EJERCICIOS 2022 Y RESERVA 2021
CAMPO GRAVITATORIO.

a) En una determinada región del espacio existen dos puntos A y B en los que el potencial gravitatorio es el mismo. i) ¿Podemos concluir que los campos gravitatorios en A y en B son iguales?. ii) ¿Cuál es el trabajo realizado por el campo gravitatorio al desplazar una masa *m* desde A hasta B?.

b) Dos masas de 2 y 4 kg se sitúan en los puntos $A(2,0)$ m y $B(0,3)$ m, respectivamente.

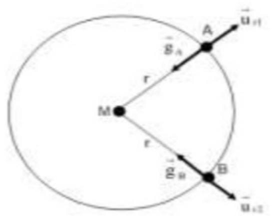
i) Determine el campo y el potencial gravitatorio en el origen de coordenadas. ii) Calcule el trabajo que realiza la fuerza gravitatoria para trasladar una tercera masa de 1 kg desde el origen de coordenadas hasta el punto $C(2,3)$ m.

$G = 6'67\cdot 10^{-11}\ N\,m^2\,kg^{-2}$

FISICA. 2022. JUNIO. EJERCICIO A2

R E S O L U C I O N

a)



i) Si en A y B el potencial es el mismo, entonces: $-G\dfrac{M}{r_A} = -G\dfrac{M}{r_B} \Rightarrow r_A = r_B$

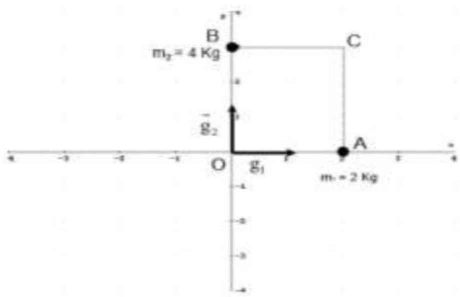
La expresión para la intensidad de campo es: $\vec{g} = -G\dfrac{M}{r^2}\vec{u}_r$. El módulo es el mismo en A que en B, pero al ser la intensidad de campo una magnitud vectorial y diferentes los vectores unitarios, el campo no es el mismo.

ii) El trabajo realizado por el campo coincide con la disminución de energía potencial

$$W = -m(V_B - V_A) \Rightarrow -m\cdot 0 = 0$$

El trabajo es nulo al tener los puntos A y B el mismo potencial.

b)



i) Aplicamos el principio de superposición:

$$\left|\vec{g}_1\right| = G\frac{m_1}{r_1^{\,2}} = 6'67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{2}{2^2} = 3'335\cdot 10^{-11}\ \mathrm{N/kg} \Rightarrow \vec{g}_1 = 3'335\cdot 10^{-11}\ \vec{i}\ \ \mathrm{N/kg}$$

$$\left|\vec{g}_2\right| = G\frac{m_2}{r_2^{\,2}} = 6'67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{4}{3^2} = 2'964\cdot 10^{-11}\ \mathrm{N/kg} \Rightarrow \vec{g}_2 = 2'964\cdot 10^{-11}\ \vec{j}\ \ \mathrm{N/kg}$$

$$\vec{g}(O) = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = 3'335\cdot 10^{-11}\ \vec{i} + 2'964\cdot 10^{-11}\ \vec{j}\ \ \mathrm{N/kg}$$

Su módulo es: $\left|\vec{g}(O)\right| = \sqrt{(3'335\cdot 10^{-11})^2 + (2'964\cdot 10^{-11})^2} = 4'46\cdot 10^{-11}\ \ \mathrm{N/kg}$

Para el potencial, también aplicamos el principio de superposición:

$$V_O = V_1 + V_2 = -G\frac{m_1}{r_1} - G\frac{m_2}{r_2} = -G\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right) = -6'67\cdot 10^{-11}\cdot\left(\frac{2}{2} + \frac{4}{3}\right) = -1'56\cdot 10^{-10}\ \ \mathrm{J/kg}$$

ii) Calculamos el potencial en C

$$V_C = -G\frac{m_1}{r'_1} - G\frac{m_2}{r'_2} = -G\left(\frac{m_1}{r'_1} + \frac{m_2}{r'_2}\right) = -6'67\cdot 10^{-11}\cdot\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{2}\right) = -1'78\cdot 10^{-10}\ \ \mathrm{J/kg}$$

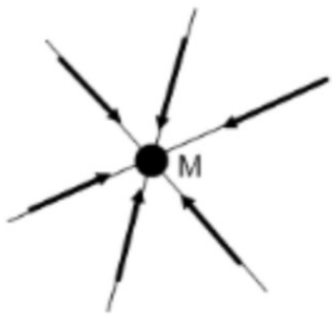
Luego, el trabajo será:

$$W = -m\cdot\left(V_C - V_O\right) = -1\cdot\left(-1'78\cdot 10^{-10} - (-1'56\cdot 10^{-10}\right) = +2'2\cdot 10^{-11}\ \mathrm{J}$$

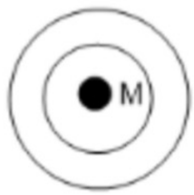
a) Represente gráficamente las líneas del campo gravitatorio y las superficies equipotenciales creadas por una masa puntual M. Responda razonadamente: i) ¿Se pueden cortar dos líneas de campo?. ii) ¿Cómo varía el potencial gravitatorio al alejarnos de la masa M?.
b) Dos masas $m_1 = 2$ kg y $m_2 = 4$ kg están situadas en los puntos $A(-3,0)$ m y $B(0,1)$ m, respectivamente. Calcule razonadamente: i) El campo gravitatorio en el punto $C(0,-1)$ m.
ii) La fuerza que ejercerá el campo sobre una masa $m_3 = 0'5$ kg situada en ese punto.
$G = 6'67\cdot 10^{-11}\ N m^2 kg^{-2}$
FISICA. 2021. RESERVA 1. EJERCICIO A1

R E S O L U C I O N

a)



Las líneas de campo gravitatorio son rectas que pasan por la masa M

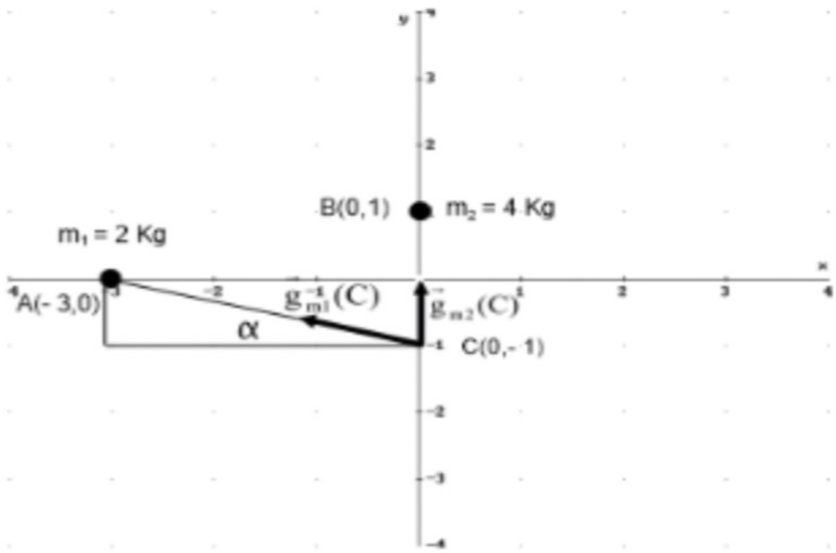


Las superficies equipotenciales son esferas concéntricas de centro M

i) Dos líneas de campo no se pueden cortar, ya que si se cortaran en un punto, el campo gravitatorio en ese punto tendría dos valores diferentes vectoriales $(\vec{g}_1 \text{ y } \vec{g}_2)$, pero esto no es posible, ya que el campo gravitatorio toma un solo valor $\vec{g}$ en cada punto.

ii) Potencial gravitatorio $= V_g = -G\dfrac{M}{r}$, al aumentar r, el cociente disminuye, pero al ser números negativos, el potencial gravitatorio aumenta.

b)



i)

$$r_1^2 = 3^2 + 1^2 = 10 \quad ; \quad tg\,\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = 18'43^{\circ}$$

$$\left|\vec{g}_{m1}(C)\right| = G\frac{m_1}{r_1^2} = 6'67\cdot 10^{-11}\frac{2}{10} = 1'334\cdot 10^{-11}$$

$$\left|\vec{g}_{m2}(C)\right| = G\frac{m_2}{r_2^2} = 6'67\cdot 10^{-11}\frac{4}{2^2} = 6'67\cdot 10^{-11}$$

$$\vec{g}(C) = \vec{g}_{m1}(C) + \vec{g}_{m2}(C) = 1'33\cdot 10^{-11}(-\cos 18'43\,\vec{i} + \text{sen}\,18'43\,\vec{j}) + 6'67\cdot 10^{-11}\,\vec{j} =$$
$$= -1'26\cdot 10^{-11}\,\vec{i} + 7'19\cdot 10^{-11}\,\vec{j} \quad m/s^2$$

ii) $\vec{F}_g(C) = m\cdot\vec{g}(C) = -6'3\cdot 10^{-12}\,\vec{i} + 3'6\cdot 10^{-11}\,\vec{j}$ Newtons

a) El planeta A tiene 2 veces más masa que el planeta B y radio cuatro veces menor. Determine la relación entre las velocidades de escape desde las superficies de ambos planetas.
b) La masa de la Luma es 0'012 veces la masa de la Tierra, y el radio lunar es 0'27 veces el radio de la Tierra. Calcule: i) La aceleración de la gravedad en la superficie de la Luna. ii) La velocidad de escape de un objeto desde la superficie de la Luna.
$\mathbf{g = 9'8\ m \cdot s^{-2}\ ;\ R_T = 6370\,km}$
FISICA. 2021. RESERVA 1. EJERCICIO A2

R E S O L U C I O N

a) Sabemos que: $M_A = 2M_B$ y $R_A = \dfrac{R_B}{4}$

La relación entre las velocidades de escape es:

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{\sqrt{2G\dfrac{M_A}{R_A}}}{\sqrt{2G\dfrac{M_B}{R_B}}} = \sqrt{\frac{2G\dfrac{M_A}{R_A}}{2G\dfrac{M_B}{R_B}}} = \sqrt{\frac{\dfrac{M_A}{R_A}}{\dfrac{M_B}{R_B}}} = \sqrt{\frac{M_A \cdot R_B}{M_B \cdot R_A}} = \sqrt{\frac{2M_B \cdot R_B}{M_B \cdot \dfrac{R_B}{4}}} = \sqrt{8}$$

b) Sabemos que: $M_L = 0'012\,M_T$ y $R_L = 0'27\,R_T$

(i) $g_L = G\dfrac{M_L}{R_L^2} = G\dfrac{0'012M_T}{0'27^2 \cdot R_T^2} = \dfrac{0'012}{0'27^2} \cdot G\dfrac{M_T}{R_T^2} = \dfrac{0'012}{0'27^2} \cdot 9'8 = 1'61\ m/s^2$

(ii)

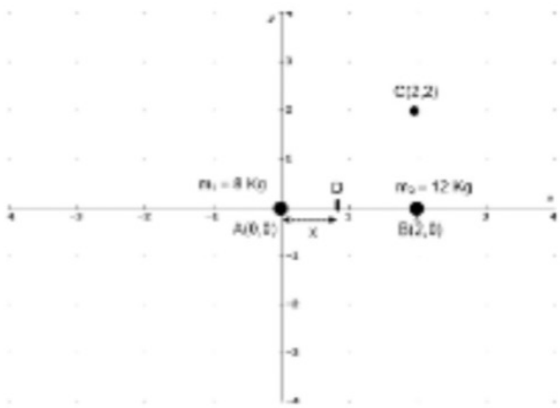
$$v_{escape_L} = \sqrt{2G\frac{M_L}{R_L}} = \sqrt{2G\frac{M_L}{R_L} \cdot \frac{R_L}{R_L}} = \sqrt{2G\frac{M_L}{R^2{}_L} \cdot R_L} = \sqrt{2g_L \cdot R_L} =$$
$$= \sqrt{2 \cdot 1'61 \cdot 0'27 \cdot 6370000} = 2.353'31\ m/s$$

a) Razone la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación: "Al acercar dos masas aumenta la fuerza de atracción entre ellas, pero disminuye su energía potencial".
b) Dos masas puntuales $m_1 = 8\,kg$ y $m_2 = 12\,kg$ están situadas en los puntos $A(0,0)$ m y $B(2,0)$ m, respectivamente. i) Determine el punto entre las dos masas donde se anula el campo gravitatorio. ii) Calcule el trabajo que realiza la fuerza gravitatoria cuando una tercera masa $m_3 = 2\,kg$ se desplaza desde el infinito hasta el punto $C(2,2)$ m.
$G = 6'67 \cdot 10^{-11}\ N\,m^2\,kg^{-2}$
FISICA. 2021. RESERVA 2. EJERCICIO A2

R E S O L U C I O N

a) La afirmación es verdadera, ya que: La fuerza gravitatoria viene dada por la Ley de gravitación universal $F_g = G\dfrac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$ y, a medida que r disminuye, F_g aumenta. La energía potencial es $E_{pg} = -G\dfrac{m_1 \cdot m_2}{r}$ y, a medida que disminuye r, el cociente aumenta, pero al ser números negativos, la E_{pg} disminuye.

b)



i) Aplicamos el principio de superposición:

$$\vec{g}(D) = 0 = \vec{g}_{m1}(D) + \vec{g}_{m2}(D) \Rightarrow \left|\vec{g}_{m1}(D)\right| = \left|\vec{g}_{m2}(D)\right| \Rightarrow G\frac{m_1}{x^2} = G\frac{m_2}{(2-x)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 \cdot (2-x)^2 = 12x^2 \Rightarrow (2-x)^2 = \frac{3}{2}x^2 \Rightarrow 2 - x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x \Rightarrow x = \frac{2}{1+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = 0'898\ m$$

ii) $r_1 = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}$

$$E_{pg}(C) = E_{pgm1}(C) + E_{pgm2}(C) = -G\frac{m_1 \cdot m}{r_1} - G\frac{m_2 \cdot m}{r_2} = -6'67 \cdot 10^{-11}\left(\frac{8 \cdot 2}{\sqrt{8}} + \frac{12 \cdot 2}{2}\right) = -1'18 \cdot 10^{-9}$$

$$W_{\infty \to C}(F_g) = -\left[E_{pg}(C) - E_{pg}(\infty)\right] = -\left[E_{pg}(C) - 0\right] = +1'18 \cdot 10^{-9}\ \text{Julios}$$

a) Razone la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación: "Dos masas de valor m y 4m separadas una distancia d, generarán un campo gravitatorio nulo en un punto entre ambas situado a una distancia $\frac{d}{3}$ de la masa más pequeña".

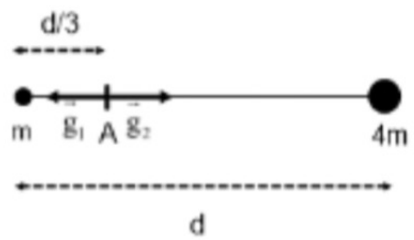
b) Dos masas $m_1 = 10\,kg$ y $m_2 = 30\,kg$ se encuentran situadas en los puntos $A(0,0)\,m$ y $B(4,3)\,m$, respectivamente. i) Dibuje el campo gravitatorio debido a las dos masas en el punto $C(0,3)\,m$ y determine su valor. ii) Calcule el trabajo que realiza la fuerza gravitatoria cuando una tercera masa $m_3 = 2\,kg$ se desplaza desde el punto $C(0,3)\,m$ hasta el punto $D(4,0)\,m$.

$G = 6'67 \cdot 10^{-11}\ N m^2 kg^{-2}$

FISICA. 2021. RESERVA 3. EJERCICIO A1

R E S O L U C I O N

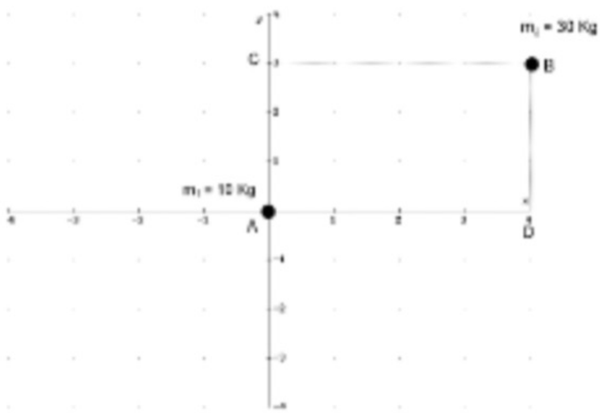
a) La afirmación es verdadera, ya que:



$$\vec{g}(A) = 0 = \vec{g}_1(A) + \vec{g}_2(A) \Rightarrow \left|\vec{g}_1(A)\right| = \left|\vec{g}_2(A)\right| \Rightarrow G\frac{m}{\left(\frac{d}{3}\right)^2} = G\frac{4m}{\left(d-\frac{d}{3}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(d-\frac{d}{3}\right)^2 = 4\left(\frac{d}{3}\right)^2 \Rightarrow \left(d-\frac{d}{3}\right) = 2\left(\frac{d}{3}\right) \Rightarrow \frac{2d}{3} = \frac{2d}{3} \Rightarrow \text{Se cumple}$$

b)



i) Aplicamos el principio de superposición:

$$\vec{g}(C)=\vec{g}_A(C)+\vec{g}_B(c)=\left|\vec{g}_A(C)\right|+\left|\vec{g}_B(C)\right|=G\frac{m_1}{r_1^{\,2}}+G\frac{m_2}{r_2^{\,2}}=G\frac{10}{3^2}+G\frac{30}{4^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{g}(C)=6'67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{10}{9}(-\vec{j})+6'67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{30}{16}(\vec{i})=1'25\cdot 10^{-10}\ \vec{i}-7'41\cdot 10^{-11}\ \vec{j}$$

ii)

$$E_{pg}(C)=E_{pgA}(C)+E_{pgB}(C)=-G\frac{m_1\cdot m}{r_1}-G\frac{m_2\cdot m}{r_2}=-6'67\cdot 10^{-11}\left(\frac{10\cdot 2}{3}+\frac{30\cdot 2}{4}\right)=-1'45\cdot 10^{-9}$$

$$E_{pg}(D)=E_{pgA}(D)+E_{pgB}(D)=-G\frac{m_1\cdot m}{r_1^{*}}-G\frac{m_2\cdot m}{r_2^{*}}=-6'67\cdot 10^{-11}\left(\frac{10\cdot 2}{4}+\frac{30\cdot 2}{3}\right)=-1'67\cdot 10^{-9}$$

$$W_{C\to D}(F_g)=-\left[E_{pg}(D)-E_{pg}(C)\right]=-\left[-1'67\cdot 10^{-9}+1'45\cdot 10^{-9}\right]=2'2\cdot 10^{-10}\ \text{Julios}$$

a) Dos satélites idénticos, A y B, están en órbita alrededor de la Tierra, siendo sus órbitas de distinto radio: $R_A = 3R_B$. Determine la relación entre sus velocidades orbitales y justifique cuál de los dos se mueve a mayor velocidad.
b) Se pretende poner en órbita un satélite artificial que diariamente dará 10 vueltas a la Tierra. i) ¿A qué altura sobre la superficie terrestre se situará?. ii) ¿Cuál será la velocidad del satélite?.
$G = 6'67\cdot 10^{-11}\ Nm^2 kg^{-2}$; $M_T = 5'98\cdot 10^{24}$ kg ; $R_T = 6370$ km
FISICA. 2021. RESERVA 3. EJERCICIO A2

R E S O L U C I O N

a) La relación entre las velocidades orbitales es:

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{\sqrt{G\frac{M_T}{R_A}}}{\sqrt{G\frac{M_T}{R_B}}} = \sqrt{\frac{G\frac{M_T}{R_A}}{G\frac{M_T}{R_B}}} = \sqrt{\frac{R_B}{R_A}} = \sqrt{\frac{R_B}{3\cdot R_B}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Se mueve a mayor velocidad el satélite que está más cerca de la Tierra, ya que $v = \sqrt{G\frac{M_T}{R}}$ y si R es pequeño, entonces el cociente aumenta, luego, tiene mayor velocidad orbital.

b)

(i) $\omega = \frac{10 \text{ vueltas}}{1 \text{ dia}} = \frac{10\cdot 2\pi}{24\cdot 3600}$ rad / s

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{\sqrt{G\frac{M_T}{R}}}{R} = \sqrt{G\frac{M_T}{R^3}} = \sqrt{G\frac{M_T}{(R_T+h)^3}} \Rightarrow \omega^2 = G\frac{M_T}{(R_T+h)^3} \Rightarrow R_T + h = \sqrt[3]{\frac{G\cdot M_T}{\omega^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_T + h = \sqrt[3]{\frac{6'67\cdot 10^{-11}\cdot 5'98\cdot 10^{24}}{\left(\frac{10\cdot 2\pi}{24\cdot 3600}\right)^2}} = 9.102.588'75 \text{ m} \Rightarrow h = 9.102.588'75 - 6.370.000 = 2.732'58 \text{ km}$$

(ii)

$$v_{orbital} = \sqrt{G\frac{M_T}{R}} = \sqrt{6'67\cdot 10^{-11}\frac{5'98\cdot 10^{24}}{9.102.588'75}} = 6619'5 \text{ m/s}$$

a) Un satélite orbíta alrededor del planeta A, y otro satélite alrededor del planeta B. El planeta A tiene cuatro veces más masa que el planeta B. Determine la relación entre las velocidades orbitales de los dos satélites si estos orbitan a la misma distancia del centro de cada planeta.
b) Un satélite artificial de 800 kg de masa se sitúa en una órbita de radio cuatro veces el radio de la Tierra. i) Determine su periodo orbital. ii) Calcule la energía necesaria para ponerlo en la órbita desde la superficie terrestre, despreciando la rotación de la Tierra.
$G = 6'67\cdot 10^{-11}\ Nm^2 kg^{-2}$; $M_T = 5'98\cdot 10^{24}$ kg ; $R_T = 6370$ km
FISICA. 2021. RESERVA 4. EJERCICIO A1

R E S O L U C I O N

a) La relación entre las velocidades orbitales es:

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{\sqrt{G\frac{M_A}{R_A}}}{\sqrt{G\frac{M_B}{R_B}}} = \sqrt{\frac{G\frac{M_A}{R}}{G\frac{M_B}{R}}} = \sqrt{\frac{R_B}{R_A}} = \sqrt{\frac{M_A}{M_B}} = \sqrt{\frac{4M_B}{M_B}} = \sqrt{4} = 2$$

b)

(i) $$v = \sqrt{G\frac{M_T}{R}} = \sqrt{6'67\cdot 10^{-11}\,\frac{5'98\cdot 10^{24}}{4\cdot 6.370.000}} = 3.956'52\ m/s$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{v}{R}} = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi\cdot 4\cdot 6.370.000}{3956'52} = 40.463'73\ s = 11'24\ \text{horas}$$

(ii) Despreciando rozamientos, se aplica el principio de conservación de la energía mecánica entre A y B

$$E_m(A) = E_m(B) \Rightarrow E_c(A) + E_{pg}(A) = E_c(B) + E_{pg}(B) \Rightarrow E_c(A) = E_c(B) + E_{pg}(B) - E_{pg}(A) =$$
$$= \frac{1}{2} m G\frac{M_T}{4R_T} + G\frac{M_T\cdot m}{R_T} - G\frac{M_T\cdot m}{4R_T} = G\frac{M_T\cdot m}{R_T}\left(\frac{1}{8} + 1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{8}\cdot G\frac{M_T\cdot m}{R_T} =$$
$$= \frac{7}{8}\cdot 6'67\cdot 10^{-11}\,\frac{5'98\cdot 10^{24}\cdot 800}{6.370.000} = 4'38\cdot 10^{10}\ \text{Julios}$$