuado al trasladar una esfera de 15 Kg hasta el punto (4,0)m y discuta el resultado obtenido.

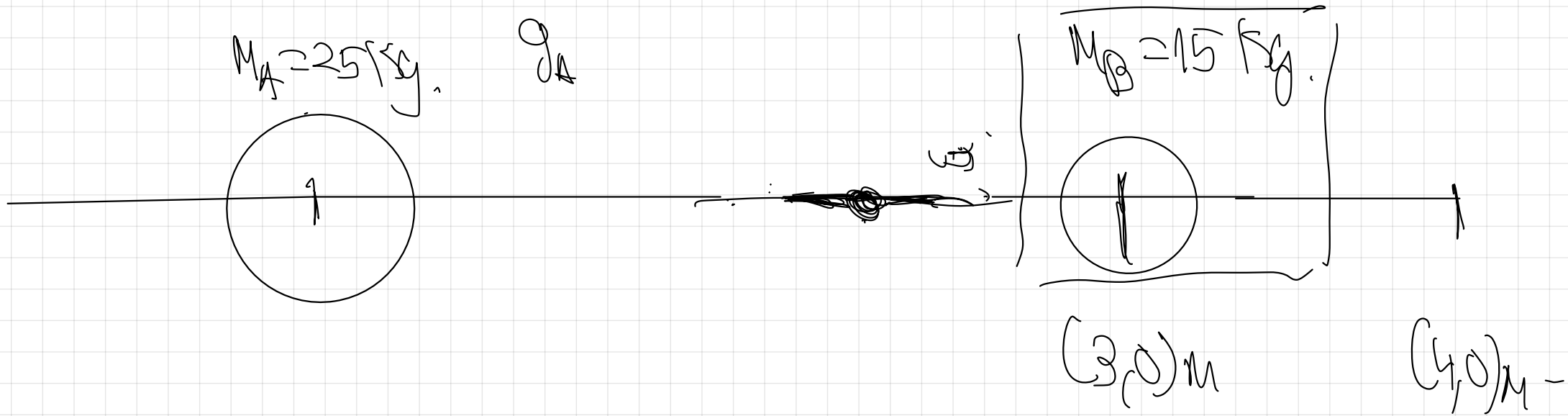
$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}$



$$\cancel{G} \cdot \frac{M_A}{r_A^2} = \cancel{G} \cdot \frac{M_B}{(3-r_A)^2}$$

$$\text{Despejo } r_A = 1,69 \text{ m.}$$

↓  
El punto es el  $(1,69, 0) \text{ m}$ .



$$W_{A \rightarrow B} = -\Delta E_{P_{A \rightarrow B}}$$

$$W_{A \rightarrow B} = -\left( E_{PB} - E_{PA} \right)$$

$$W_{A \rightarrow B} = -E_{PA} - E_{PB}$$

$$W_{A \rightarrow B} = -G \cdot \frac{M_A \cdot M_B}{r} - \left( -G \cdot \frac{M_A \cdot M_B}{r_0} \right)$$

$$W_{A \rightarrow B} = G \cdot \frac{M_A \cdot M_B}{r} - G \cdot \frac{M_A \cdot M_B}{r_0}$$

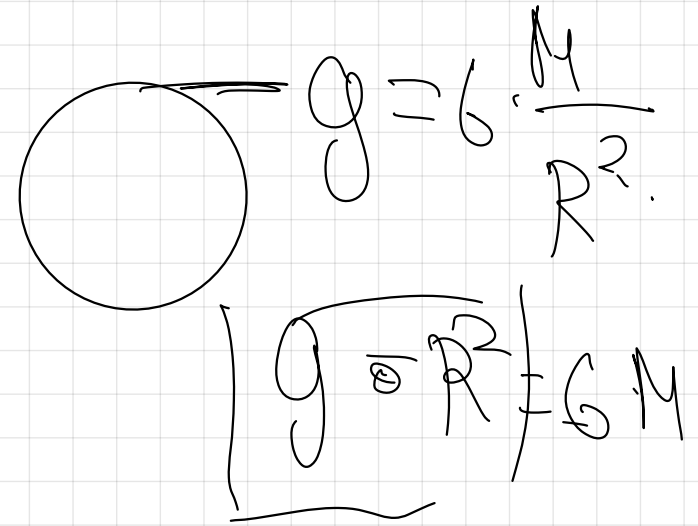
$$W_{A \rightarrow B} = G \cdot M_A \cdot M_B \cdot \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

$$W_{A \rightarrow B} = -21 \cdot 10^{-9} \text{ J.}$$

73. Razonar dónde será la velocidad de escape mayor, si en la Tierra o en la Luna

Deducción  $v_e$

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$



$g = \frac{GM}{R^2}$

$g \cdot R^2 = GM$

$$v_e = \sqrt{\frac{RgR^2}{R}}$$

$$\Rightarrow v_e = \sqrt{2gR}$$

$$v_e = \sqrt{2gR}$$

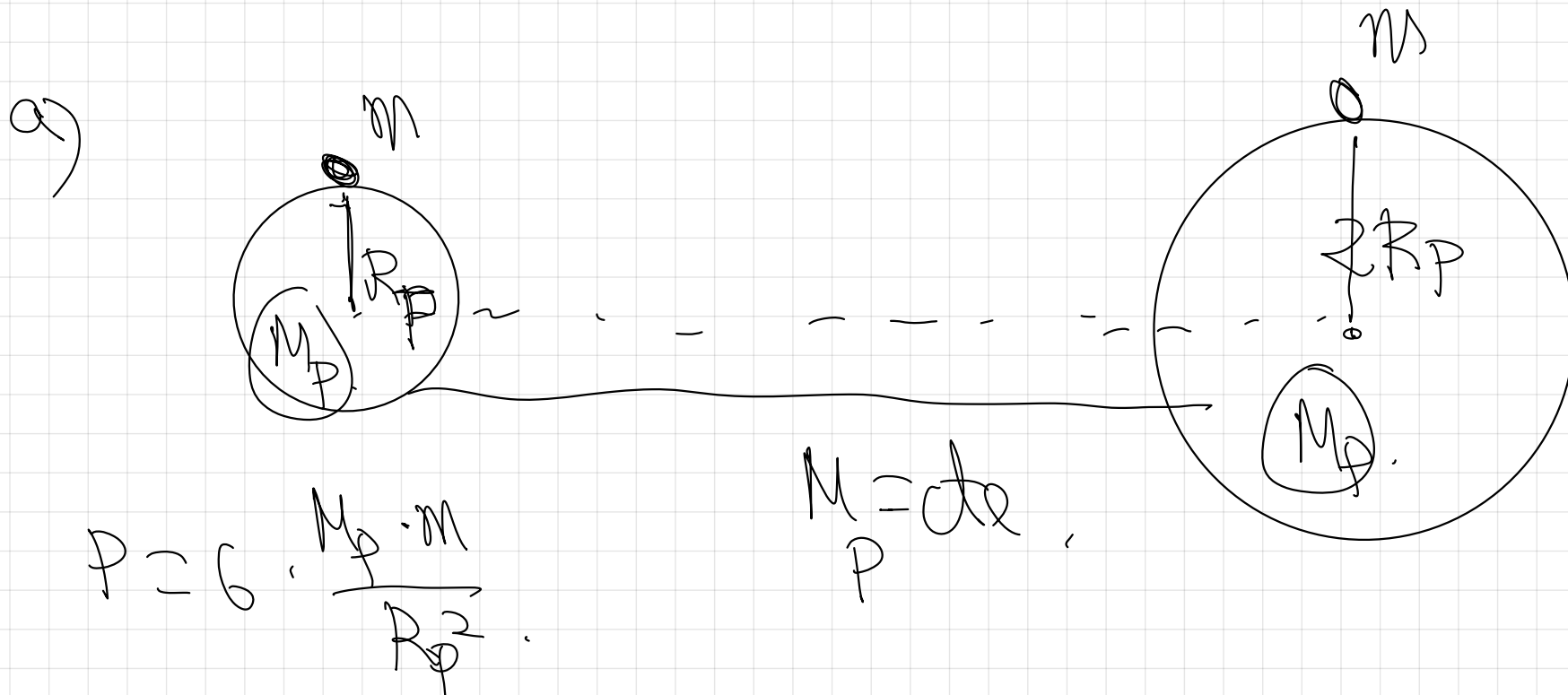


$$v_{eL} < v_{eT}$$

$$g_L < g_T \quad R_L < R_T$$

8.- Suponiendo que el radio de un planeta aumentara al doble de su valor, explicar cómo variaría el peso de los cuerpos en su superficie considerando el caso en el que permaneciera constante:

- La masa del planeta
- La densidad del planeta

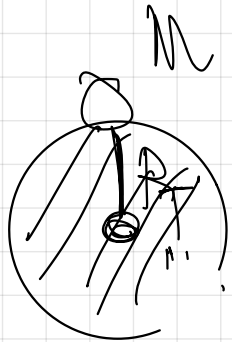


$$P^1 = G \cdot \frac{M_p \cdot M}{(2R_p)^2}$$

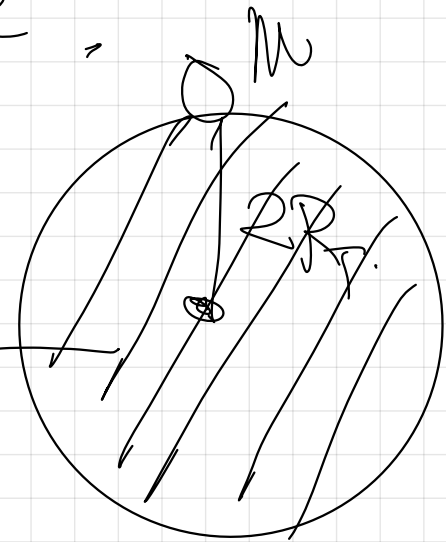
$$P^1 = \frac{1}{4} G \cdot \frac{M_p \cdot M}{R_p^2}$$

$$P = \sigma \epsilon$$

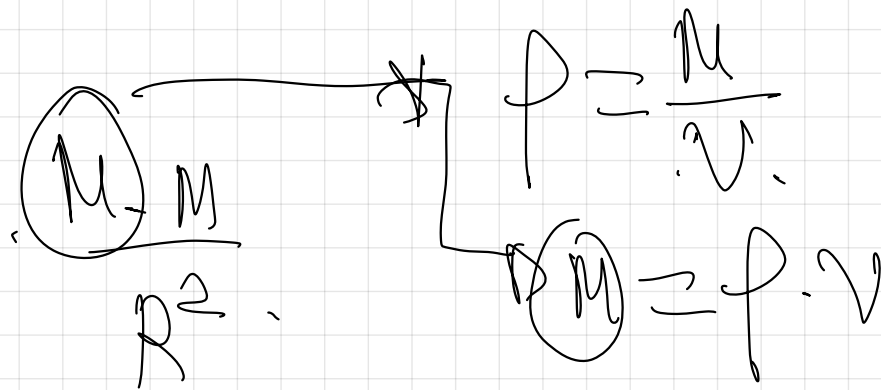
b)



$$P = \sigma \epsilon$$



Necesito una expresión del peso del cuerpo en función de  $x$  y  $\varphi$  y después multiplicando el radio veo cuántos viene.

$$P = G \cdot \frac{M}{R^2}$$


The diagram shows a horizontal line representing a beam. On the left end, there is a mass  $M$  enclosed in a circle. A vertical arrow points upwards from the center of  $M$ . Below the mass is the label  $R^2$ . On the right end of the beam, there is a pivot point marked with a star  $*$ . Below the pivot point, there is another mass  $M$  enclosed in a circle. A vertical arrow points upwards from the center of this mass. To the left of the pivot point, there is a label  $r$  indicating the distance from the pivot to the center of the mass  $M$ . To the right of the pivot point, there is a label  $P = \frac{M}{r}$  with a vertical arrow pointing upwards.

$$P = G \cdot \frac{P \cdot r \cdot M}{R^2}$$

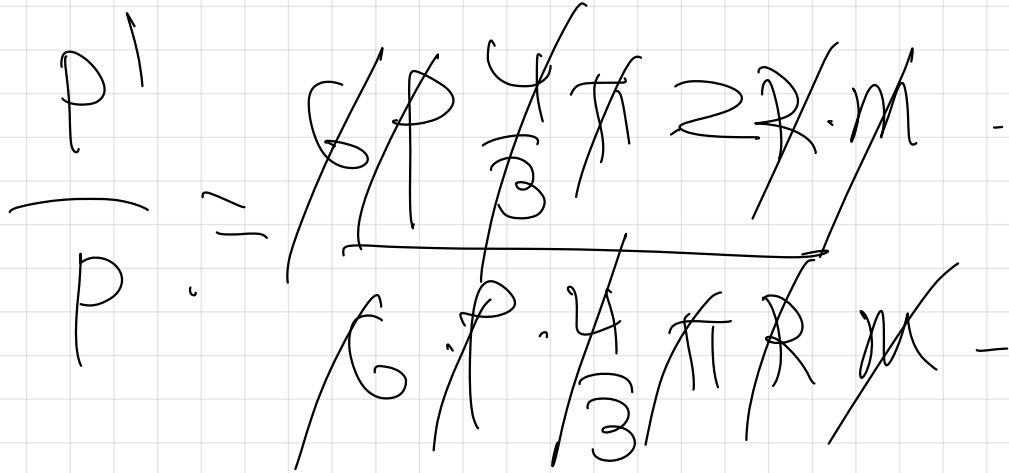
$$P = G \cdot \frac{P \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot M}{R^2}$$

$$P = G \cdot P \cdot \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$P = \rho \cdot g \cdot h$$

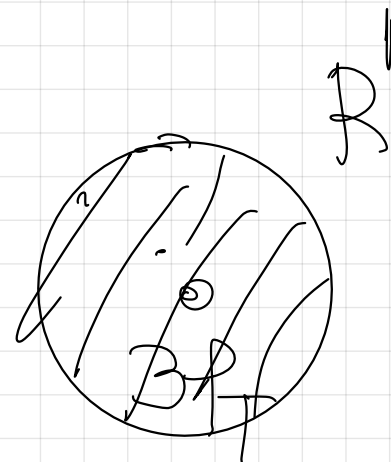
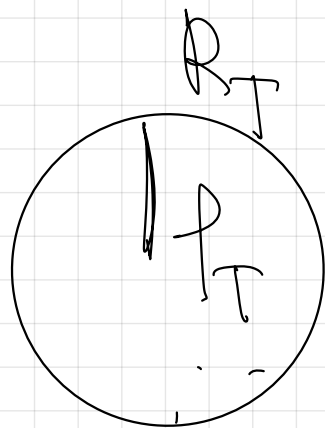
$$R^3 = 2R$$

$$P' = G \cdot P \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 2R^3$$



$$P' = 2P$$

9.- Si la densidad de la tierra fuera tres veces mayor, ¿Cuál debería ser el radio terrestre para que el valor de la gravedad no variara?



$g = G \cdot \frac{M}{R^2}$   
 $M = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R^3$   
 $g = G \cdot \frac{\rho \cdot \frac{4}{3} \pi R^3}{R^2}$

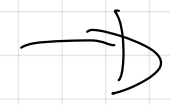
$g_T = G \cdot \frac{\rho_T \cdot \frac{4}{3} \pi R_T^3}{R_T^2}$

$$G_T = G \cdot f \cdot \frac{4}{3} \pi R^2$$

$$G_T = G \cdot 3f \cdot \frac{4}{3} \pi R'$$

$$\cancel{G \cdot f \cdot \frac{4}{3} \pi R^2} = \cancel{G} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{\frac{4}{3} \pi R^2}$$

$$R' = \frac{R}{3}$$



El nuevo  
radio  
ha de  
ser  $\frac{1}{3} R$ .