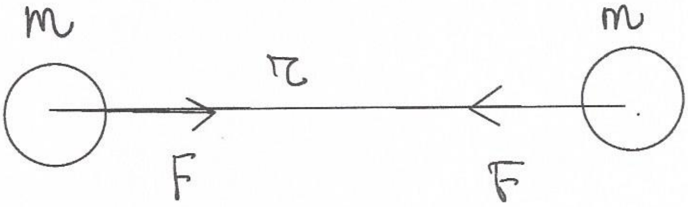
(100)

b) $F = G\frac{m \cdot m}{r^2}$

$F = G \cdot \frac{m^2}{r^2}$

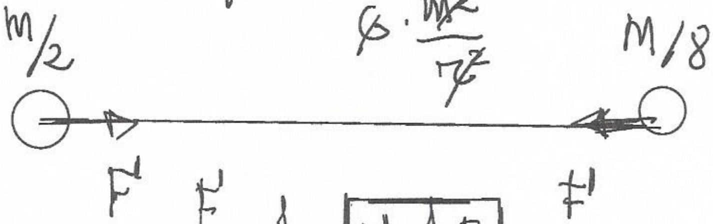


$F = G \cdot \frac{m \cdot m}{r^2}$

$F = G\frac{m^2}{r^2}$

$$\frac{F'}{F} = \frac{\cancel{G} \cdot \frac{\cancel{m^2}}{16r^2}}{\cancel{G} \cdot \frac{\cancel{m^2}}{\cancel{r^2}}}$$

$F' = G\frac{m/2 \cdot m/8}{r^2}$



$F' = G \cdot \frac{m/2 \cdot m/8}{r^2}$

$F' = G \cdot \frac{m^2}{16r^2}$

$\frac{F'}{F} = \frac{1}{16}$ $\boxed{F' = \frac{1}{16} F}$

$F' = G \cdot \frac{m^2}{16r^2}$

La fuerza se redujo hasta pasar a la $\frac{1}{16}$ parte

Necesitamos que la distancia entre ambas masas disminuya para que la fuerza vuelva a aumentar su valor y tener el inicial. $F = G\frac{m^2}{r^2}$

$$\uparrow F' = \frac{1}{16} G \cdot \frac{m^2}{\downarrow r^2}$$

Al ser la fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ambas masas, reducimos la distancia a la cuarta parte

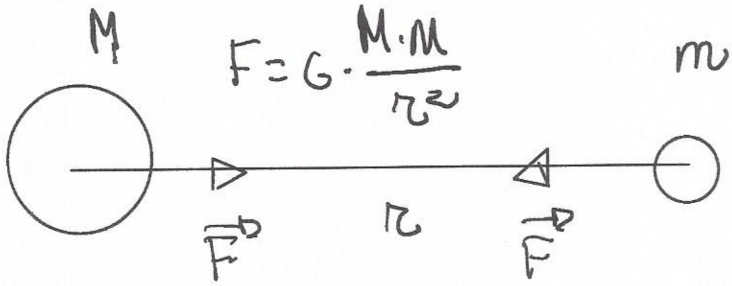
Se observa que al reducir la distancia entre ambas masas a la cuarta parte, la fuerza vuelve a tener su valor original

$$F' = \frac{1}{16} \cdot G \frac{m^2}{\left(\frac{r}{4}\right)^2} \rightarrow F' = \frac{1}{\cancel{16}} G \cdot \frac{m^2}{\frac{r^2}{\cancel{16}}} \Rightarrow F' = G\frac{m^2}{r^2}$$

(104)

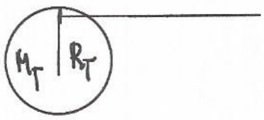
a)

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$

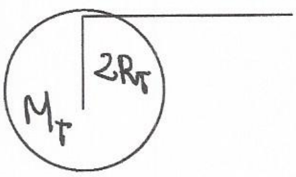


(Ver Teoría.)

b)



$$g = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}$$



$$g' = G \cdot \frac{M_T}{(2R_T)^2} \Rightarrow g' = G \cdot \frac{M_T}{4R_T^2}$$

$$\frac{g'}{g} = \frac{\cancel{G} \cdot \frac{\cancel{M_T}}{4\cancel{R_T^2}}}{\cancel{G} \cdot \frac{\cancel{M_T}}{\cancel{R_T^2}}}$$

$$g' = \frac{1}{4} g$$

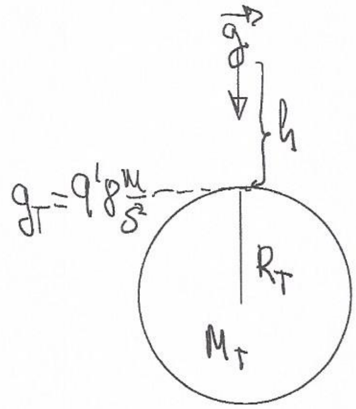
Si la Tierra duplicase su radio la gravedad se reduciría a la cuarta parte.

$$g' = G \cdot \frac{M_T}{4R_T^2}$$ $\Rightarrow$ para que la gravedad no variase la masa de la Tierra debería haberse cuatriplicado ($M_T' = 4M_T$) $\Rightarrow$

$$g' = G \cdot \frac{\cancel{4}M_T}{\cancel{4}R_T^2}$$

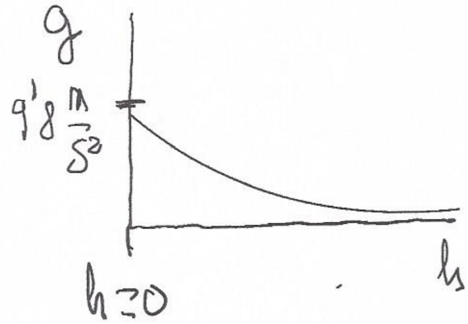
$$g' = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}$$

141 a)

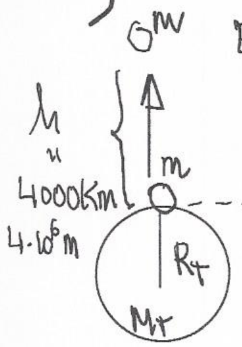


$$|\vec{g}| = G \cdot \frac{M_T}{(R_T+h)^2}$$

Conforme nos alejamos de la Tierra, aumenta la distancia al centro de la misma. Puesto que el campo gravitatorio terrestre es inversamente proporcional al cuadrado de dicha distancia, $\vec{g}$ iría disminuyendo progresivamente, aunque no se anularía hasta llegar a una distancia infinita



b)



$E_{p_h} = -G \frac{M_T \cdot m}{(R_T+h)}$, $E_{c_h} = 0$

$E_{p_T} = -G \frac{M_T \cdot m}{R_T}$, $E_{c_T} = \frac{1}{2} m v^2$

$$E_{p_T} + E_{c_T} = E_{p_h} + E_{c_h}$$

$$-G \cdot \frac{M_T \cdot \cancel{m}}{R_T} + \frac{1}{2} \cancel{m} \cdot v^2 = -G \cdot \frac{M_T \cdot \cancel{m}}{(R_T+h)} + 0$$

$$\frac{1}{2} v^2 = G \cdot \frac{M_T}{R_T} - G \cdot \frac{M_T}{(R_T+h)}$$

$$v^2 = 2 G M_T \cdot \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{(R_T+h)}\right)$$

$$v = \sqrt{2 \boxed{G M_T} \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{(R_T+h)}\right)}$$

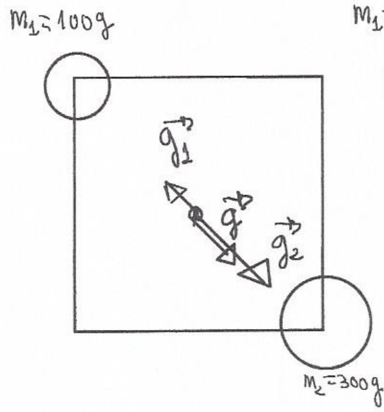
No nos dan como dato ni G ni M_T, pero nos dan como dato g_T y R_T.

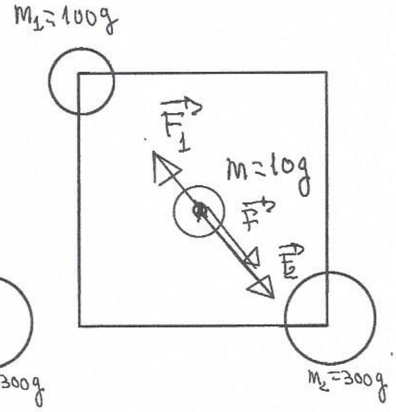
$$g_T = \boxed{G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}} \Rightarrow \boxed{G \cdot M_T} = g_T \cdot R_T^2$$

$$v = \sqrt{2 \cdot g_T \cdot R_T^2 \cdot \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{(R_T+h)}\right)} = \sqrt{2 \cdot 10 \left(6'37 \cdot 10^6\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6'37 \cdot 10^6} - \frac{1}{(6'37 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^6)}\right)}$$

$$\boxed{v = 7010'46 \; m/s}$$

150 a)



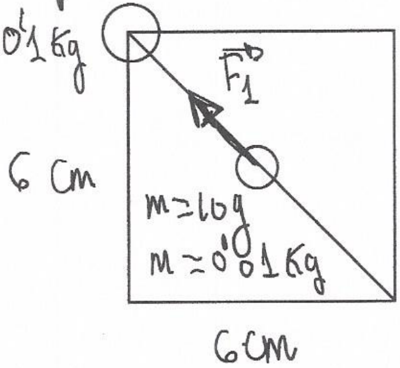


$\vec{g} = \vec{g_1} + \vec{g_2}$

Principio de superposición

Principio de Superposición $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$

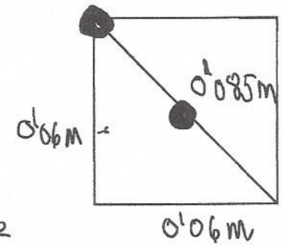
$M_1 = 100g$
$M_1 = 0'1\,Kg$



Primero calculamos $\vec{F_1}$

$$|\vec{F_1}| = G \cdot \frac{M_1 \cdot m}{r^2} = 6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{0'1 \cdot 0'01}{(0'0425)^2}$$

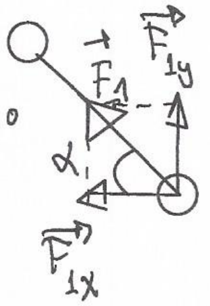
$$|\vec{F_1}| = 3'69 \cdot 10^{-11} N$$



$$r = \frac{0'085m}{2} = 0'0425m$$

Descomponemos $\vec{F_1}$

$\alpha = 45°$



$$\cos\alpha = \frac{F_{1x}}{F_1} \Rightarrow F_{1x} = F_1 \cdot \cos 45°$$

$$F_{1x} = 3'69 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2'61 \cdot 10^{-11} N$$

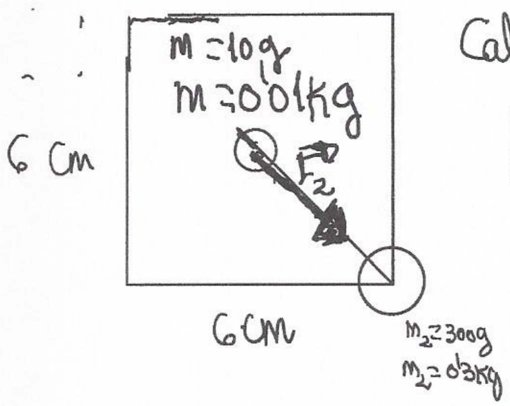
$$\vec{F_{1x}} = -2'61 \cdot 10^{-11}\,\vec{i}\ (N)$$

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{F_{1y}}{F_1} \Rightarrow F_{1y} = F_1 \cdot \text{sen}\,45°$$

$$F_{1y} = 3'69 \cdot 10^{-11} N \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2'61 \cdot 10^{-11} N$$

$$\vec{F_{1y}} = +2'61 \cdot 10^{-11}\,\vec{j}\ (N)$$

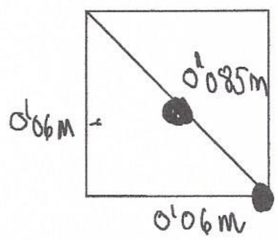
$$\vec{F_1} = \vec{F_{1x}} + \vec{F_{1y}} \Rightarrow \boxed{\vec{F_1} = -2'61 \cdot 10^{-11}\,\vec{i} + 2'61 \cdot 10^{-11}\,\vec{j}\ (N)}$$



Calculamos ahora $\vec{F_2}$

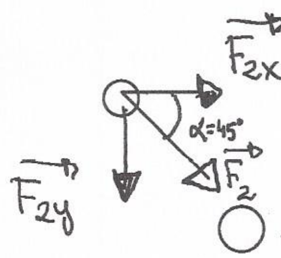
$$|\vec{F_2}| = G \cdot \frac{M_2 \cdot m}{r^2} = 6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{0'3 \cdot 0'01}{(0'0425)^2}$$

$$|\vec{F_2}| = 1'11 \cdot 10^{-10} N$$



$$r = \frac{0'085m}{2} = 0'0425m$$

Descomponemos $\vec{F_2}$



$$\cos\alpha = \frac{F_{2x}}{F_2} \Rightarrow F_{2x} = F_2 \cdot \cos 45°$$

$$F_{2x} = 1'11 \cdot 10^{-10} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 7'85 \cdot 10^{-11} N$$

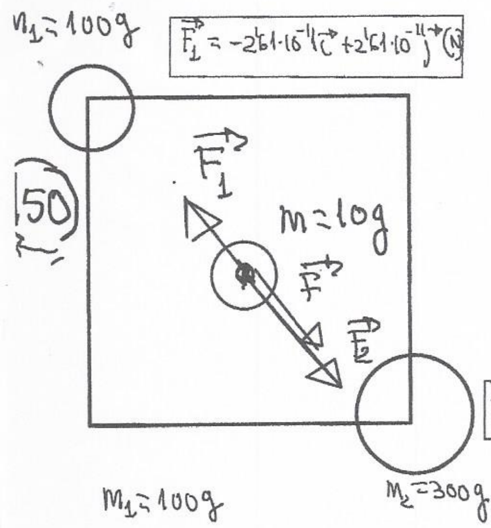
$$\vec{F_{2x}} = +7'85 \cdot 10^{-11}\,\vec{i}\ (N)$$

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{F_{2y}}{F_2} \Rightarrow F_{2y} = F_2 \cdot \cos 45°$$

$$F_{2y} = 1'11 \cdot 10^{-10} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 7'85 \cdot 10^{-11} N$$

$$\vec{F_{2y}} = -7'85 \cdot 10^{-11}\,\vec{j}\ (N)$$

$$\vec{F_2} = \vec{F_{2x}} + \vec{F_{2y}} \Rightarrow \boxed{\vec{F_2} = +7'85 \cdot 10^{-11}\,\vec{i} - 7'85 \cdot 10^{-11}\,\vec{j}\ (N)}$$



$\vec{F_2} = +7'85\cdot10^{-11}\vec{i} - 7'85\cdot10^{-11}\vec{j}$ (N)

Principio de Superposición

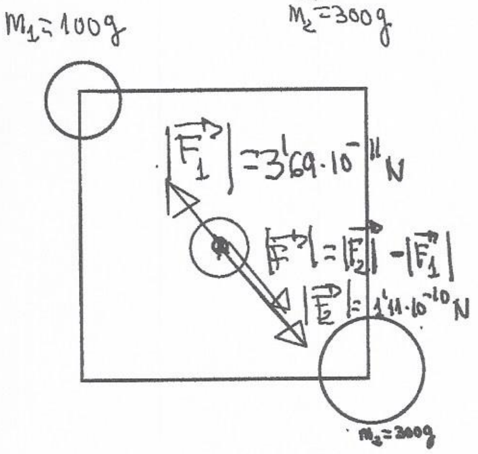
$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$$

$$\vec{F} = -2'61\cdot10^{-11}\,\vec{i} + 2'61\cdot10^{-11}\,\vec{j} + 7'85\cdot10^{-11}\,\vec{i} - 7'85\cdot10^{-11}\,\vec{j}\ (N)$$

$$\boxed{\vec{F} = 5'24\cdot10^{-11}\,\vec{i} - 5'24\cdot10^{-11}\,\vec{j}\ (N)}$$

$$|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(5'24\cdot10^{-11})^2 + (-5'24\cdot10^{-11})^2} = 7'41\cdot10^{-11}\ N$$

$$|\vec{F}| = 7'41\cdot10^{-11}\,N$$

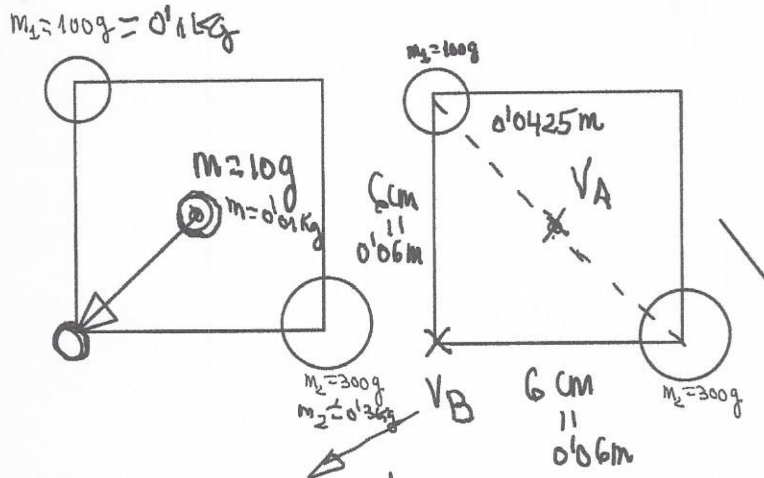


Observación: $\vec{F_1}$ y $\vec{F_2}$ son dos vectores que poseen la misma dirección pero distinto sentido, se comprueba que

$$|\vec{F}| = 1'11\cdot10^{-10}N - 3'69\cdot10^{-11}N$$

$$|\vec{F}| = 7'41\cdot10^{-11}N$$

b)



Mediante el principio de superposición calculamos V_A y V_B

$$V_B = V_1' + V_2'$$

$$V_B = -G\cdot\frac{M_1}{r_1'} + \left(-G\,\frac{M_2}{r_2'}\right)$$

$$V_B = -6'67\cdot10^{-11}\cdot\frac{0'1}{0'06} - 6'67\cdot10^{-11}\cdot\frac{0'3}{0'06}$$

$$V_B = -4'44\cdot10^{-10}\,J/kg$$

$$V_A = V_1 + V_2$$

$$V_A = -G\frac{M_1}{r_1} + \left(-G\cdot\frac{M_2}{r_2}\right)$$

$$V_A = -6'67\cdot10^{-11}\cdot\frac{0'1}{0'0425} - 6'67\cdot10^{-11}\cdot\frac{0'3}{0'0425}$$

$$V_A = -6'28\cdot10^{-10}\,J/kg$$

$m_1 = 100g = 0'1\,kg$

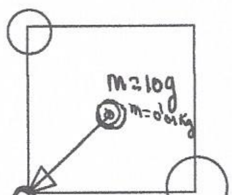
$$W_{A\to B} = m\cdot(V_A - V_B) = 0'01\,kg\cdot\left[-6'28\cdot10^{-10}\,J/kg - \left(-4'44\cdot10^{-10}\,J/kg\right)\right]$$

$$W_{A\to B} = -1'84\cdot10^{-12}\,J$$

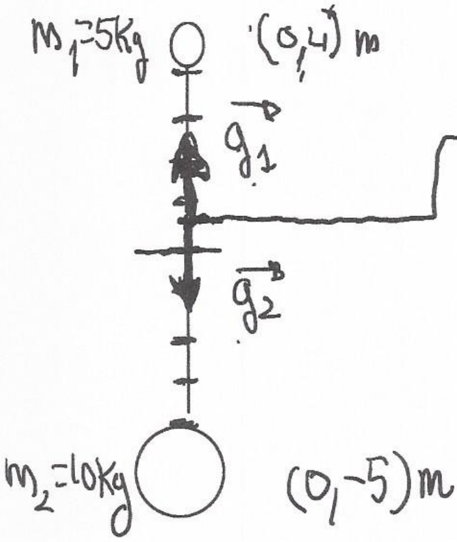
Nos sale un trabajo negativo, ello significa que la fuerza gravitatoria no desplaza espontáneamente a la masa m para alejarla de las otras dos

$$W_{A\to B} = -1'84\cdot10^{-12}\,J$$

Desplazamiento no espontáneo.

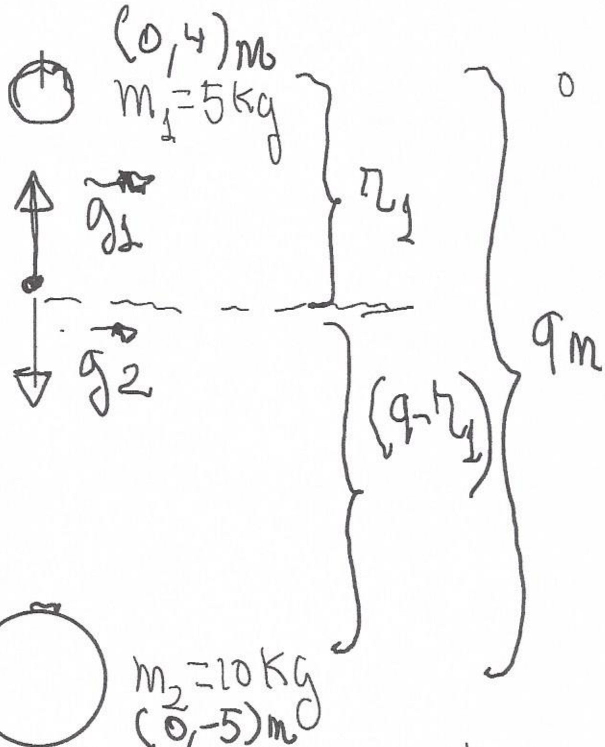


213 a)



Según el principio de superposición $\vec{g} = \vec{g_1} + \vec{g_2}$.

Para que sea nulo, $\vec{g_1}$ y $\vec{g_2}$ han de tener igual módulo y dirección, y además sentido contrario.



$$\vec{g} = \vec{g_1} + \vec{g_2} = 0$$

$$|\vec{g_1}| = |\vec{g_2}|$$

~~Y~~a que $g = G \cdot \frac{M}{r^2}$, se observa que el pto donde se anula está situado más cerca de la masa m_1, para compensar el hecho de que dicha masa es menor

$$|\vec{g_1}| = |\vec{g_2}|$$

$$\cancel{G} \cdot \frac{m_1}{r_1^2} = \cancel{G} \cdot \frac{m_2}{(9-r_1)^2}$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_1^2}{(9-r_1)^2}$$

$$\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = \sqrt{\left(\frac{r_1}{9-r_1}\right)^{\cancel{2}}}$$

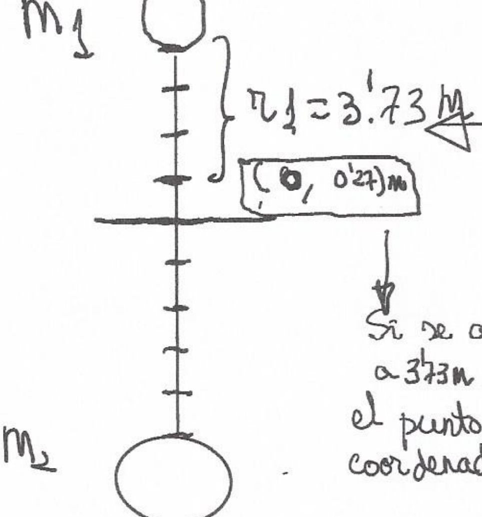
$$\sqrt{\frac{5}{10}} = \frac{r_1}{9-r_1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{r_1}{9-r_1}$$

$$9-r_1 = \sqrt{2}\, r_1$$

$$9 = (\sqrt{2}+1)\, r_1.$$

$$r_1 = \frac{9}{\sqrt{2}+1} = 3'73\,m$$

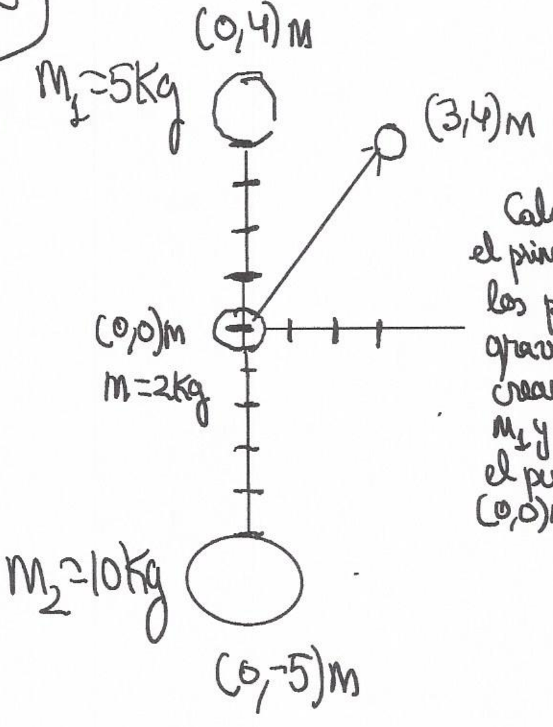


Si se anula a 3'73m de m_1, el punto de coordenadas es $(0, 0'27)$m

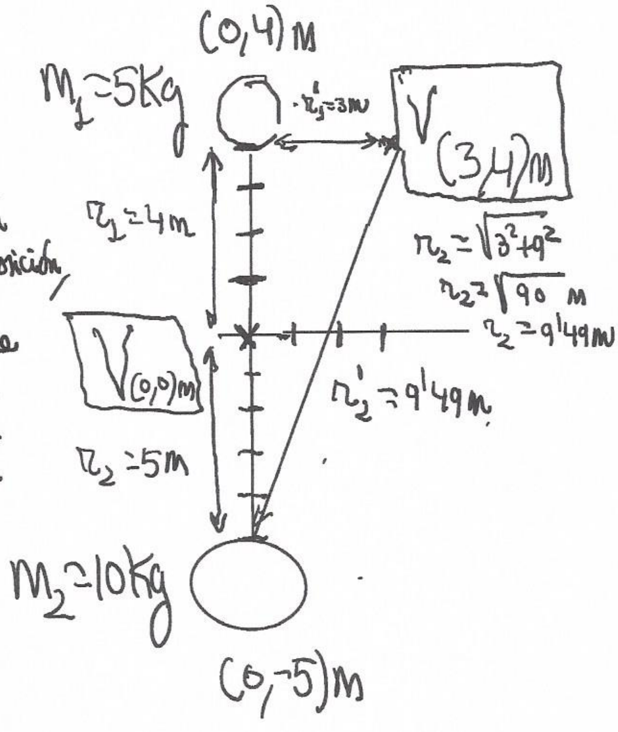
Se anula a 3'73 m de m_1

2|3

b)



Calcularé, según el principio de superposición, los potenciales gravitatorios que crean las masas M_1 y M_2, tanto en el punto de origen (0,0) m



Principio de superposición

$$V_{(0,0)m} = V_1 + V_2 = -G \cdot \frac{M_1}{r_1} + \left(-G \cdot \frac{M_2}{r_2}\right)$$

$$V_{(0,0)m} = -6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5}{4} - 6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{10}{5}$$

$$V_{(0,0)m} = -2'16 \cdot 10^{-10} \ J/Kg$$

$$V_{(3,4)m} = V_1' + V_2' = -G \cdot \frac{M_1}{r_1'} + \left(-G \cdot \frac{M_2}{r_2'}\right)$$

$$V_{(3,4)m} = -6'67 \cdot 10^{-11} \, \frac{5}{3} - 6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{10}{9'49}$$

$$V_{(3,4)m} = -1'81 \cdot 10^{-10} \ J/Kg$$

$$W_{(0,0)m \to (3,4)m} = m \cdot (V_{(0,0)m} - V_{(3,4)m})$$

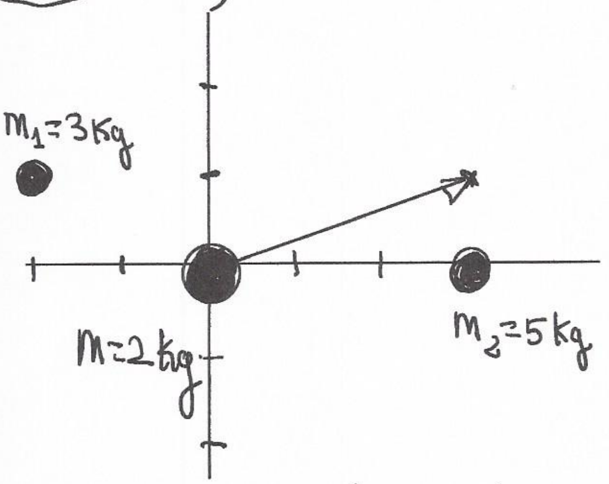
$$W_{(0,0)m \to (3,4)m} = 2 \cdot \left(-2'16 \cdot 10^{-10} - (-1'81 \cdot 10^{-10})\right)$$

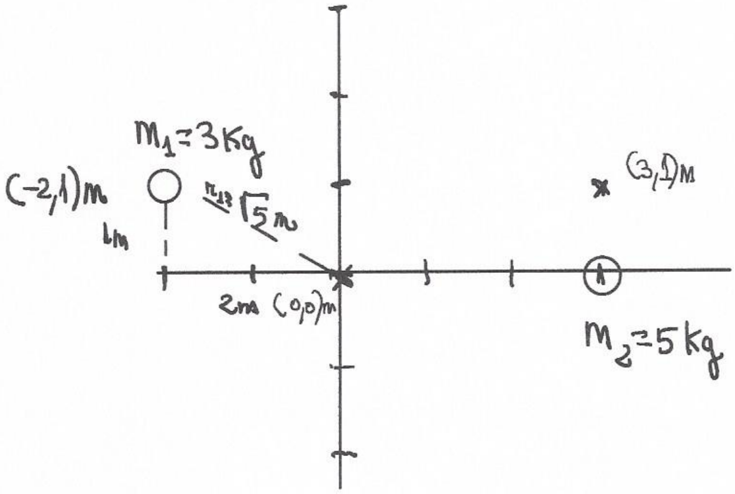
$$W_{(0,0)m \to (3,4)m} \simeq -7 \cdot 10^{-11} J$$

Ese signo negativo nos indica que ese desplazamiento descrito de la masa m no se realizaría espontáneamente por parte de la fuerza gravitatoria.

Tendríamos que hacer como mínimo un trabajo externo (W_{ext}) realizado por una F ext de $7 \cdot 10^{-11}$J, que sería lo que aumenta la Ep

(222) b)





Hallamos los potenciales en (0,0)m y en (3,1)m utilizando el principio de superposición.

$$V_{(0,0)m} = -G\cdot\frac{m_1}{r_1} + \left(-G\cdot\frac{m_2}{r_2}\right) = -6'67\cdot10^{-11}\cdot\frac{3}{\sqrt{5}} - 6'67\cdot10^{-11}\cdot\frac{5}{3}$$

$$V_{(0,0)m} = -2\cdot10^{-10}\ J/Kg$$

$$V_{(3,1)m} = -G\cdot\frac{m_1}{r_1'} + \left(-G\frac{m_2}{r_2'}\right) = -6'67\cdot10^{-11}\cdot\frac{3}{5} - 6'67\cdot10^{-11}\cdot\frac{5}{1}$$

$$V_{(3,1)m} = -3'73\cdot10^{-10}\ J/Kg$$

$$W_{(0,0)m\to(3,1)m} = m\cdot\left(V_{(0,0)m} - V_{(3,1)m}\right) = 2\cdot\left(-2\cdot10^{-10} - \left(-3'73\cdot10^{-10}\right)\right)$$

$$\boxed{W_{(0,0)m\to(3,1)m} = 3'46\cdot10^{-10}\ J}$$

El signo del trabajo es positivo, se trata de un trabajo realizado espontáneamente por la fuerza gravitatoria. Al ser una fuerza conservativa, el trabajo que realiza es independiente de la trayectoria realizada, solo depende de cuales son el punto inicial y el final

$$W_{A\to B} = -\Delta E_{p\,A\to B}$$

$$W_{A\to B} = -\left(E_{pB} - E_{pA}\right)$$

$$W_{A\to B} = E_{pA} - E_{pB}$$

Coincide con la diferencia de Ep en esos dos ptos.

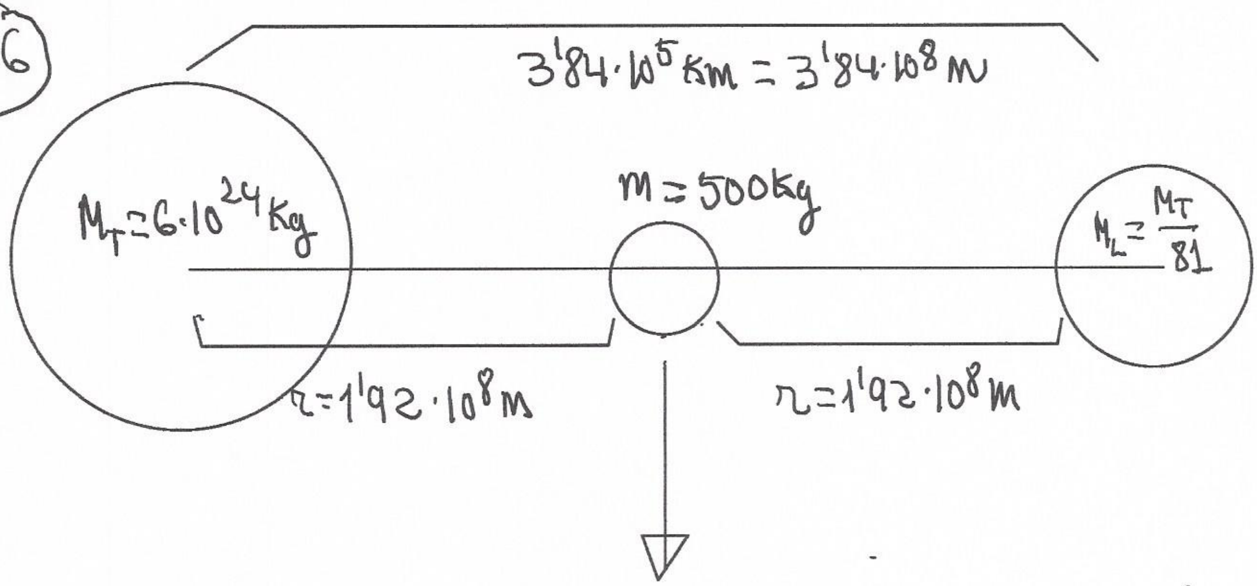
$$W_{A\to B} = m\cdot V_A - m V_B$$

$$W_{A\to B} = m\left(V_A - V_B\right)$$

Depende de los potenciales en cada punto pero no del camino seguido

226

b)



Se aplica el principio de superposición a la hora de calcular la E_p de ese satélite.

$$E_{p_{satélite}} = E_{p_{satélite,\ Tierra}} + E_{p_{satélite,\ Luna}}$$

$$E_{p_{satélite}} = -G\frac{M_T\, m}{r} + \left(-G \cdot \frac{M_L \cdot m}{r}\right)$$

$$E_{p_{satélite}} = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r} - G \cdot \frac{\frac{M_T}{81} \cdot m}{r}$$

$$E_{p_{satélite}} = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r}\left(-1 - \frac{1}{81}\right)$$

$$E_{p_{satélite}} = 6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24} \cdot 500}{1'92 \cdot 10^8} \cdot \left(-\frac{82}{81}\right)$$

$$E_{p_{satélite}} = -1'055 \cdot 10^9\ J$$

227 a)

Campo gravitatorio

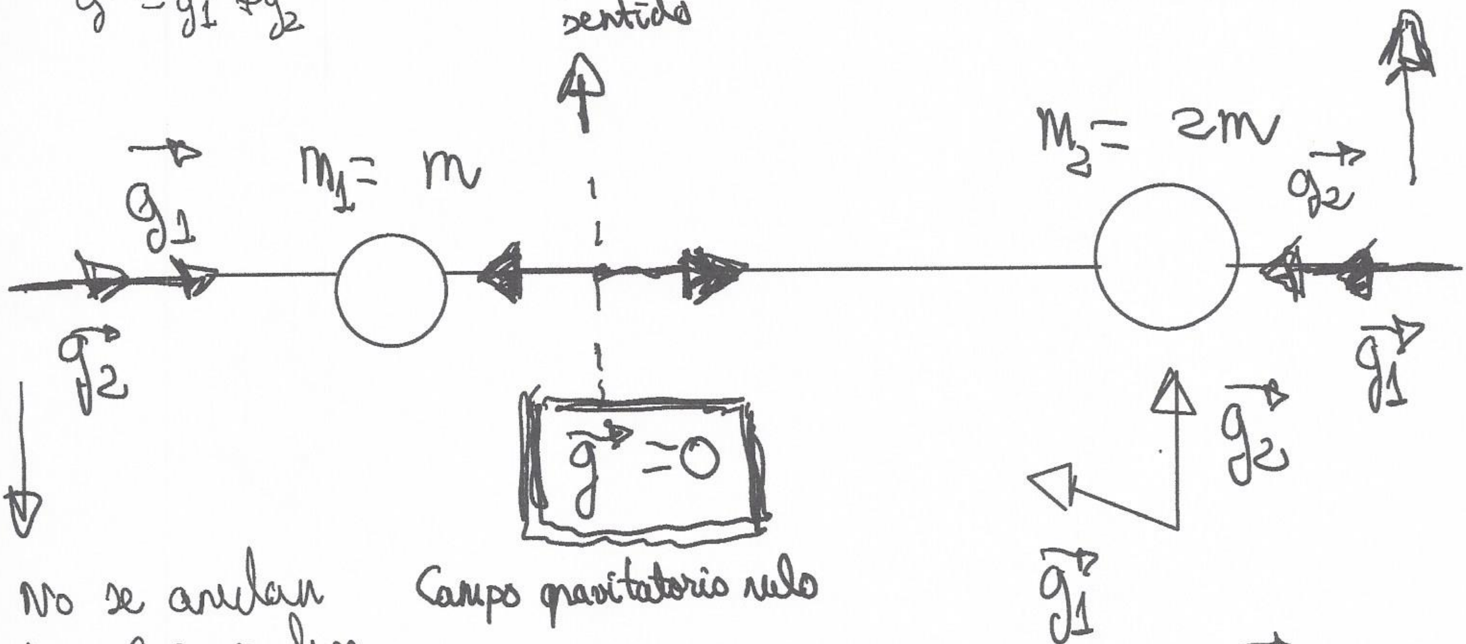
$$\boxed{g = G\cdot\frac{M}{r^2}}$$

Se anulará en un punto más cercano a la masa menor $m_1 = m$ y en la recta que contiene a ambas masas entre $m_1 = m$ y $m_2 = 2m$, ya que solo aquí se cumple que ambos vectores tendrán igual módulo $(|\vec{g_1}| = |\vec{g_2}|)$ y dirección pero con distinto sentido

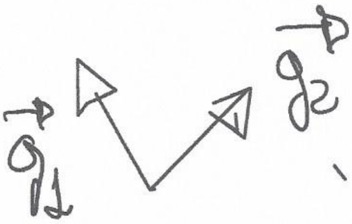
$g = G\cdot\frac{M}{r^2}$

En cada punto se cumple el principio de superposición $\vec{g} = \vec{g_1} + \vec{g_2}$

No se anulan ya que ambos llevan el mismo sentido



No se anulan ya que ambos llevan el mismo sentido.



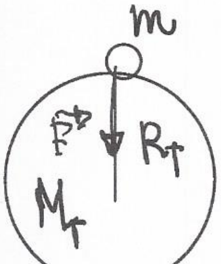
Fuera de la recta $\vec{g_1}$ y $\vec{g_2}$ poseen distinta dirección luego $\vec{g}$ no se anularía

El potencial gravitatorio es una magnitud escalar, cuya expresión es $V = -G\cdot\frac{M}{r}$, y cumple también con el principio de superposición, por lo que en cualquier punto $\boxed{V = V_1 + V_2}$

$$V = -G\cdot\frac{m}{r_1} + \left(-G\cdot\frac{2m}{r_2}\right) = -G\cdot\frac{m}{r_1} - G\cdot\frac{2m}{r_2} \neq 0$$

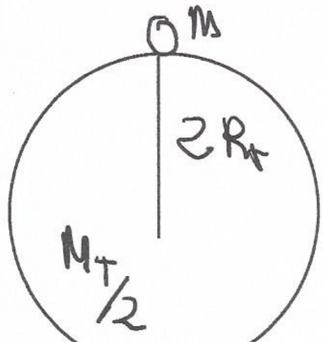
No se anulará en ningún punto, siempre tendríamos en el punto en cuestión un potencial negativo (El potencial al igual que el campo es nulo en el infinito por definición)

228 a) Hacer siempre un dibujo de la situación.



ley de la gravitación universal

$$F = P = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T^2}$$



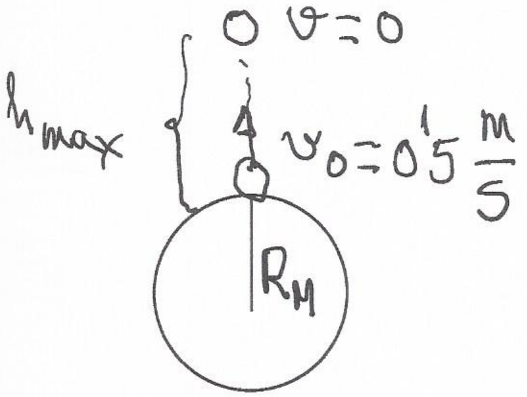
$$F' = P' = G \cdot \frac{\frac{M_T}{2} \cdot m}{(2R_T)^2}$$

$$P' = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{8 R_T^2}$$

$$\frac{P'}{P} = \frac{\cancel{G} \cdot \frac{\cancel{M_T} \cdot \cancel{m}}{8 \cancel{R_T^2}}}{\cancel{G} \cdot \frac{\cancel{M_T} \cdot \cancel{m}}{\cancel{R_T^2}}} \Rightarrow \frac{P'}{P} = \frac{1}{8} \Rightarrow \boxed{P' = \frac{1}{8} P}$$

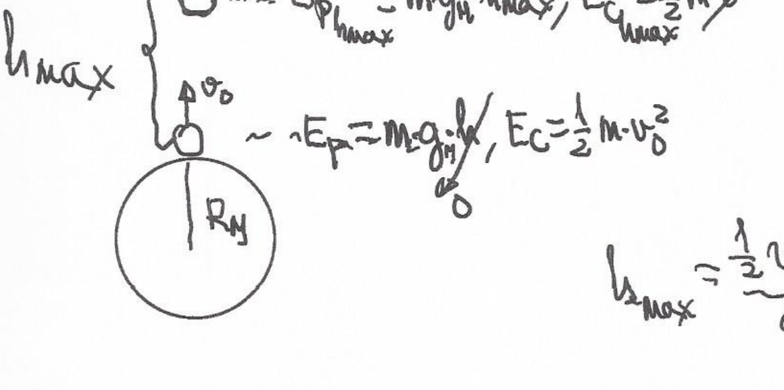
El peso se reduce a la octava parte

b)



→ La velocidad con la que se lanza es muy baja, es de suponer que la h_{max} es tan pequeña que podemos tomar g_M = cte durante todo ese trayecto, luego podríamos usar la expresión $E_p = m \cdot g_M \cdot h$

Principio de conservación de la E_M



$$E_p + E_C = E_{p_{hmax}} + E_{c_{hmax}}$$

$$m \cdot g_M \cdot \cancel{h} + \frac{1}{2} m v_0^2 = m g_M h_{max} + \frac{1}{2} m \cancel{v^2}$$

$$\frac{1}{2} \cancel{m} v_0^2 = \cancel{m} \cdot g_M h_{max} \quad ¿?$$

$$h_{max} = \frac{\frac{1}{2} v_0^2}{g_M} = \frac{v_0^2}{2 g_M} = \frac{0'5^2}{2 \cdot 3'7} = 0'034\ m$$

2 formas mas de hacer el 228 b)

La h_{max} también podríamos haberla calculado por cinemática.

h_{max} $\begin{cases} O \quad v=0 \\ \uparrow \\ O \quad v_0 = 0'5\ m/s \end{cases}$ $\quad g_M = 3'7\ m/s^2 \quad \boxed{MRUA}$

$v^2 = v_0^2 - 2g_M \cdot h$

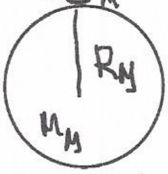
$0^2 = v_0^2 - 2g_M \cdot h_{max}$

$2g_M \cdot h_{max} = v_0^2$

$h_{max} = \frac{v_0^2}{2g_M} = \frac{0'5^2}{2 \cdot 3'7} = 0'034\ m$

Si no hubiésemos podido tomar $g = cte$, aplicaríamos la conservación de la energía con la expresión. $E_p = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$

h_{max} $\begin{cases} \overset{v=0}{O} \text{ - - - } E_{p_{hmax}} = -G \cdot \frac{M_M \cdot m}{(R_M + h_{max})}, \; E_{c_{hmax}} = \frac{1}{2} m \cdot \cancel{v^2}^{\,0} \\ \uparrow v_0 \\ O_M \text{ - - - } E_p = -G \cdot \frac{M_M \cdot m}{R_M}, \; E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \end{cases}$



Principio de conservación de la E_M

$$E_p + E_c = E_{p_{hmax}} + E_{c_{hmax}}$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - G \cdot \frac{M_M \cdot m}{R_M} = -G \cdot \frac{M_M \cdot m}{(R_M + h_{max})} + \frac{1}{2} m \cancel{v^2}^{\,0}$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = G \cdot \frac{M_M \cdot m}{R_M} - G \cdot \frac{M_M \cdot m}{(R_M + h_{max})}$$

$$\frac{1}{2} \cancel{m} \cdot v_0^2 = G \cdot M_M \cdot \cancel{m} \cdot \left(\frac{1}{R_M} - \frac{1}{\underbrace{(R_M + h_{max})}_{r}} \right)$$

Nos piden despejar la h_{max} para no hacer el cálculo mas complejo, es preferible dejar el término $r = R_M + h_{max}$ y cuando despejemos se le resta R_M

$$\frac{v_0^2}{2GM_M} = \left(\frac{1}{R_M} - \frac{1}{r} \right)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R_M} - \frac{v_0^2}{2GM_M}$$

$$r = \frac{1}{\frac{1}{R_M} - \frac{v_0^2}{2\boxed{GM_M}}} = \frac{1}{\frac{1}{R_M} - \frac{v_0^2}{2 g_M R_M^2}} = \frac{1}{\frac{1}{2'44 \cdot 10^6} - \frac{0'5^2}{2 \cdot 3'7 \cdot (2'44 \cdot 10^6)^2}} = 2440214'74\ m$$

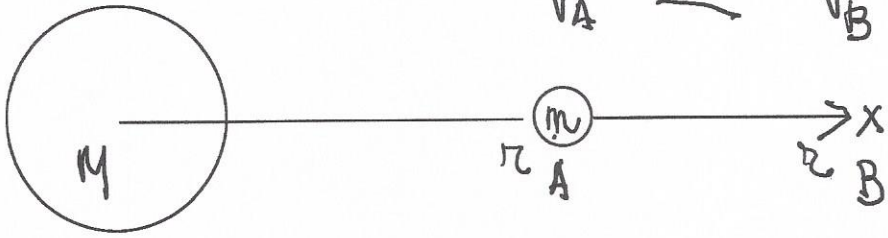
$$g_M = \boxed{G} \frac{M_M}{R_M^2} \Rightarrow \boxed{G \cdot M_M = g_M \cdot R_M^2}$$

Con esos valores. $r = R_M + h$ Suponemos el resultado disrepa

$h = r - R_M = 214'74\ m$ $\quad g = cte.$

235 a)

$V_A < V_B$

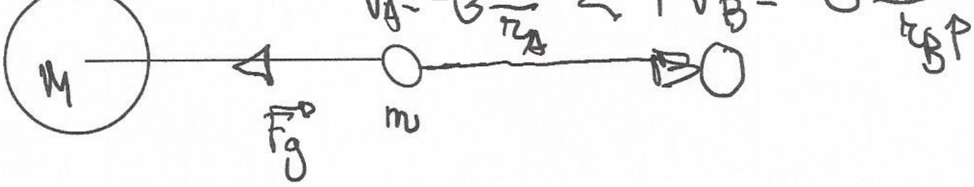


$W_{A \to B} = m \cdot (V_A - V_B) < 0 \to$ Desplazamiento no espontáneo

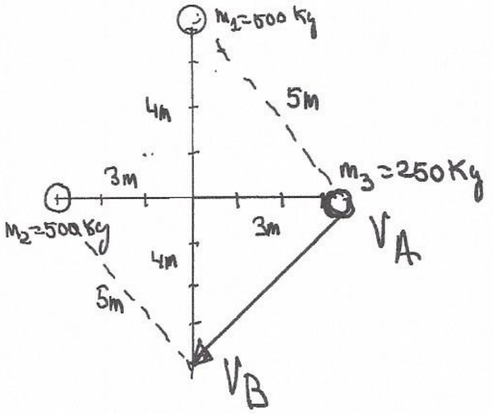
$V_A < V_B$

Es de lógica suponer que la fuerza gravitatoria no alejará espontáneamente la masa m de la M

$V_A = -G \frac{M}{r_A} < \uparrow V_B = -G \cdot \frac{M}{r_B \uparrow}$



b)



$V_A = -G \frac{m_1}{r_1} + \left(-G \frac{m_2}{r_2}\right)$

$V_A = -6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{500}{5} - 6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{500}{6}$

$V_A = -1'22 \cdot 10^{-8}$ J/kg

$V_B = -G \cdot \frac{m_1}{r_1'} + \left(-G \frac{m_2}{r_2'}\right)$

$V_B = -6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{500}{5} - 6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{500}{8}$

$V_B = -1'08 \cdot 10^{-8}$ J/kg

$W_{A \to B} = m_3 \cdot (V_A - V_B) = 250 \cdot (-1'22 \cdot 10^{-8} - (-1'08 \cdot 10^{-8})) = -3'5 \cdot 10^{-7}$ J

No sería espontáneo.

Podríamos haberlo razonado también usando la E_p

$E_{pA} = -G \cdot \frac{M \cdot m'}{r} - G \frac{M \cdot m'}{r}$

$E_{pB} = -G \cdot \frac{M \cdot m'}{r} - G \cdot \frac{M \cdot m'}{r}$

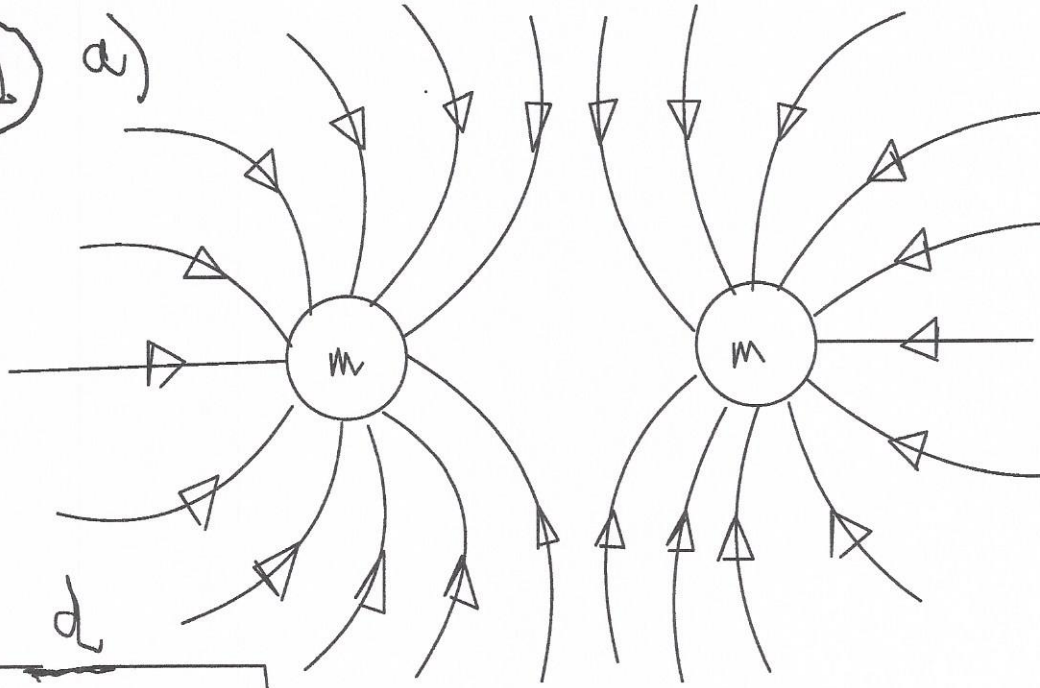
$\to$ Fuerza conservativa $W_{A \to B} = -\Delta E_{p A \to B}$

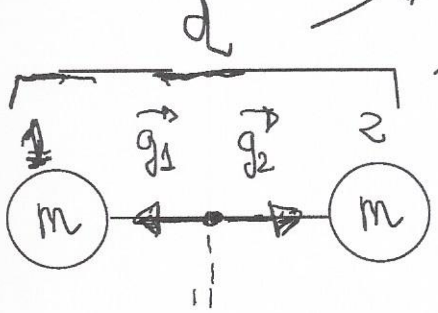
$W_{A \to B} = -(E_{pB} - E_{pA})$

$W_{A \to B} = E_{pA} - E_{pB} = -3'5 \cdot 10^{-7}$ J

(La E_p habría aumentado en $3'5 \cdot 10^{-7}$ J)

241 a)





Principio de superposición

$$\vec{g} = \vec{g_1} + \vec{g_2} = 0$$

Se anulan en un punto intermedio entre las dos masas, equidistante a ambas y dentro de la recta que contiene a ambas puesto que solo en este caso $\vec{g_1}$ y $\vec{g_2}$ tienen igual módulo y dirección y sentido contrario.

$$|\vec{g_1}| = |\vec{g_2}|$$

$$g = G\frac{M}{r^2}$$

$$G\frac{M}{[d/2]^2} = G\frac{M}{(d/2)^2}$$

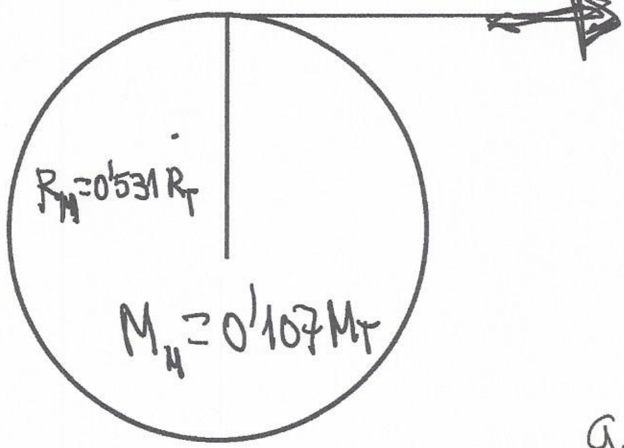
Sin embargo el potencial gravitatorio no se anula ni en ese punto ni en ningún otro, ya que se trata de una magnitud escalar que, cumpliendo el principio de superposición:

$$V = V_1 + V_2 = -G\frac{M}{r} + \left(-G\frac{M}{r'}\right)$$

$$V = -G\frac{M}{r} - G\frac{M}{r'} \neq 0$$

Será la suma de dos potenciales negativos que nunca se anulará (salvo en el ∞ en donde por definición $V=0$)

242 b)

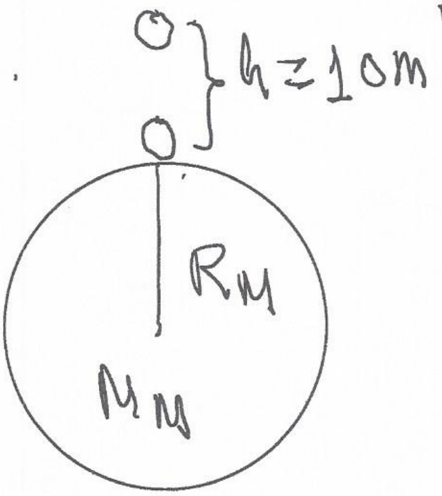


$$g_M = G \cdot \frac{M_M}{R_M^2}$$

$$g_M = G \cdot \frac{0'107\, M_T}{(0'531\, R_T)^2}$$

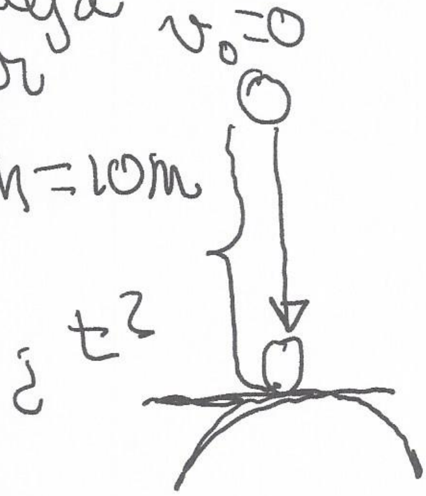
$$g_M = 6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{0'107 \cdot 5'98 \cdot 10^{24}}{(0'531)^2 \cdot (6'37 \cdot 10^6)^2}$$

$$g_M = 3'75\ m/s^2$$



Como nos dicen que se deja caer a una altura de 10m, en ese trayecto podemos ver que g_M permanece prácticamente cte

Se deja caer



el tiempo solo lo podré calcular usando la cinemática del MRUA con caída libre

$$h = \cancel{v_0} \cdot t + \frac{1}{2} g_M \cdot t^2$$

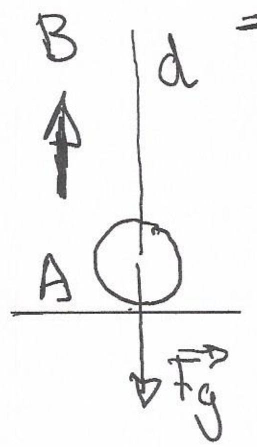
$$0$$

$$h = \frac{1}{2} g_M \cdot t^2$$

$$2h = g_M \cdot t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g_M}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10}{3'75}} = \boxed{2'31\ s}$$

259 a)



⇒ El trabajo realizado por la fuerza gravitatoria puede ser negativo si va en contra del desplazamiento del cuerpo, como es el caso del ascenso de un cuerpo, en donde

$$W_{F_g \, A\to B} = F_g \cdot d \cdot \underbrace{\cos 180°}_{-1} = -F_g \cdot d$$

En este caso la E_p del cuerpo aumentaría $\Rightarrow$ $W_{F_g} = -\Delta E_{p_{A\to B}}$

$$W_{F_g} = -(E_{p_B} - E_{p_A})$$

En este caso es negativo ← $W_{F_g} = E_{pA} - E_{pB}$

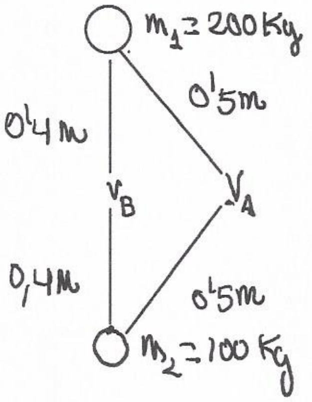
$$E_{pA} - E_{pB} < 0$$

$E_{pA} < E_{pB} \Rightarrow$ La E_p aumenta de A a B

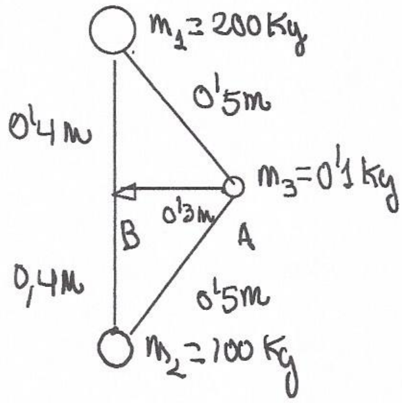
La E_p gravitatoria sí puede ser negativa, si tomamos como cero de E_p el ∞, en cualquier otro punto en el que las masas M y m estuviesen más cerca, la E_p sería menor y por tanto negativa $E_p = -G\frac{M \cdot m}{r}$

Por ello se dice que lo que realmente tiene significado son las diferencias de E_p y no su valor en un punto, ya que el valor de la E_p en dicho punto depende del origen de E_p tomado, mientras que la diferencia de E_p entre dos ptos se mantiene independientemente del origen que tomemos.

259 b)



Mediante el principio de superposición calculamos V_A y V_B para hallar después $W_{A\to B}$



Principio de superposición

$$V_A = V_1 + V_2 = -G\cdot\frac{m_1}{r_1} + \left(-G\frac{m_2}{r_2}\right) = -6'67\cdot10^{-11}\cdot\frac{200}{0'5} - 6'67\cdot10^{-11}\cdot\frac{100}{0'5}$$

$$V_A = -4\cdot10^{-8}\ J/Kg$$

$$V_B = V_1' + V_2' = -G\frac{m_1}{r_1'} + \left(-G\frac{m_2}{r_2'}\right) = -6'67\cdot10^{-11}\cdot\frac{200}{0'4} - 6'67\cdot10^{-11}\cdot\frac{100}{0'4}$$

$$V_B = -5\cdot10^{-8}\ J/Kg$$

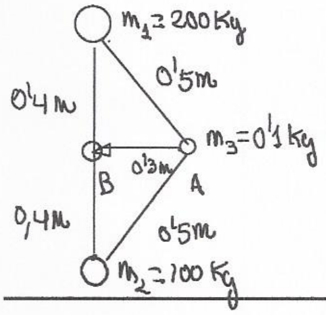
$$W_{A\to B} = m_3\cdot(V_A - V_B) = 0'1\cdot\left(-4\cdot10^{-8} - (-5\cdot10^{-8})\right) = \boxed{+10^{-9} J}$$

Ese trabajo positivo o espontáneo lo realiza la fuerza gravitatoria al acercar la masa m_3 a las otras dos masas de manera espontánea

COMENTARIOS ADICIONALES AL EJERCICIO

El trabajo que realiza la fuerza gravitatoria sería independiente de la trayectoria, solo dependería de cuales fuesen los ptos A y B y sus correspondientes potenciales V_A y V_B } Fuerza gravitatoria es conservativa

Podríamos haber hecho el ejercicio aplicando el principio de superposición a la E_p



$$E_{p_A} = E_{p_{m_1,m_3}} + E_{p_{m_2,m_3}} = -G\cdot\frac{m_1\cdot m_3}{r} + \left(-G\frac{m_2\cdot m_3}{r}\right)$$

$$E_{p_A} = -6'67\cdot10^{-11}\cdot\frac{200\cdot0'1}{0'5} - 6'67\cdot10^{-11}\cdot\frac{100\cdot0'1}{0'5}$$

$$E_{p_A} = -4\cdot10^{-9} J$$

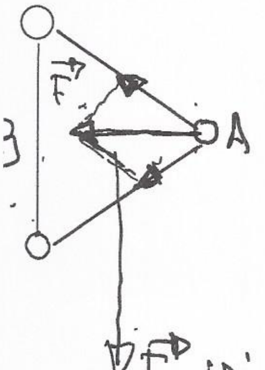
(Se podría comprobar que $E_{p_A} = m_3\cdot V_A$.)

$$E_{p_B} = E'_{p_{m_1,m_3}} + E'_{p_{m_2,m_3}} = -G\cdot\frac{m_1\cdot m_3}{r'} + \left(-G\frac{m_2\cdot m_3}{r'}\right)$$

$$E_{p_B} = -6'67\cdot10^{-11}\cdot\frac{200\cdot0'1}{0'4} - 6'67\cdot10^{-11}\cdot\frac{100\cdot0'1}{0'4}$$

$$E_{p_B} = -5\cdot10^{-9} J$$

(Se podría comprobar que $E_{p_B} = m_3\cdot V_B$)



$$W_{A\to B} = -\Delta E_{p_{A\to B}} = -\left(E_{p_B} - E_{p_A}\right) = E_{p_A} - E_{p_B} = -4\cdot10^{-9}J - (-5\cdot10^{-9}J) = \boxed{10^{-9}J}$$

$$W_{A\to B} = -\Delta E_{p_{A\to B}}$$

$$10^{-9}J = -\Delta E_{p_{A\to B}}$$

$$\Delta E_{p_{A\to B}} = -10^{-9}J$$

$\Rightarrow$ La E_p disminuye en 10^{-9}J, que es lo que aumenta la E_c al pasar de $A\to B$ mediante un $W_{A\to B}$ realizado por la fuerza gravitatoria

$$\boxed{-\Delta E_{p_{A\to B}} = W_{A\to B} = \Delta E_{c_{A\to B}}}$$

$\vec{F}$ irá cambiando a lo largo de ese trayecto (no es cte) $\Rightarrow$ No utilizamos la expresión $\cancel{W = F\cdot d}$ ya que solo serviría si F fuese cte en el trayecto