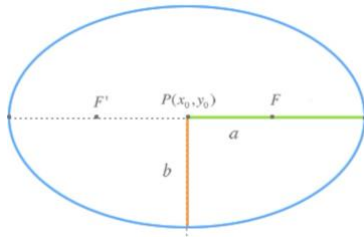


1.- LEYES DE KEPLER.

Las tres leyes de Kepler describieron el movimiento de los planetas orbitando alrededor del Sol, sin embargo son igualmente válidas para objetos orbitando por gravedad respecto a un objeto central (satélites naturales y artificiales). Newton partió de ellas para formular su Ley de la Gravitación Universal.

a) Primera Ley de Kepler o Ley de las órbitas

Los planetas giran alrededor del Sol describiendo **órbitas elípticas** en uno de cuyos focos está el Sol.

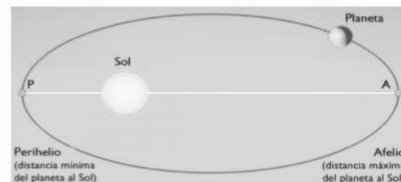
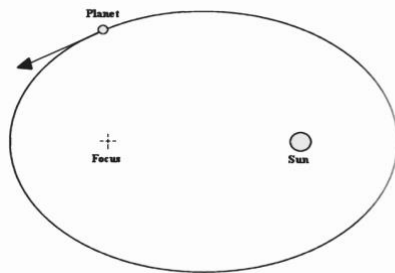


Elementos de la elipse de la figura:

a : semieje mayor

b: semieje menor

F y F': focos de la elipse

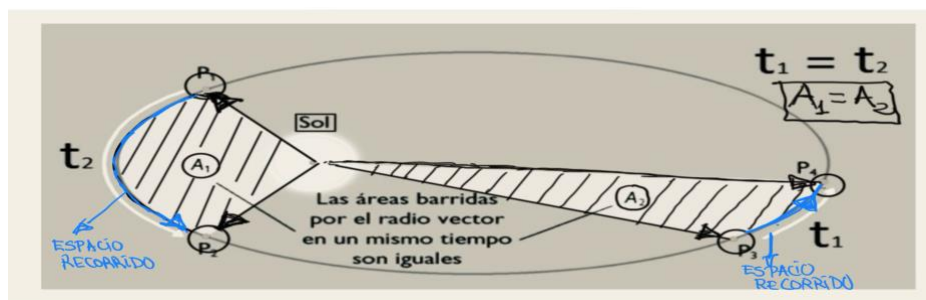


[1]

b) Segunda Ley de Kepler o Ley de las áreas

Las áreas barridas por el radio vector que une al Sol con un planeta son directamente proporcionales a los tiempos empleados en barrerlas.

(un radio vector es un vector que parte de un punto fijo, como un foco, a cualquier otro punto de una curva).



En la figura se observa que las áreas barridas por el radio vector son las mismas en igualdad de tiempo. De ello se deduce que cuando el planeta se encuentra en su perihelio (mas cercano al Sol), posee una velocidad mayor y recorre más espacio en igualdad de tiempo que en el afelio (mas lejano al Sol), en donde posee una velocidad menor y recorre menos espacio en igualdad de tiempo, dando como consecuencia la igualdad en áreas. Solo suponiendo las órbitas circulares se considera como constante la velocidad orbital. En órbitas elípticas la velocidad orbital no es constante pero si la velocidad areolar (área barrida por unidad de tiempo).

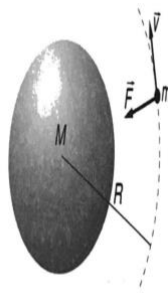
c) Tercera Ley de Kepler o Ley de los períodos

Los cuadrados de los periodos de revolución son directamente proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de las respectivas órbitas.

Esta Ley se puede demostrar de la siguiente forma:

$$F_n = m \cdot a_n$$

$$G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2} = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R}} \quad [1]$$


Teniendo en cuenta que la velocidad es aproximadamente constante, se puede escribir:

$$v = \frac{s}{t} \rightarrow v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} \quad [2]$$

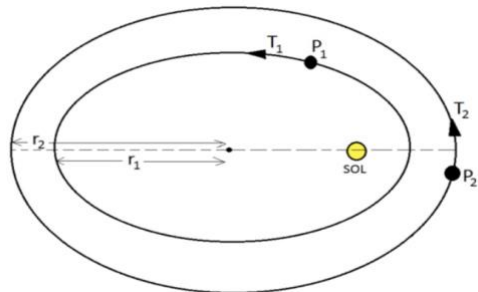
Igualando las expresiones [1] y [2] y despejando el período, se llega a la tercera ley de Kepler:

$$\frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} \rightarrow \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}{T^2} = \frac{G \cdot M}{r}$$

$$T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot M} \cdot r^3 = \text{cte} \cdot r^3 \rightarrow \frac{T^2}{r^3} = \text{cte}$$

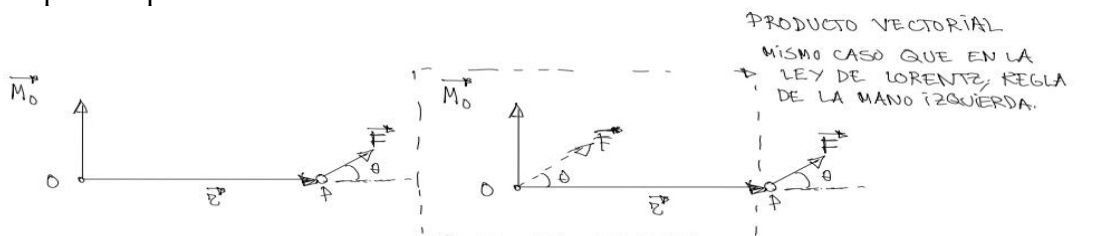
Supongamos dos planetas, P₁ y P₂ que describen dos órbitas con periodos respectivos T₁ y T₂ (figura adjunta). Según la tercera ley de Kepler se cumple que:

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3}$$



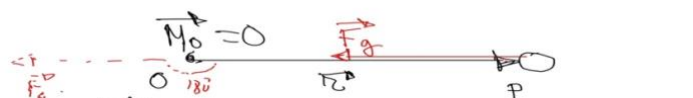
2.- MOMENTO DE UNA FUERZA CON RESPECTO A UN PUNTO (MOMENTO DINÁMICO)

El momento de una fuerza con respecto a un punto O, M_O se define como una magnitud vectorial obtenida por el producto vectorial del vector de posición \vec{r} (que parte del punto O desde el cual se toma el momento hasta el punto P de aplicación de la fuerza) multiplicado por el vector Fuerza en ese orden:



$$M_o = \vec{r} \times \vec{F} = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \text{sen } \theta \quad (M_o \neq N \cdot m \text{ en SI})$$

En el caso de la fuerza gravitatoria que actúa sobre un satélite, ya se estudió anteriormente que era una Fuerza central por lo que la situación sería la siguiente:

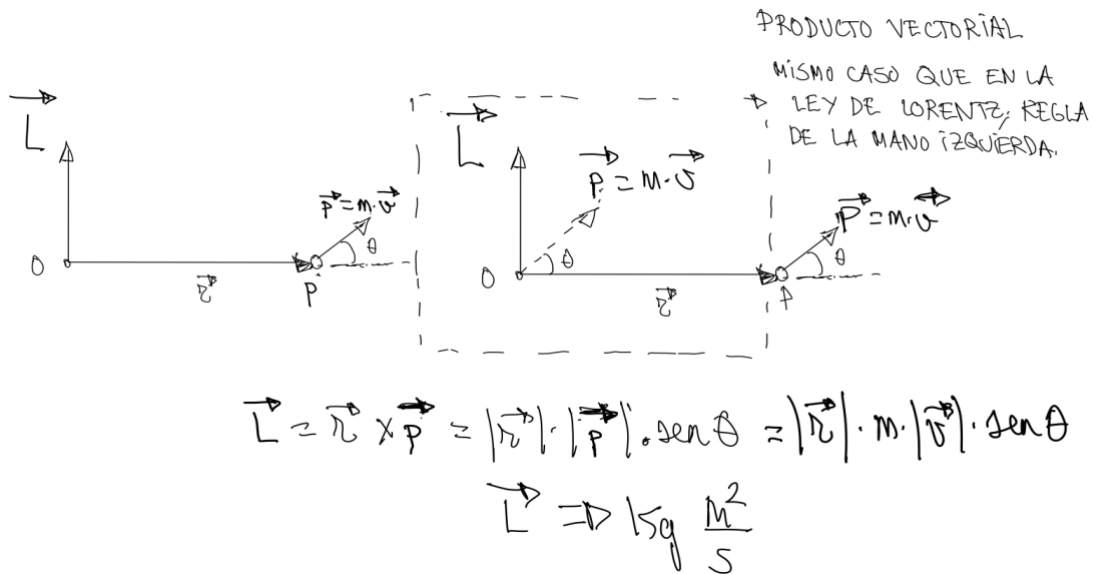


$$M_o = \vec{r} \times \vec{F}_g = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}_g| \cdot \text{sen } 180^\circ = 0.$$

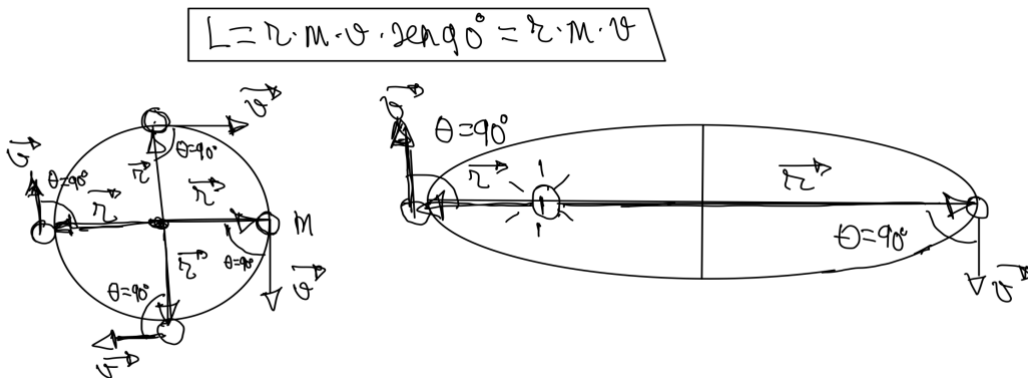
Luego el momento de fuerza será nulo para la fuerza gravitatoria y el resto de las fuerzas centrales.

3.- MOMENTO ANGULAR DE UNA PARTÍCULA (MOMENTO CINÉTICO)

Al igual que estudiábamos la cantidad de movimiento o momento lineal de una partícula ($\vec{p}=m \cdot \vec{v}$), podemos estudiar el momento angular de una partícula \vec{L} definiéndose como el producto vectorial del vector de posición \vec{r} y el momento lineal \vec{p} .



Si los vectores posición y momento lineal (velocidad) son perpendiculares, el módulo del momento angular sería $L=r \cdot m \cdot v \cdot \text{sen } 90^\circ=r \cdot m \cdot v$, esto ocurre en la órbita circular y ciertos puntos de otras órbitas



4.- ECUACIÓN FUNDAMENTAL DE LA DINÁMICA DE ROTACIÓN.

Dicha ecuación nos expresa que la derivada del momento angular con respecto al tiempo es igual al momento de la fuerza que actúa.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

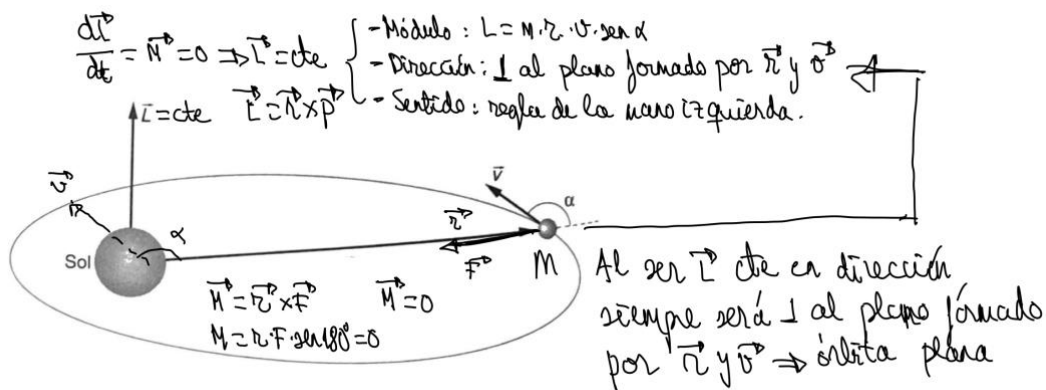
5.- CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR \vec{L}

En la pregunta 2.- se ha comprobado que el momento de fuerza era nulo para el caso de todas las fuerzas centrales, luego si $\vec{M}=0$ y $d\vec{L}/dt=\vec{M}$, entonces $d\vec{L}/dt=0$, en cuyo caso $\vec{L}=\text{cte}$, es decir, cuando actúan fuerzas centrales, \vec{L} se conserva

6.- IMPLICACIONES DE LA CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR \vec{L} EN EL ESTUDIO DEL MOVIMIENTO ORBITAL DE SATÉLITES Y PLANETAS.

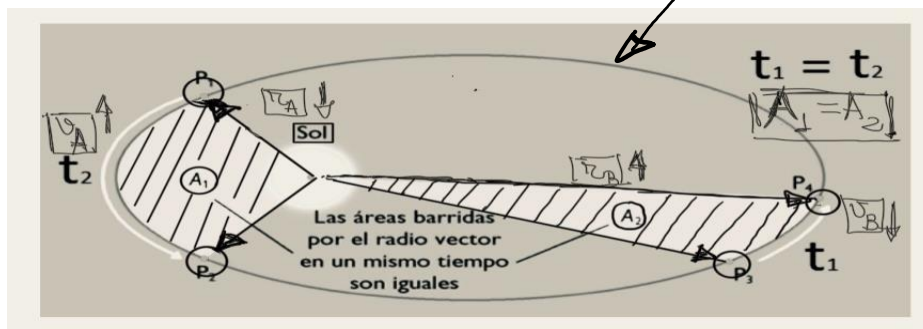
a) Demostración de las órbitas planas a las que se refiere la Primera Ley de Kepler.

La fuerza gravitatoria es una fuerza central y en dicho caso su dirección pasa por el centro O (Sol), al ser $\vec{M}=0$, $\vec{L}=\text{cte}$, siendo $\vec{L}=\vec{r} \times \vec{v}$ constante en módulo, y al ser constante en dirección, \vec{r} y \vec{v} estarán en el mismo plano, con lo cual la órbita será plana, siendo su sentido el mismo (el marcado por el producto vectorial).



b) Demostración de la Segunda Ley de Kepler con el momento angular.

En los puntos de máximo alejamiento y acercamiento de una órbita elíptica (afelio/perihelio, apogeo/perigeo, apoastro/periaastro), al ser los vectores posición y velocidad perpendiculares (véase pregunta 3.-), la conservación de \vec{L} se puede plantear como $m \cdot r_A \cdot v_A = m \cdot r_B \cdot v_B$, lo que nos indica que cuanto más próximo está al foco, mayor es la velocidad y viceversa, lo cual sugiere que la velocidad areolar es constante como se observa en la pregunta 1.- b)



EJERCICIOS LEYES DE KEPLER Y MOMENTO ANGULAR

1.- a) Enuncie y deduzca la tercera Ley de Kepler a partir de la Ley de la Gravitación Universal de Newton suponiendo órbitas planetarias circulares.

b) Si el radio de la órbita circular de un planeta A es cuatro veces que la de otro B, ¿en qué relación están sus periodos?.

2.- Define el concepto de momento angular y explica el teorema de conservación del mismo.

3.- Un planeta gira alrededor del sol según una órbita elíptica. Cuando se encuentra más cerca del Sol, a una distancia de $2 \cdot 10^5$ m, su velocidad es de $3 \cdot 10^4$ m/s. ¿Cuál será la velocidad del planeta cuando se encuentre en la posición más alejada del Sol, a una distancia de $4 \cdot 10^5$ m?.

4.- El cometa Halley se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol. En el perihelio (posición más próxima) el cometa está a $8,75 \cdot 10^7$ km del Sol y en el afelio (posición más alejada) está a $5,26 \cdot 10^9$ km del sol.

a) ¿En cuál de los dos puntos tiene el cometa mayor velocidad?, ¿y mayor aceleración?

b) ¿En qué punto tiene mayor energía potencial? ¿y mayor energía mecánica?.

5.- Un satélite artificial de masa $m = 800$ kg describe una órbita circular en torno a la Tierra, a una altura $h = 400$ km sobre su superficie.

a) Calcula el módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra. Si la órbita está en el plano ecuatorial, ¿qué dirección tiene el vector momento angular L ? ¿Es L un vector constante? ¿Por qué?.

Datos: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ $M_T = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ $R_T = 6371 \text{ km}$

6.- Mercurio describe una órbita elíptica alrededor del Sol. En el afelio, su distancia al Sol es de $6,99 \cdot 10^{10}$ m y su velocidad orbital es de $3,88 \cdot 10^4$ m/s, siendo su distancia al Sol en el perihelio de $4,60 \cdot 10^{10}$ m.

a) Calcula la velocidad orbital de Mercurio en el perihelio.

b) Calcula el módulo de su momento lineal y de su momento angular en el perihelio.

c) De las magnitudes calculadas en los apartados anteriores, di cuáles son iguales en el afelio.

Masa de Mercurio; $M_M = 3,18 \cdot 10^{23} \text{ kg}$

7.- La velocidad angular con la que un satélite describe una órbita circular en torno al planeta Venus es $\omega_1 = 1,45 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}$ y su momento angular respecto al centro de la órbita es $L_1 = 2,2 \cdot 10^{12} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Determina el radio r_1 de la órbita del satélite y su masa.

$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$, masa de Venus $M_V = 4,87 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.

8.- Un satélite gira alrededor de un planeta describiendo una órbita elíptica. In dicha cuál de las magnitudes que se relacionan a continuación permanece constante:

a) Momento angular

b) Momento lineal

c) Energía potencial

d) Energía cinética

9.- Plutón describe una órbita elíptica alrededor del Sol. Indica, para cada una de las siguientes magnitudes, si su valor es mayor, menor o igual en el afelio (punto más alejado del Sol) comparado con el perihelio (punto más próximo al Sol):

- a) Momento angular respecto a la posición del Sol.
- b) Momento lineal.
- c) Energía potencial.
- d) Energía mecánica.

10.- Enunciar la primera Ley de Kepler, explicando su significado geométrico.

11.- La segunda ley de Kepler dice que los planetas tienen velocidades, areolares constantes, lo que entendemos como consecuencia de la conservación del momento angular de los planetas. ¿Cuál es la característica de la fuerza gravitatoria entre el Sol y los planetas, que implica la conservación del momento angular?.