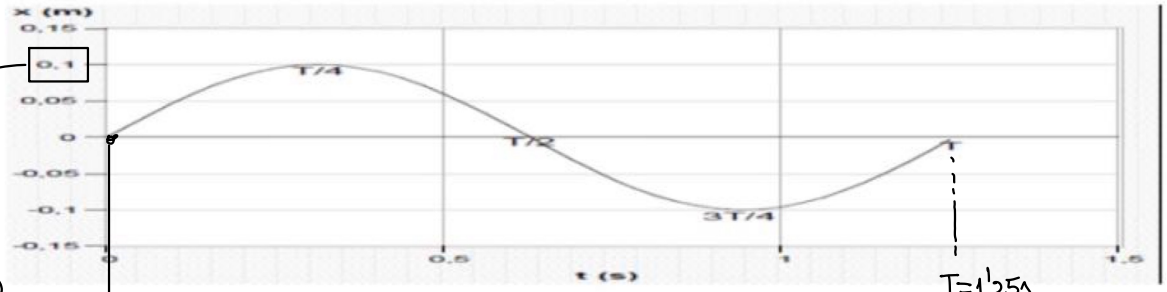
# SOLUCIONES M.A.S EJERCICIOS Y CUESTIONES

1.- En la gráfica se muestra la posición en función del tiempo para una partícula que describe un m.a.s. Determina la ecuación de dicho movimiento.




AMPLITUD $A = 0'1\,m$

T=1'25s

Ecuación del M.A.S.

$$x(t) = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi\ rad}{1'25\ s} = 1'6\pi\ \frac{rad}{s}$$

$\varphi_0$ { $t=0$, $x=0$ } $\rightarrow$ $x = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$

$0 = A \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot 0 + \varphi_0)$

$0 = A \cdot \operatorname{sen}\varphi_0$

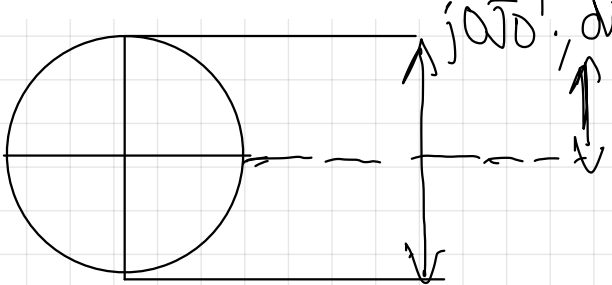
$\operatorname{sen}\varphi_0 = 0$

$\varphi_0 = \operatorname{arcsen} 0°$ $\rightarrow$ 0 ; 180° ($\pi$ rad)

Se toma este valor de ángulo de fase inicial $\varphi_0 = 0$ ya que la partícula se sitúa en valores positivos de la elongación a partir de t=0.

$$x(t) = 0'1 \cdot \operatorname{sen}(1'6\pi t)\ (SI)$$

2.- La aguja de una máquina de coser oscila entre dos puntos separados por una distancia vertical de 20 mm. Suponiendo que describe un m.a.s de frecuencia 30 Hz, ¿Cuál será su velocidad y aceleración máximas en unidades del Sistema Internacional?.



¡OJO!, distancia vertical de 20mm

$A = 10\,mm = 10^{-2}\,m$

Si no hacen especificaciones acerca del instante inicial, se toma $\varphi_0 = 0$.

El M.A.S es en el eje OY $\leftarrow y(t) = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot \frac{1}{T}$ $\quad \omega = 2\pi f$

$y(t) = 10^{-2} \cdot \operatorname{sen}(60\pi t)$ (S.I) $\quad \omega = 2\pi \cdot 30 = 60\pi \frac{rad}{s}$

$v = \frac{dy}{dt} = 10^{-2} \cdot [\cos(60\pi t)] \cdot 60\pi$

$\boxed{v = 0'6 \cdot \pi \cdot \cos(60\pi t)\ (S.I)}$ $\rightarrow$ D

$v_{max} = 0'6 \cdot \pi \cdot \cos(60\pi t)$ $\quad \cos = \pm 1$

$v_{max} = 0'6 \cdot \pi \frac{m}{s} = 1'88 m/s.$

$(v_{max} = \pm 1'88 \frac{m}{s})$

$a = \frac{dv}{dt} = 0'6\pi \cdot [-\operatorname{sen}(60\pi t)] \cdot 60\pi$

$\boxed{a = -36\pi^2 \cdot \operatorname{sen}(60\pi t)\ (S.I)}$

$a_{max} = -36\pi^2 \cdot \operatorname{sen}(60\pi t)$ $\quad \operatorname{sen} = \pm 1.$

$a_{max} = 36\pi^2 \frac{m}{s^2} = 354'94 m/s^2$

$(a_{max} = \pm 354'94 m/s^2)$

3.- a) Represente gráficamente el movimiento armónico simple de una partícula dado por la ecuación y(t)=5 ·sen (10t+π) (S.I). Represente también otro movimiento armónico simple que tenga una amplitud doble y una frecuencia mitad que la anterior.

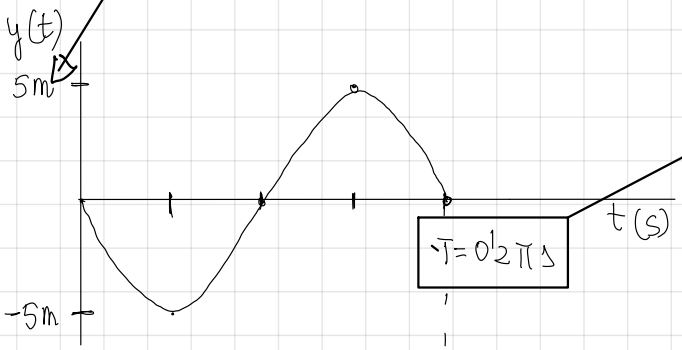
b) Represente gráficamente la velocidad y la aceleración del movimiento armónico simple dado por la ecuación y(t)=5 ·sen (10t+π) (S.I)

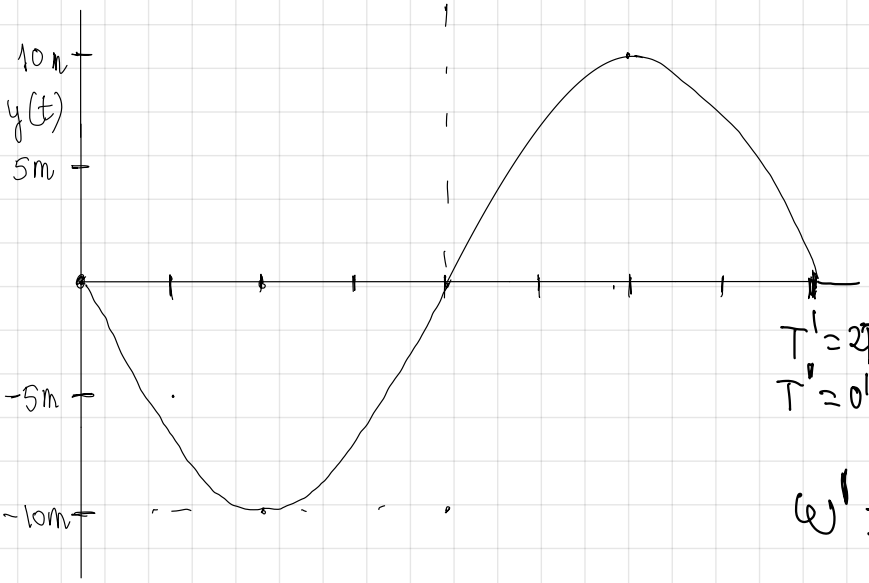
$$y = 5 \cdot \operatorname{sen}(10t + \pi) \ (S.I)$$

(A) (ω) $\varphi_0$.

$\omega = 10 \frac{rad}{s}$

$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10} = 0'2\pi\ s$




$A' = 2A = 10m$

$f = \frac{1}{T}$

$f' = \frac{1}{2T}$

$\Rightarrow \boxed{T' = 2T}$

El nuevo período es el doble

$\omega' = \frac{2\pi}{T'} = \frac{2\pi}{2T} = \frac{2\pi}{0'4\pi} = 5 \frac{rad}{s}$

$$\boxed{y = 10 \cdot \operatorname{sen}(5t + \pi) \ (S.I)} \Rightarrow$$ Esta es la nueva ecuación que estamos representando

b) $y = 5 \cdot \operatorname{sen}(10t + \pi) \ (S.I)$

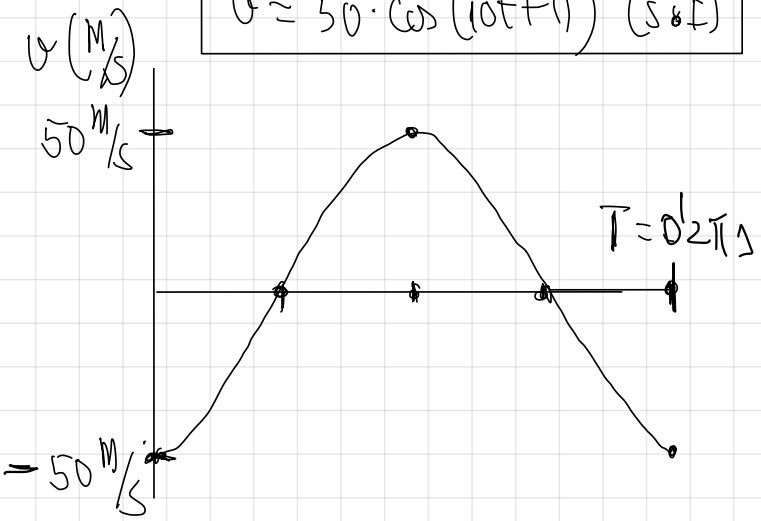
$v = \frac{dy}{dt} = 5 \cdot [\cos(10t + \pi)] \cdot 10$

$$\boxed{v = 50 \cdot \cos(10t + \pi) \ (S.I)}$$

⇓

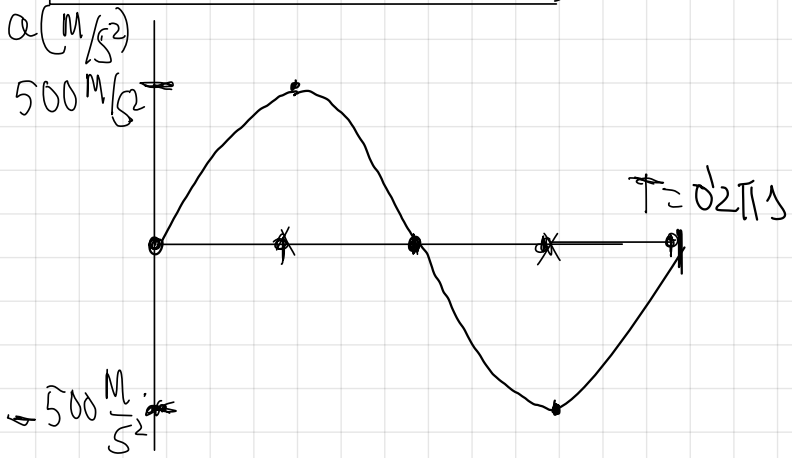
función a representar

$v = 50 \cdot \cos(10t + \pi)$ (S.I.)

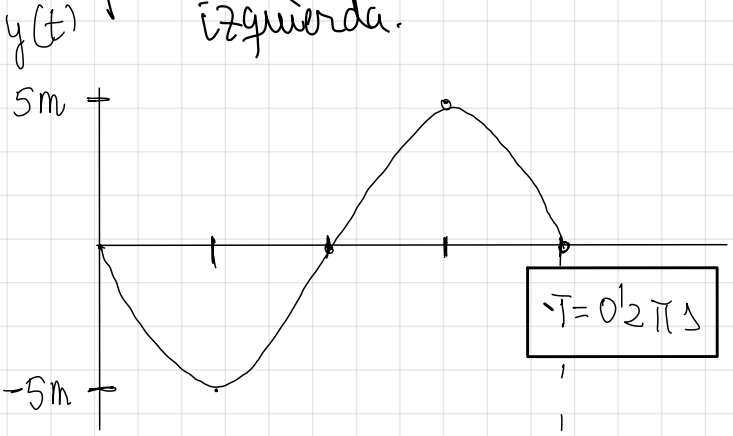



$a = \frac{dv}{dt} = 50 \cdot [-\operatorname{sen}(10t + \pi)] \cdot 10$

$a = -500 \cdot \operatorname{sen}(10t + \pi)$ (S.I.)




Para una mejor comprensión del M.A.S conviene relacionar la gráfica anterior de la posición con las de la izquierda.



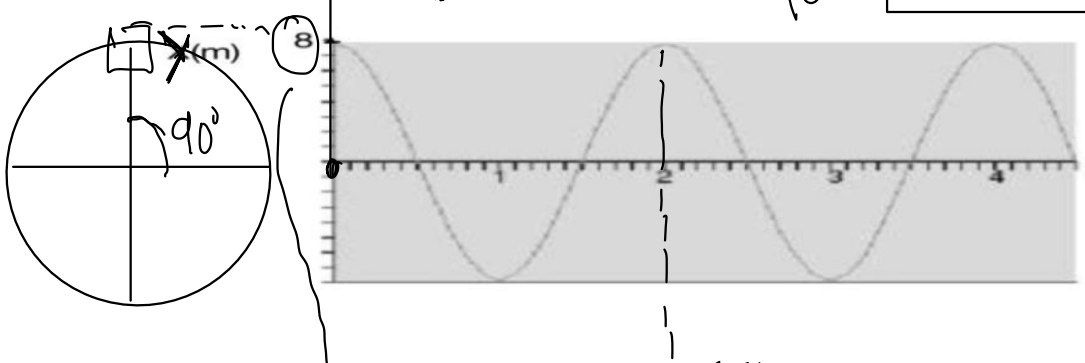

4.- En la gráfica se muestra la posición en función del tiempo para una partícula que describe un m.a.s.

a) Escribir la ecuación del m.a.s en unidades S.I.

b) Calcular su posición, su velocidad y su aceleración en el instante t=1s, comentando los resultados.

→ Para calcular $\varphi_0$ → Si $t = 0 \Rightarrow y = A$.

$y = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$




$A = A \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot 0 + \varphi_0)$

$A = A \cdot \operatorname{sen} \varphi_0$

$\operatorname{sen} \varphi_0 = 1$

$\varphi_0 = \operatorname{arcsen} 1$

$\varphi_0 = 90° = \frac{\pi}{2}$ rad

a) $y(t) = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$

$A = 8m$

$T = 2s$

$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \frac{rad}{s}$

$y(t) = 8 \cdot \left| \operatorname{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \right|$ (S.I)

Recordar que $\operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$

Es equivalente a escribir la ecuación del M.A.S así

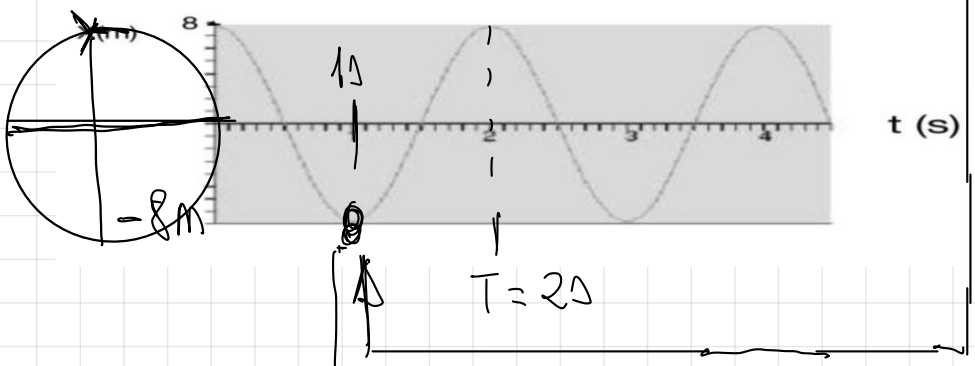
$$y(t) = 8 \cdot \cos(\pi t)$$

$$y(t=1) = 8 \cdot \cos(\pi \cdot 1) = -8\ m$$

Comentarios

$t = 1$ s

En ese instante ha transcurrido la mitad del periodo, y el móvil está en el otro extremo de la trayectoria

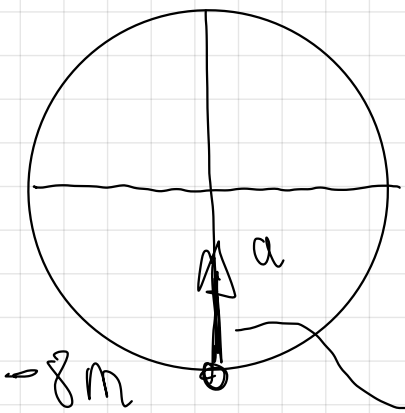



$$v = \frac{dy}{dt} = 8 \cdot [-\operatorname{sen}(\pi t)] \cdot \pi$$

$$v = -8\pi \operatorname{sen}(\pi t)$$

$$v(t=1) = -8\pi \cdot \operatorname{sen}(\pi \cdot 1) = 0$$

Como era de esperar, en el extremo de la trayectoria su velocidad es nula




$$a = \frac{dv}{dt} = -8\pi \cdot \cos(\pi t) \cdot \pi$$

$$a = -8\pi^2 \cdot \cos(\pi t)$$

$$a(t=1) = -8\pi^2 \cdot \cos(\pi)$$

$$a(t=1) = 8\pi^2\ m/s^2$$

La aceleración en el extremo es máxima y su sentido es el indicado

5.- La ecuación de un m.a.s viene dada por la expresión

$$x(t) = 0{,}5 \cdot \cos(\pi t) \text{ (S.I)}$$

a) Calcular su amplitud, su ángulo de fase inicial, su periodo, su frecuencia y su posición al cabo de 0,5 segundos.

b) Calcular la velocidad y la aceleración máximas que podría alcanzar en su movimiento.

a) $x(t) = 0'5 \cdot \cos(\pi t)$ (S.I)

$A = 0'5$ m $\quad \omega$

Para el cálculo de $\varphi_0 \Rightarrow$ Equivale a escribir:

$x(t) = 0'5 \cdot \operatorname{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ (S.I)

$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ rad.

$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ s

$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} = 0'5$ Hz.

$\boxed{x(t) = 0'5 \cdot \cos(\pi t) \text{ (S.I)}}$

$x(t=5) = 0'5 \cdot \cos(\pi \cdot 0'5) = 0$

b) $v = \frac{dx}{dt} = 0'5 \cdot [-\operatorname{sen}(\pi t)] \cdot \pi$

$\boxed{v = -0'5\pi \cdot \operatorname{sen}(\pi t) \text{ (S.I)}}$

$v_{max} = -0'5\pi \cdot \operatorname{sen}(\pi t) = \pm 0'5\pi \frac{m}{s} = \pm 1'57 \frac{m}{s}$ $\quad \pm 1$

Mirar en apuntes

$v_{max} = A \cdot \omega$

$v_{max} = 0'5\pi \frac{m}{s}$

$a = \frac{dv}{dt} = -0'5\pi \cdot [\cos(\pi t)] \cdot \pi$

$\boxed{a = -0'5\pi^2 \cdot \cos(\pi t) \text{ (S.I)}}$

$a_{max} = -0'5\pi^2 \cos(\pi t) = \pm 0'5\pi^2 \frac{m}{s} = \pm 4'93 \frac{m}{s^2}$ $\quad \pm 1$

Mirar en apuntes

$a_{max} = A \cdot \omega^2$

$a_{max} = \pm 0'5\pi^2 \frac{m}{s^2}$

6.- La ecuación de un cuerpo que describe un m.a.s es $x(t) = 10 \cdot \text{sen}(\pi t + 3\pi/2)$ (S.I).

a) ¿Cuánto valen la amplitud, el periodo y la frecuencia del movimiento?

b) Representar gráficamente la posición en función del tiempo

c) ¿Cuánto valen la velocidad y la aceleración del cuerpo para t = 2s?

a) $x(t) = \boxed{10} \cdot \text{sen}\left(\pi t + \frac{3\pi}{2}\right)$ (S.I)

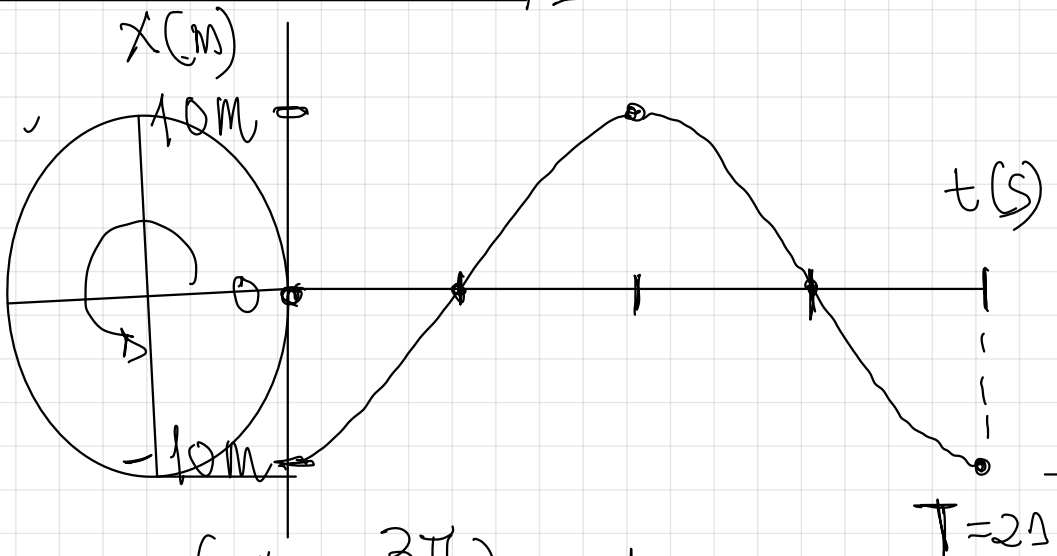
$A = 10\ m$

$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi} = 2\ s$

$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} = 0'5\ Hz$

b) $x(t) = 10 \cdot \text{sen}\left(\pi t + \boxed{\frac{3\pi}{2}}\right)$ (S.I)

$\boxed{\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}\ rad}$




$x(t=0) = 10 \cdot \text{sen}\left(\pi \cdot 0 + \frac{3\pi}{2}\right) = -10m$

$v = \frac{dx}{dt} = 10 \left[\cos\left(\pi t + \frac{3\pi}{2}\right)\right] \pi \Rightarrow v = 10\pi \cdot \cos\left(\pi t + \frac{3\pi}{2}\right)$ (SI)

$v(t=2s) = 10\pi \cdot \underbrace{\cos\left(2\pi + \frac{3\pi}{2}\right)}_{\cos(270°)} = 0$

Como se observa cuando $t=2s$ coincide con el periodo T y en ese extremo $v=0$ y su aceleración es máxima y positiva.

$a = \frac{dv}{dt} = 10\pi \left[-\text{sen}\left(2\pi t + \frac{3\pi}{2}\right)\right] \cdot \pi$

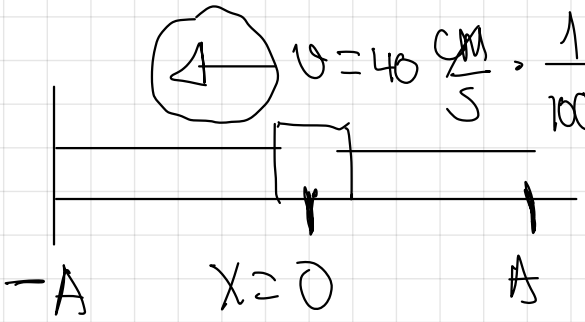
$a = -10\pi^2 \cdot \text{sen}\left(2\pi t + \frac{3\pi}{2}\right)$ (SI)

$a(t=2s) = -10\pi^2 \cdot \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -10\pi^2 \cdot (-1) = 10\pi^2 \frac{m}{s^2} \approx 98'6 \frac{m}{s^2}$

7.- Un punto material está animado con un movimiento armónico simple en el eje X, alrededor de su posición de equilibrio en x= 0. En el instante t=0, el punto material está situado en x=0 y se desplaza en el sentido negativo del eje X con una velocidad de 40 $cm \cdot s^{-1}$. La frecuencia del movimiento es de 5 Hz. Determinar:

a) La posición en función del tiempo o ecuación del movimiento armónico simple

b) La posición y la velocidad en el instante t=5s




$v = 40 \frac{cm}{s} \cdot \frac{1\ m}{100\ cm} = 0'4\ m/s$

$x = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0)$

$v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$

$v_{max} = \pm A\omega$

Como está en el punto de equilibrio con esa velocidad tenemos en cuenta que:

- Posee la $v_{máxima}$ de oscilación ⇐ por ello podremos calcular la amplitud teniéndolo en cuenta.
- Se mueve en sentido negativo también se ha de tener en cuenta con el ángulo de fase inicial.

Sabemos que en $t=0 \Rightarrow x=0$.

$x = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0)$

$0 = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot 0 + \varphi_0)$

$\text{sen}\ \varphi_0 = 0 \Rightarrow \varphi_0 = \arcsen 0°$ → $180° = \pi$ rad.

→ $0°$

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \frac{1}{T} = 2\pi f \Rightarrow \omega = 2\pi f = 2\pi 5$

$\omega = 10\pi \frac{rad}{s}$

$$v_{max} = A \cdot \omega \Rightarrow A = \frac{v_{max}}{\omega} = \frac{0'4\ m/s}{10\pi\ rad/s} = 0'013\ m$$

$$x(t) = 0'013 \cdot \operatorname{sen}(10\pi t + \pi)\ (S.I.)$$

b)

$$t = 5s \Rightarrow x(t=5s) = 0'013 \cdot \operatorname{sen}(50\pi + \pi) = 0$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 0'013 \cdot \left[\cos(10\pi t + \pi)\right] \cdot 10\pi$$

$$v = 0'13\pi \cdot \cos(10\pi t + \pi)\ (S.I.)$$

$$v(t=5s) = 0'13\pi \cdot \cos(50\pi + \pi) = 0'13\pi \cdot (-1) = -0'4\ \frac{m}{s}$$

Comentario de resultados.

$$f = \frac{1}{T}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{5} = 0'2\ s$$

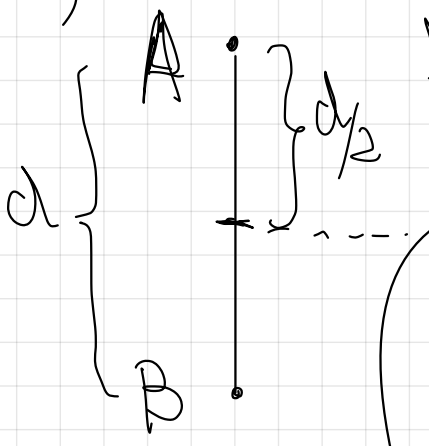
Han transcurrido 25 periodos completos de 0'2 s ($0'2 \cdot 25 = 5\ s$), así que volverá a pasar por el mismo punto con las mismas características cinemáticas (su velocidad es idéntica a la del comienzo)

8.-Una partícula describe un movimiento armónico simple entre dos puntos A y B que distan una distancia vertical d, con un periodo T.

a) Escriba la ecuación de dicho movimiento armónico simple sabiendo que para t=0 la partícula se encuentra en el punto medio del segmento AB. Realizar una gráfica cualitativa de la elongación en función del tiempo.

b) Repita el apartado a) suponiendo que el periodo hubiese sido la mitad.

a) escribimos la ecuación del M.A.S en función de los parámetros que nos dan.



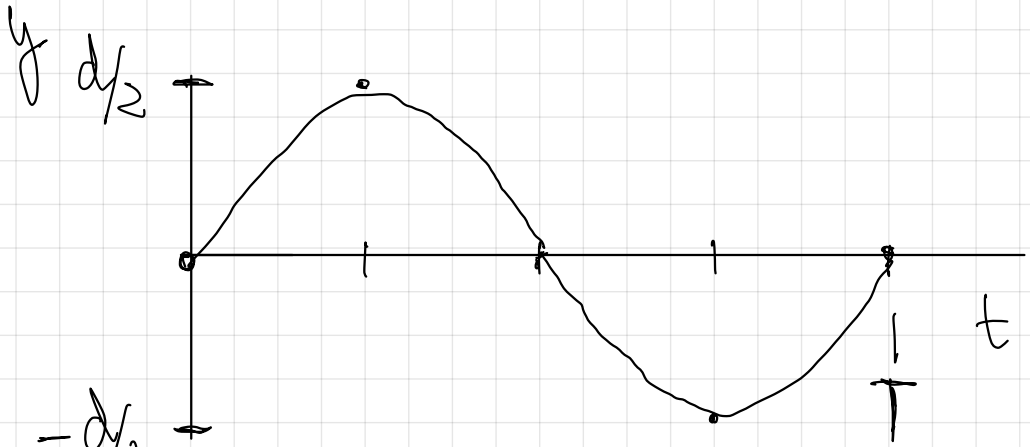

$$y(t) = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

$$\boxed{y(t) = \frac{d}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)}$$

COMO NO ESPECIFICA EL SENTIDO EN EL QUE SE MUEVE SE TOMA $0^\circ$ CERO. COMO $\varphi_0$

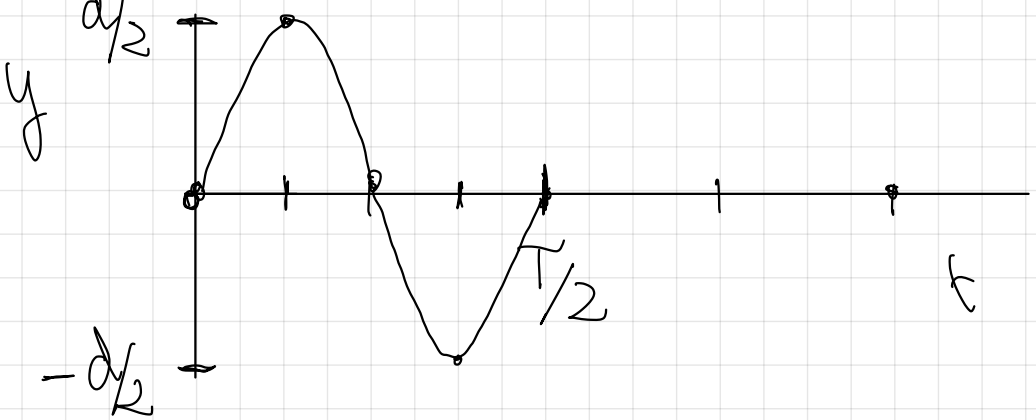
$t=0$, $x=0$ $\Rightarrow$ $0 = A \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot 0 + \varphi_0)$

$0 = A \cdot \operatorname{sen}\varphi_0 \Rightarrow \operatorname{sen}\varphi_0 = 0 \Rightarrow \varphi_0 = \arcsen 0$ $\sim 180^\circ$




$$y(t) = \frac{d}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

$$y(t) = \frac{d}{2} \operatorname{sen}(\omega t)$$




$$y(t) = \frac{d}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T/2} \cdot t\right)$$

$$y(t) = \frac{d}{2} \cdot \operatorname{sen}(2\omega t)$$

9.- ¿Pueden anularse simultáneamente la velocidad y la aceleración de un movimiento armónico simple?

No, porque en el instante en el que la velocidad es nula la aceleración es máxima y viceversa (ver en los apuntes de teoría la cinemática del M.A.S)

10.- ¿En qué posición del movimiento armónico simple la velocidad es igual a la mitad de su valor máximo?

$y(t) = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$

$v = \frac{dy}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$

$v = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0)$ | $v_{max} = A\omega$

Esta expresión no nos sirve para despejar la posición requerida ya que está en función de t y no de la posición la que nos interesa se deduce así (ver teoría)

$v = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$

$\operatorname{sen}^2(\omega t + \varphi_0) + \cos^2(\omega t + \varphi_0) = 1$

$\cos(\omega t + \varphi_0) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\omega t + \varphi_0)}$

$v = A \cdot \omega \cdot \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\omega t + \varphi_0)}$

$v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - A^2 \cdot \operatorname{sen}^2(\omega t + \varphi_0)}$

$y = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$

$v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - y^2}$

$v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - y^2}$

$v_{max} = A \cdot \omega$

$\frac{v_{max}}{2} = \frac{A \cdot \omega}{2}$

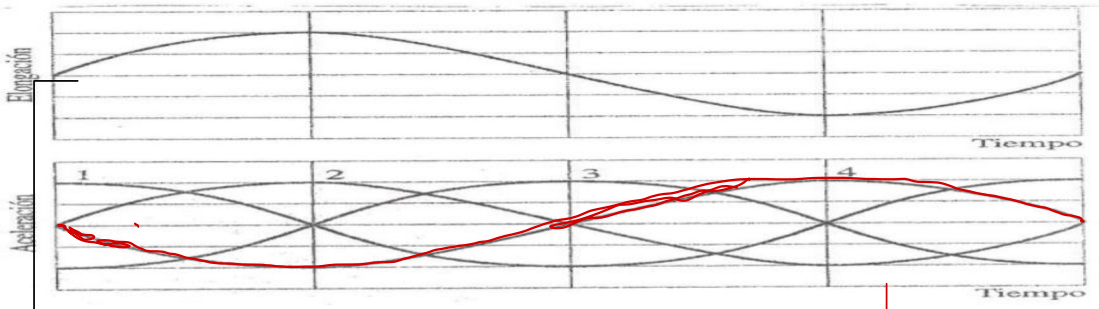
$\frac{A \cdot \omega}{2} = \omega \cdot \sqrt{A^2 - y^2}$

$\left(\frac{A}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{A^2 - y^2}\right)^2$

$\frac{A^2}{4} = A^2 - y^2 \Rightarrow y^2 = A^2 - \frac{A^2}{4} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{3}{4}A^2} \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} A$

ya que existen 2 posiciones en las que se cumple que la velocidad es la mitad de su valor máximo (a un lado y a otro de la posición de equilibrio)

11.- En la primera de las dos gráficas que se muestran, se representa la variación con el tiempo del desplazamiento (elongación) que experimenta una partícula que se mueve con un m.a.s. ¿cuál de las curvas numeradas en la segunda gráfica puede representar la variación de la aceleración con el tiempo del citado m.a.s?




→ la ecuación que corresponde es:

$$y(t) = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t)$$

$$v = \frac{dy}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = A \cdot \omega \left[-\operatorname{sen}(\omega t)\right] \cdot \omega = -A \cdot \omega^2 \cdot \operatorname{sen}(\omega t)$$

La función se corresponde con la gráfica 4

12.-Suponiendo la gravedad constante y que no existen pérdidas energéticas, ¿es periódico el movimiento que efectúa una bola elástica al rebotar sobre una mesa?, ¿es oscilatorio?, ¿es armónico simple?.
Responder nuevamente a las tres cuestiones anteriores, suponiendo la gravedad constante y que si existen pérdidas energéticas.

Si no existen pérdidas energéticas

- Si es periódico, porque en intervalos de tiempos iguales (T) la bola pasa por la misma posición con las mismas características, cinemáticas de velocidad y aceleración
- Si es oscilatorio, ya que es un movimiento periódico que describe una trayectoria en dos sentidos, oscilando alrededor de una posición intermedia
- No es m.a.s porque la aceleración de la gravedad es constante, y la aceleración de la gravedad en un m.a.s no es constante, sino que su valor es $a = -\omega^2 y$ (depende de la elongación)

Si existen pérdidas energéticas

- No periódico porque la bola no siempre pasará por la misma posición
- No es oscilatorio porque no es periódico
- No es movimiento armónico simple porque no es ni periódico ni oscilatorio, además nos sigue comentando que la gravedad es constante, cuando se ha visto según la expresión descrita anteriormente que la gravedad no es constante en un m.a.s

13.- a) Representar gráficamente la aceleración de un movimiento armónico simple en función de la posición.

b) Representar gráficamente la fuerza recuperadora de un movimiento armónico simple en función de la posición.

c) Representar gráficamente la fuerza recuperadora de un movimiento armónico simple en función del instante t suponiendo que el ángulo de fase inicial es cero.

a)

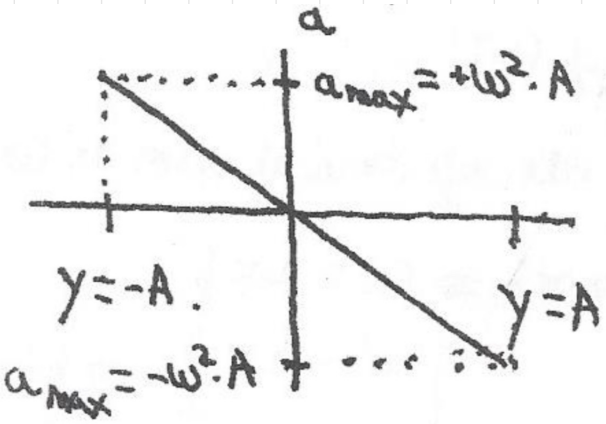
Primero tenemos que deducir las funciones a representar.

$y = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$

$v = \frac{dy}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$

$a = \frac{dv}{dt} = -A \cdot \omega^2 \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$

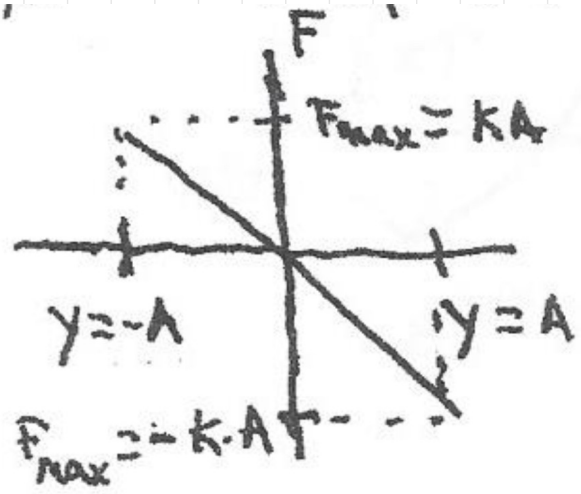
$a = -\omega^2 \cdot y$ ← Ecuación de




→ Cuando la elongación es negativa la aceleración es positiva y viceversa, el signo nos indica el sentido de la aceleración.

$a = -\omega^2 y$ → la representación sería una recta con pendiente $\omega$

b)




$F = m \cdot a$

$F = m \cdot (-\omega^2 \cdot y)$

$F = -m \cdot \omega^2 \cdot y$

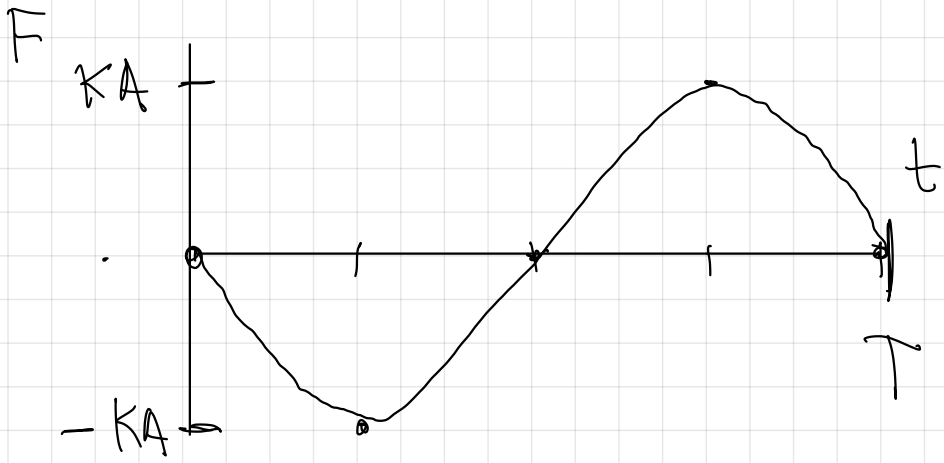
$F = -ky$

Con la fuerza recuperadora pasa lo mismo que se describe con la aceleración.

la representación sería una recta de pendiente k

c) $F = -K \cdot y \Rightarrow F = -K \cdot A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$ $(\varphi_0 = 0)$

$F = -K \cdot A \cdot \operatorname{sen}(\omega t)$




La Fuerza recuperadora es una fuerza central, periódica (su valor se repite cada ciertos intervalos de tiempo), es directamente proporcional a la elongación y, con sentido contrario al desplazamiento

14.- Una masa de 2 Kg cuelga de un resorte cuya constante elástica es K=200 N · $m^{-1}$ y puede oscilar libremente sin rozamiento. Desplazamos la masa 10 cm por encima de su posición de equilibrio y la soltamos para que empiece a oscilar.

a) Calcula la ecuación del movimiento de la masa

b) Representa gráficamente la posición de la masa en función del instante t

c) Representa gráficamente la velocidad de la masa en función del instante t

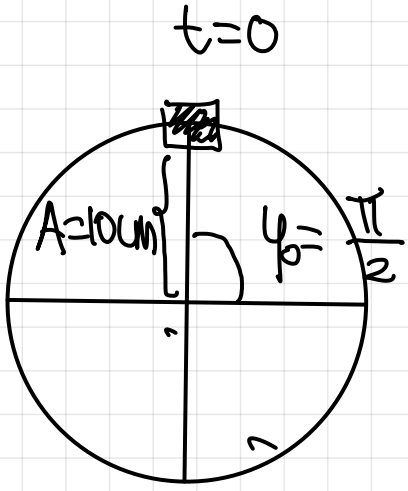
d) Representa gráficamente la aceleración de la masa en función del instante t

e) Calcula su velocidad máxima y su aceleración máxima

f) Calcula la fuerza recuperadora y la aceleración cuando la masa se encuentra 5 cm por encima de la posición de equilibrio

g) Repetir el apartado f) para el caso en el que la masa se encuentre 7 cm por debajo de la posición de equilibrio.

a)




Aunque gráficamente se observa el ángulo de fase inicial $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ rad se puede calcular sabiendo que en $\begin{cases} t=0 \\ y=A \end{cases} \Rightarrow$

$y = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$

$A = A \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot 0 + \varphi_0)$

$\operatorname{sen} \varphi_0 = \frac{A}{A} = 1.$

$\varphi_0 = \operatorname{arcsen} 1$

$\varphi_0 = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$ rad

b) Calculamos la ecuación del M.A.S.

$$y = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

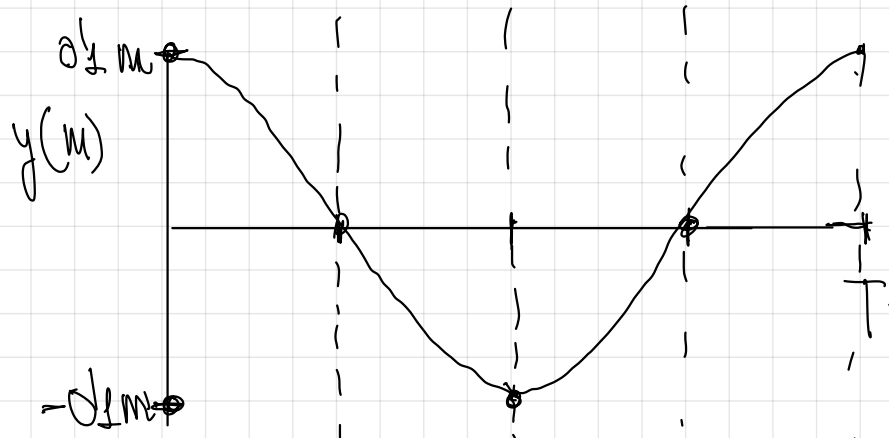
$A = 10\,cm = 0'1\,m$

$K = m \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{200}{2}} = 10\ \frac{rad}{s}$

$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}\ rad$

$$y(t) = 0'1 \cdot \operatorname{sen}\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)\ (S.I.)$$

$$\boxed{y(t) = 0'1 \cos(10t)\ SI}$$ → recordar que $\operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$



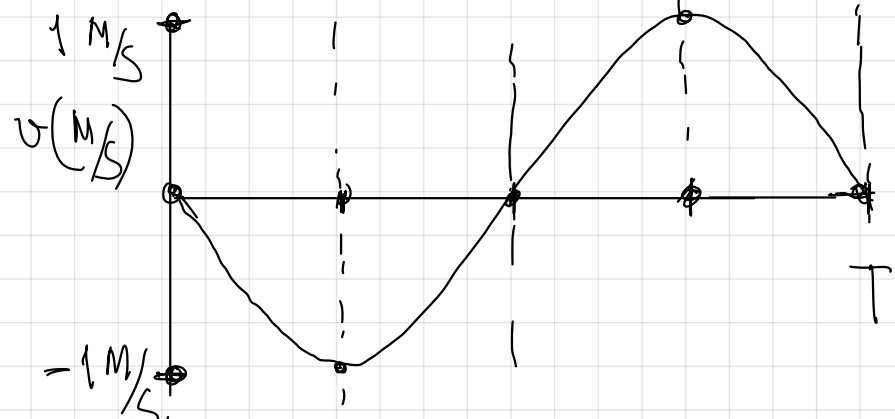

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10} = 0'2\pi\ s$ $\left(\frac{\pi}{5}\ s\right)$

c)

$$v = \frac{dy}{dt} = 0'1 \cdot (-\operatorname{sen}(10t)) \cdot 10$$

$$\boxed{v = -1 \cdot \operatorname{sen}(10t)\ SI}$$

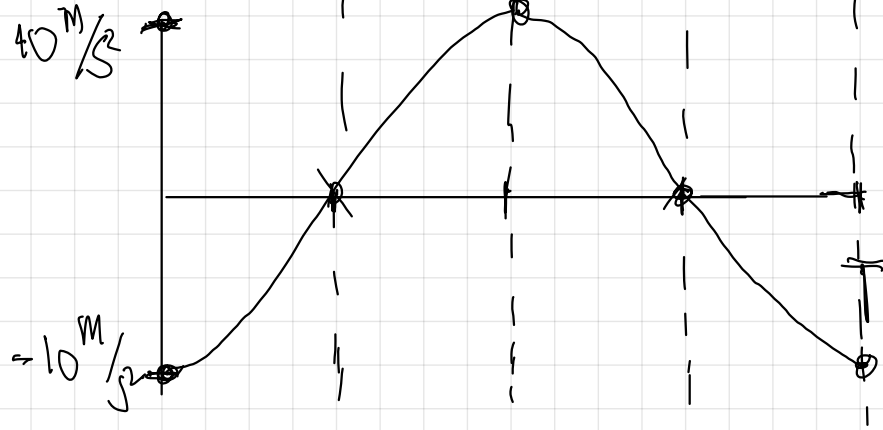



$v_{max} = \pm 1\ m/s$.

d)

$$a = \frac{dv}{dt} = -1 \cdot [\cos(10t)] \cdot 10$$

$$\boxed{a = -10 \cdot \cos(10t)\ S.I.}$$

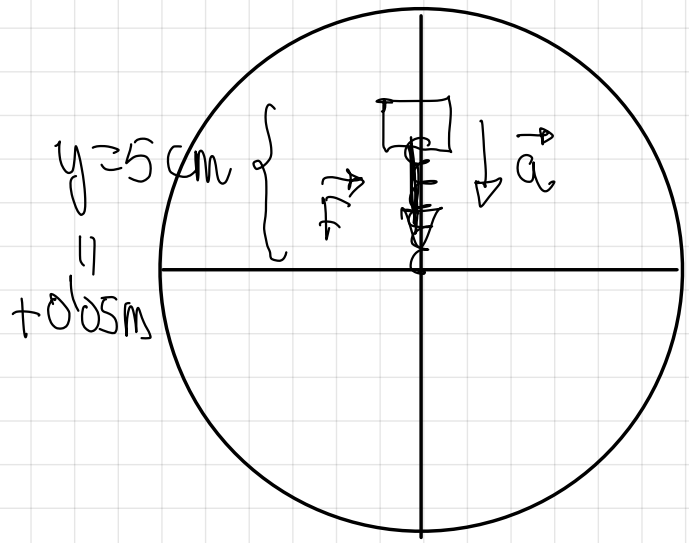



$a_{max} = \pm 10\ m/s^2$

e) $v_{max} = \pm A \cdot \omega = \pm 0'1 \cdot 10 = \pm 1\ m/s$

$a_{max} = \pm A \omega^2 = \pm 0'1 \cdot 10^2 = \pm 10\ m/s^2$

f)



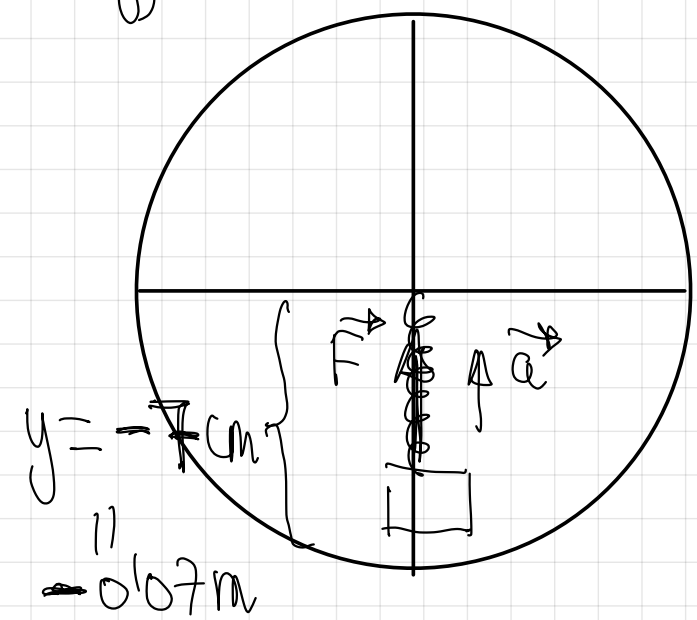

$a = -\omega^2 \cdot y$

$a = -10^2 \cdot (+0'05) = -5\ m/s^2$

$F = -k \cdot y$

$F = -200\ \frac{N}{m} \cdot (+0'05) = -10\ N$

g)




$a = -\omega^2 \cdot y$

$a = -10^2 \cdot (-0'07) = 7\ m/s^2$

$F = -k \cdot y$

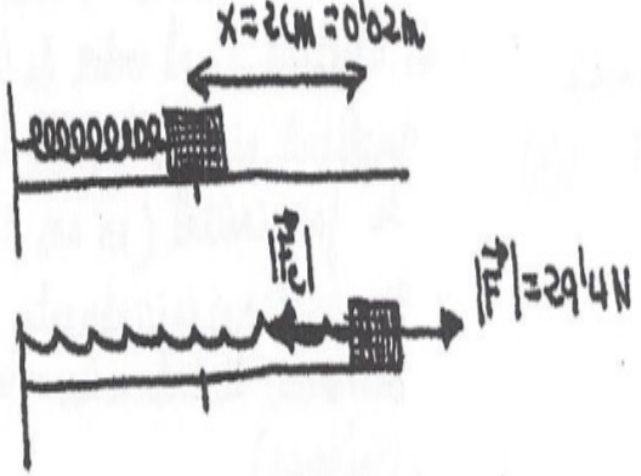
$F = -200\ \frac{N}{m} \cdot (-0'07) = 14\ N$

15.- Un muelle colocado horizontalmente sobre una mesa sin rozamiento, lleva en su extremo una masa de 5kg. Se sabe que una fuerza horizontal de 29,4 N alarga el muelle en 2 cm.

a) Calcular la frecuencia del movimiento

b)¿Cómo se vería afectado el valor de la frecuencia calculada si sobre el mismo muelle con idéntica masa se hubiese ejercido inicialmente una fuerza horizontal mayor?.

a)




Cuando nos hablan de que una fuerza de 29'4 N alarga el muelle 2 cm, nos están dando los datos para que calculemos la constante k del resorte,

La fuerza que alarga $\vec{F}$ será igual en módulo a la fuerza elástica $\vec{F_e}$ que desarrolla el resorte.

$$|\vec{F}| = |\vec{F_e}|$$

$$F = k \cdot x$$

$$k = \frac{F}{x} = \frac{29'4}{0'02} = 1470\ N \cdot m^{-1}$$

Sabiendo el valor de la constante k, intentamos obtener una expresión en donde aparezca la frecuencia f para después despejarla

$$k = m \cdot \omega^2 \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot \frac{1}{T} = 2\pi f$$

$$k = m \cdot (2\pi f)^2$$

$$k = m \cdot 4\pi^2 f^2 \rightarrow f = \sqrt{\frac{k}{m \cdot 4\pi^2}} = \sqrt{\frac{1470}{5 \cdot 4\pi^2}} = 2'72\ Hz$$

b)

$$f = \sqrt{\frac{k}{m\ 4\pi^2}}$$

k → la k es la misma para el mismo muelle, ya que si se trata del mismo muelle $k = \frac{F\uparrow}{x\uparrow} \Rightarrow$ la fuerza aumentaría, pero el alargamiento x aumentaría también de forma que k se mantendría cte. (la amplitud es lo que se vería afectado solamente)

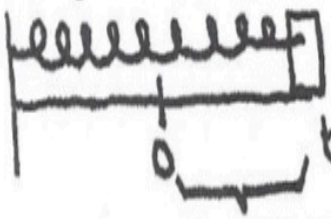
m → cte.

Luego entonces f seguiría siendo la misma, su valor no sería afectado.

Sin embargo si nos hubiesen hablado de otro muelle distinto, k no tendría porqué ser igual, ni f tampoco, la masa también influye, pero nos dicen que es la misma.

16.- Sobre una superficie horizontal se dispone de un cuerpo de 0,5 kg, unido a uno de los extremos de un muelle que está fijo por el otro. Cuando se tira del cuerpo hasta alargar el muelle 10 cm y se sueltan el instante inicial, comienza a oscilar con un periodo de 2 s.
a) Escriba la ecuación del m.a.s y represente la posición del cuerpo en función del tiempo
b) Si se hubiese alargado el mismo muelle 10 cm pero con una masa cuatro veces mayor para soltarse en el instante inicial, escribir la nueva ecuación del m.a.s y razonar como cambiaría la representación gráfica del apartado a)
c) ¿Cómo cambiaría la ecuación y la representación del apartado a) si se hubiese comprimido inicialmente el muelle 10 cm en vez de alargarse?

a)




$A = 10\,cm = 0'1\,m$

$X = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0)$

El ángulo de fase inicial $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ rad.

Analíticamente se calcula sustituyendo en la ecuación $x = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0)$ el instante inicial $t=0$, y $x=A$ porque en el instante inicial el cuerpo está en su máxima elongación $x = A\,(0'1\,m)$

$X = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0)$

$x = A$ para $t = 0$

$A = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot 0 + \varphi_0)$

$\frac{A}{A} = \text{sen}\,\varphi_0$

$1 = \text{sen}\,\varphi_0 \Rightarrow \varphi_0 = 90° = \frac{\pi}{2}$ rad

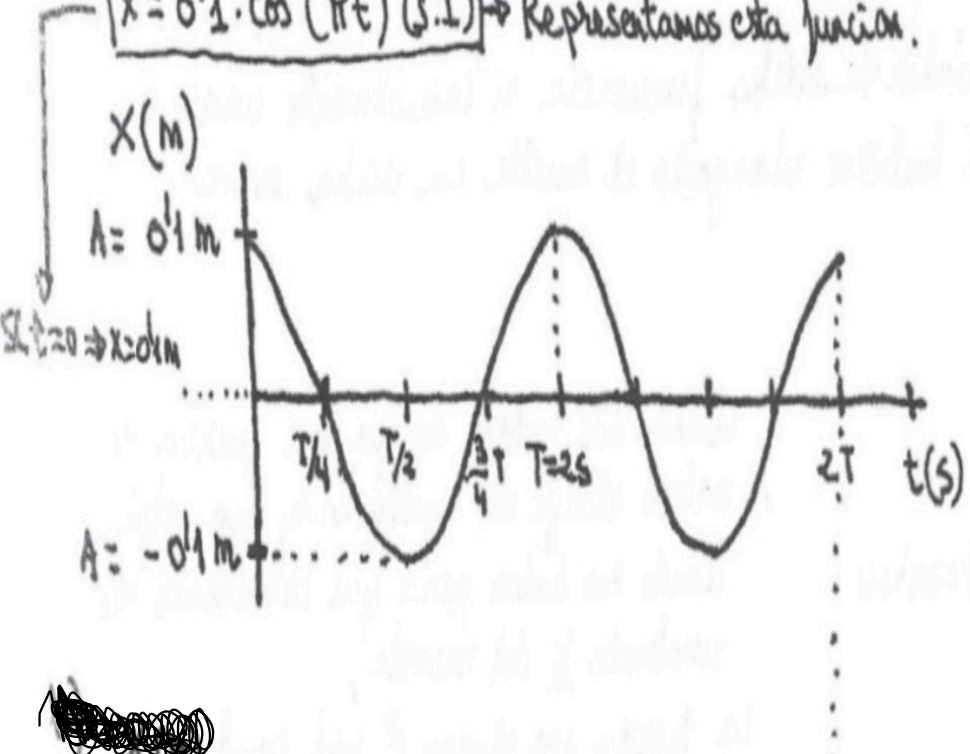
Para representar la posición del cuerpo en función del tiempo, calculamos el resto de los parámetros de la ecuación $X = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0)$: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi\ rad \cdot s^{-1}$.

$A = 10\,cm = 0'1\,m$.

La función a representar sería la siguiente:

$X = 0'1 \cdot \text{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ (S.I)

$\boxed{X = 0'1 \cdot \cos(\pi t)\ (S.I)}$ → Representamos esta función.




$X = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0)$

El que la masa sea 4 veces mayor no afectará ni al valor de la amplitud ni al valor del ángulo de fase inicial (no nos dicen que estiremos inicialmente otra distancia distinta a la que teníamos)

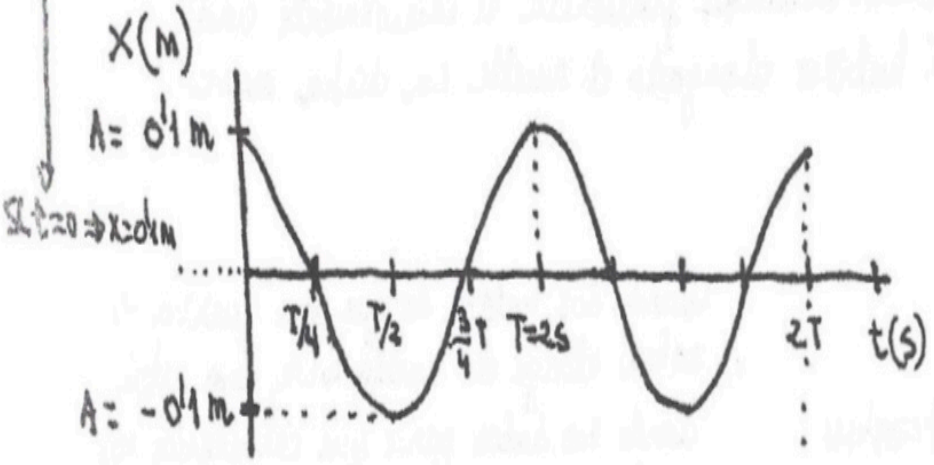
Para representar la posición del cuerpo en función del tiempo, calculamos el resto de los parámetros de la ecuación $x = A \cdot \text{sen}(\omega t + \gamma_0)$: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ rad} \cdot s^{-1}$.

$A = 10 \text{ cm} = 0'1 \text{ m}$.

La función a representar sería la siguiente:

$x = 0'1 \cdot \text{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ (S.I)

$\boxed{x = 0'1 \cdot \cos(\pi t)\ (S.I)}$ → Representamos esta función.



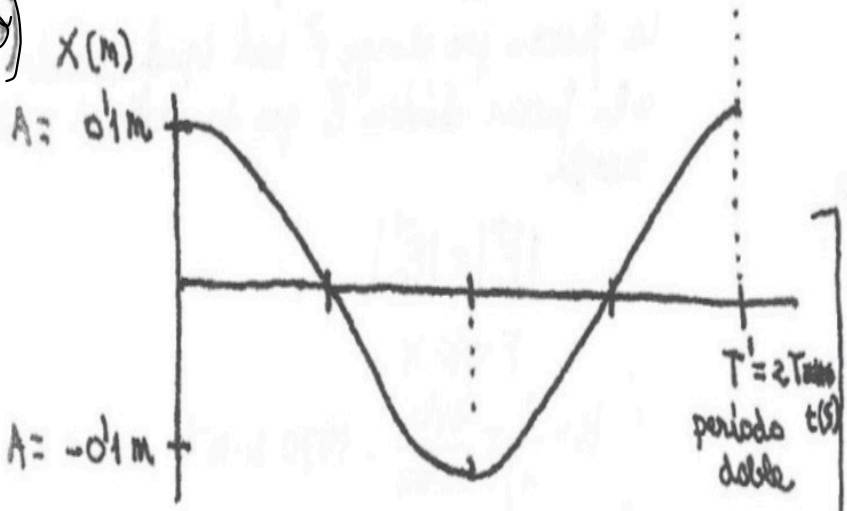

$x = A \cdot \text{sen}(\omega t + \gamma_0)$

El que la masa sea 4 veces mayor no afectará ni al valor de la amplitud ni al valor del ángulo de fase inicial (no nos dicen que estiremos inicialmente otra distancia distinta a la que teníamos)

Sin embargo, el que la masa sea 4 veces mayor sí afectará a $\omega$, tal y como se ve en la siguiente relación

$\boxed{K = m \cdot \omega^2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$

b)




K sigue siendo la misma puesto que se trata del mismo resorte.

$\omega' = \sqrt{\frac{K}{4m}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{1}{2}\omega$

$\omega' = \frac{1}{2}\omega$

Si la nueva $\omega' = \frac{1}{2}\omega$, sabiendo que $\omega = \frac{2\pi}{T}$, ello significa que para $\omega$ reducirse a la mitad, el periodo tendrá que hacerse el doble:

$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$

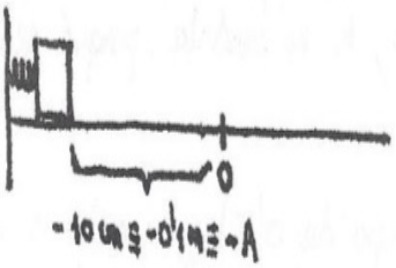
$T' = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}\omega} = 2 \cdot \frac{2\pi}{\omega} = 2T = 4s$

La nueva función a representar será:

$x = A \cdot \text{sen}\left(\frac{1}{2}\omega \cdot t + \gamma_0\right)$

$x = 0'1 \cdot \text{sen}\left(\frac{1}{2}\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$ (S.I)

$x = 0'1 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\pi t\right)$ (S.I)




Lo único que varía con respecto a la representación del apartado a) es el ángulo de fase inicial $\varphi_0$, que ahora valdrá $\frac{3}{2}\pi$ rad.
Analíticamente se calcula igual que en el apartado a), solo que ahora en la ecuación $x = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$, sustituimos cuando $t = 0 \Rightarrow x = -A$

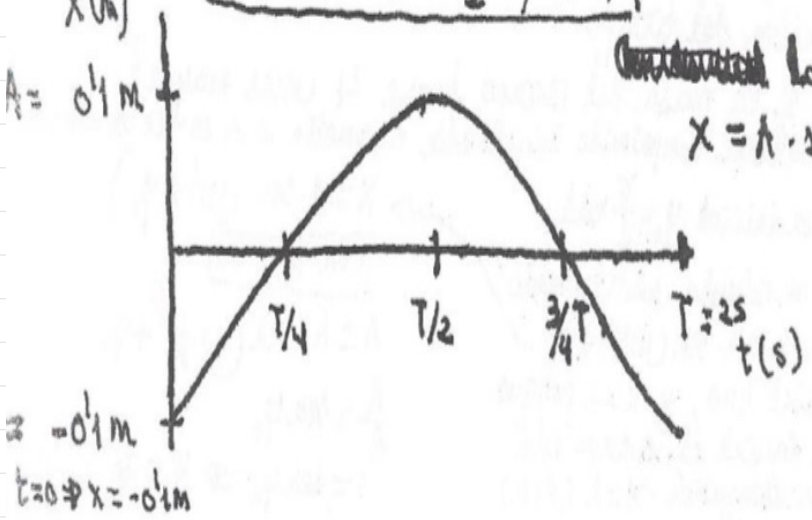
$$-A = A \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$\frac{-A}{A} = \operatorname{sen}\varphi_0 \Rightarrow \operatorname{sen}\varphi_0 = -1 \Rightarrow \varphi_0 = 1\frac{3}{2}\pi \text{ rad } (270^\circ)$$

$$\boxed{x = 0'1 \cdot \operatorname{sen}\left(\pi t + \frac{3}{2}\pi\right) \text{ (S.I.)}}$$

La nueva función a representar será:

$$x = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow x = 0'1 \cdot \operatorname{sen}\left(\pi t + \frac{3}{2}\pi\right) \text{ (S.I.)}$$




17.- Un cuerpo de 800 g de masa describe un m.a.s con una elongación máxima de 30 cm y un periodo de 2 s. Calcula su máxima energía cinética.

$$E_{c_{máx}} = E_M = \frac{1}{2} K A^2$$

También se podría haber razonado así:

$$E_c = \frac{1}{2} K (A^2 - y^2) = \frac{1}{2} K (A^2 - y^{2 \to 0}) = \frac{1}{2} K A^2$$

↳ Si $y = 0$ la $v$ es máxima y la $E_c$ es máxima también.

$m = 800\,g = 0'8\,kg$

$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \frac{rad}{s}$

$A = 30\,cm = 0'3\,m$

$K = m \cdot \omega^2 = 0'8 \cdot \pi^2 = 7'9\,N \cdot m^{-1}$

$$E_{c_{max}} = \frac{1}{2} K A^2$$

$$E_{c_{max}} = \frac{1}{2} 7'9 \cdot (0'3)^2 = 0'35\,J$$

18.- Una masa de 20g realiza un movimiento vibratorio armónico en el extremo de un resorte que da dos oscilaciones por segundo a lo largo del eje X, siendo la amplitud de 5 cm.

a) Calcula la velocidad máxima de la masa que oscila

b) Calcula la aceleración de la masa en el extremo de su movimiento

c) Calcula la constante K del resorte

d) Realiza un análisis de las variaciones energéticas

e) Calcula su energía mecánica, su energía cinética y su energía potencial cuando se encuentra en la posición x=4 cm

a) Deduciremos primero la expresión de la velocidad máxima,

$$x = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$\pm 1$ es su valor máximo.

$$v_{max} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$v_{max} = A \cdot \omega \quad \begin{cases} A = 5\,cm = 0'05\,m \\ \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot \frac{1}{T} = 2\pi \boxed{f} = 2\pi \cdot 2 = 4\pi\ rad \cdot s^{-1} \end{cases}$$

$$f = \frac{\text{nº oscilaciones}}{\text{tiempo}} = \frac{2\ osc}{1s} = 2\,Hz.$$

$$v_{max} = 0'05 \cdot 4\pi = 0'628\ m \cdot s^{-1}$$

b) Deduciremos primero una expresión de la aceleración en función de la posición, para luego posteriormente sustituir la posición $X = A$ (extremo del movimiento)

$$v = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = A \cdot \omega \left[ -\operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0) \right] \cdot \omega$$

$$a = -A \cdot \omega^2 \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

$$a = -\omega^2 \cdot \underbrace{A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)}_{X}$$

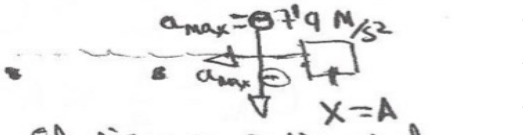
$$a = -\omega^2 \cdot X$$

En el extremo de su movimiento $X = A$, (se corresponde con la aceleración máxima)

$$a = -\omega^2 \cdot A$$

$$a = -(4\pi)^2 \cdot 0'05$$

$$a = -7'9\ m \cdot s^{-2}$$

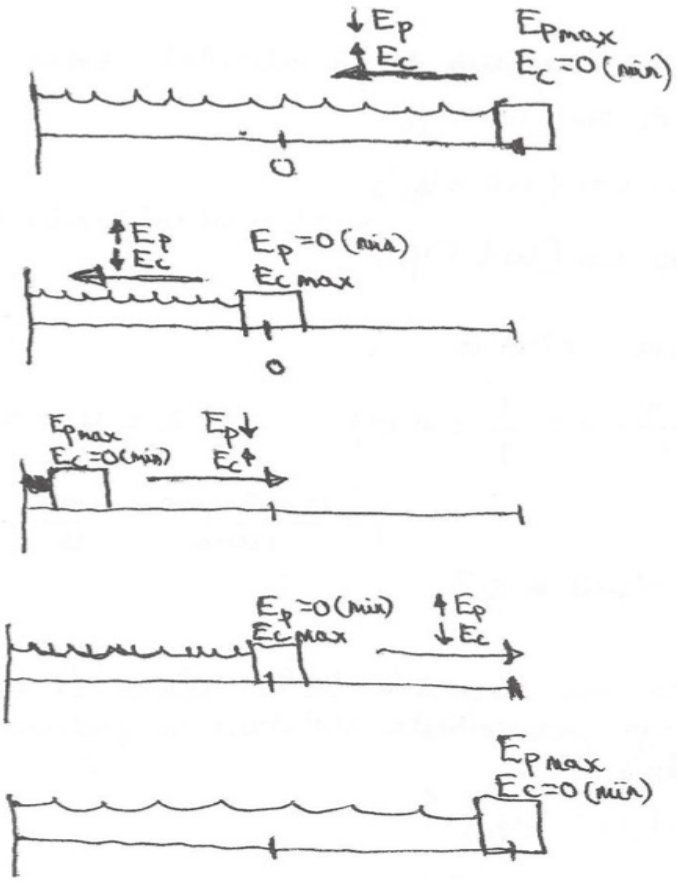



El signo nos indicará el sentido de la aceleración en ese extremo

$m = 20g = 0'02kg$

c) $K = m \cdot \omega^2 = 0'02 \cdot (4\pi)^2 = 3'16\ N \cdot m^{-1}$

d)




$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} k (A^2 - x^2)$$

$$E_M = \frac{1}{2} k \cdot A^2$$

Si suponemos que actúa una única fuerza conservativa (F elástica), tendremos que la energía mecánica se conserva, es decir, la $E_M$ (suma de $E_p$ y $E_c$) se mantiene constante durante todo el trayecto ya que las disminuciones de $E_p$ coinciden con los aumentos de $E_c$ (y viceversa). En las expresiones de $E_p$ y $E_c$ se comprueban sus valores máximos y mínimos en las posiciones correspondientes y en la expresión de la $E_M$ se comprueba que ésta es independiente de la posición en la que está el móvil a lo largo de todo el trayecto

e)

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} 3'16 \cdot (0'04)^2 = 2'5 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

$$E_c = \frac{1}{2} k (A^2 - x^2) = \frac{1}{2} 3'16 \left[ (0'05)^2 - (0'04)^2 \right] \simeq 1'4 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

$$E_M = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} 3'16 \cdot (0'05)^2 = 3'9 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

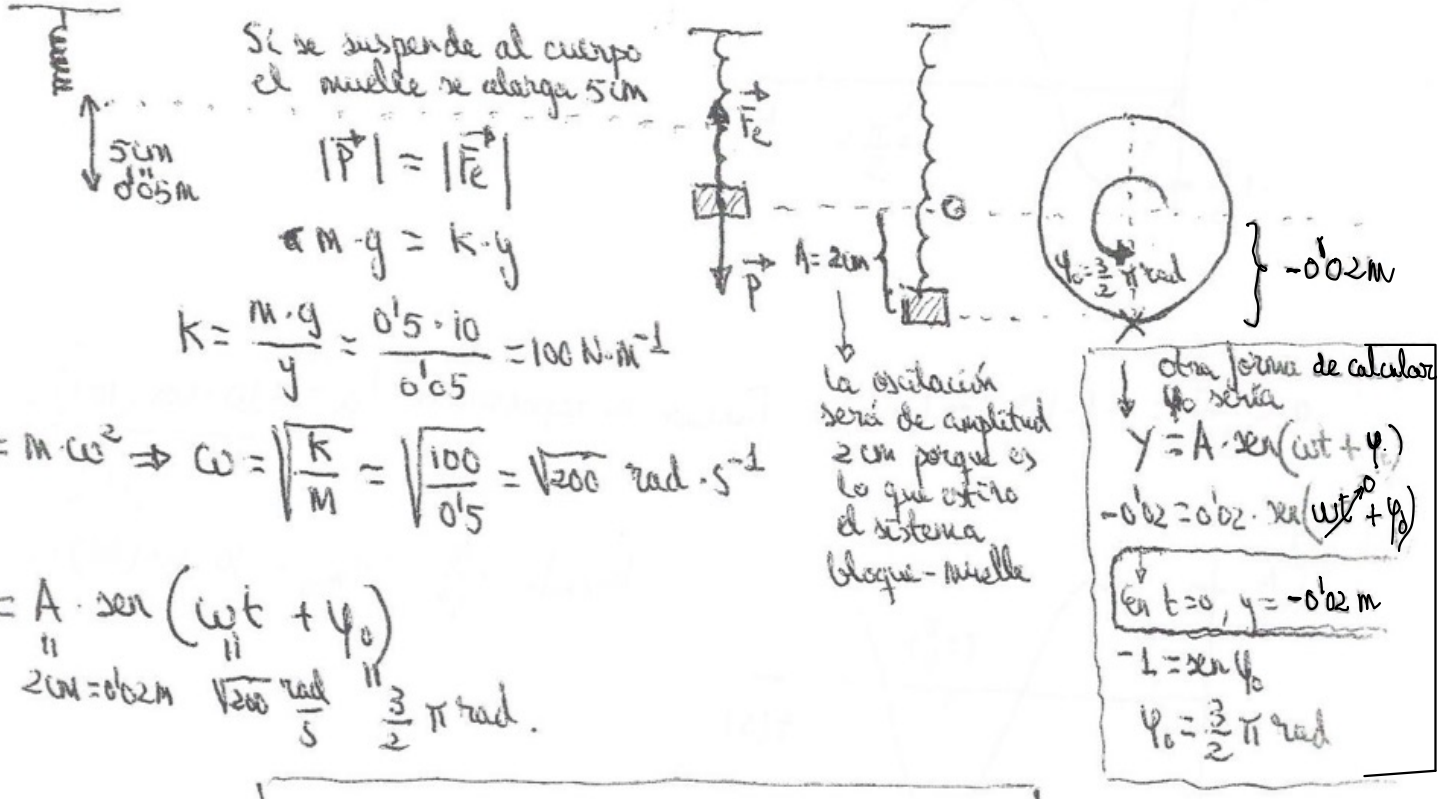
19.- Al suspender un cuerpo de 0,5 kg del extremo libre de un muelle que cuelga verticalmente, se observa un alargamiento de 5 cm. Si a continuación se tira hacia abajo del cuerpo hasta largar el muelle 2 cm más y se suelta, comienza oscilar. Sabiendo que $g=10\ m \cdot s^{-2}$, contestar a los siguientes apartados:

a) Escriba la ecuación del movimiento de la masa

b) Represente, cualitativamente las energías cinética , potencial, y total de ese m.a.s a lo largo de un periodo completo de oscilación

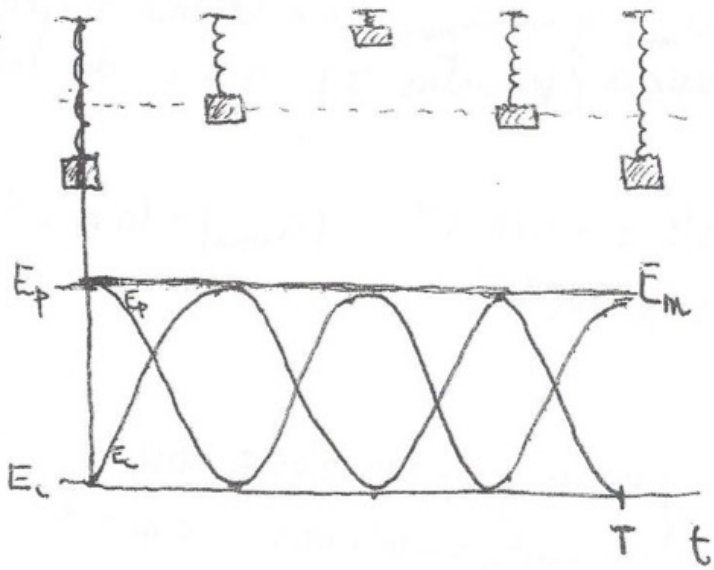
c) Si en lugar de estirar ese muelle 2 cm , se estira 3 cm, ¿cómo se modificaría la ecuación del movimiento del cuerpo?.

a) Los primeros datos nos los dan para que calculemos la k del muelle a partir de la suposición de que el cuerpo está en equilibrio




$$y = 0'02 \cdot sen\left(\sqrt{200}\, t + \frac{3}{2}\pi\right)\ (S.I)$$

b)



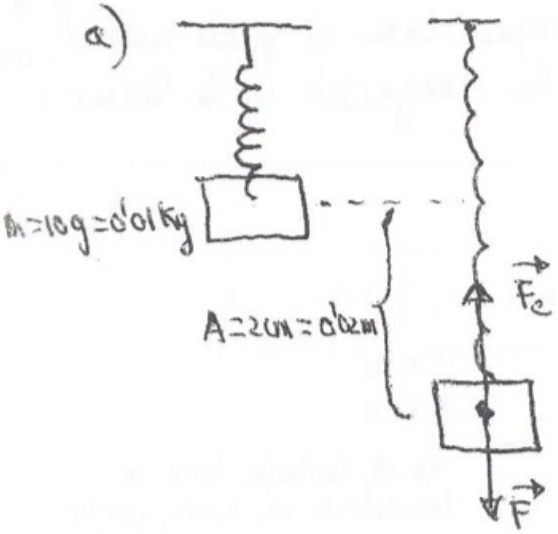

c) Si estiramos 3 cm, entonces $A = 3\ cm = 0'03\ m \Rightarrow y = 0'03 \cdot sen\left(\sqrt{200}\, t + \frac{3}{2}\pi\right)\ (S.I)$

20.- Un muelle de masa despreciables se encuentra en equilibrio cuando de él depende un objeto de 10 g. Calcular:

a) La fuerza con la que debe tirarse del muelle para que al soltarlo realice 20 oscilaciones en cinco segundos con una amplitud de 2 cm

b) La energía total del sistema cuando el objeto esté 0,5 cm por encima de su posición de equilibrio.

a)




La fuerza $\vec{F}$ con la que he de estirar tendrá que ser igual en módulo que la fuerza recuperadora $\vec{F_e}$ desarrollada por el muelle

$$|\vec{F}| = |\vec{F_e}|$$

$F = (K) \cdot (y)$ → Una de las condiciones que nos dicen es que la amplitud sea de 2 cm y por ello el estiramiento habrá sido de 2 cm luego $y = 2\,cm = 0'02\,m$

La otra condición de la que nos habla el problema vaa relacionada con la K, puesto que si nos dicen que han de darse 20 oscilaciones en 5 s, la frecuencia f ha de ser: $f = \frac{\text{nº oscilaciones}}{\text{tiempo}} = \frac{20 \text{ oscilaciones}}{5\,s} = 4\,Hz$

Si f ha de ser de 4 Hz, entonces la K ha de valer:

$$K = m \cdot \omega^2 = m \cdot 4\pi^2 f^2 = 0'01 \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot 4^2 = 6'31\ N \cdot m^{-1}$$

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot \frac{1}{T} = 2\pi f$

Finalmente sustituiremos los valores que han de cumplirse

$F = k \cdot y$

$F = 6'31 \cdot 0'02 = 0'12\,N$

Con esa fuerza tendré que estirar, y sería igual que la fuerza elástica desarrollada.

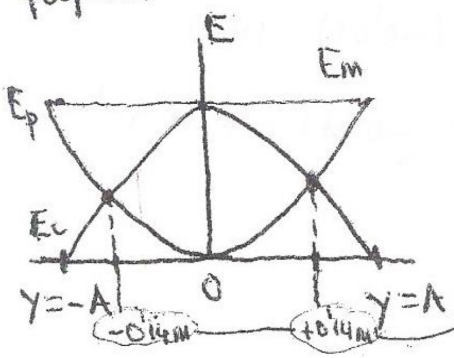
b) La energía total o energía mecánica es la misma a lo largo de todo el ciclo, independientemente de la posición (y) en la que se encuentre, luego no necesitamos el dato $y = 0'5\,cm$

$$E_m = \frac{1}{2} K A^2 = \frac{1}{2} 6'31 \cdot (0'02)^2 = 1'26 \cdot 10^{-3}\,J$$

$A = 2\,cm = 0'02\,m$

21.- Una partícula describe un movimiento armónico simple, cuya amplitud de 0,2 m. ¿Cuál será el desplazamiento en el instante en el que las energías cinética y potencial son iguales?.

Si representamos la energía en función del desplazamiento y nos queda la siguiente gráfica:




$E_p = E_c \Rightarrow$ Tenemos que hallar y con esa condición

$\frac{1}{2}Ky^2 = \frac{1}{2}K(A^2-y^2)$

$y^2 = A^2 - y^2$

$2y^2 = A^2$

$y = \frac{A}{\sqrt{2}} = \frac{0'2}{\sqrt{2}} = \pm 0'14M$

→ las $E_p$ y la $E_c$ se igualan en dos posiciones y no solo en una

22.- Un oscilador armónico se encuentra en un instante en la posición x=A/2. ¿Qué relación existe entre sus energías cinética y potencial?

$$E_p = \frac{1}{2}Ky^2 = \frac{1}{2}K\left(\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}K\cdot\frac{A^2}{4} = \frac{1}{2}K\cdot\frac{1}{4}A^2$$

$$E_c = \frac{1}{2}K(A^2-y^2) = \frac{1}{2}K\left(A^2-\left(\frac{A}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{2}K\cdot\left(A^2-\frac{A^2}{4}\right) = \frac{1}{2}K\cdot\frac{3}{4}A^2$$

$$\frac{E_c}{E_p} = \frac{\frac{1}{2}K\cdot\frac{3}{4}A^2}{\frac{1}{2}K\cdot\frac{1}{4}A^2} \Rightarrow \boxed{E_c = 3E_p}$$

23.- Explica cómo varía la energía de un oscilador cuando
a) Se duplica la amplitud
b) Se duplica la frecuencia
c) Se duplica la amplitud y se reduce la frecuencia a la mitad

a) Hace referencia a la $E_M$ del oscilador

$$E_m = \frac{1}{2}KA^2$$

$$E_m' = \frac{1}{2}K(2A)^2 = 4\cdot\frac{1}{2}KA^2$$

$$\frac{E_M}{E_M'} = \frac{\frac{1}{2}KA^2}{4\cdot\frac{1}{2}KA^2} \qquad \frac{E_M}{E_M'} = \frac{1}{4}$$

$$\boxed{E_M' = 4E_M}$$

La energía del oscilador se cuatriplica →

b) Tenemos que obtener una expresión de la $E_M$ del oscilador en función de la frecuencia f para ver qué efecto tiene sobre la $E_M$ el hecho de que se duplique la frecuencia f

$$E_M = \frac{1}{2}(K)A^2$$

$$K = m\cdot(\omega)^2 \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$K = m\cdot(2\pi f)^2 \qquad \omega = 2\pi\cdot\frac{1}{T}$$

$$K = m\cdot 4\pi^2 f^2 \qquad \omega = 2\pi f$$

$$E_M = \frac{1}{2}m4\pi^2 f^2\cdot A^2$$

$$E_m = \frac{1}{2}m4\pi^2 f^2\cdot A^2$$

$$E_m' = \frac{1}{2}m4\pi^2(2f)^2\cdot A^2 = \frac{1}{2}m4\pi^2\cdot 4f^2\cdot A^2$$

$$\frac{E_M'}{E_M} = \frac{\frac{1}{2}m4\pi^2 f^2\cdot A^2}{\frac{1}{2}m4\pi^2 f^2\cdot A^2}$$

$$\boxed{E_M' = 4E_M}$$

La energía del oscilador se cuatriplica →

c) Debemos tomar la expresión de la energía mecánica en función de la frecuencia f que hemos deducido en b)

$$E_M = \frac{1}{2} m \cdot 4\pi^2 f^2 \cdot A^2$$

$$E_M' = \frac{1}{2} M \cdot 4\pi^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (2A)^2 = \frac{1}{2} M 4\pi^2 f^2 \cdot A^2 = \Big\} \boxed{E_M' = E_M}$$

⇓

La energía mecánica no varía

24.- Si se duplica la energía mecánica manteniendo un mismo oscilador armónico, explica qué efecto tiene:

a) En la amplitud y en la frecuencia de las oscilaciones

b) En la velocidad y en el periodo de oscilación

a) Obtenemos una expresión de la amplitud en función de la $E_M$ y vemos como varía.

$$E_M = \frac{1}{2} K A^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2E_M}{K}}$$

$$A' = \sqrt{\frac{2 \cdot [2E_M]}{K}}$$

$$\frac{A'}{A} = \frac{\sqrt{\frac{2E_M}{K}}}{\sqrt{\frac{2 \cdot (2E_M)}{K}}}$$

$$\boxed{A' = \sqrt{2}\, A}$$

La nueva amplitud será $\sqrt{2}$ veces la anterior, de hecho aumentamos la $E_M$ aumentando la amplitud, ya que el oscilador sigue siendo el mismo.

Siendo el mismo oscilador armónico la $E_M$ se amplia ampliando la amplitud pero se mantiene cte K, de hecho amplitud y frecuencia son independientes entre sí

$K = m \cdot \omega^2$

$K = m \cdot (2\pi f)^2$

$K = m \cdot 4\pi^2 f^2$

⇓ ⇓ ⇓

cte cte cte.

Otra forma de demostrarlo sería la siguiente. Obtenemos la expresión de la frecuencia en función de la $E_M$.

$$E_M = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow E_M = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \cdot A^2$$

$$E_m = \frac{1}{2} m (2\pi f)^2 \cdot A^2$$

$$E_M = \frac{1}{2} m \cdot 4\pi f^2 \cdot A^2.$$

$$f = \sqrt{\frac{2(E_m)}{m \cdot 4\pi \cdot A^2}} \longrightarrow$$ Al duplicar la $E_M$ ($E_M' = 2E_M$) se vió que $A' = \sqrt{2} A$

$$f' = \sqrt{\frac{2 \cdot (2E_m)}{m \cdot 4\pi (\sqrt{2} A)^2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot E_m}{2\, m \cdot 4\pi \cdot A^2}} \Rightarrow f' = f.$$

b) $f = \frac{1}{T} \Rightarrow$ Si no varía la frecuencia, el período tampoco lo hará.

$$v = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$v' = |\sqrt{2} A| \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$\Rightarrow$ Se vió que al duplicar $E_M \Rightarrow A' = \sqrt{2} A$

$$\boxed{v' = \sqrt{2}\, v}$$

(también $\boxed{v'_{max} = \sqrt{2}\, v_{max}}$)

25.- Una partícula de 0,5 kg de describe un movimiento armónico simple de frecuencia 5 Hz y tiene inicialmente una energía cinética de 0,2 J y una energía potencial de 0,8 J.
a) Calcular la posición y la velocidad iniciales, así como la amplitud de la oscilación y la velocidad máxima.
b) ¿Podríamos saber con exactitud la posición de la partícula inicialmente?

a)

$E_{p\,inicial} = \frac{1}{2} k y^2_{inicial} \Rightarrow y_{inicial} = \sqrt{\frac{E_p}{\frac{1}{2}k}} = \sqrt{\frac{0'8}{\frac{1}{2}\,492'98}} = \pm 0'057\ m$

$k = m \cdot \omega^2 = m \cdot (2\pi f)^2 = m \cdot 4\pi^2 f^2 = 0'5 \cdot 4\pi^2 \cdot 5^2 = 492'98\ N \cdot m^{-1}$

$E_{c\,inicial} = \frac{1}{2} m \cdot v^2_{inicial} \Rightarrow v_{inicial} = \sqrt{\frac{E_c}{\frac{1}{2}m}} = \sqrt{\frac{0'2}{\frac{1}{2}0'5}} = 0'89\ m \cdot s^{-1}$

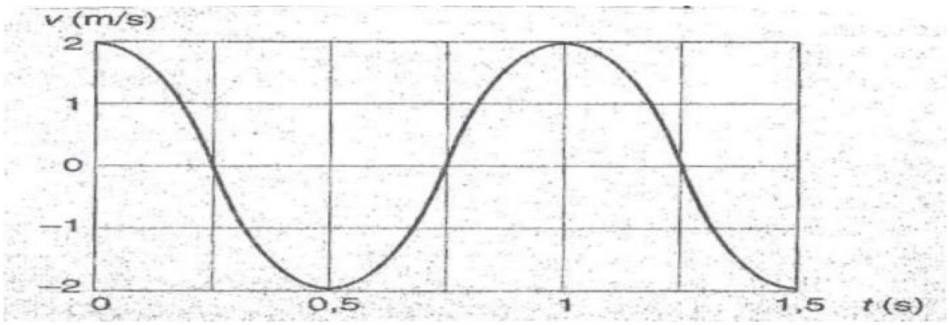
$E_m = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{E_M}{\frac{1}{2}k}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2}\,492'98}} = 0'063\ m$

$E_m = E_p + E_c = 0'8\,J + 0'2\,J = 1\,J.$

$v_{max} = A \cdot \omega = A \cdot 2\pi f = 0'063 \cdot 2\pi \cdot 5 = 0'63\pi\ \frac{m}{s}$

b) No podríamos saber con exactitud la posición inicial de la partícula, ya que al valor de $E_p$ inicial de 0'8 J podrían corresponderle dos posiciones, $+0'057\ m$ y $-0'057\ m$.

26.- Una partícula de 10 g oscila armónicamente según la expresión $x = A \cdot \text{sen}(\omega t)$. En la figura se representa la velocidad de esta partícula en función del tiempo.




a) Hallar la frecuencia angular ω y la amplitud A de la oscilación.
b) Calcular la energía cinética de la partícula en el instante $t_1$=0,5 s y la energía potencial en $t_2$=0,75 s
c) ¿Qué valores tienen las dos energías anteriores? . Razónese.

a) $\omega = \frac{2\pi}{T}$ → El valor de la velocidad se repite al cabo de un tiempo que vale 1s, luego entonces $T = 1s$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \frac{rad}{s}$$

Relacionamos la velocidad con la amplitud mediante la siguiente expresión:

$$x = A \cdot \text{sen}(\omega t)$$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow (v) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)$$ → En la gráfica podemos observar el valor de la $v_{max}$, luego obtendremos su expresión

$$v_{max} = A \cdot \omega$$

$$A = \frac{v_{max}}{\omega} = \frac{2}{2\pi} = \frac{1}{\pi} m$$

b) y c)

En el instante $t_1 = 0'5s$ se observa en la gráfica que posee la $v_{max}$, cuyo módulo vale $2 \frac{m}{s}$, y por tanto también tendrá la $E_c$ máxima

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} 0'01 \cdot 2^2 = 0'02 J = E_{c_{max}} = E_m$$

En el instante $t_2 = 0'75s$ se observa en la gráfica que posee $v = 0$, por lo tanto $E_c = 0$ y $E_p = E_{p_{max}} = E_m = \frac{1}{2} K A^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 \cdot A^2$

$$E_p = \frac{1}{2} 0'01 \cdot (2\pi)^2 \cdot \left(\frac{1}{\pi}\right)^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} 0'01 \cdot 4 \cancel{\pi^2} \cdot \frac{1}{\cancel{\pi^2}} = 0'02 J$$

$E_p = 0'02 J$ ⇒ Se observa que es el valor de $E_{p_{max}}$, que es el mismo que el de la $E_m$ o $E_{c_{max}}$ que habíamos obtenido anteriormente

27.- Cierto muelle que se deforma 20 cm cuando se le cuelga en vertical una masa de 1 kg, se coloca sin deformación, unido a la misma masa sobre una superficie horizontal sin rozamiento. En esta posición, se tira de la masa hasta que el muelle se alarga 2 cm, y posteriormente se suelta. g=9,8 m/s$^2$

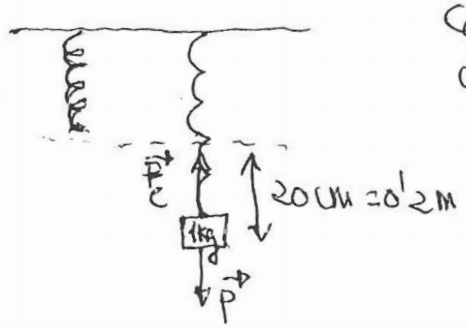
a) Hallar la ecuación del movimiento armónico simple resultante y representarla gráficamente.

b) Representar gráficamente la fuerza, recuperadora, en función de la posición, hallando sus valores máximos y calculando su valor cuando x= 1 cm.

c) Hallar las energías cinética, potencial elástica y mecánica cuando ha transcurrido un tiempo t=3T/4

d) Representar los valores de la energía potencial elástica, energía cinética, y energía mecánica en función del tiempo durante un periodo T. Indicar en la gráfica los valores de estas energías cuando t=0.

a)

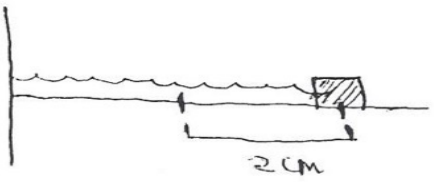



Con los primeros datos podremos calcular la cte k del resorte sabiendo que

$$|\vec{F_e}| = |\vec{P}|$$

$$k \cdot y = m \cdot g$$

$$k = \frac{m \cdot g}{y} = \frac{1 \cdot 9'8}{0'2} = 49\ N \cdot m^{-1}$$




Si ahora el mismo muelle lo colocamos en horizontal y lo alargamos 2cm, podemos calcular su ecuación del M.a.S

$$x = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

$A = 2\ cm = 0'02\ m$

$k = m \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{49}{1}} = 7\ \frac{rad}{s}$

Para calcular $\varphi_0$:

$x = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0)$

Si $t = 0$, en ese instante inicial $x = A$

$A = A \cdot \text{sen}(0 + \varphi_0)$

$1 = \text{sen}\ \varphi_0$

$\varphi_0 = \text{arcsen}\ 1 = 90° = \frac{\pi}{2}\ rad.$

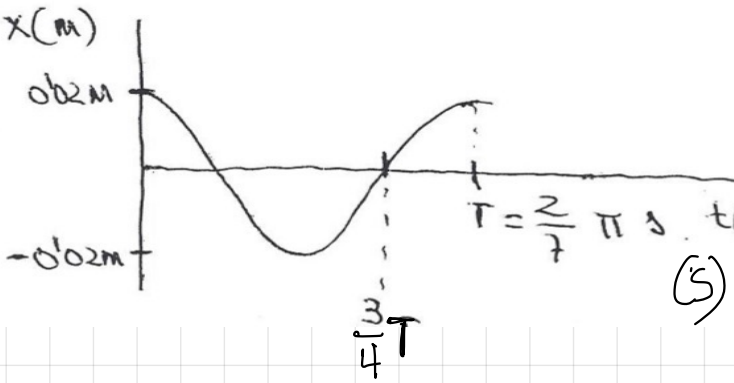
$$x = 0'02 \cdot \text{sen}\left(7t + \frac{\pi}{2}\right)\ (S.I)$$

$$\boxed{x = 0'02 \cdot \cos(7t)\ (S.I)}$$

⇓

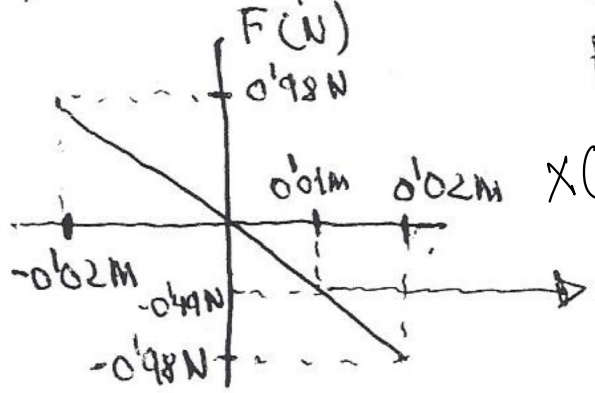
Esta es la ecuación que vamos a representar gráficamente

$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2}{7}\pi\ s.$



b) La función a representar es: $F = -K \cdot x$ → $x_{max} = A$

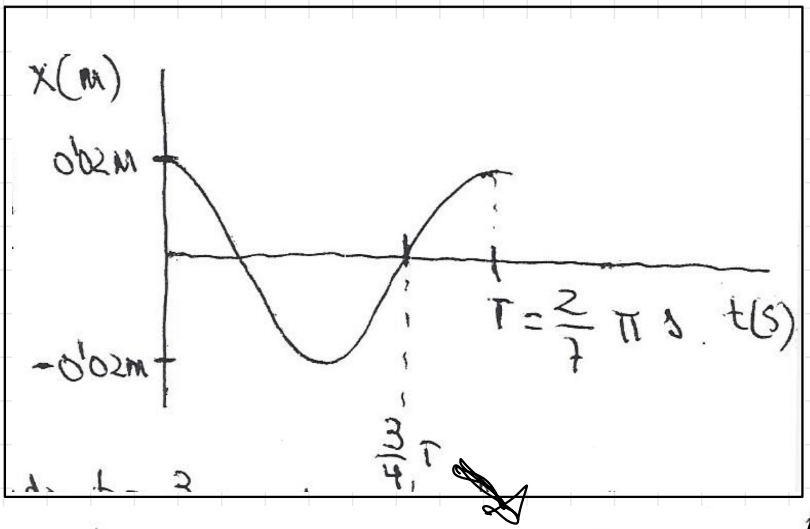
$F_{max} = \pm 49 \cdot 0'02 = \pm 0'98\ N$




Si $x = 1\ cm = 0'01\ M$

$F = -K x = -49 \cdot 0'01 = -0'49\ N$

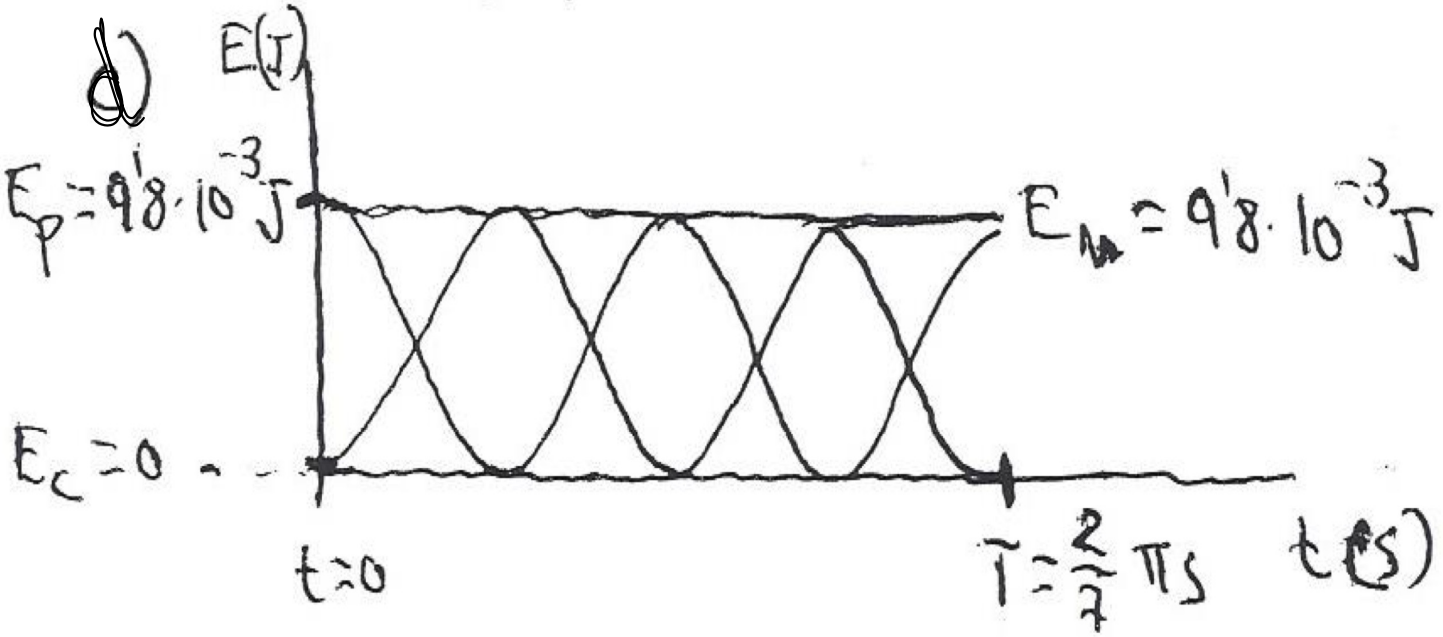
c)




En la gráfica se observa que cuando $t = \frac{3}{4}T$, entonces la elongación $x = 0$, y por ello $E_p = \frac{1}{2}K\cancel{x}^{2} = 0$, tomando entonces la $E_c$ su valor máximo, es decir:

$$E_c = E_{c\,max} = E_M = \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}M \cdot \omega^2 \cdot A^2 = \frac{1}{2} 1 \cdot 7^2 \cdot (0'02)^2 = 9'8 \cdot 10^{-3}\ J$$

d)



28.- Una masa $m=10^{-3}$ kg que describe un m.a.s tarda 1s en desplazarse desde un extremo de la trayectoria al otro extremo. La distancia entre ambos extremos es de 5 cm. Determina

a) El periodo del movimiento

b) La la energía cinética de la partícula en t=2,75 s, sabiendo que en t=0 su elongación era nula.

c) El primer instante en el que las energías cinética y potencial del sistema coinciden.

a) Nos dice que tarda 1s en desplazarse de un extremo a otro, eso supone que para realizar el ciclo completo y volver al punto de partida tardaría el doble (2s), luego entonces $T=2s$

b) Obtendremos una expresión de la $E_c$ del M.A.S en función del instante t

$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$

$y = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0)$

$y = A \cdot \text{sen}(\omega t)$

$v = \frac{dy}{dt} = A\left[\cos(\omega t)\right]\cdot\omega$

$\Rightarrow v = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)$

$E_c = \frac{1}{2} m \cdot A^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2(\omega t)$ → Hemos obtenido la expresión que nos interesaba de la $E_c$ en función del instante t que sustituiremos para $t=2'75s$

Cuando $t=0$ nos dicen que $y=0$, luego $\varphi_0=0$, ello se comprueba así

$y = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0)$

Si $t=0$, $y=0 \Rightarrow 0 = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot 0 + \varphi_0)$

$\frac{0}{A} = \text{sen}\,\varphi_0$

$\text{sen}\,\varphi_0 = 0$

$\varphi_0 = 0$

Al no especificar ningún sentido, se toma como cero

Distancia entre los extremos: $5\,cm = 0'05\,m$

$A = \frac{0'05}{2} = 0'025\,m$

$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi\,\frac{rad}{s}$

$E_c = \frac{1}{2} m \cdot A^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2(\omega t) = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} \cdot (0'025)^2 \cdot \pi^2 \cdot \cos^2(\pi \cdot 2'75) = 1'54 \cdot 10^{-6}\,J$

c) Primero obtendremos una expresión de la $E_p$ en función del instante t, posteriormente tomaremos la expresión de la $E_c$ en función del instante t obtenida en b), y finalmente igualaremos ambas expresiones, despejando el instante t que cumpla esa igualdad.

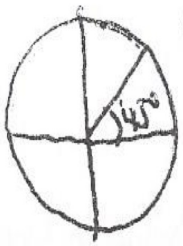
$E_p = \frac{1}{2} k y^2$

$k = m \cdot \omega^2$

$y = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0)$, $\varphi_0 = 0$

$\Rightarrow E_p = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \cdot A^2 \cdot \text{sen}^2 \omega t$

$E_c = \frac{1}{2} m \cdot A^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2 \omega t$.




$\frac{\pi}{4}$ rad es el ángulo $\omega t$ en donde seno y coseno son iguales, luego:

$E_p = E_c$

$\frac{1}{2} M \omega^2 A^2 \cdot \text{sen}^2 \omega t = \frac{1}{2} M \cdot A^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2 \omega t$

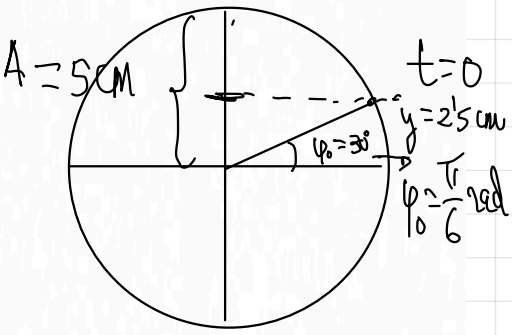
$\text{sen}^2 \omega t = \cos^2 \omega t$

$\text{sen}\, \omega t = \cos \omega t$

$(\omega t) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{\pi/4}{\omega} = \frac{\pi/4}{\pi} = \frac{1}{4} = 0'25\,s$ ⇒ El instante $t = 0'25$ s es el primero que cumple que $\text{sen}\, \omega t = \cos \omega t$ y por tanto que $E_p = E_c$

29.- Un cuerpo realiza un movimiento vibratorio armónico simple.
a) Escriba la ecuación del movimiento si la aceleración máxima es de $5\pi^2$ cm·s$^{-2}$, el periodo de las oscilaciones 2s y la elongación del cuerpo al iniciarse el movimiento 2,5 cm.
b) Represente gráficamente la elongación y la velocidad en función del tiempo y comente la gráfica.

a) Un movimiento armónico simple (m.a.s.) es un movimiento oscilatorio periódico, cuya elongación (desplazamiento) respecto a la posición de equilibrio ( y ) viene dada por una función sinusoidal $y = A \cdot sen(\omega \cdot t + \varphi_0)$, donde A es la amplitud del movimiento (valor máximo de la elongación), $\omega$ la frecuencia angular y $\varphi_0$ la fase inicial del movimiento.




Calculamos las magnitudes implicadas a partir de los datos del problema:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi\, rad}{2s} = \pi\, rad/s$$

Aceleración máxima: $a_{ymáx} = A \cdot \omega^2 \rightarrow A = \frac{a_{ymáx}}{\omega^2} = \frac{5\pi^2\, cm/s^2}{\pi^2\, s^{-2}} = 5cm = 0{,}05m$

Fase inicial: Para t = 0 s, y = 2,5 cm = 0,025 m. sustituyendo en la ecuación.

$y = A \cdot sen(\omega \cdot t + \varphi_0) \rightarrow 0{,}025 = 0{,}05 \cdot sen(\varphi_0) \rightarrow \varphi_0 = arcsen(0{,}5) = \frac{\pi}{6} rad = 0{,}52\, rad$

(También es válido $\varphi_0 = \frac{5}{6}\pi$ )

La ecuación de movimiento queda: $y(t) = 0{,}05 \cdot sen(\pi \cdot t + \frac{\pi}{6})\, m$

b) La velocidad de vibración se obtiene derivando la elongación respecto al tiempo.

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 0{,}05 \cdot \pi \cdot \cos\left(\pi \cdot t + \frac{\pi}{6}\right) m/s$$

La velocidad es máxima (en valor absoluto) en aquellos instantes en que el móvil pasa por la posición de equilibrio, y nula cuando el móvil se encuentra en sus punto de elongación máxima.

La velocidad máxima es *0,05π m/s*. Ambas funciones (seno y coseno) están desfasadas π/2.

Para t = 0 s, el movimiento comienza con una elongación igual a 0,025 m (la mitad de la amplitud) y con una velocidad de 0,136 m/s (la velocidad máxima es de 0,157 m/s)

Como todo m.a.s, la gráfica representa un movimiento periódico.

