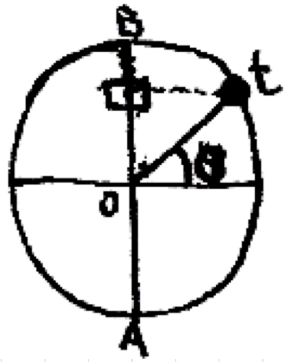
$\boxed{\text{M.A.S.}}$

a) Oscilación completa o ciclo completo.

b) Velocidad angular, pulsación o frecuencia angular ω.

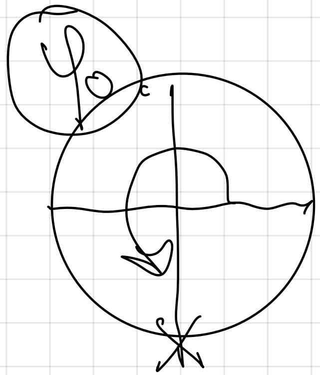
$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \left(\frac{rad}{s}\right)$$

c) Ángulo de fase φ (rad en S.I).



θ nos representa el estado vibratorio en ese instante t

d) Ángulo de fase inicial φ_0.



$t=0$.

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T} \left(\frac{rad}{s}\right).$$

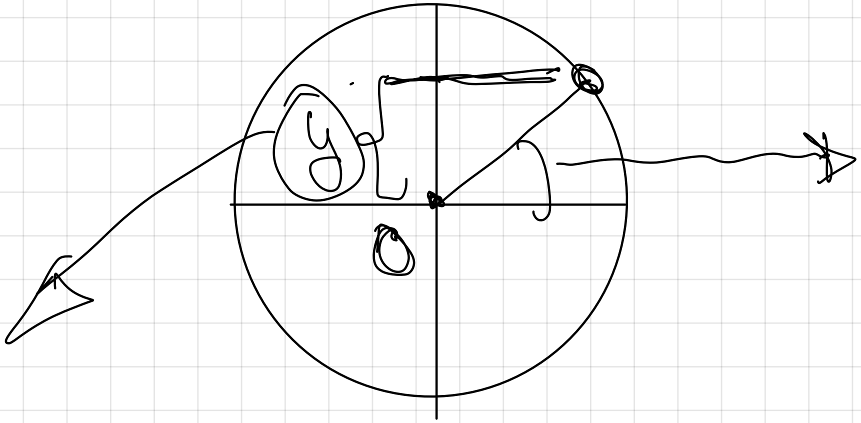
$$v = \frac{s}{t}.$$

$$s = v \cdot t.$$

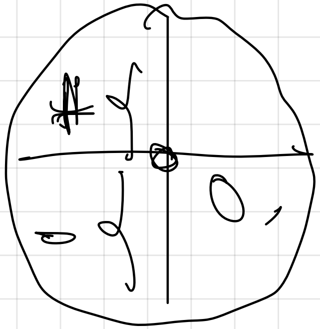
$$s = v \cdot t + s_0.$$

$\varphi = \omega \cdot t + \varphi_0$.

e) Elongación y (m en SI).



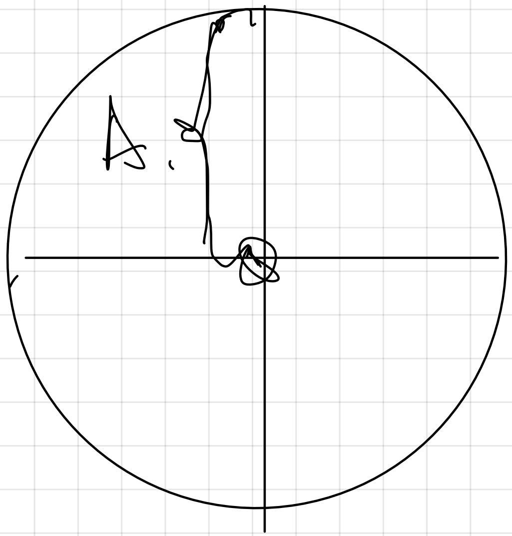
$\varphi = \varphi_0 + \omega t$.



Distancia que lo separa de su posición intermedia en un instante t.

f) Amplitud (m)

$y_{max} = A$.



AM
FM

g) Periodo T. (s. en SI).

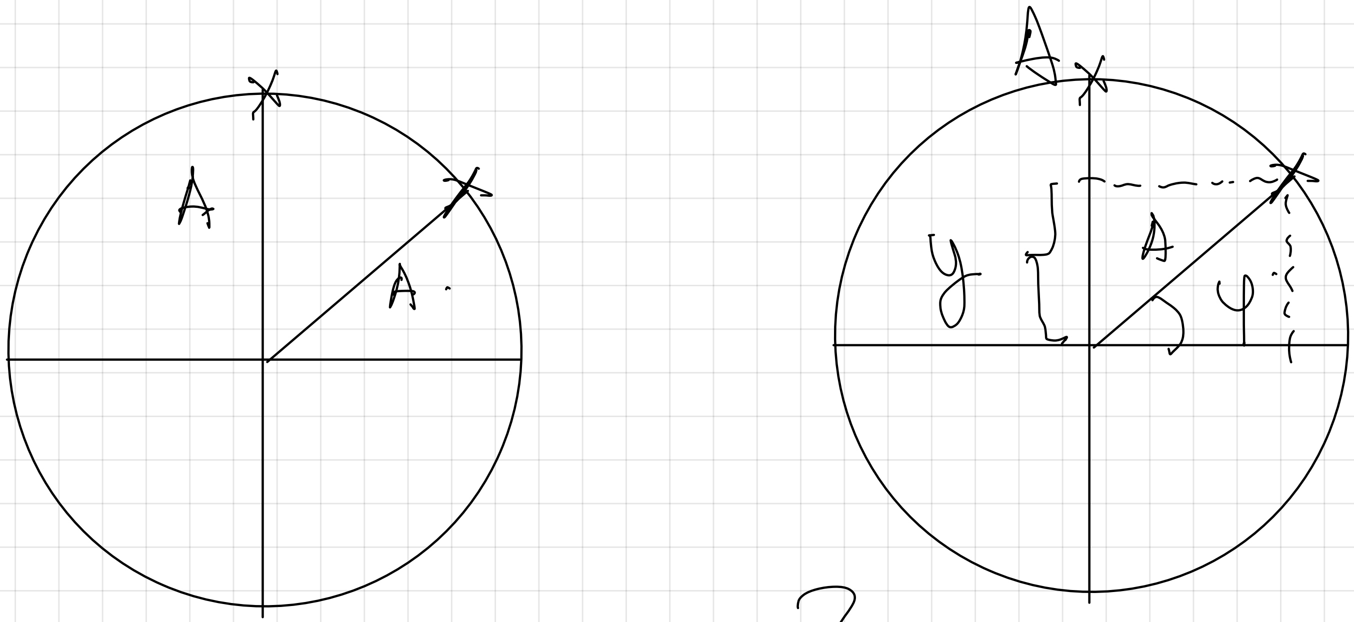
$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

b) Frecuencia. (Hz = s^{-1}, ciclos/s, vibrac/s, osc/s, etc...)

$$f = \frac{\text{nº oscilaciones}}{t}$$

$$f = \frac{1}{T}$$

3.- M.A.S.



?

$$\text{sen}\,\varphi = \frac{y \to \text{cateto opuesto}}{A \to \text{hipotenusa}}$$

$$y = A \cdot \operatorname{sen} \varphi \rightarrow (\omega t + \varphi_0)$$

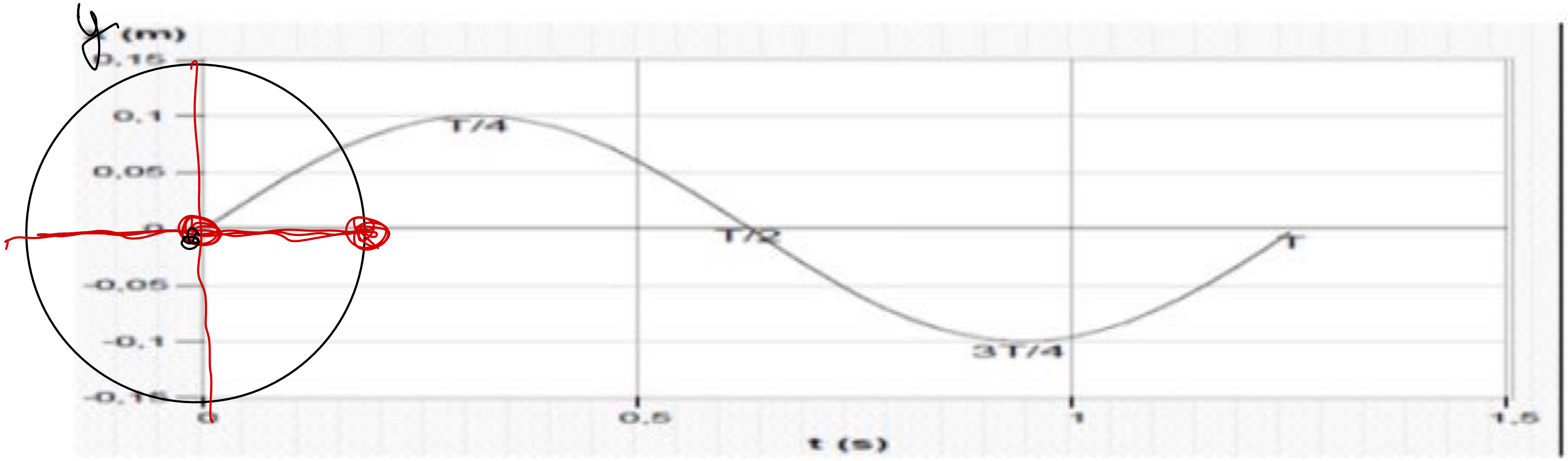
$$y = A \cdot \operatorname{sen} (\omega t + \varphi_0)$$

$$\boxed{y(t) = A \cdot \operatorname{sen} (\omega t + \varphi_0)}$$

Ecuación de un M.A.S.

EJERCICIOS PÁGINA WEB.

1.- En la gráfica se muestra la posición en función del tiempo para una partícula que describe un m.a.s. Determina la ecuación de dicho movimiento.



$$y(t) = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0) \quad (SI)$$

$$y(t) = 0'1 \cdot \operatorname{sen}(1'6\pi t + 0)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1'25} = 1'6\pi \ \frac{rad}{s}$$

$$\boxed{y(t) = 0'1 \cdot \operatorname{sen}(1'6\pi t) \ (S.I)}$$

Para calcular φ_0, se establece el instante $t = 0$, y se escribe la elongación en ese instante, en este caso

$t \to t = 0 \Rightarrow y = 0$

$$y(t) = A \cdot \operatorname{sen}(\cancel{\omega t} + \varphi_0)$$

$$0 = A \cdot \operatorname{sen}(\varphi_0)$$

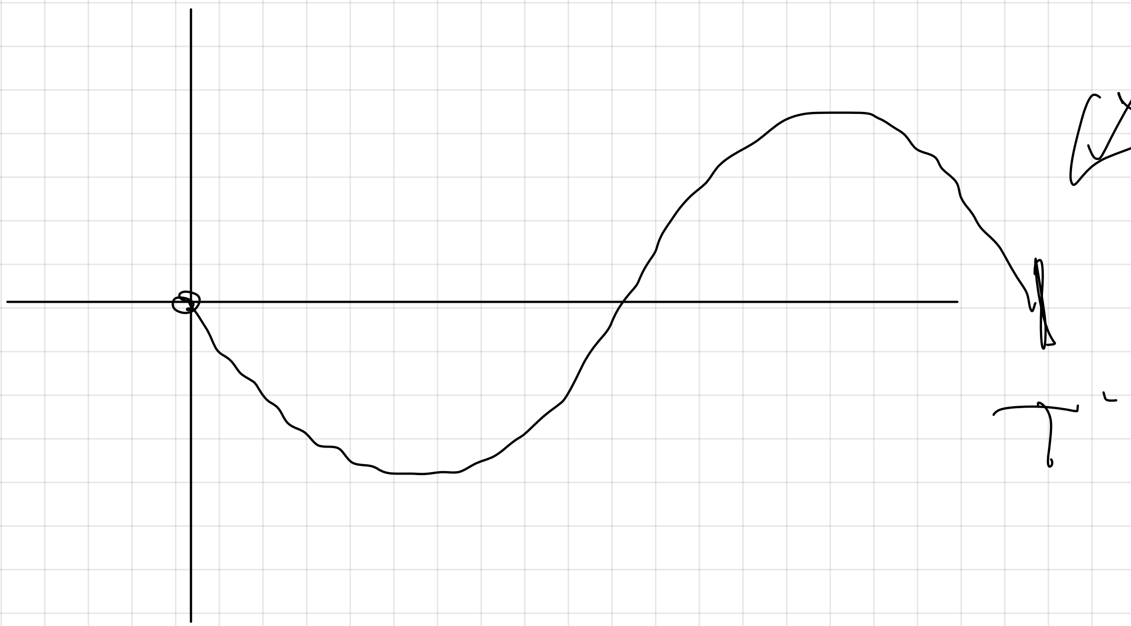
$$\frac{0}{A} = \operatorname{sen} \varphi_0$$

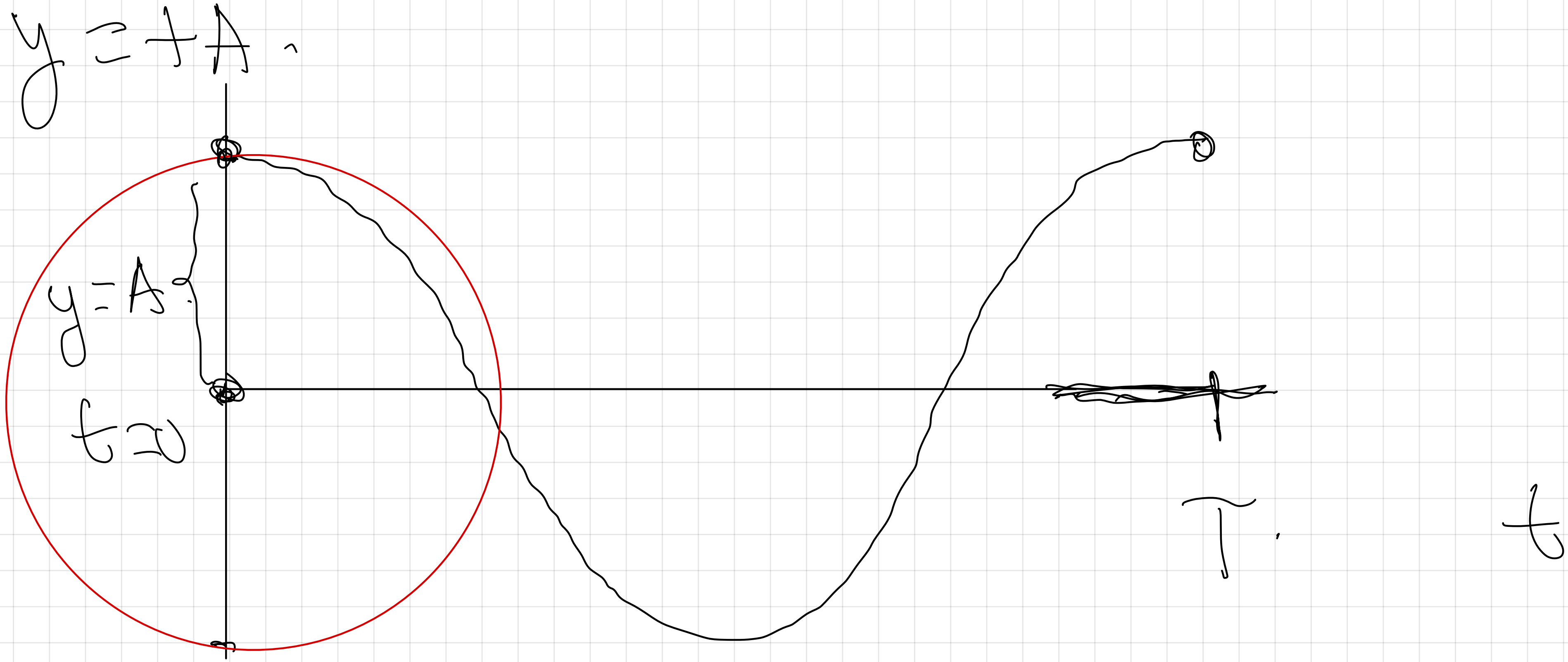
$$\boxed{\operatorname{sen} \varphi_0 = 0}$$

$\varphi_0 = \arcsin 0$

$\boxed{\varphi_0 = 0 \rightarrow \text{ascendiendo}}$

$\varphi_0 = \pi \text{ rad} \rightarrow \text{descendiendo}$





$$y = A \cdot \text{sen}\left(\omega \cancel{t}^{\,0} + \varphi_0\right)$$

$$A = A \cdot \text{sen}(\varphi_0)$$

Para calcular φ_0

$\Downarrow$

$t = 0 \Rightarrow y = A$.

$$\frac{A}{A} = \operatorname{sen} \varphi_0 .$$

$$\operatorname{sen} \varphi_0 = 1 .$$

$$\varphi_0 = \arcsin 1 .$$

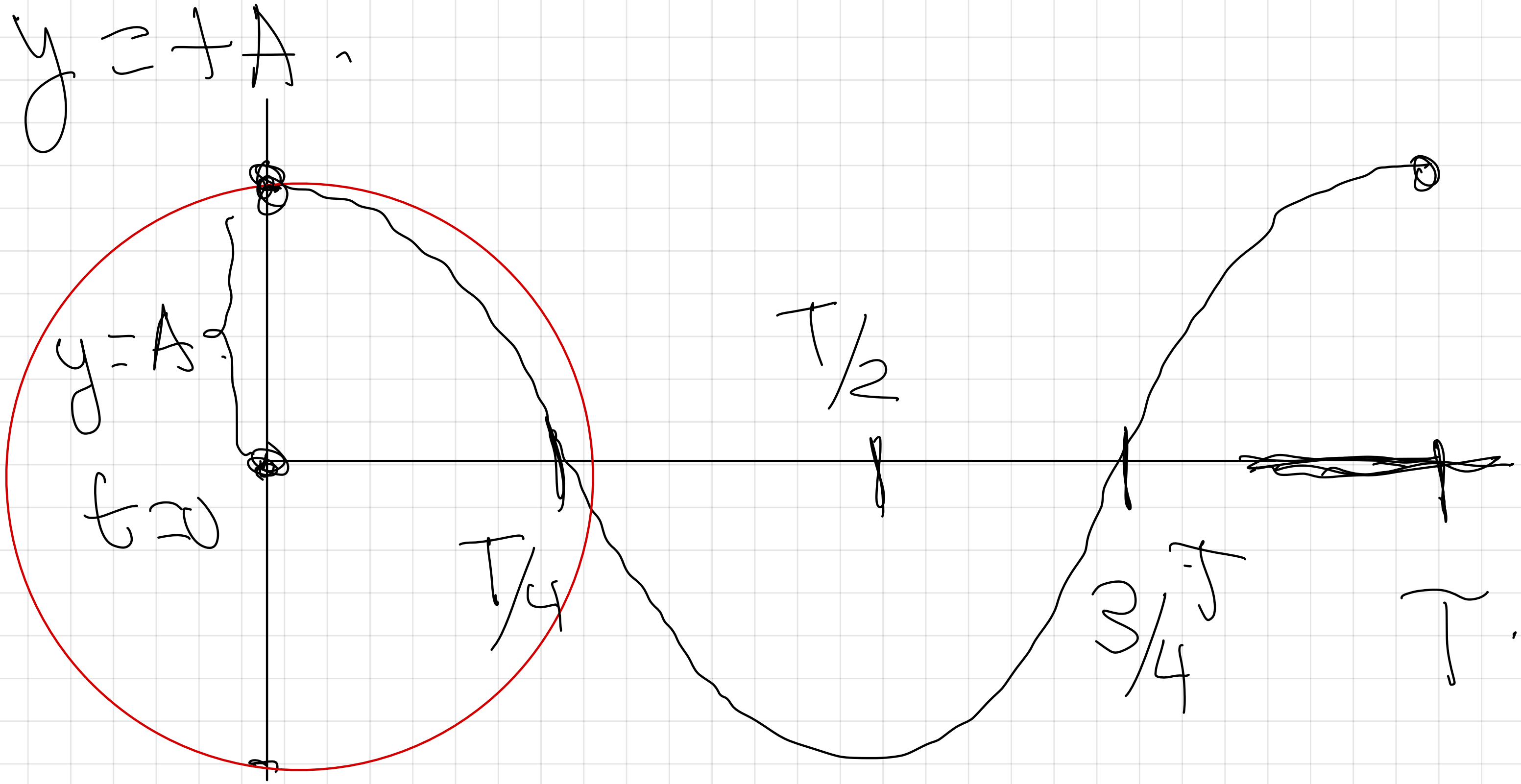
$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad } (90^\circ)$$

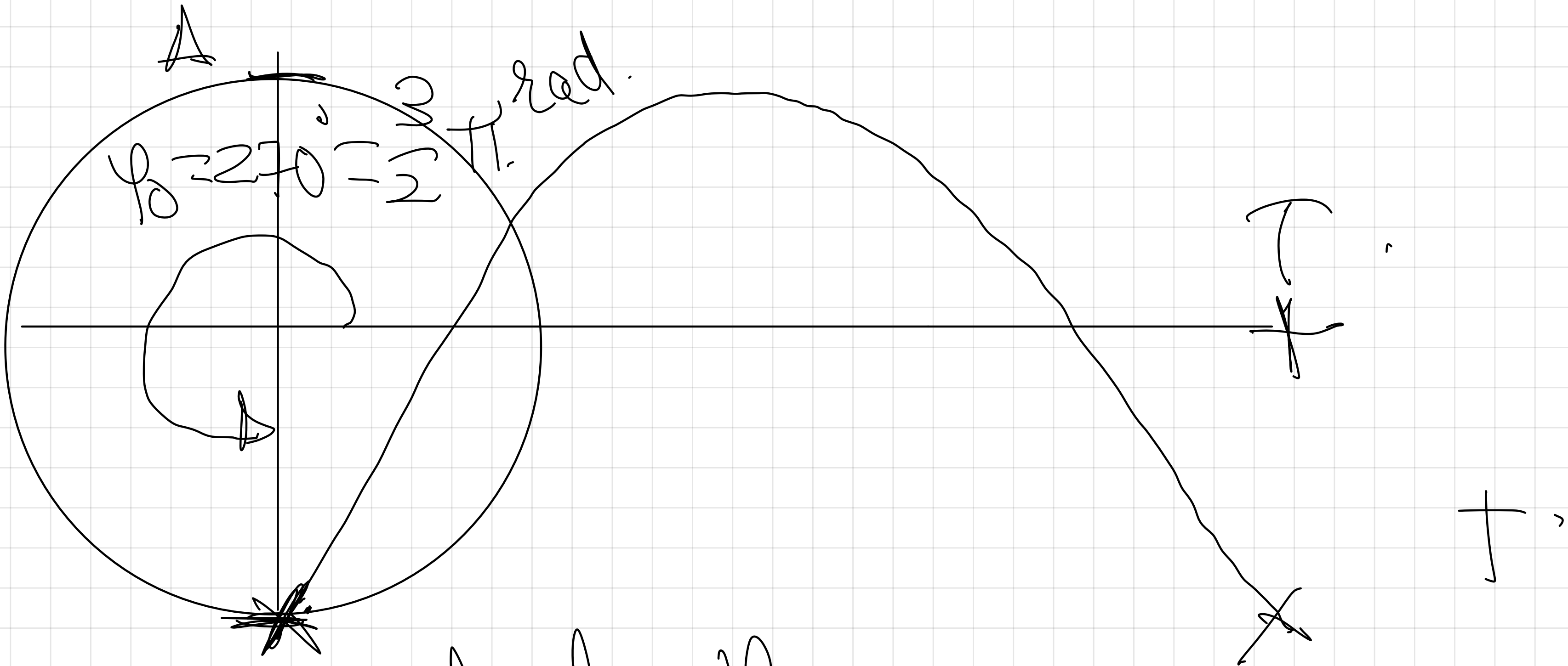
$$\operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha .$$

$$y(t) = A \cdot \operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

también equivale a:

$$\boxed{y(t) = A \cdot \cos(\omega t)}$$





calcolo φ_0.

$t = 0$,
$y = -A$

$$y(t) = A \cdot \text{sen}(\cancel{\omega t}^{\,0} + \varphi_0)$$

$$\underbrace{y(t)}_{-A}$$

$$\rightarrow -A = A \cdot \text{sen}\,\varphi_0.$$

$$-\frac{A}{A} = \operatorname{sen} \varphi_0$$

$$\operatorname{sen} \varphi_0 = -1,$$

$$\varphi_0 = \operatorname{arcsen}(-1) = \frac{3}{2}\pi \text{ rad} -$$

$$y(t) = A \cdot \operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{3}{2}\pi\right) \text{(SI)}$$

3.- MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE : CARACTERÍSTICAS CINEMÁTICAS

Un movimiento armónico simple (M.A.S.) es aquel movimientos oscilatorio en donde

$$y(t) = A \cdot \text{sen}\,(\omega t + \varphi_0)$$

$$\cancel{v = \frac{y}{t} = \frac{dy}{dt}}$$

$$v = \frac{dy}{dt} = A \cdot [\cos\,(\omega t + \varphi_0)] \cdot \omega$$

$$v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Con un
costante.

$$v_{max} = A \cdot \omega \cdot [\cos(\omega t + \varphi_0)]$$

$$\pm 1$$

$$\boxed{v_{max} = \pm A \cdot \omega} \cdot \left(m/s \right)$$

$$v = A \cdot \omega \cdot \boxed{\cos(\omega t + \varphi_0)}$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha.$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\alpha}.$$

$$v = A \cdot \omega \cdot \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\omega t + \varphi_0)}$$

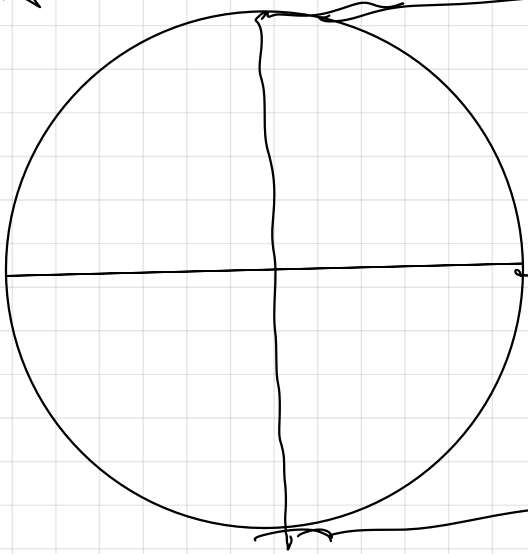
$$v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - \underbrace{A^2 \cdot \operatorname{sen}^2(\omega t + \varphi)}_{}}$$

$$\boxed{y = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)}$$

$$v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - y^2}$$

$$v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - y^2}\ .$$

$y = A$



$y = 0$

$y = -A$

$$v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - A^2} = 0$$

$$\boxed{v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - 0^2}} = \omega \cdot \sqrt{A^2} = \boxed{A \cdot \omega}$$

$$v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - (-A)^2} = 0\ ,$$

aceleración del M.A.S.

$$y = A \cdot sen(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = \frac{dy}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = A \cdot \omega \cdot \left[-sen(\omega t + \varphi_0)\right] \cdot \omega$$

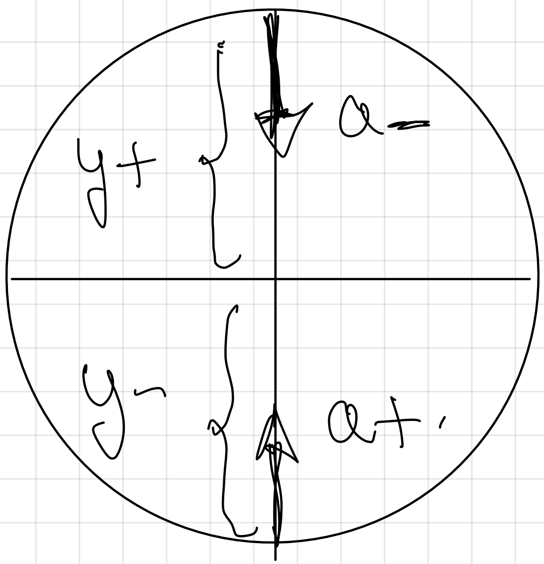
$$a = -\boxed{\boxed{A} \cdot \boxed{\omega^2} \cdot sen(\omega t + \varphi_0)}$$

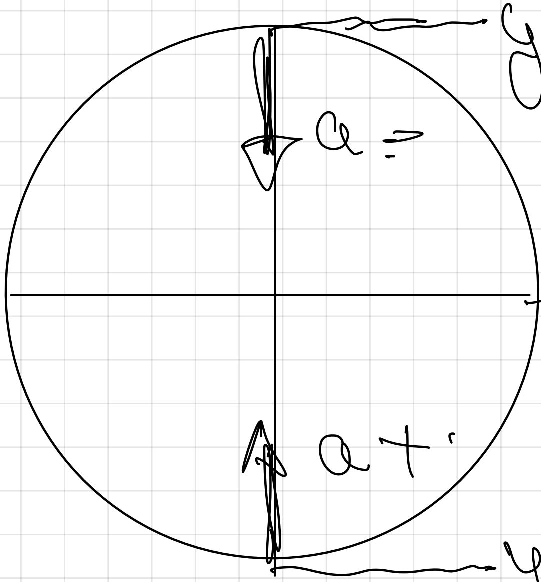
$$\boxed{a_{max} = \pm A \cdot \omega^2}$$

$y = A \cdot sen(\omega t + \varphi_0)$

aceleración en función de t.

$a = -\omega^2 \cdot y$ → Aceleración en función de la posición o elongación y

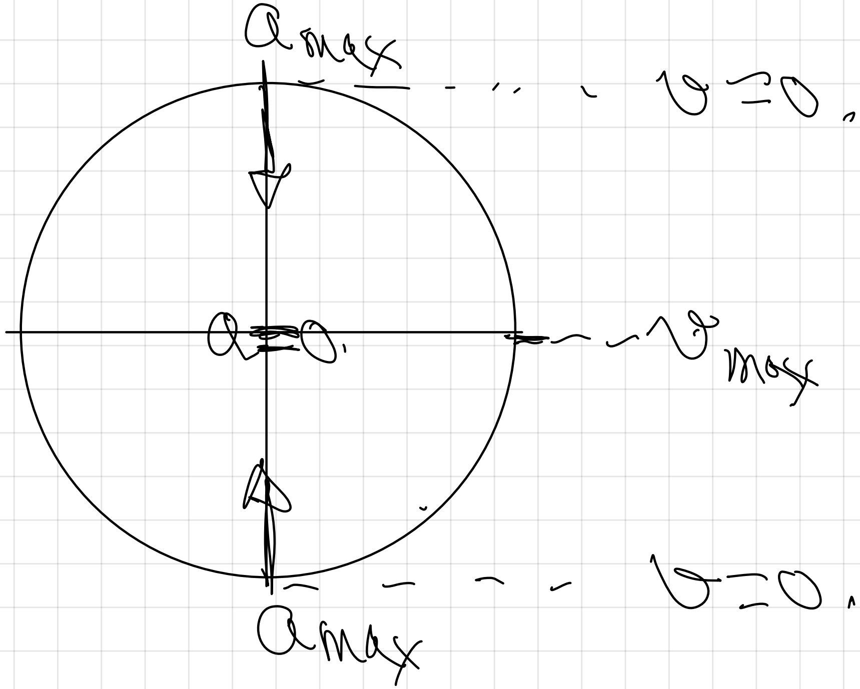




$y = A \Rightarrow \boxed{a_{max} = -A \cdot \omega^2}$

$y = 0 \Rightarrow a = -\omega^2 \cdot 0 = 0$

$y = -A \Rightarrow \boxed{a_{max} = +A \cdot \omega^2}$



a_{max}
$v = 0$
$a = 0$
v_{max}
$v = 0$
a_{max}

3.- a) Represente gráficamente el movimiento armónico simple de una partícula dado por la ecuación y(t)=5 ·sen (10t+π) (S.I). Represente también otro movimiento armónico simple que tenga una amplitud doble y una frecuencia mitad que la anterior.

b) Represente gráficamente la velocidad y la aceleración del movimiento armónico simple dado por la ecuación y(t)=5 ·sen (10t+π) (S.I)

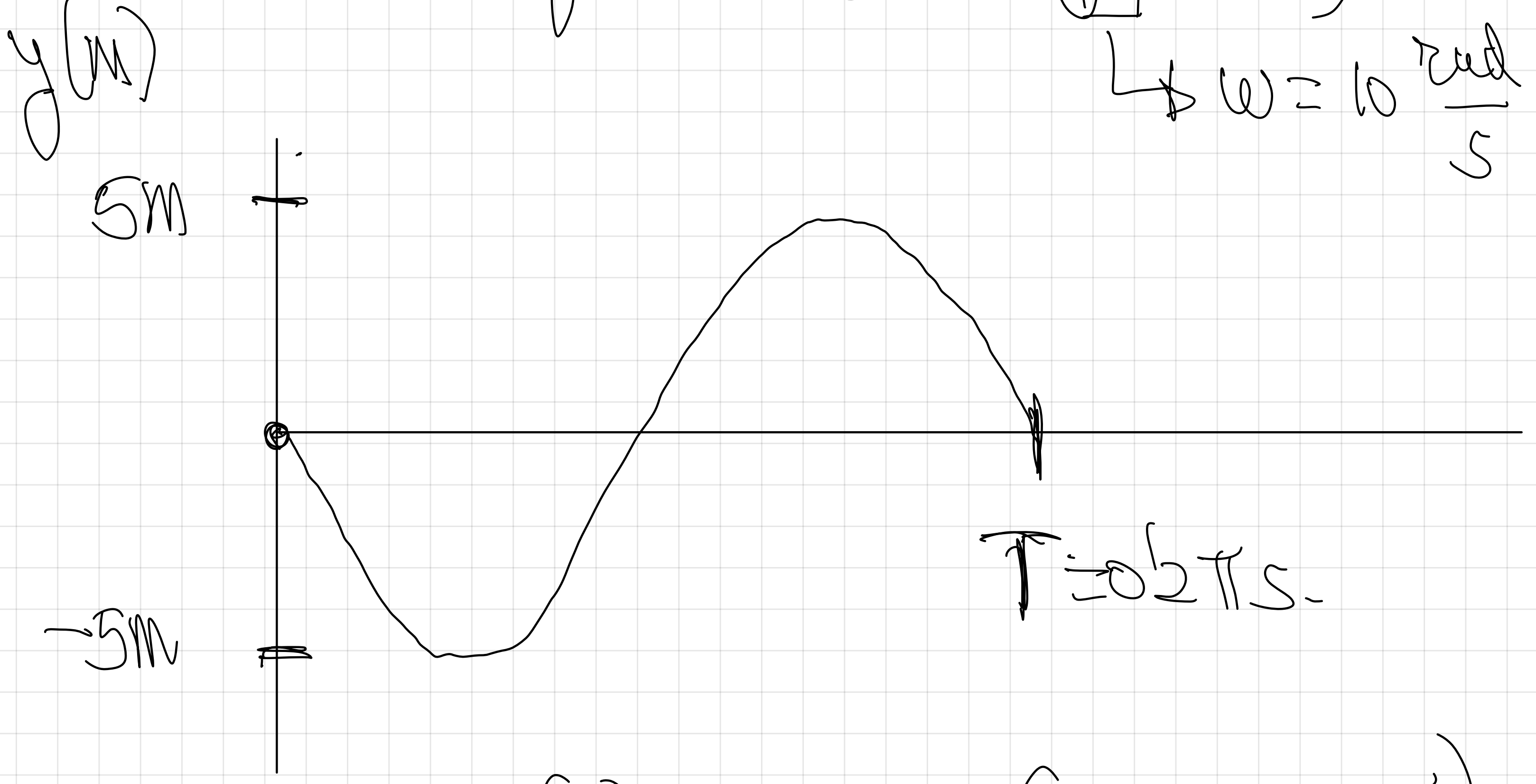
$$y(t) = 5 \cdot \text{sen}\,(\boxed{10}t + \pi) \quad (S.I)$$

$$\to \omega = 10\ \frac{rad}{s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$T = \frac{2\pi}{10} =$$

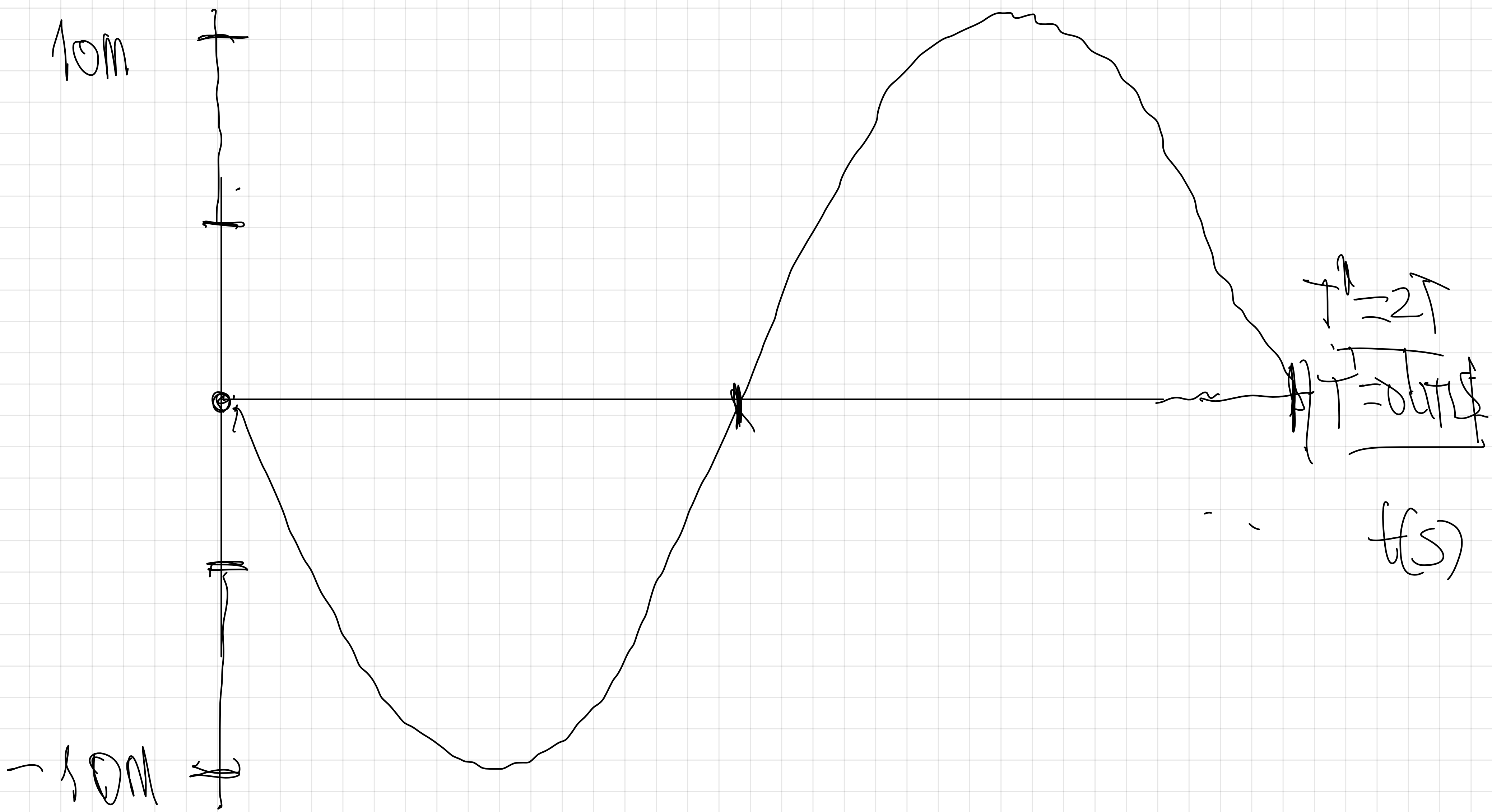


t(s)

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \frac{1}{T}$$

$$\omega = 2\pi f$$

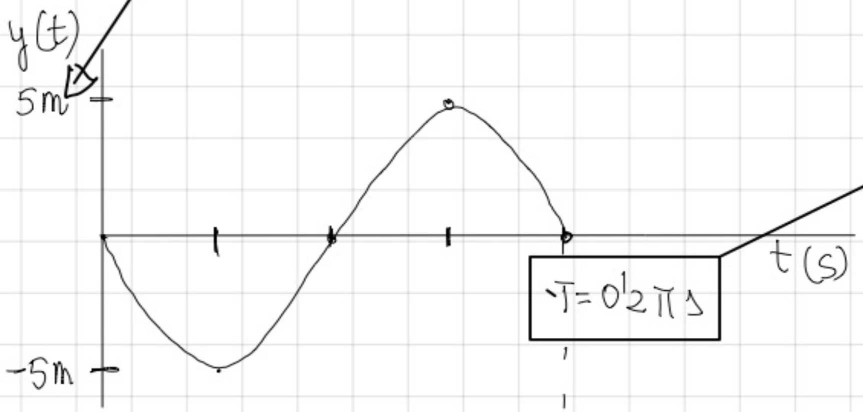
$$y(t) = 10 \cdot \text{sen}\,(\quad + \pi)$$

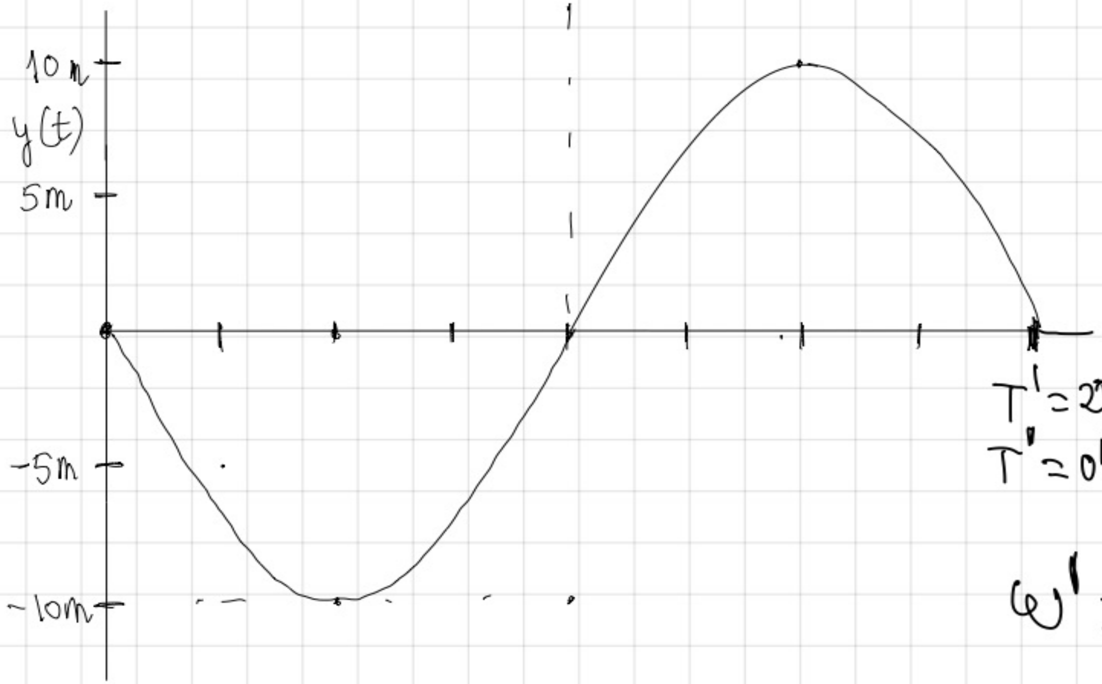

10m
-10m
0
T' = 2T
T = 0.1115
t(s)

$$\downarrow f = \frac{1}{T\uparrow}$$

$$f' = \frac{1}{[2T]}$$

$$f' = \frac{f}{2}$$





$T' = 2T$

$T' = 0'4\pi s$

$A' = 2A = 10m$

$$\left.\begin{aligned} f &= \frac{1}{T} \\ f' &= \frac{1}{2T} \end{aligned}\right\} \boxed{T' = 2T}$$

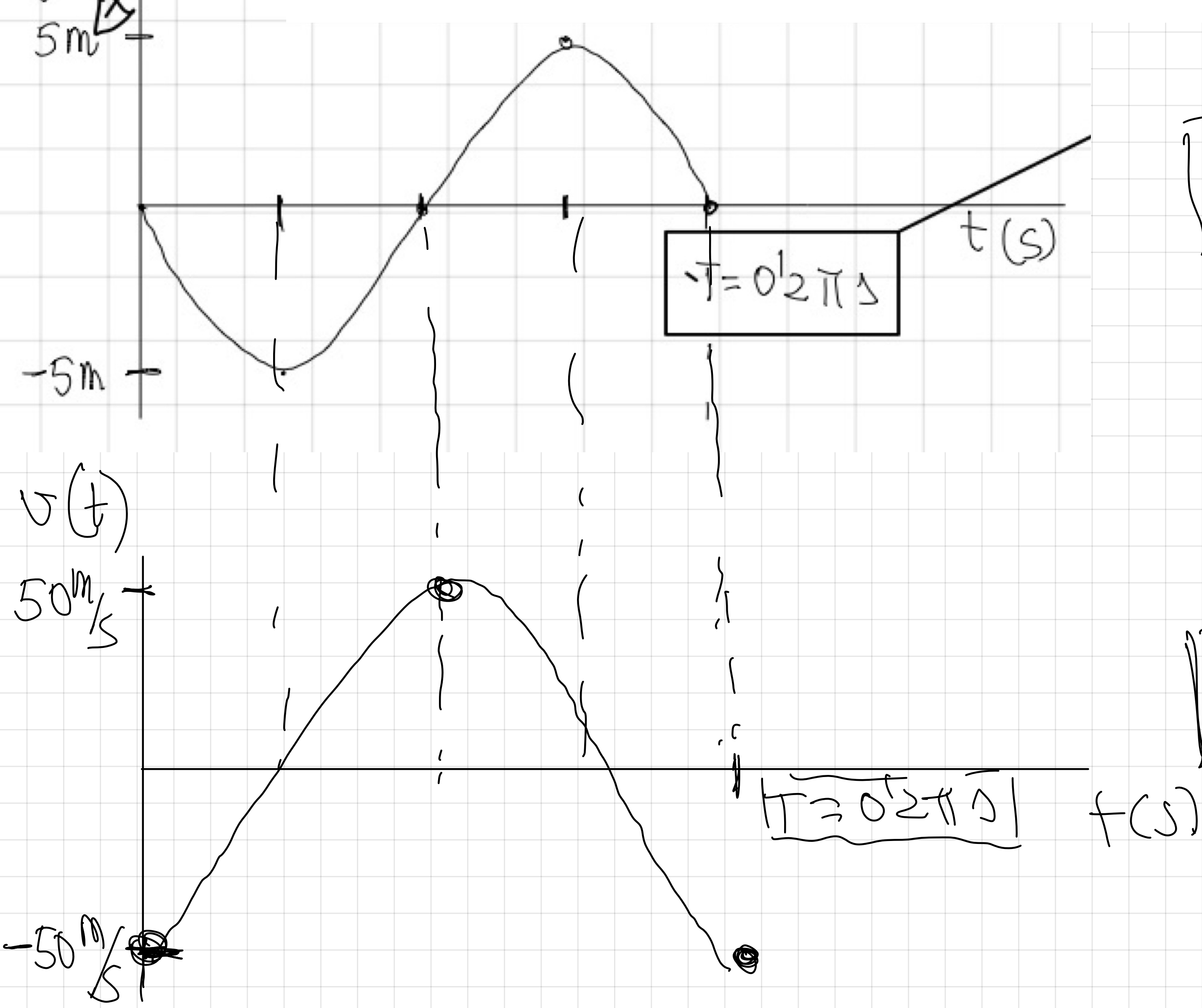
El nuevo periodo es el doble

$$\omega' = \frac{2\pi}{T'} = \frac{2\pi}{2T} = \frac{2\cancel{\pi}}{0'4\cancel{\pi}} = 5 \frac{rad}{s}$$

$$\boxed{y = 10 \cdot sen\,(5t + \pi)\ (SI)}$$

$\Rightarrow$ Esta es la nueva ecuación que

b) Represente gráficamente la velocidad y la aceleración del movimiento armónico simple dado por la ecuación y(t)=5 ·sen (10t+π) (S.I)

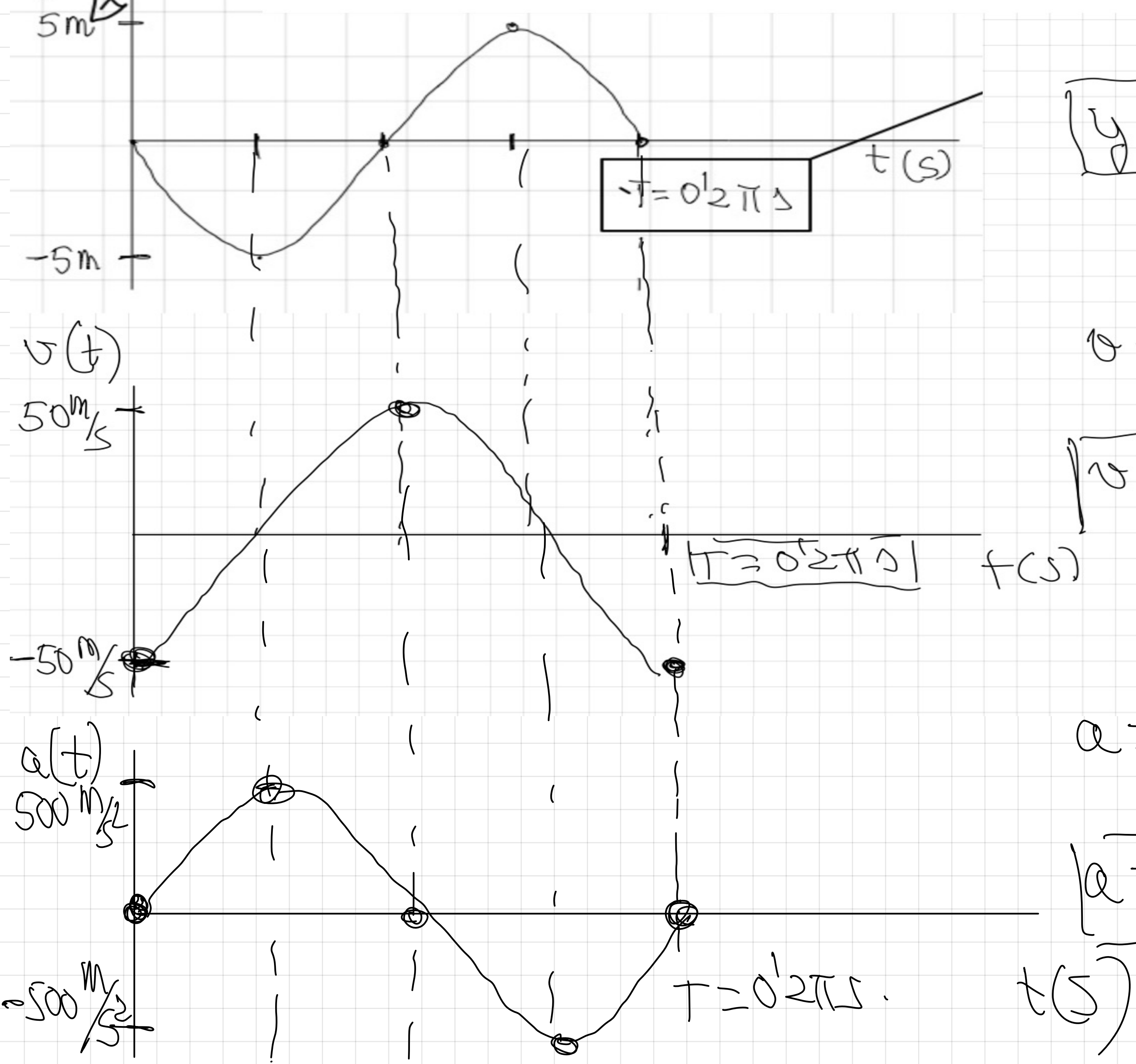


$$\boxed{y = 5\,\mathrm{sen}\,(10t+\pi)}$$

$$v = \frac{dy}{dt} = 5\cdot\left[\cos(10t+\pi)\right]\cdot 10$$

$$\boxed{v(t) = 50\cdot\cos(10t+\pi)\ (SI)}$$

c) Represente gráficamente la velocidad y la aceleración del movimiento armónico simple dado por la ecuación $y(t)=5 \cdot \text{sen}\,(10t+\pi)$ (S.I)



$$\boxed{y = 5\,\text{sen}\,(10t+\pi)}$$

$$v = \frac{dy}{dt} = 5\cdot\left[\cos(10t+\pi)\right]\cdot 10$$

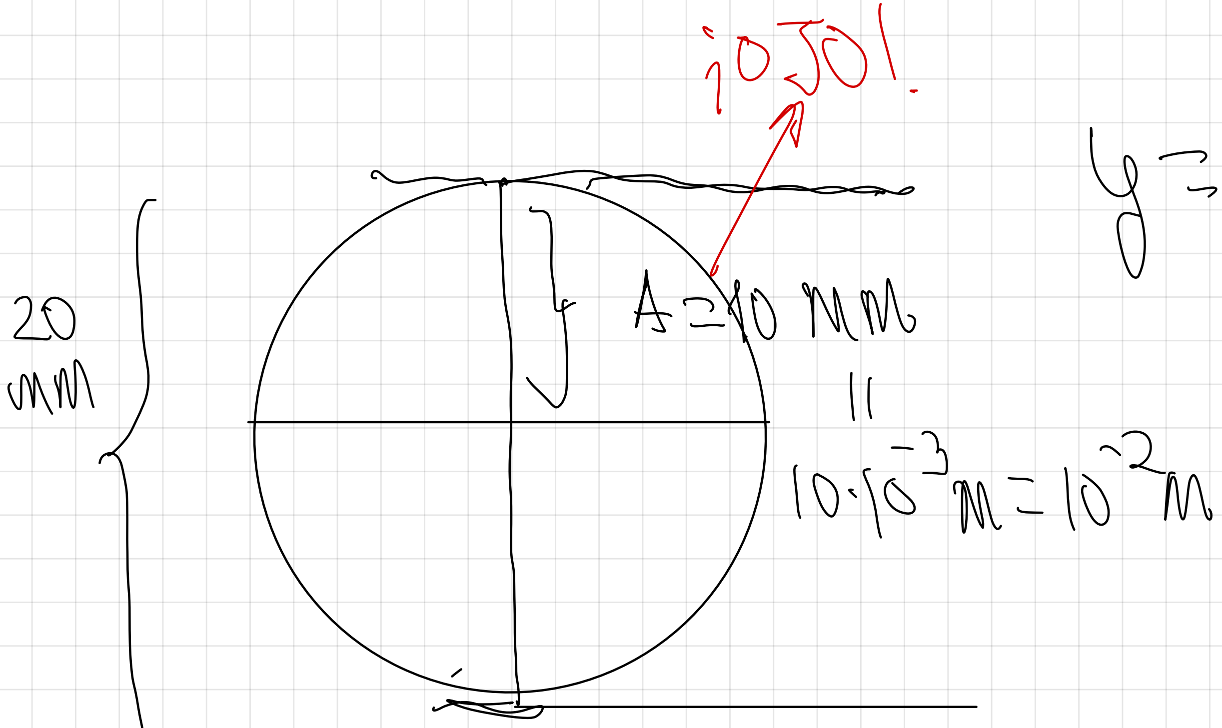
$$\boxed{v(t) = 50\cdot\cos(10t+\pi)\ \text{(SI)}}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 50\left[-\text{sen}(10t+\pi)\right]\cdot 10$$

$$\boxed{a = -500\,\text{sen}(10t+\pi)\ \text{(SI)}}$$

$t=0 \Rightarrow a = -500 \cdot \text{sen}(10t + \pi)$

2.- La aguja de una máquina de coser oscila entre dos puntos separados por una distancia vertical de 20 mm. Suponiendo que describe un m.a.s de frecuencia 30 Hz, ¿Cuál será su velocidad y aceleración máximas en unidades del Sistema Internacional?.



$y = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0)$

$y = 10^{-2} \text{sen}(60\pi t + 0)$ (SI)

Si no se especifican las condiciones iniciales, por defecto $\varphi_0 = 0$.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot \frac{1}{T} \Rightarrow \omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 30 = 60\pi \ \frac{rad}{s}$$

$$y(t) = 10^{-2} \cdot \operatorname{sen}(60\pi t) \quad (S.I)$$

$$v = \frac{dy}{dt} = 10^{-2} \cdot [\cos(60\pi t)] \cdot 60\pi$$

$$v(t) = 0'6\pi \cdot \cos(60\pi t) \quad (S.I)$$

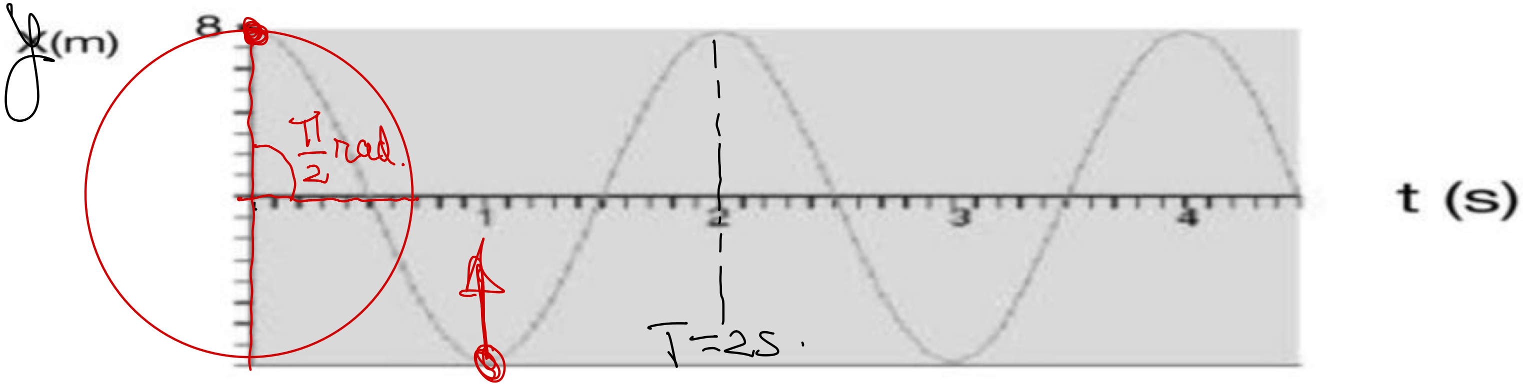
$$v_{max} = \pm 0'6\pi \ m/s = \pm 1'88 \ m/s$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 0'6\pi \cdot [-\operatorname{sen}(60\pi t)] \cdot 60\pi$$

$$a(t) = -36\pi^2 \cdot \text{sen}\,(60\pi t).$$

$$a_{max} = \pm 36\pi^2 \frac{m}{s^2} = 354{,}94\ m/s^2$$

4.- En la gráfica se muestra la posición en función del tiempo para una partícula que describe un m.a.s.
a) Escribir la ecuación del m.a.s en unidades S.I.
b) Calcular su posición, su velocidad y su aceleración en el instante t=1s, comentando los resultados.



$\boxed{t=0}$.

a) $y = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0)$

$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}} = \pi \ \frac{rad}{s}$

$y = 8 \cdot \text{sen}\left(\pi t + \boxed{\frac{\pi}{2}}\right)$ (SI)

Para el cálculo de φ_0 tomo $t = 0$.

$\left\{ \begin{array}{l} t = 0 \\ y = A \end{array} \right.$

$y = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0)$.

$A = A \cdot \text{sen}(\omega \cancel{t}^{\,0} + \varphi_0)$

$A = A \cdot \text{sen}\,\varphi_0$

$\frac{A}{A} = \text{sen}\,\varphi_0$

$\varphi_0 = \text{arcsen}\,1 = \frac{\pi}{2}\ rad.$

$t = 0 \Rightarrow y = 8\,m$

$y = 8 \cdot \text{sen}(\pi t + \varphi_0)$

$8 = 8 \cdot \text{sen}(\pi \cancel{t}^{\,0} + \varphi_0)$.

$8 = 8 \cdot \text{sen}(\varphi_0)$

$\text{sen}\,\varphi_0 = \frac{8}{8} \qquad \text{sen}\,\varphi_0 = 1$

$\varphi_0 = \text{arcsen}\,1 = \frac{\pi}{2}\ rad.$

$$y = 8 \cdot \operatorname{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (S.I)$$

$$y(t) = 8 \cdot \cos(\pi t) \quad (S.I)$$

$$t = 1s \rightarrow y(t = 1s) = 8 \cdot \cos(\pi) = \boxed{-8\ m}$$

⇓

Interpretación del resultado: ha transcurrido $T/2$ y el móvil se encuentra en el otro extremo de la trayectoria. (ver gráfica)

$$y = 8 \cdot \cos(\pi t) \quad (SI)$$

$$v = \frac{dy}{dt} = 8 \cdot (-\operatorname{sen}(\pi t)) \cdot \pi,$$

$$v(t) = -8\pi \cdot \operatorname{sen}(\pi t) \quad (SI)$$

$$t = 1\,s \Rightarrow v(t=1) = -8\pi \cdot \operatorname{sen}(\pi) = 0.$$

Al estar en el extremo de la trayectoria su velocidad es nula.

$$a = \frac{dv}{dt} = -8\pi \cdot [\cos(\pi t)]\,\pi.$$

$$a = -8\pi^2 \cos(\pi t) \quad (SI)$$

$$t = 1, \quad a(t=1) = -8\pi^2 \cos(\pi) \quad (SI)$$

$$a = 8\pi^2\ m/s^2 \qquad a = +8\pi^2\ m/s^2$$

En el extremo de la trayectoria alcanzará

su $a_{max} = A\omega^2 = 8\pi^2 \ m/s^2$.

5.- La ecuación de un m.a.s viene dada por la expresión

$$x(t) = 0{,}5 \cdot \cos(\pi t) \ (S.I)$$

a) Calcular su amplitud, su ángulo de fase inicial, su periodo, su frecuencia y su posición al cabo de 0,5 segundos.

b) Calcular la velocidad y la aceleración máximas que podría alcanzar en su movimiento.

a) $\boxed{A = 0'5 \ m}$

$x(t) = 0'5 \cdot \operatorname{sen}\left(\pi t + \boxed{\frac{\pi}{2}}\right) \ (S.I)$ $\rightarrow \boxed{\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \ rad}$

$x(t) = 0'5 \cdot \cos(\pi t)$

Cálculo φ_0.

$t = 0 \longrightarrow x(t=0) = 0'5 \cdot \cos(\pi \cdot 0)$

1

$\boxed{x(t=0) = 0'5 \ m} = A$.

$$x(t) = A \cdot \text{sen}\,(\omega t + \varphi_0)$$

$t = 0$

$x = A$

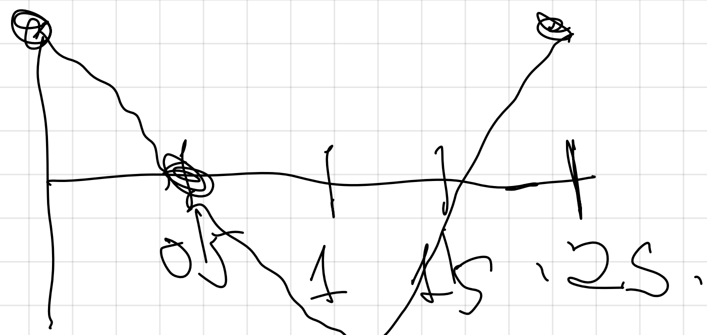
$$A = A \cdot \text{sen}\,(\omega \cancel{t}^{0} + \varphi_0)$$

$$\frac{A}{A} = \text{sen}\,\varphi_0 \qquad \varphi_0 = \frac{\pi}{2}\ \text{rad}$$

$$x(t) = 0'5 \cdot \cos(\pi t) \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\boxed{T = 2s}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} = 0'5\ Hz \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}} = 2s$$



$t = 0'5\,s \Rightarrow \quad x(t = 0'5\,s) = 0'5 \cdot \cos(\pi \cdot 0'5)$

$x(t = 0'5\,s) = 0 .$

b)

$$\boxed{x(t) = 0'5 \cos(\pi t) \quad (S.I)}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 0'5 \cdot [-\operatorname{sen}(\pi t)]\,\pi$$

$$v = -0'5\pi \cdot \operatorname{sen}(\pi t) .$$

$$v_{max} = \pm 0'5\pi \ m/s .$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -0'5\pi \cdot [\cos(\pi t)]\,\pi .$$

$a = -0'5\pi^2 \cdot \cos(\pi t)$

$a_{max} = \pm 0'5\pi^2 \ (m/s^2)$

6.- La ecuación de un cuerpo que describe un m.a.s es $x(t) = \underbrace{10}_{A} \cdot sen(\underbrace{\pi}_{\omega} t + \underbrace{3\pi/2}_{\varphi_0})$ (S.I).

a) ¿Cuánto valen la amplitud, el periodo y la frecuencia del movimiento?

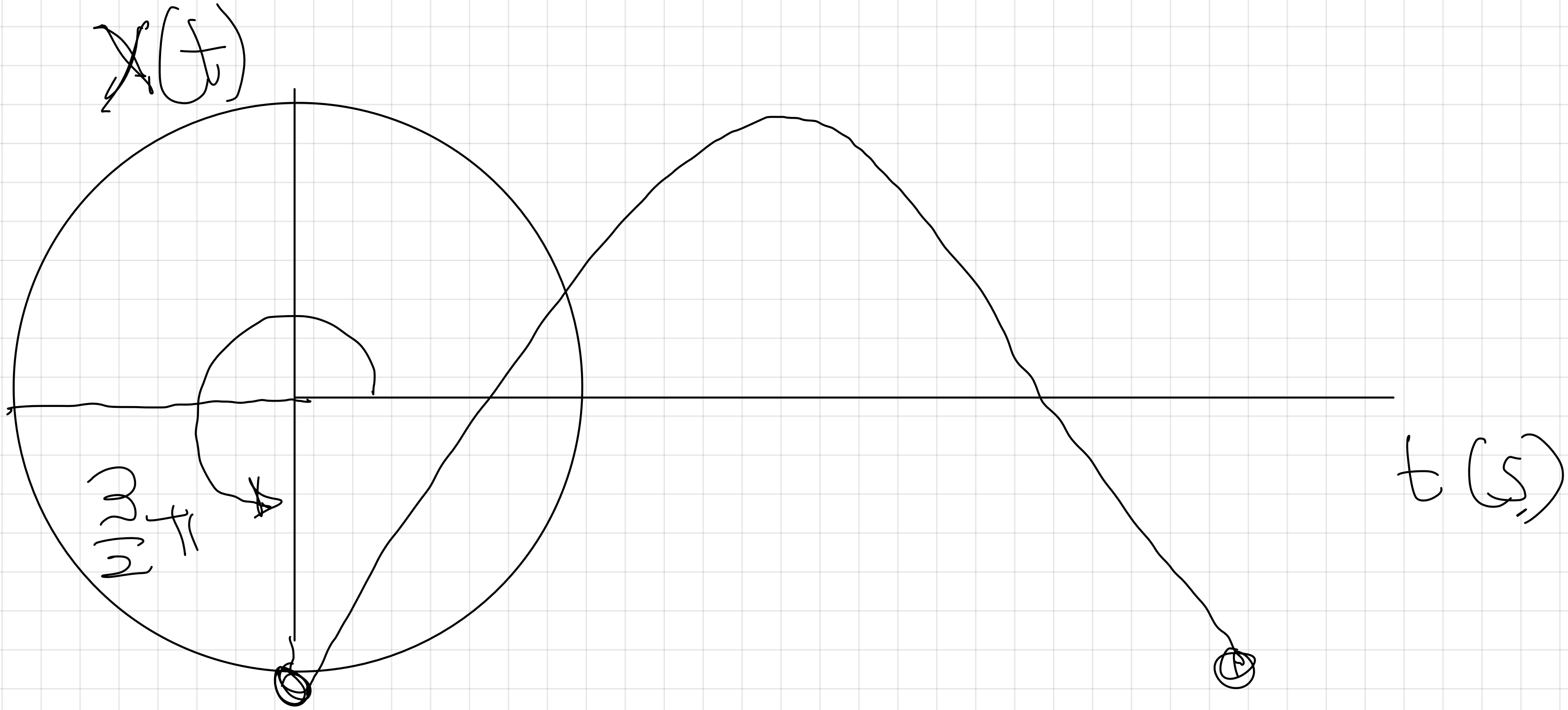
b) Representar gráficamente la posición en función del tiempo

b) ¿Cuánto valen la velocidad y la aceleración del cuerpo para t = 2s?

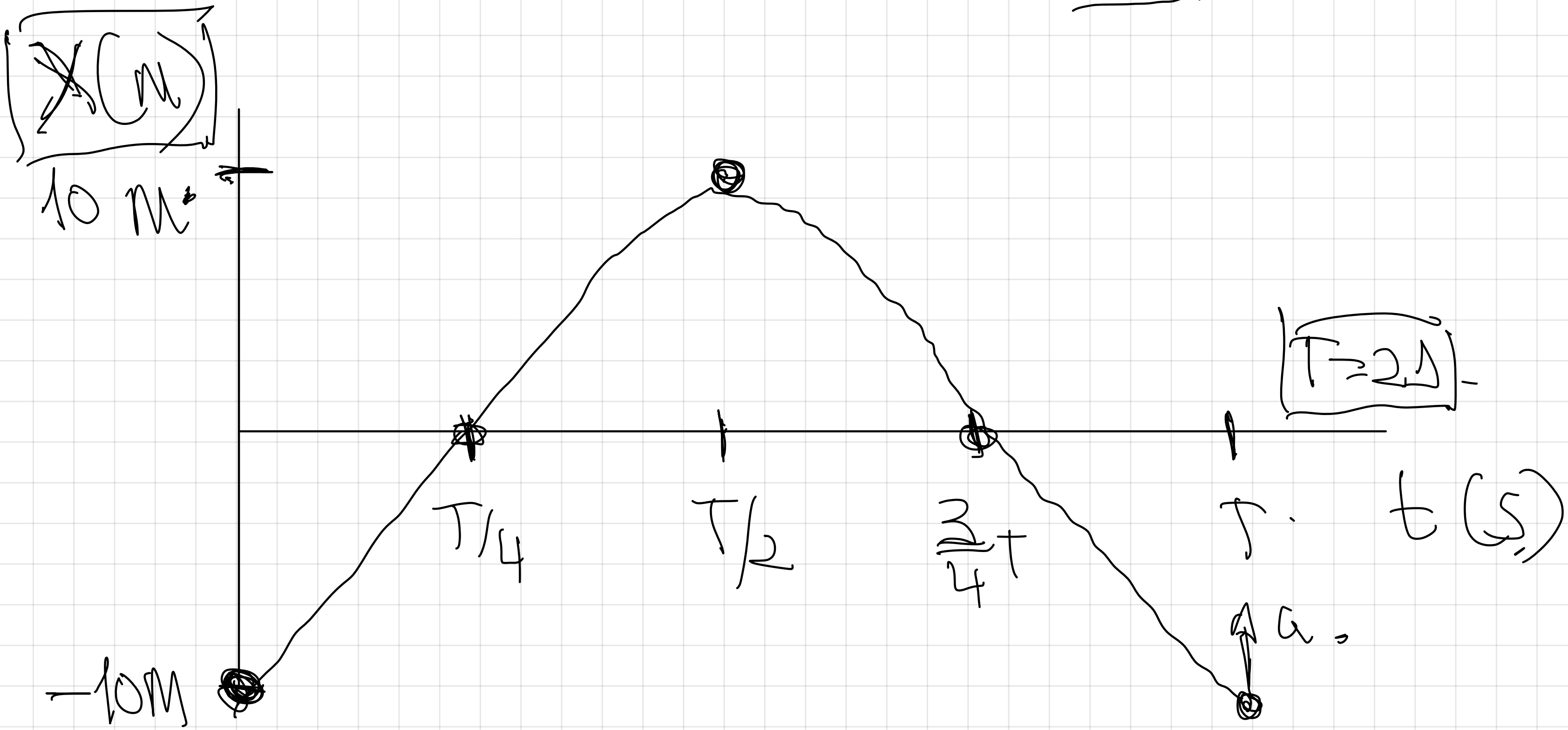
a) $\underline{A = 10\,m}$

$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}} = \underline{2s}$ $\qquad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2}\ \underline{Hz}$

$$x(t) = 10 \cdot \operatorname{sen}\left(\pi t + \frac{3}{2}\pi\right) \quad (S.I)$$



$x = 10 \cdot \text{sen}\left(\pi t + \boxed{\frac{3}{2}\pi}\right)$ (S.I.)



$v = 0$

$a_{max} = A \cdot \omega^2 = 10\pi^2 \, m/s^2$

$t = 2\,s$ ¿ v? ¿ a?

$x = 10 \cdot \text{sen}\left(\pi t + \frac{3}{2}\pi\right)$ (S.I.)

$$v = \frac{dx}{dt} = 10 \cdot \left[\cos\left(\pi t + \frac{3}{2}\pi\right)\right] \cdot \pi$$

$$v(t) = 10\pi \cdot \cos\left(\pi t + \frac{3}{2}\pi\right) \cdot (SI)$$

$t = 2s$

$$v(t = 2s) = 10\pi \cdot \cos\left(2\pi + \frac{3}{2}\pi\right) \; (SI)$$

$$v = 0$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 10\pi \cdot \left[-\sin\left(\pi t + \frac{3}{2}\pi\right)\right] \pi$$

$$a = -10\pi^2 \cdot \sin\left(\pi t + \frac{3}{2}\pi\right)$$

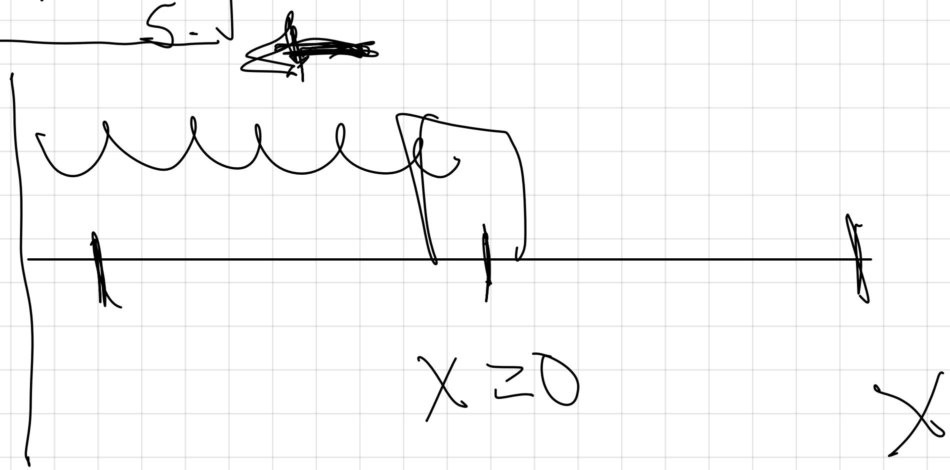
$t = 2s$ $\quad a(t = 2s) = -10\pi^2 \cdot \sin\left(2\pi + \frac{3}{2}\pi\right) = 10\pi^2 \, m/s^2$

7.- Un punto material está animado con un movimiento armónico simple en el eje X, alrededor de su posición de equilibrio en x= 0. En el instante t=0, el punto material está situado en x=0 y se desplaza en el sentido negativo del eje X con una velocidad de 40 $cm \cdot s^{-1}$. La frecuencia del movimiento es de 5 Hz. Determinar:

a) La posición en función del tiempo o ecuación del movimiento armónico simple

b) La posición y la velocidad en el instante t=5s

$\boxed{v = 40 \frac{cm}{s}}$ $\quad t = 0.$



$x(t) = A \cdot sen(\underline{\omega} t + \varphi_0)$

$v = 40 \frac{\cancel{cm}}{s} \cdot \frac{1\ m}{100\ \cancel{cm}} = 0{,}4\ m/s.$

$$v = \frac{dx}{dt} = A \cdot \left[\cos(\omega t + \varphi_0)\right] \cdot \omega .$$

$$v = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$\rightarrow$ Cea el pto intermedio

$$v_{max} = A \cdot \omega .$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot \frac{1}{T} = 2\pi f$$

$$\omega = 2\pi \cdot 5 = 10\pi \ \frac{rad}{s}$$

$$A = \frac{v_{max}}{\omega} = \frac{0'4 \ m/\cancel{s}}{10\pi \ rad/\cancel{s}} = 0'013 \ m.$$

$$x(t) = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

$$x(t) = 0'013 \cdot \text{sen}(10\pi t + \varphi_0)$$

$\downarrow$

Cálculo

$$\begin{cases} t = 0 \\ x = 0. \end{cases}$$

$$0 = 0'013 \cdot \text{sen}(10\pi \cdot 0 + \varphi_0).$$

$$\frac{0}{0'013} = \text{sen}\,\varphi_0$$

$$\varphi_0 = \text{arcsen}\, 0^\circ \begin{cases} 0^\circ \\ \boxed{180^\circ\ (\pi\ \text{rad})} \end{cases}$$

En $t=0$ se mueve en el sentido negativo.

$$x(t) = 0'013 \cdot \text{sen}\,(10\pi t + \pi) \quad (SI)$$

posición y velocidad en el instante $\underline{t = 5\,s}$.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\cancel{\pi}}{10\cancel{\pi}} = 0'2\,s.$$

$$x(t=5\,s) = 0'013 \cdot \text{sen}\,(10\pi \cdot 5 + \pi) \quad (SI)$$

$$x(t=5s) = 0'013 \cdot \text{sen}(50\pi + \pi)$$

$$x(t=5s) = 0.$$

$$x(t) = 0'013 \cdot \text{sen}(10\pi t + \pi) \quad (SI)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 0'013 \left[\cos(10\pi t + \pi)\right] \cdot 10\pi$$

$$v(t) = 0'013 \cdot 10\pi \cdot \cos(10\pi t + \pi)$$

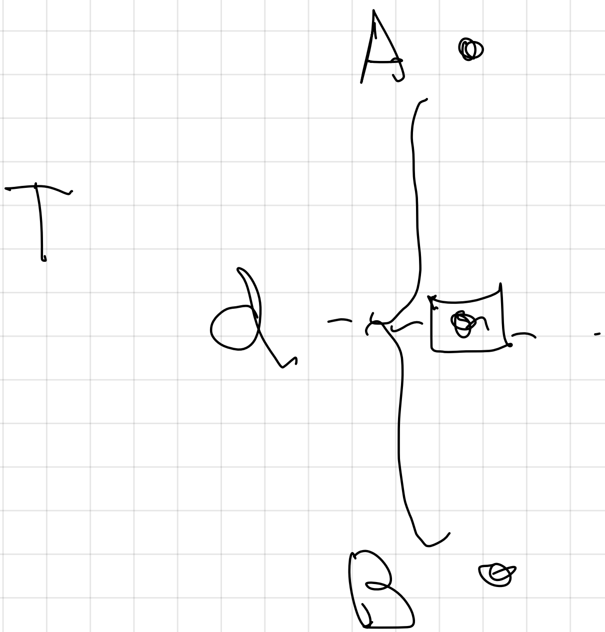
$$v(t=5s) = 0'013 \cdot 10\pi \cdot \cos(50\pi + \pi)$$

$$v(t=5s) = -0'013 \cdot 10\pi = -0'4 \; m/s.$$

8.-Una partícula describe un movimiento armónico simple entre dos puntos A y B que distan una distancia vertical d, con un periodo T.

a) Escriba la ecuación de dicho movimiento armónico simple sabiendo que para t=0 la partícula se encuentra en el punto medio del segmento AB. Realizar una gráfica cualitativa de la elongación en función del tiempo.

b) Repita el apartado a) suponiendo que el periodo hubiese sido la mitad.



$$y(t) = A \cdot sen(\omega t + \varphi_0)$$

$$y(t) = \frac{d}{2} \, sen\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + 0\right)$$

$t = 0$; $\Big\}$ $y(t) = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0)$ ($t \to 0$)

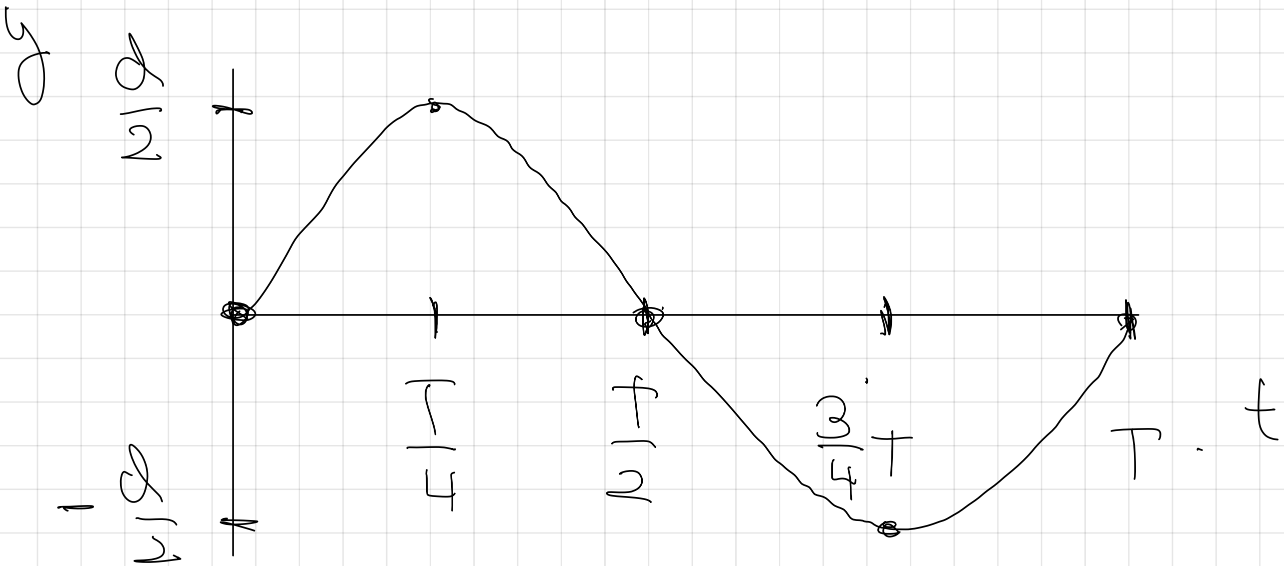
$y = 0$. $\Big\}$ $0 = A \cdot \text{sen}\, \varphi_0$

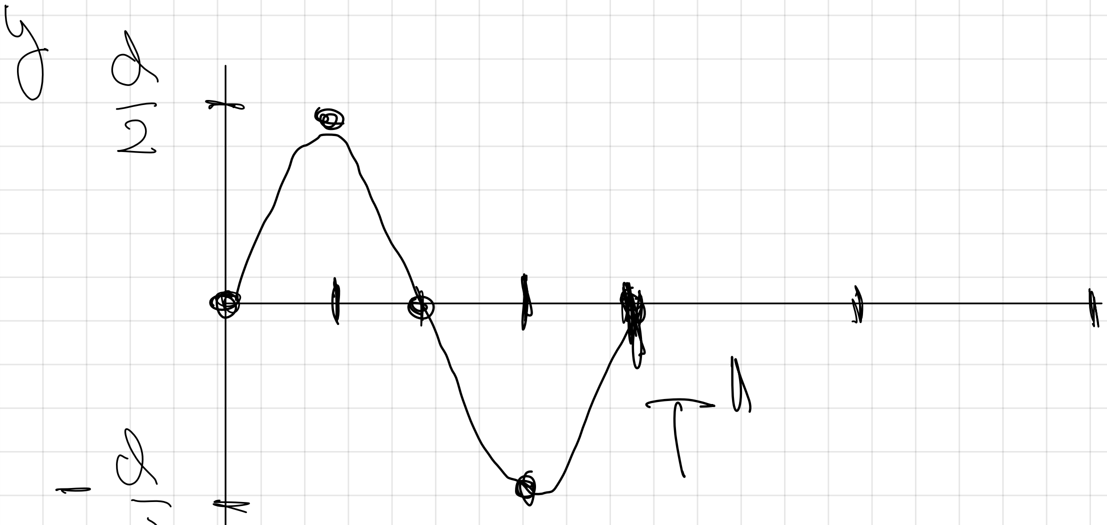
$\text{sen}\, \varphi_0 = 0$

$\varphi_0 = \arcsin 0°$ → $\boxed{0°}$ → Al no especifican, por defecto se toma 0.

→ $180°$

$$y(t) = \frac{d}{2}\, sen\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + 0\right)$$

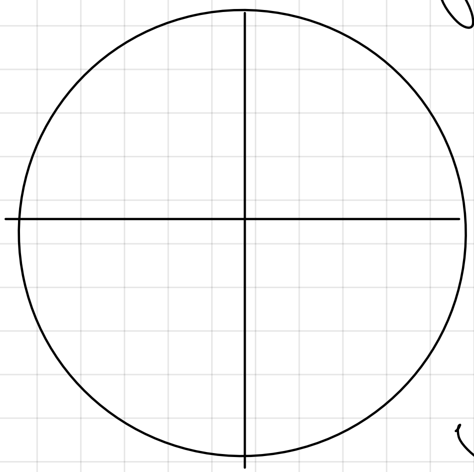




$$y(t) = \frac{d}{2}\, sen\left(\frac{2\pi}{T/2} \cdot t + 0\right)$$

$$y(t) = \frac{d}{2} \cdot sen\left(\frac{4\pi}{T} + 0\right)$$

9.- ¿Pueden anularse simultáneamente la velocidad y la aceleración de un movimiento armónico simple?



$v=0,\ a_{max}$

$v_{max},\ a=0$

$v=0,\ a_{max}$.

$$y(t) = A\cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = \frac{dy}{dt} = A\cdot\omega\cdot\cos(\omega t+\varphi_0)$$

$$\operatorname{sen}^2(\omega t+\varphi_0)+\cos^2(\omega t+\varphi_0)=$$

$$\cos(\omega t+\varphi_0)=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\omega t+\varphi_0)}$$

$$v=A\,\omega\cdot\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\omega t+\varphi_0)}$$

$$a=\frac{dv}{dt}=-\underbrace{A\,\omega^2\operatorname{sen}(\omega t+\varphi_0)}_{y}$$

$$\boxed{a = -\omega^2 \cdot y}$$

$$\Downarrow$$

$$y = 0 \Rightarrow a = 0.$$

$$y = \pm A \Rightarrow a_{max} = \pm \omega^2 A.$$

$$v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - \underbrace{A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)}_{y^2}}$$

$$\boxed{v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - y^2}}$$

$$\Downarrow$$

$$y = 0 \Rightarrow v_{max} = \pm A \cdot \omega$$

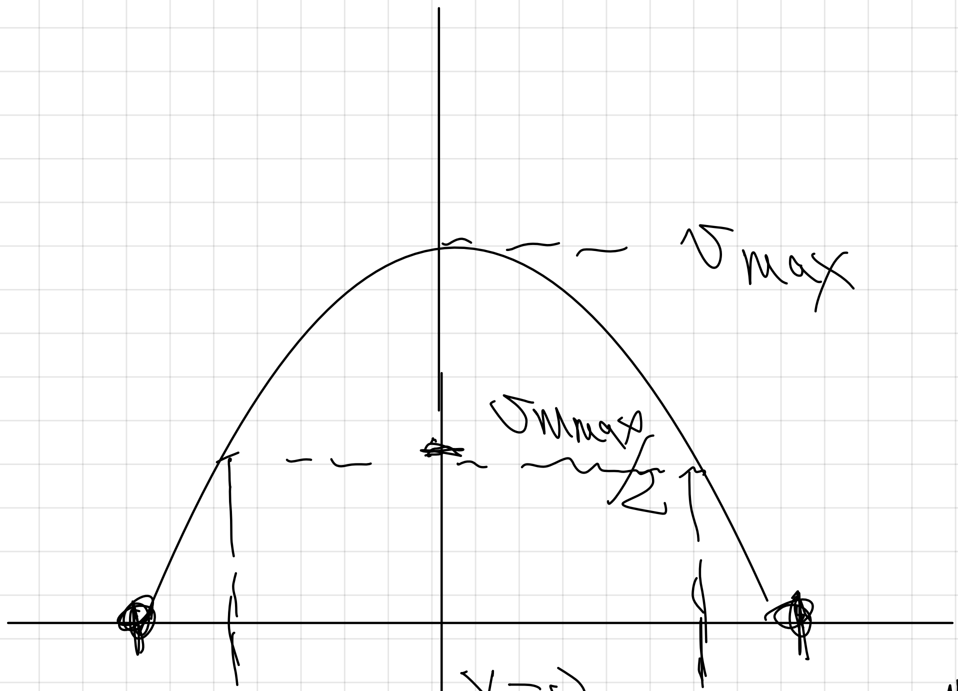
$$y = \pm A \Rightarrow v = 0.$$

10.- ¿En qué posición del movimiento armónico simple la velocidad es igual a la mitad de su valor máximo?

$$v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - x^2}$$

x ?

$$v_{max} = A \cdot \omega$$



$x = -A$ $\qquad$ $x = A$

$x = -\frac{\sqrt{3}}{2} A$ $\qquad$ $x = +\frac{\sqrt{3}}{2} A$

$$v_{max}/2 \Rightarrow v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - x^2}$$

$$\frac{A \cdot \cancel{\omega}}{2} = \cancel{\omega} \cdot \sqrt{A^2 - x^2}$$

$$\frac{A^2}{4} = A^2 - x^2$$

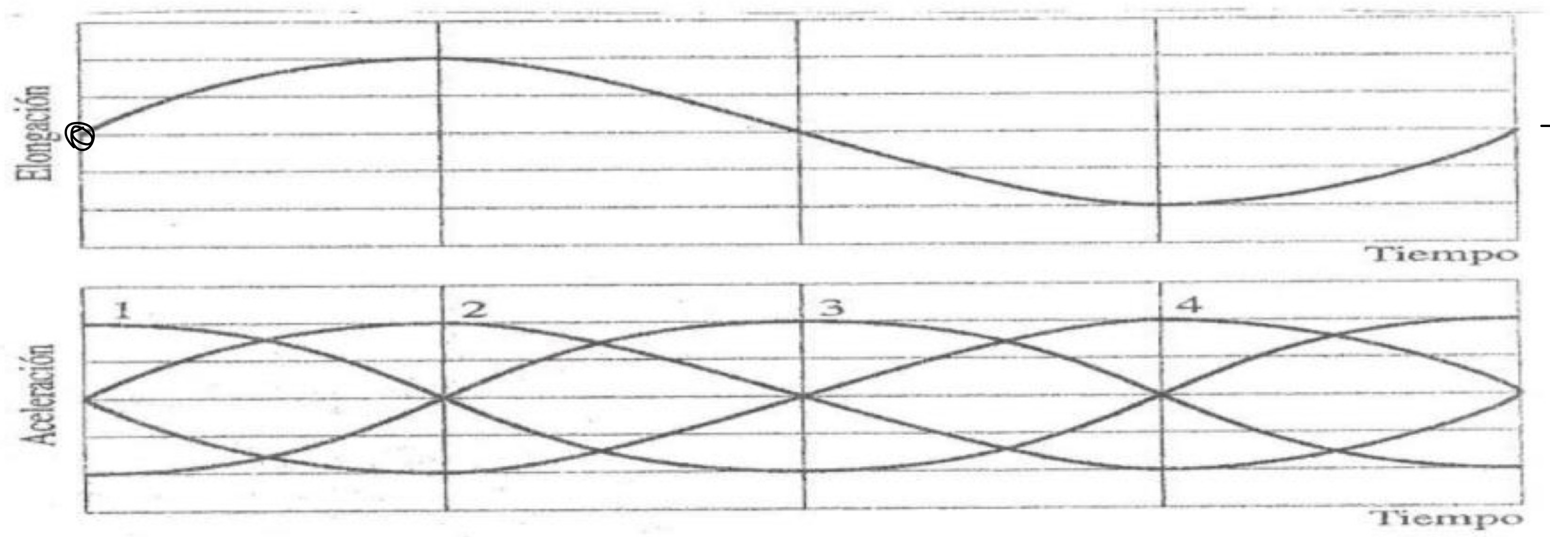
$$x^2 = A^2 - \frac{A^2}{4}$$

$$x^2 = \frac{3}{4} A^2$$

$$x = \sqrt{\frac{3}{4} A^2}$$

$$\boxed{x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} A}$$

11.- En la primera de las dos gráficas que se muestran, se representa la variación con el tiempo del desplazamiento (elongación) que experimenta una partícula que se mueve con un m.a.s. ¿cuál de las curvas numeradas en la segunda gráfica puede representar la variación de la aceleración con el tiempo del citado m.a.s?



$$y = A \cdot \text{sen}(\omega t)$$

$$v = \frac{dy}{dt} = A \cdot [\cos(\omega t)] \cdot \omega$$

$$v = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)$$

$$\boxed{a} = \frac{dv}{dt} = \boxed{-A\omega^2 \cdot \operatorname{sen}(\omega t)}$$

$$a = -\boxed{\boxed{A} \cdot \boxed{\omega^2} \cdot \boxed{\operatorname{sen}(\omega t)}}$$

$$a = -\omega^2 \cdot y$$

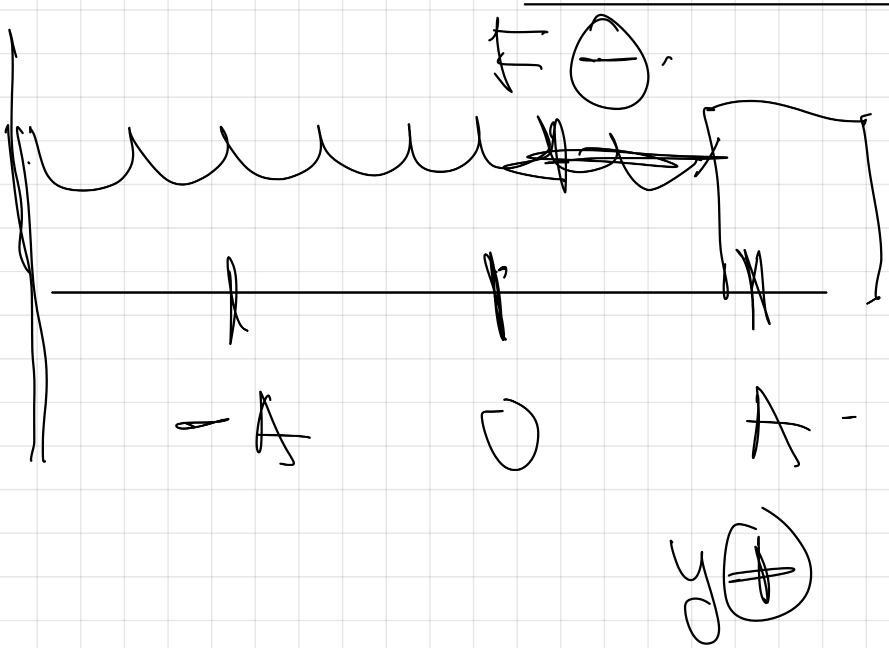
4.- MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE : CARACTERÍSTICAS DINÁMICAS

2ª ley de Newton $\Rightarrow$ $F = m \cdot a$.

$$F = m \cdot \underbrace{(-\omega^2 \cdot y)} \rightarrow \text{ec. MAS.}$$

$$F = -\,(m \cdot \omega^2) \cdot y \qquad \boxed{K = m \cdot \omega^2}$$

$$F = -\boxed{K} \cdot y \rightarrow$$ Fuerza recuperadora, depende de las características del muelle.



$$K = m \cdot \omega^2$$

$$K = kg \, \frac{rad^2}{s^2} = \frac{kg}{s^2}$$

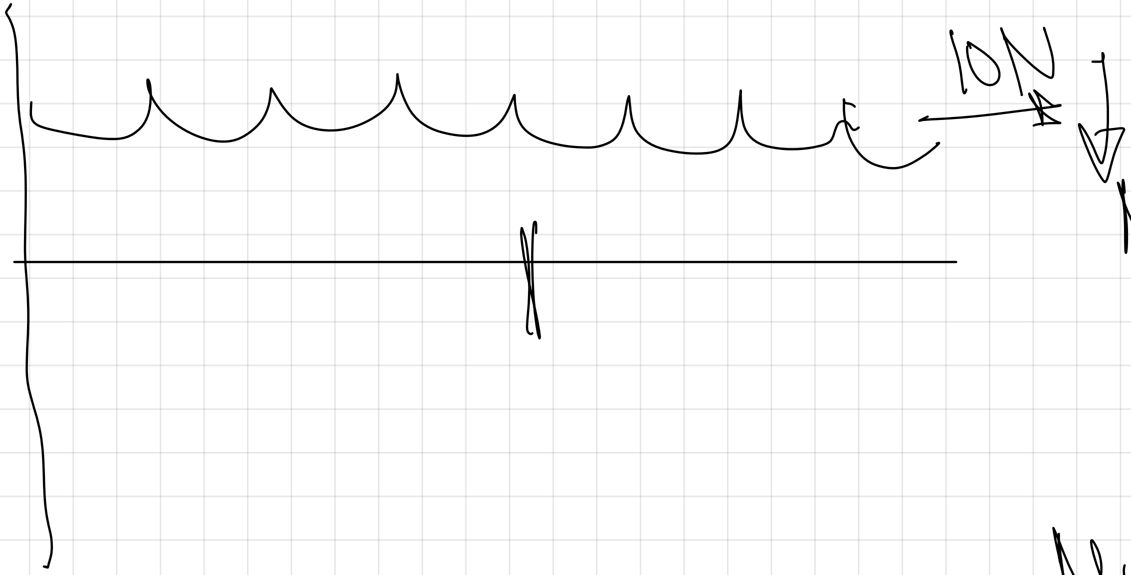
$$K = \frac{N}{m}$$

$$F = -K \cdot y$$

$$F \to N, \quad K \to \frac{N}{m}, \quad y \to m$$

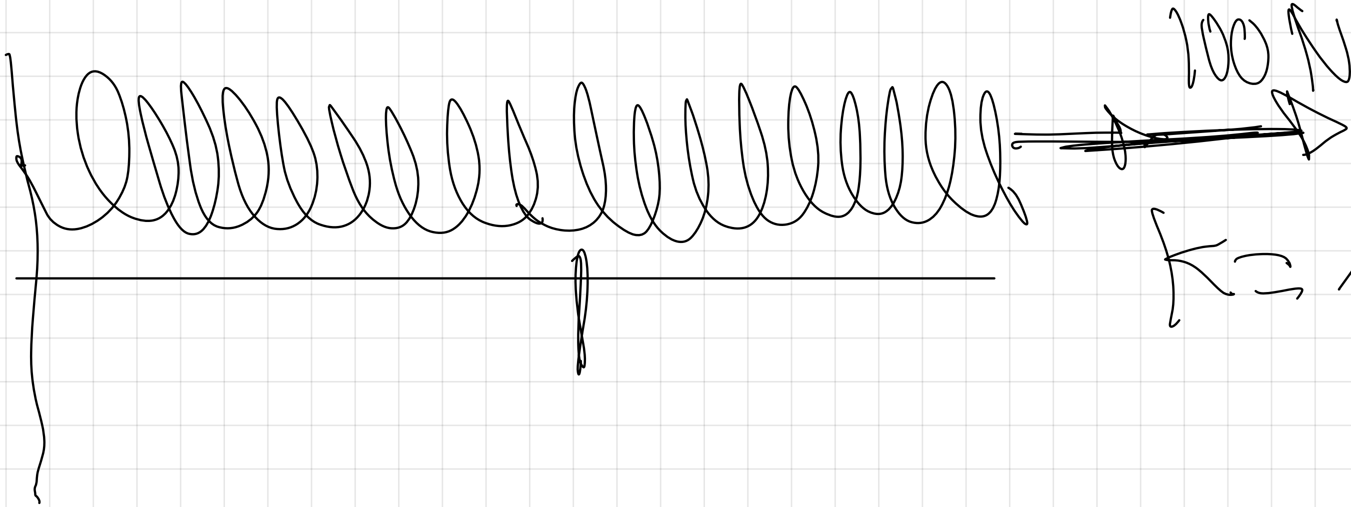
$$\frac{N}{m} = \frac{kg \cdot \cancel{m} / s^2}{\cancel{m}} = \boxed{\frac{kg}{s^2}}$$

$K = 10 \frac{N}{m}$



Misma para el mismo muelle

Muelle más rígido



$K = 100 \frac{N}{m}$

14.- Una masa de 2 Kg cuelga de un resorte cuya constante elástica es $K=200\ N \cdot m^{-1}$ y puede oscilar libremente sin rozamiento. Desplazamos la masa 10 cm por encima de su posición de equilibrio y la soltamos para que empiece a oscilar.

a) Calcula la ecuación del movimiento de la masa

b) Representa gráficamente la posición de la masa en función del instante t

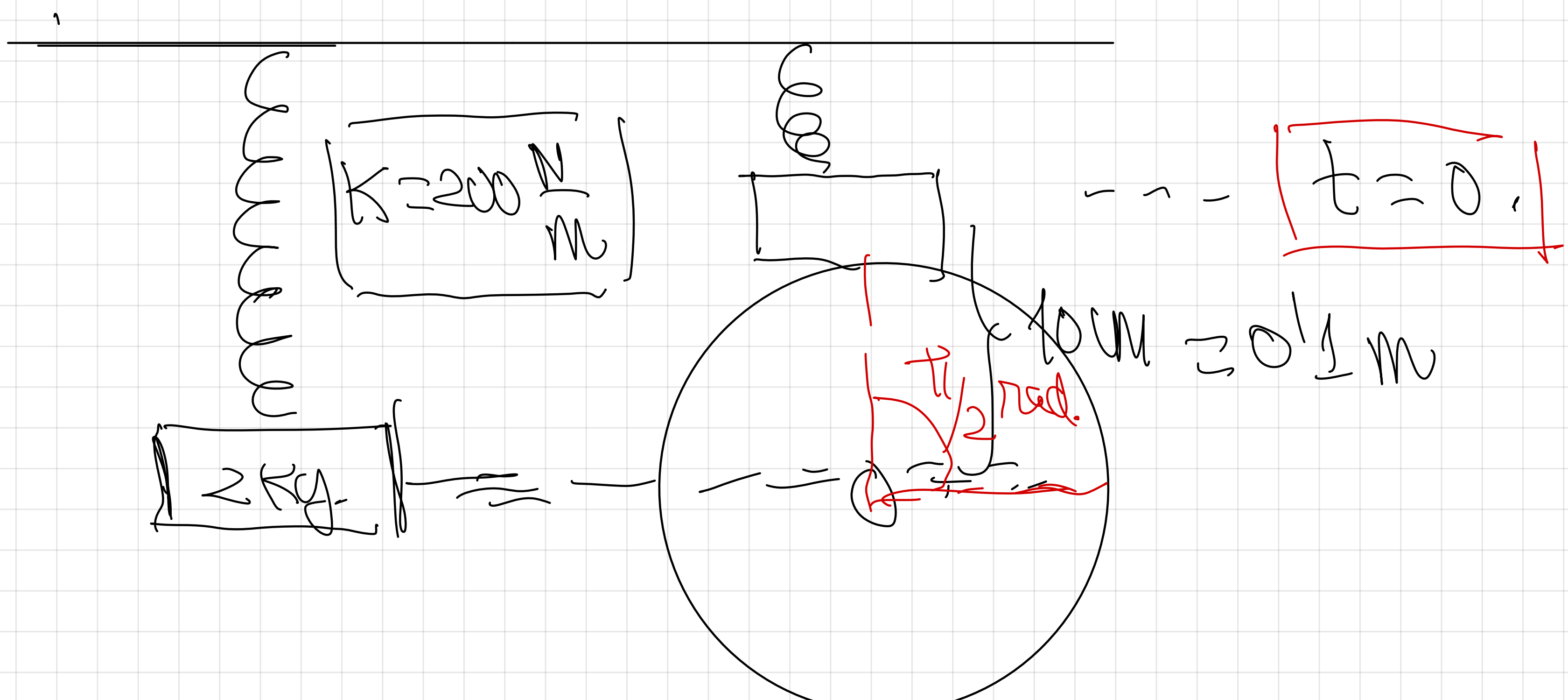
c) Representa gráficamente la velocidad de la masa en función del instante t

d) Representa gráficamente la aceleración de la masa en función del instante t

e) Calcula su velocidad máxima y su aceleración máxima

f) Calcula la fuerza recuperadora y la aceleración cuando la masa se encuentra 5 cm por encima de la posición de equilibrio

g) Repetir el apartado f) para el caso en el que la masa se encuentre 7 cm por debajo de la posición de equilibrio.



a) M.A.S.

$$y = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

$$y = 0'1 \operatorname{sen}\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (S.I)$$

$$\boxed{y = 0'1 \cdot \cos(10t)}$$

$$K = m \cdot \omega^2.$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{200}{2}} = \sqrt{100} = 10 \ \frac{rad}{s}.$$

$$t = 0 \Rightarrow y = A.$$

$$y = A \cdot \operatorname{sen}(\cancel{\omega t}^{\,0} + \varphi_0)$$

$$A = A \cdot \operatorname{sen} \varphi_0$$

$\text{sen}\,\varphi_0 = 1$

$\boxed{\varphi_0 = \text{arcsen}\,0' = \frac{\pi}{2}\,\text{rad}}$

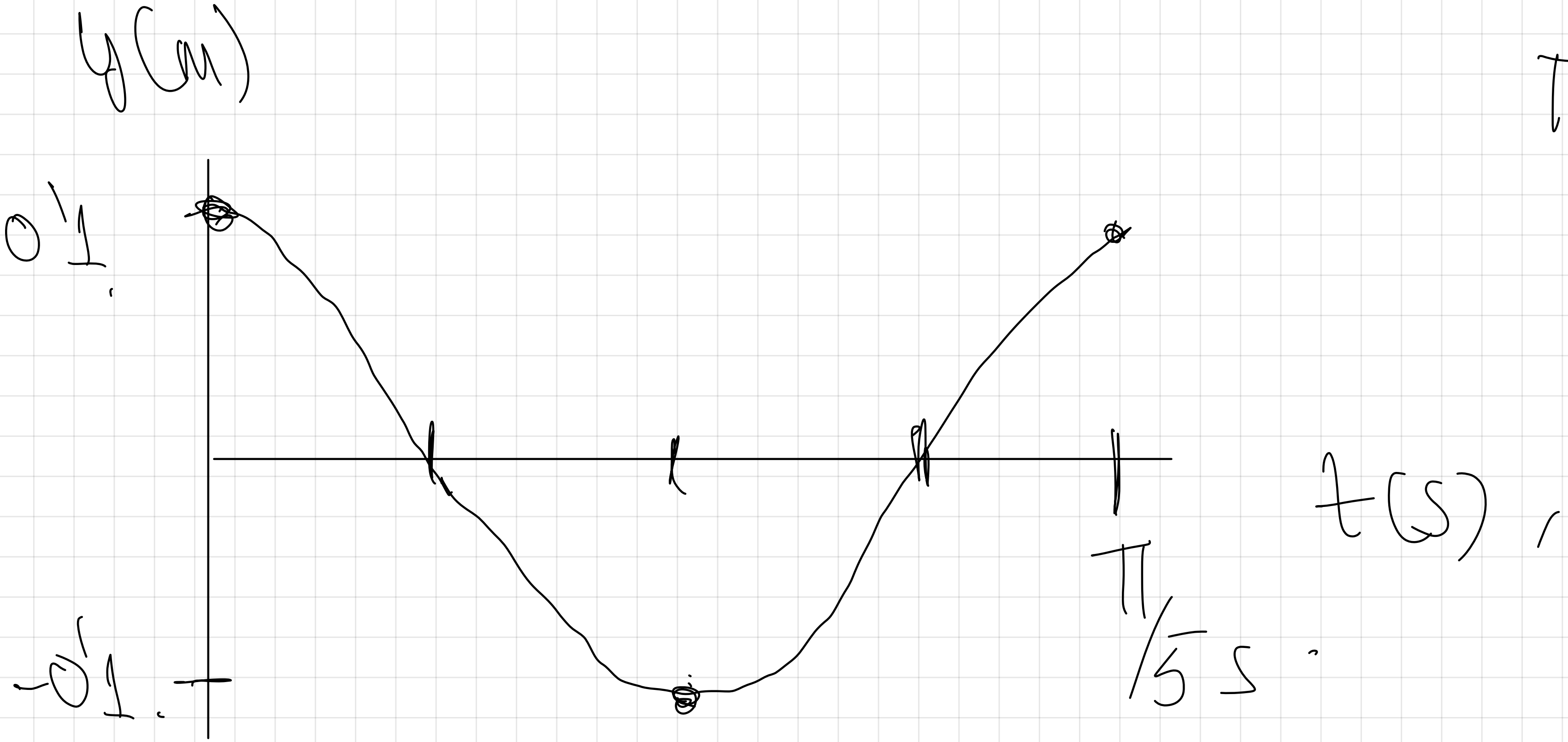
$\boxed{y = 0'1 \cdot \cos(10t)}$

$\omega = 10\,\frac{\text{rad}}{s}$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10}$

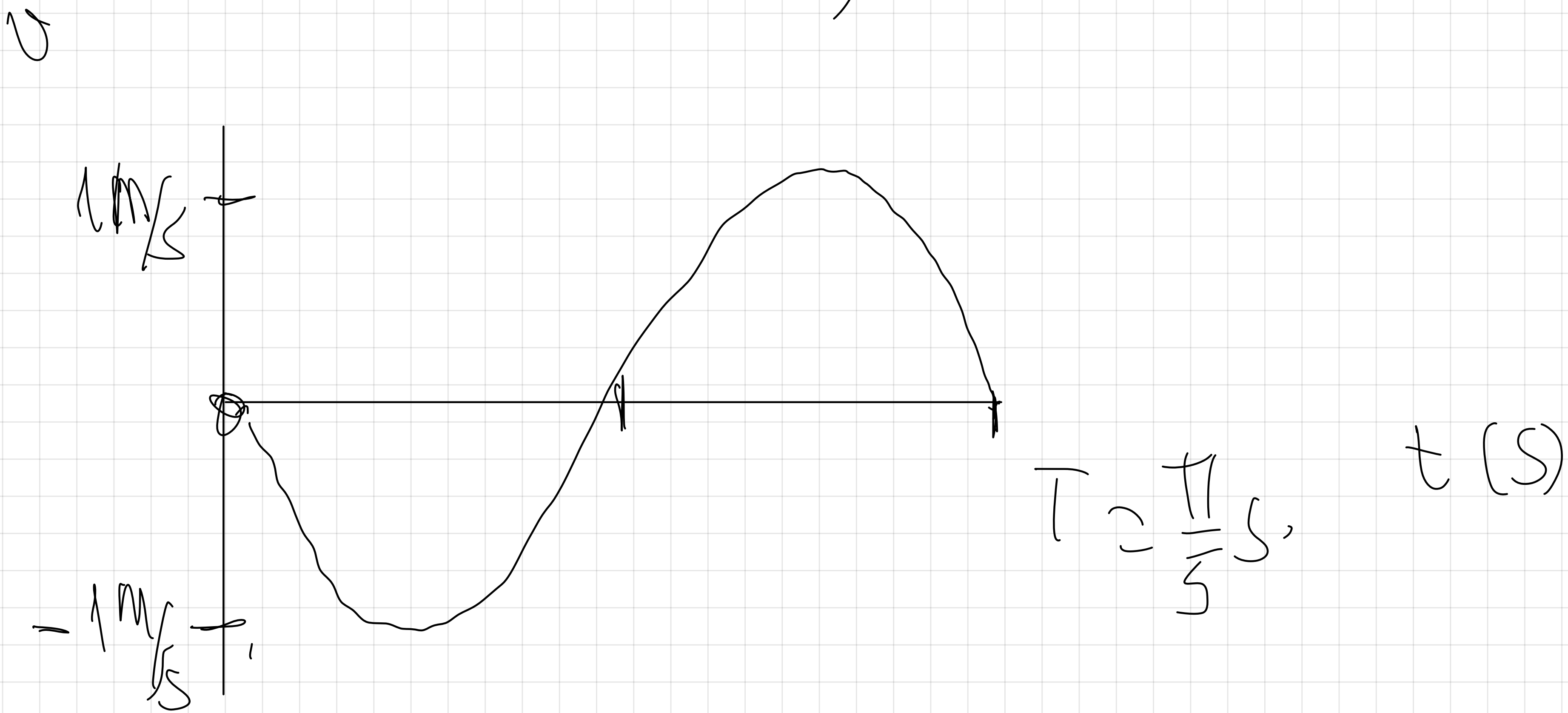
$T = \frac{\pi}{5}\,s$



$$y = 0'1 \cdot \cos(10t).$$

$$v = \frac{dy}{dt} = 0'1 \cdot \left[-\operatorname{sen}(10t)\right] \cdot 10.$$

$$v = -\operatorname{sen}(10t)$$



$T = \frac{\pi}{5}$ s,

f) 5 cm por encima de su posición de equilibrio

$$y = +5\ cm = +0'05\ m$$

$$F = -K \cdot y = -200\ \frac{N}{\cancel{m}} (0'05\ \cancel{m}) = -10\ N.$$

$$a = -\omega^2 y = -10^2 \cdot (0'05\ m) = -5\ m/s^2.$$

g) 7 cm por debajo de su posición de equilibrio

$$y = -7\ cm = -0'07\ m$$

$$F = (-)\,k \cdot y = -200\ \frac{N}{m} \cdot (-0{,}07\ m) = 14\ N.$$

$y\ (+)$ $\quad \left|\ \begin{array}{l} F \Rightarrow (-) \\ a \Rightarrow (-) \end{array}\right.$ $\quad \downarrow$

$$a = -\omega^2 \cdot y = -10^2 \cdot (-0{,}07)$$

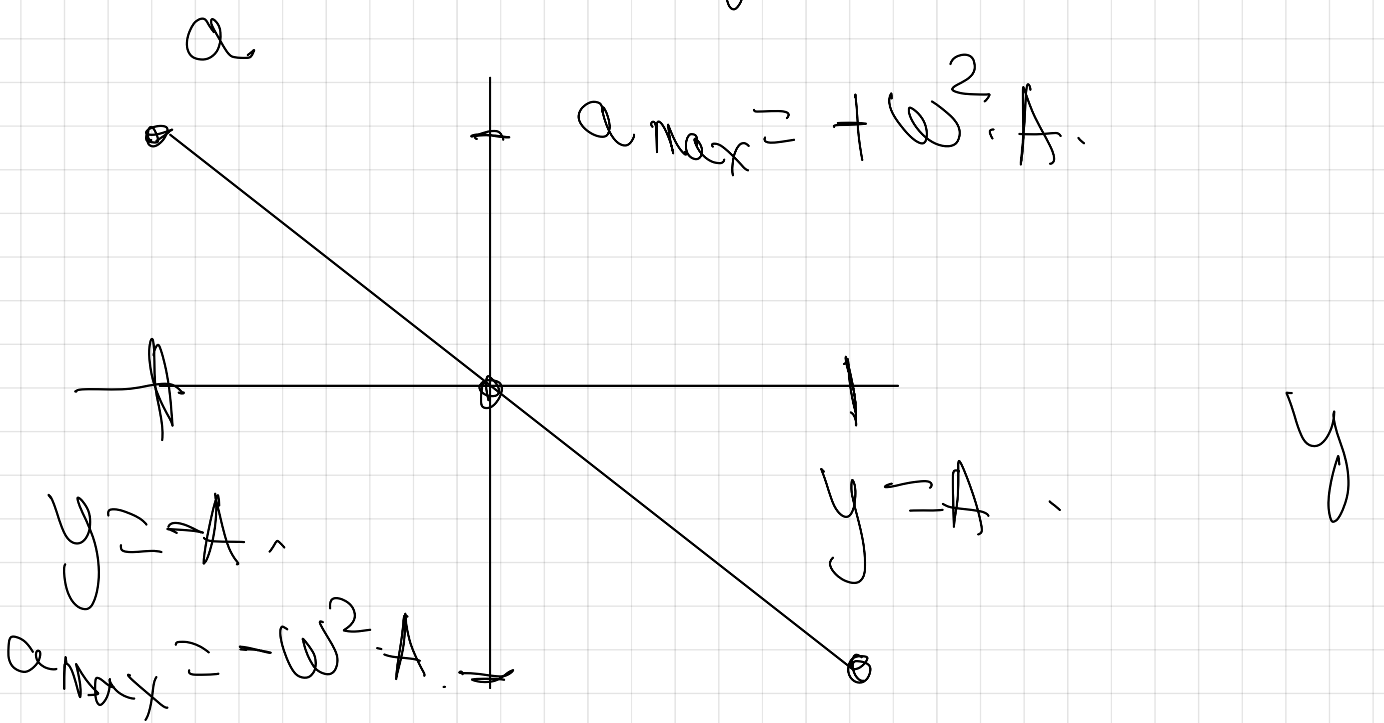
$y\ (-)$ $\quad \left\{ \begin{array}{l} F \Rightarrow (+) \\ a \Rightarrow (+) \end{array} \right\}$ $\quad \uparrow$

$$a = 7\ m/s^2.$$

13.- a) Representar gráficamente la aceleración de un movimiento armónico simple en función de la posición.
b) Representar gráficamente la fuerza recuperadora de un movimiento armónico simple en función de la posición.
c) Representar gráficamente la fuerza recuperadora de un movimiento armónico simple en función del instante t suponiendo que el ángulo de fase inicial es cero.

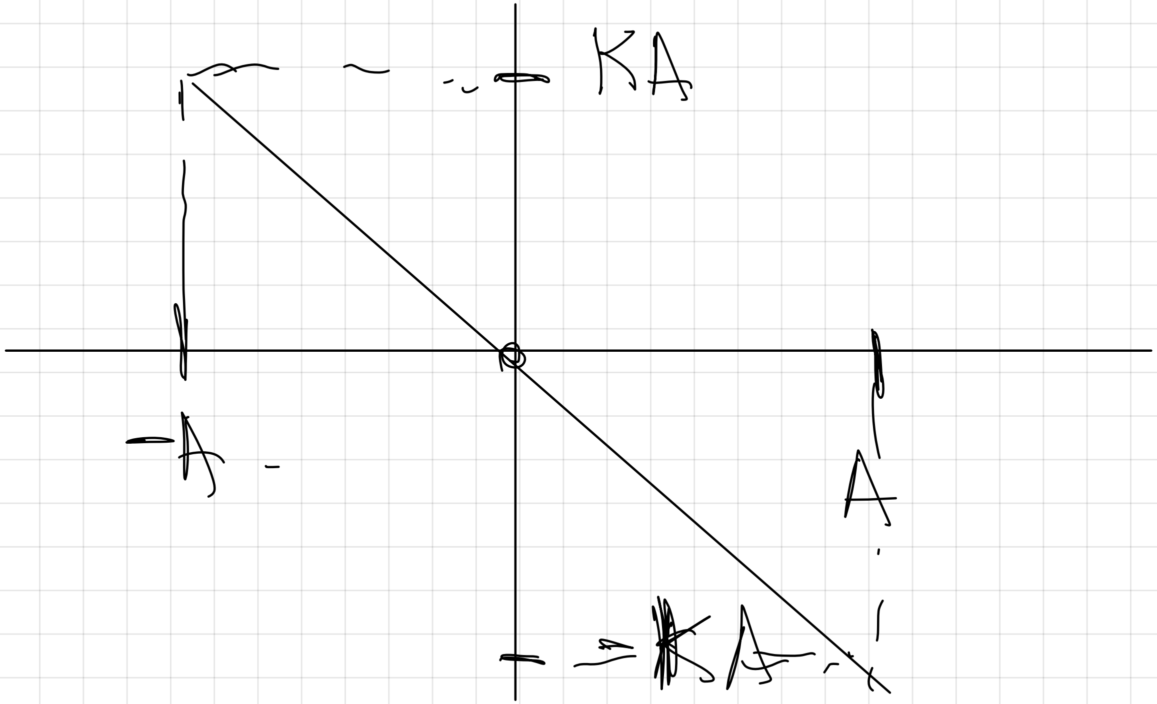
a)

$a = -\omega^2 y$



b)

$$F = -K\,y \quad \xrightarrow{} \text{pendiente.}$$

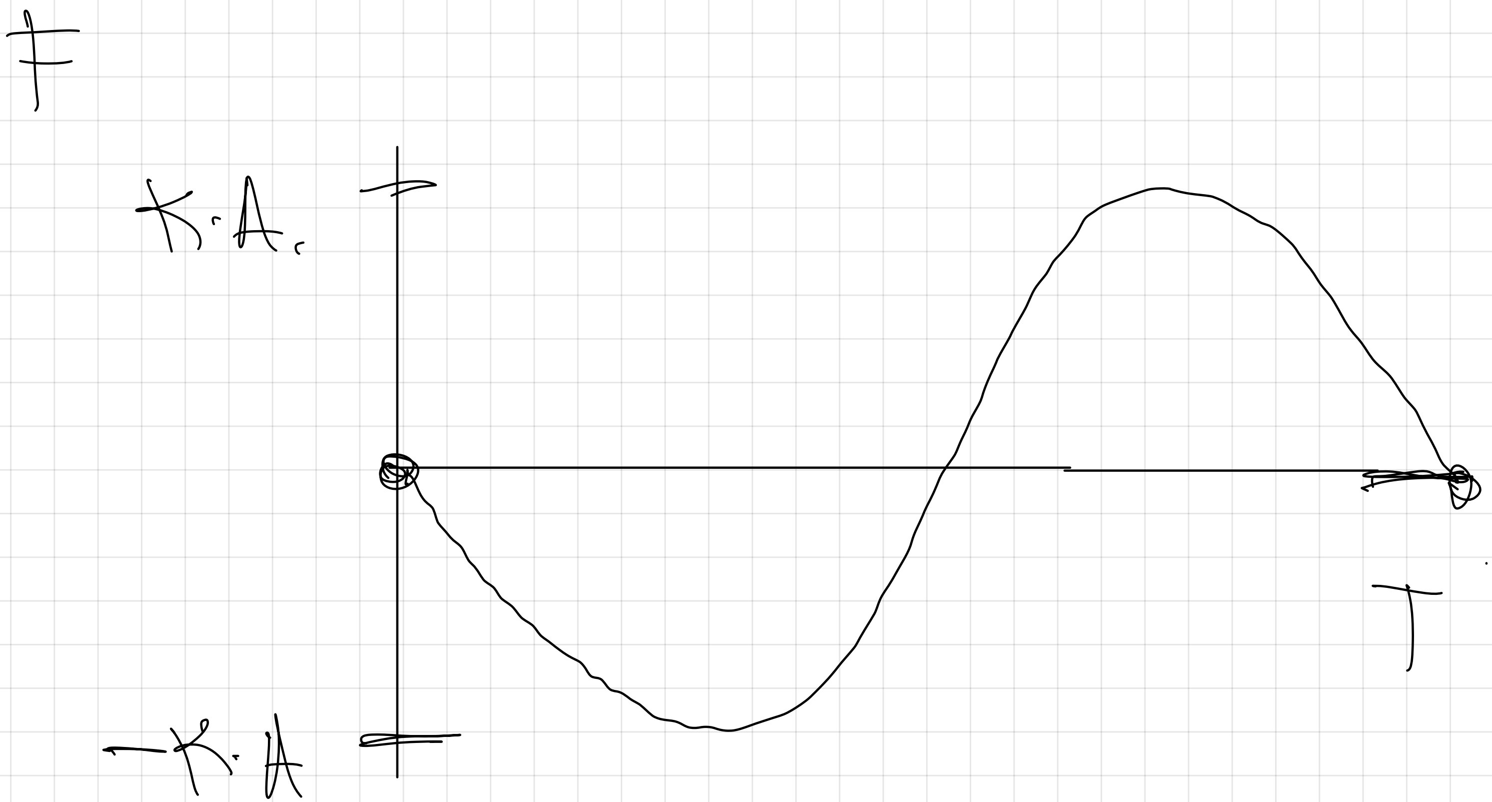


c)

$$F = -Ky$$

$$F = -K \cdot A \cdot \text{sen}\,(\omega t + \cancel{\varphi_0})$$

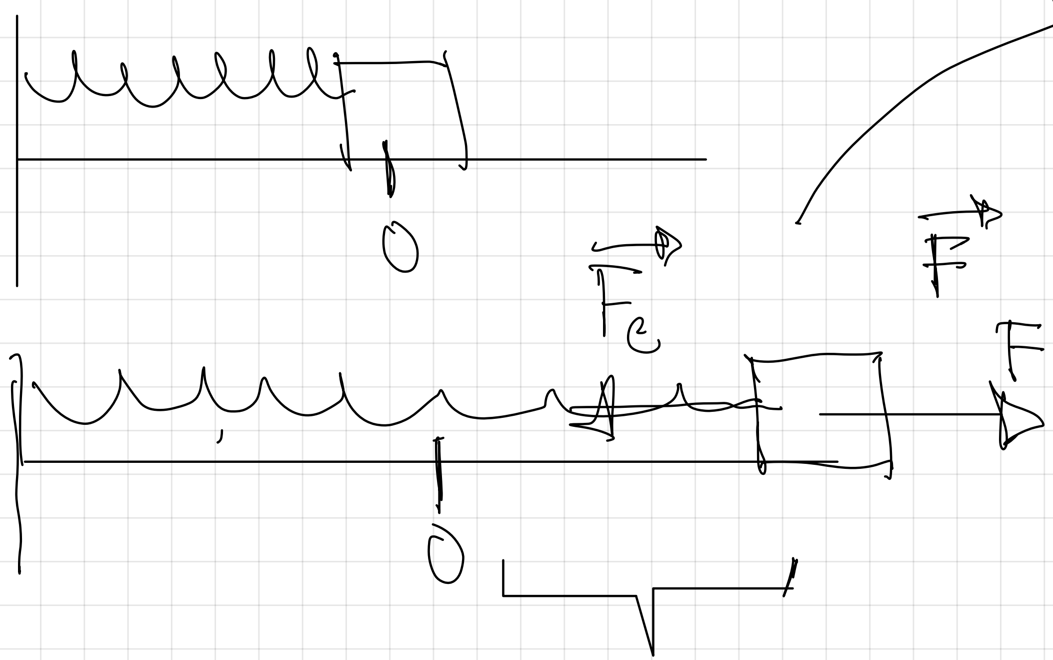
$$F = -K \cdot A \cdot \text{sen}\,(\omega t)$$



15.- Un muelle colocado horizontalmente sobre una mesa sin rozamiento, lleva en su extremo una masa de 5kg. Se sabe que una fuerza horizontal de 29,4 N alarga el muelle en 2 cm.

a) Calcular la frecuencia del movimiento

b)¿Cómo se vería afectado el valor de la frecuencia calculada si sobre el mismo muelle con idéntica masa se hubiese ejercido inicialmente una fuerza horizontal mayor?.



Con la situación inicial averiguo la K del muelle o resorte.

$$X = 2\,cm = 0'02\,m$$

$$|\vec{F}| = |\vec{F_e}|$$

$$|\vec{F}| = K \cdot X$$

$$K = \frac{|\vec{F}|}{X} = \frac{29'4\,N}{0'02\,m} = 1470\,\frac{N}{m}$$

Sabiendo que $K = 1470\ N \cdot m^{-1}$. Calcula f.

$$K = m \cdot \omega^2 \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \frac{1}{T} = 2\pi f.$$

$$K = m \cdot (2\pi f)^2$$

$$K = m \cdot 4\pi^2 f^2 \Rightarrow f = \sqrt{\frac{K}{m \cdot 4\pi^2}} = \sqrt{\frac{1470}{5 \cdot 4\pi^2}} = 2{,}72\ Hz$$

$$f = \sqrt{\frac{K}{m \cdot 4\pi^2}} = cte \Rightarrow \text{No varía.}$$

$K \rightarrow$ misma cte para mismo muelle

$m \rightarrow$ misma masa

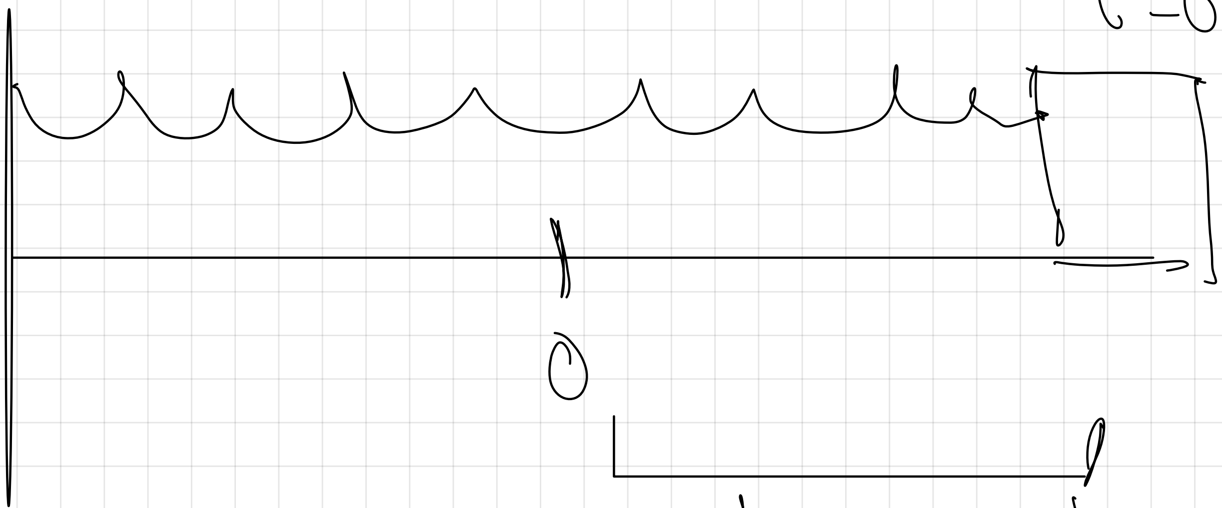
16.- Sobre una superficie horizontal se dispone de un cuerpo de 0,5 kg, unido a uno de los extremos de un muelle que está fijo por el otro. Cuando se tira del cuerpo hasta alargar el muelle 10 cm y se sueltan el instante inicial, comienza a oscilar con un periodo de 2 s.

a) Escriba la ecuación del m.a.s y represente la posición del cuerpo en función del tiempo

b) Si se hubiese alargado el mismo muelle 10 cm pero con una masa cuatro veces mayor para soltarse en el instante inicial, escribir la nueva ecuación del m.a.s y razonar como cambiaría la representación gráfica del apartado a)

c) ¿Cómo cambiaría la ecuación y la representación del apartado a) si se hubiese comprimido inicialmente el muelle 10 cm en vez de alargarse?

$t=0$



$A = 10\ cm = 0'1\ m$

$T = 2s$ $\quad \omega = \frac{2\pi}{T}$

$\omega = \pi\ \frac{rad}{s}$

$x(t) = A \cdot sen(\omega t + \varphi_0)$

$x(t) = 0'1\ sen\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ (SI)

$\Downarrow$

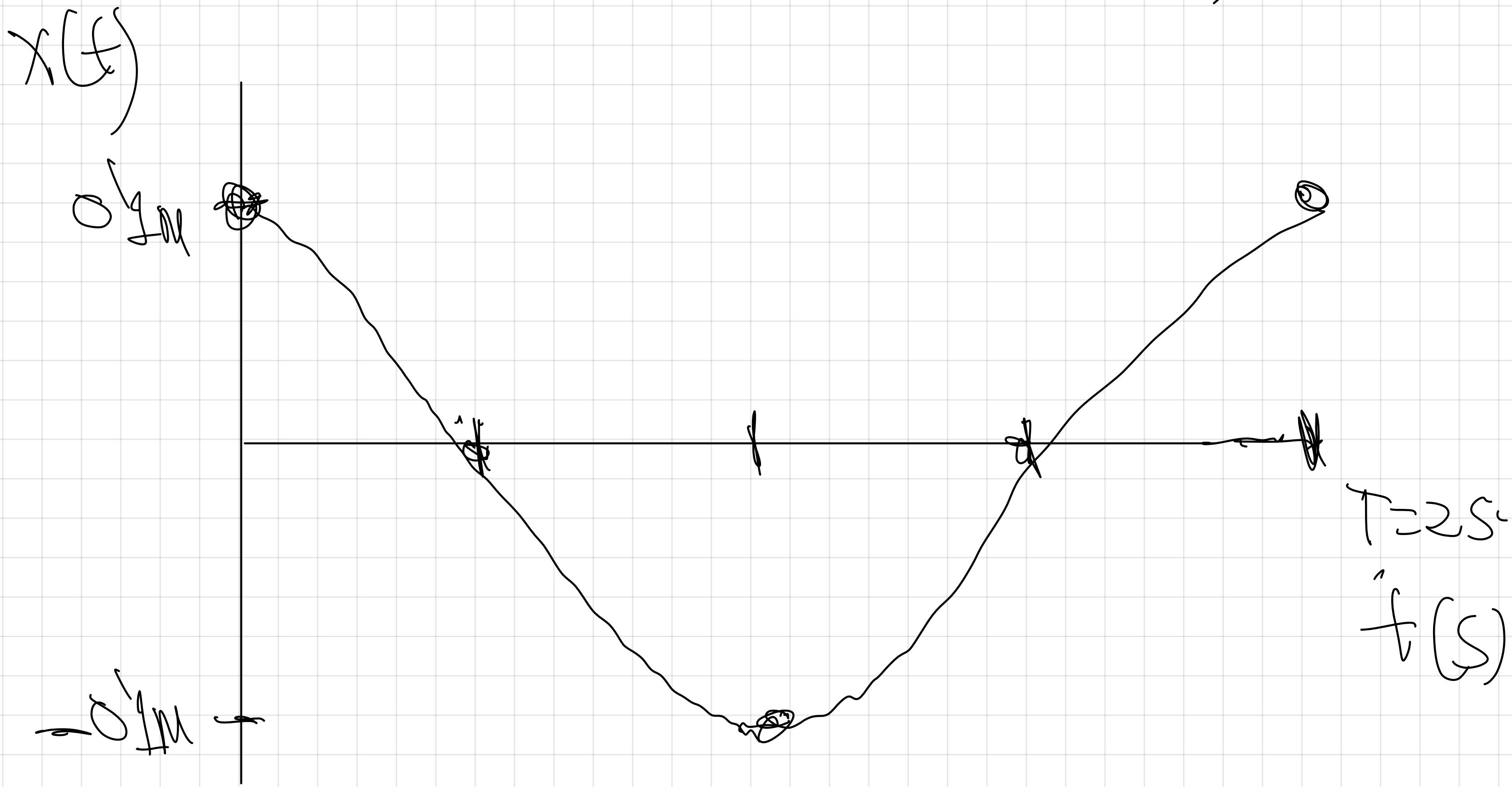
$\boxed{x(t) = 0'1 \cdot \cos(\pi t)\ (SI)}$

$\left.\begin{matrix} t = 0 \\ x = A \end{matrix}\right\}$ $x(t) = A \cdot sen(\omega t + \varphi_0)$

$$A = A \cdot \text{sen}(\cancel{\omega t}^{0} + \varphi_0)$$

$$\frac{A}{A} = \text{sen}\, \varphi_0 \qquad \varphi_0 = \frac{\pi}{2}\ \text{rad.}$$

$$x(t) = 0'1 \cdot \cos(\pi t) \quad (SI)$$



$$x(t) = 0'1 \cdot \mathrm{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (SI)$$

$$x(t) = 0'1 \cdot \cos(\underbrace{\pi}_{\omega} t) \quad (SI).$$

$$K = m \cdot \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$K \rightarrow$ mismo muelle

$m \rightarrow$ 4 veces mayor.

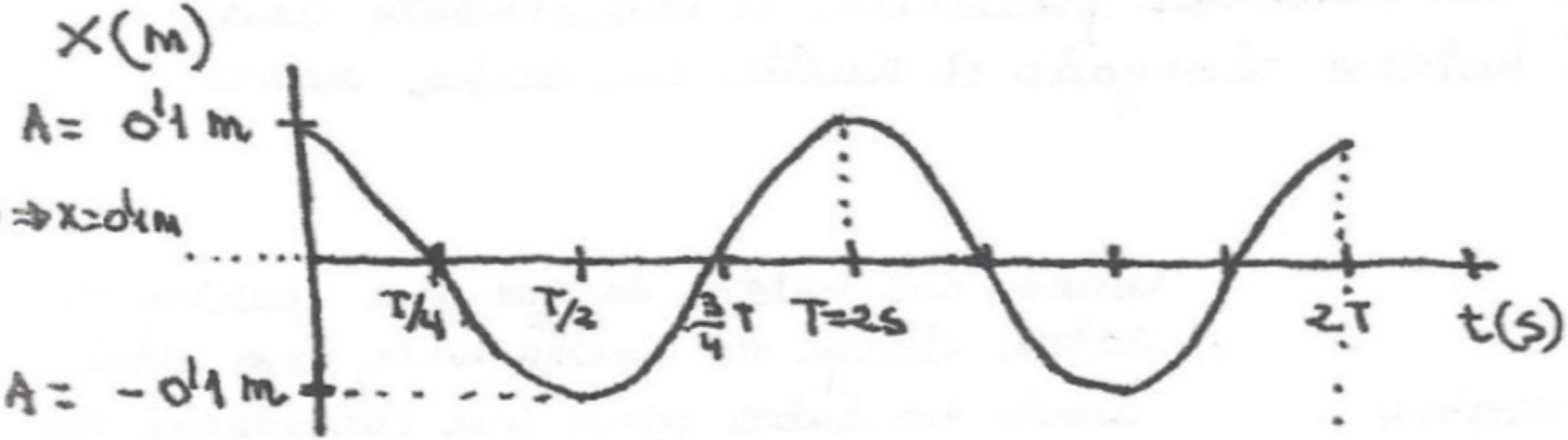
$$\omega' = \sqrt{\frac{K}{4m}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{1}{2}\omega.$$

$$x' = 0'1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right) \quad (SI)$$

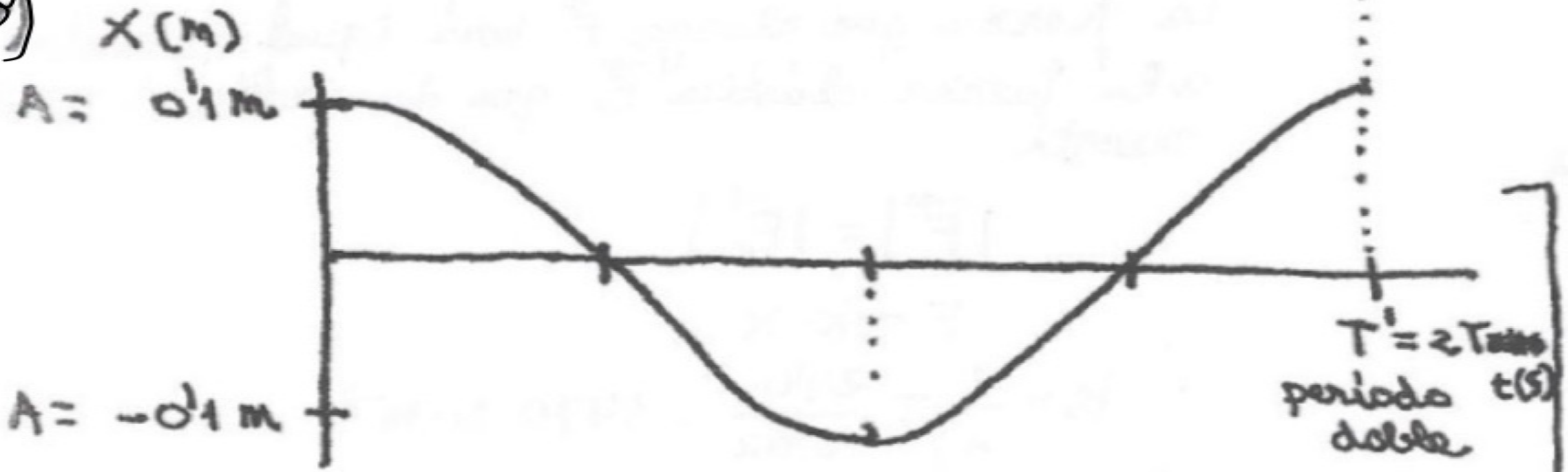
$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T' = 2T \quad (4s)$$

$$\boxed{x = 0'1 \cdot \cos(\pi t)\ (S.I)}$$ → Representamos esta función.

Si $t=0 \Rightarrow x = 0'1\,m$



b)



Si la nueva $\omega' = \frac{1}{2}\omega$, sabiendo que $\omega = \frac{2\pi}{T}$, ello

5.- ENERGÍA DE UN OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE

Pag 119

E_C, E_M, E_p.

- E_c de un M.A.S.

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

$\rightarrow$ v del M.A.S.

$$y(t) = A \cdot sen(\omega t + \varphi_0)$$

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = A \cdot \omega \cdot cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot [A \cdot \omega \cdot cos(\omega t + \varphi_0)]^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} \underbrace{m \cdot A^2 \, \omega^2}_{K} \cdot \cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$E_c = \frac{1}{2} K \cdot A^2 \left(\cos^2(\omega t + \varphi_0)\right)$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin^2(\omega t + \varphi_0) + \cos^2(\omega t + \varphi_0) = 1$$

$$\cos^2(\omega t + \varphi_0) = 1 - \sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$E_c = \frac{1}{2} K A^2 \left(1 - \sin^2(\omega t + \varphi_0)\right)$$

$$E_c = \frac{1}{2} K \cdot \left(A^2 - \boxed{A^2 \cdot \sin^2(\omega t + \varphi_0)}\right)$$

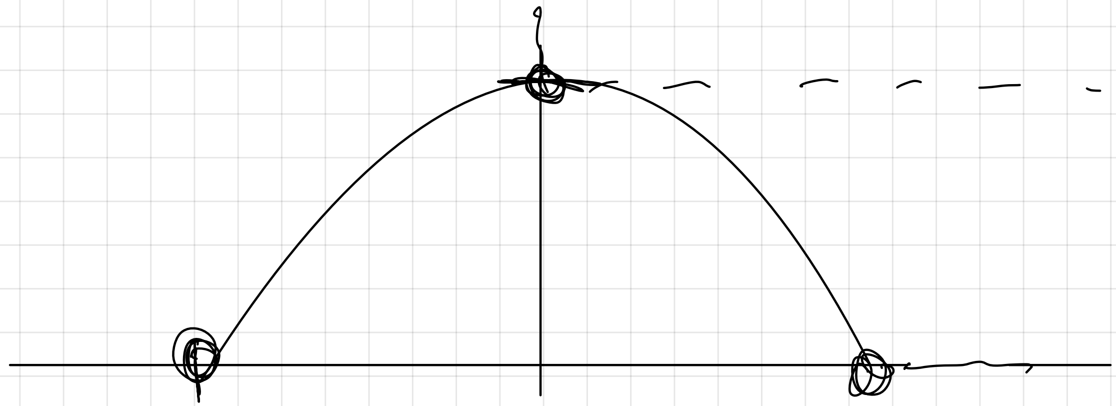
$v \; y^2$.

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} k \left(A^2 - y^2\right)}$$

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2} k A^2}$$

$\Uparrow$

E_c



$y = -A$. $\qquad$ $y = A$

$$\boxed{E_{c_{max}} = \frac{1}{2} k A^2}$$

$x(t)$

" $y(t)$.

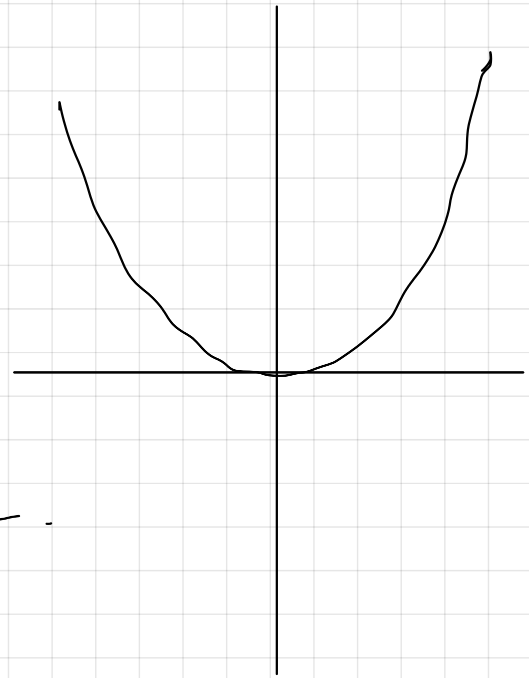
$E_m = E_{c\,max}$

$$E_m = E_c + E_p$$

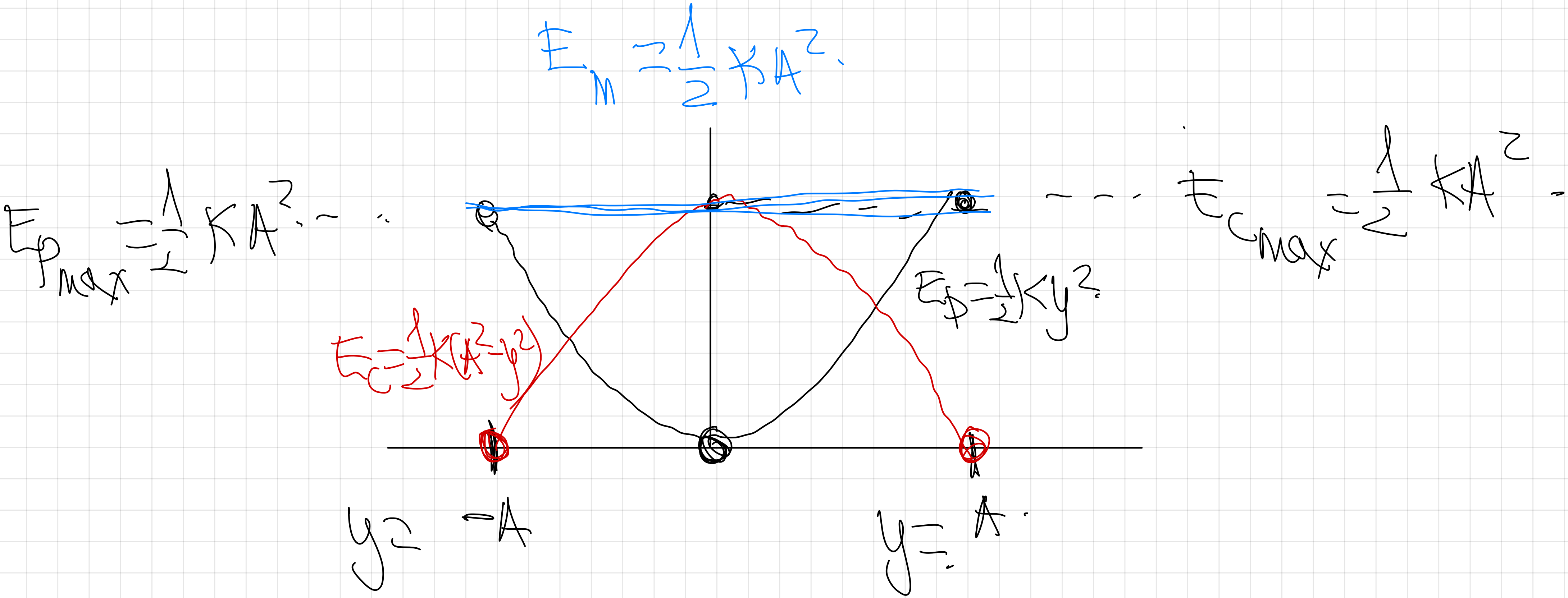
$$\frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}K(A^2 - y^2) + E_p$$

$$E_p = \frac{1}{2}KA^2 - \frac{1}{2}K(A^2 - y^2)$$

$$E_p = \cancel{\frac{1}{2}KA^2} - \cancel{\frac{1}{2}KA^2} + \frac{1}{2}Ky^2$$



$$\boxed{E_p = \frac{1}{2}Ky^2}$$



$E_m = \frac{1}{2}kA^2$

$E_{p\,max} = \frac{1}{2}kA^2$

$E_{c\,max} = \frac{1}{2}kA^2$

$E_p = \frac{1}{2}ky^2$

$E_c = \frac{1}{2}k(A^2 - y^2)$

$y = -A$

$y = A$

17.- Un cuerpo de 800 g de masa describe un m.a.s con una elongación máxima de 30 cm y un periodo de 2 s. Calcula su máxima energía cinética.

$m = 800\ g = 0'8\ kg$

$y_{max} = A = 30\ cm = 0'3\ m$

$T = 2\ s$

$E_{c_{max}} = E_m = \frac{1}{2} K \cdot A^2 = \frac{1}{2} 7'9 \cdot (0'3)^2 = 0'35\ J$

$K = m \cdot \omega^2 = 0'8 \cdot \left(\frac{2\pi}{2}\right)^2 = 7'9\ N \cdot m^{-1}$

18.- Una masa de 20g realiza un movimiento vibratorio armónico en el extremo de un resorte que da dos oscilaciones por segundo a lo largo del eje X, siendo la amplitud de 5 cm.

a) Calcula la velocidad máxima de la masa que oscila

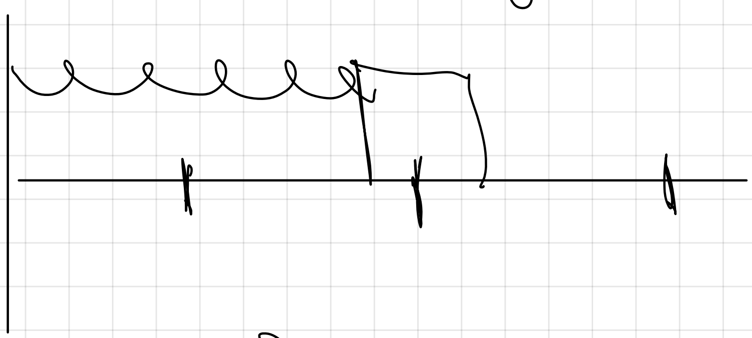
b) Calcula la aceleración de la masa en el extremo de su movimiento

c) Calcula la constante K del resorte

d) Realiza un análisis de las variaciones energéticas

e) Calcula su energía mecánica, su energía cinética y su energía potencial cuando se encuentra en la posición x=4 cm

$M = 20 g$



$f = 2 \frac{\text{oscilaciones}}{s} = 2 Hz$

$A = 5 cm.$

a) $v_{max} = A \cdot \omega$

$v_{max} = A \cdot 2\pi f$

$v_{max} = 0'05 \cdot 2\pi \cdot 2 = 0'628 \frac{m}{s}$

b) $a = -\omega^2 x$

$a_{max} = -\omega^2 x_{max}$

$$a_{max} = -\omega^2 \cdot A$$

$$a_{max} = -(2\pi f)^2 \cdot 0'05\,m$$

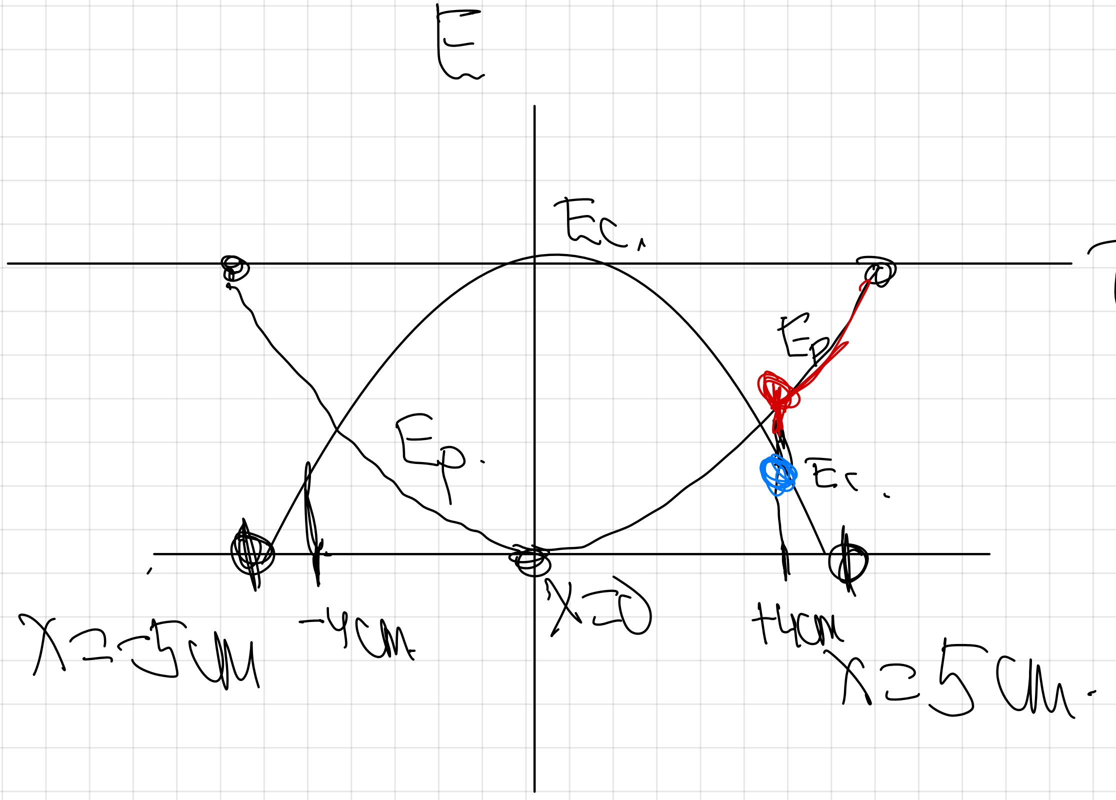
$$a_{max} = \pm 7'9\ m/s^2$$

c) $K = m \cdot \omega^2$

$$K = m \cdot (2\pi \cdot f)^2$$

$$K = 20 \cdot 10^{-3} \cdot 4\pi^2 \cdot 2^2$$

$$K = 3'16\ N \cdot m^{-1}$$



$$E_c = \frac{1}{2} K (A^2 - x^2)$$

$$E_p = \frac{1}{2} K x^2$$

$$E_M = \frac{1}{2} K A^2$$

e)

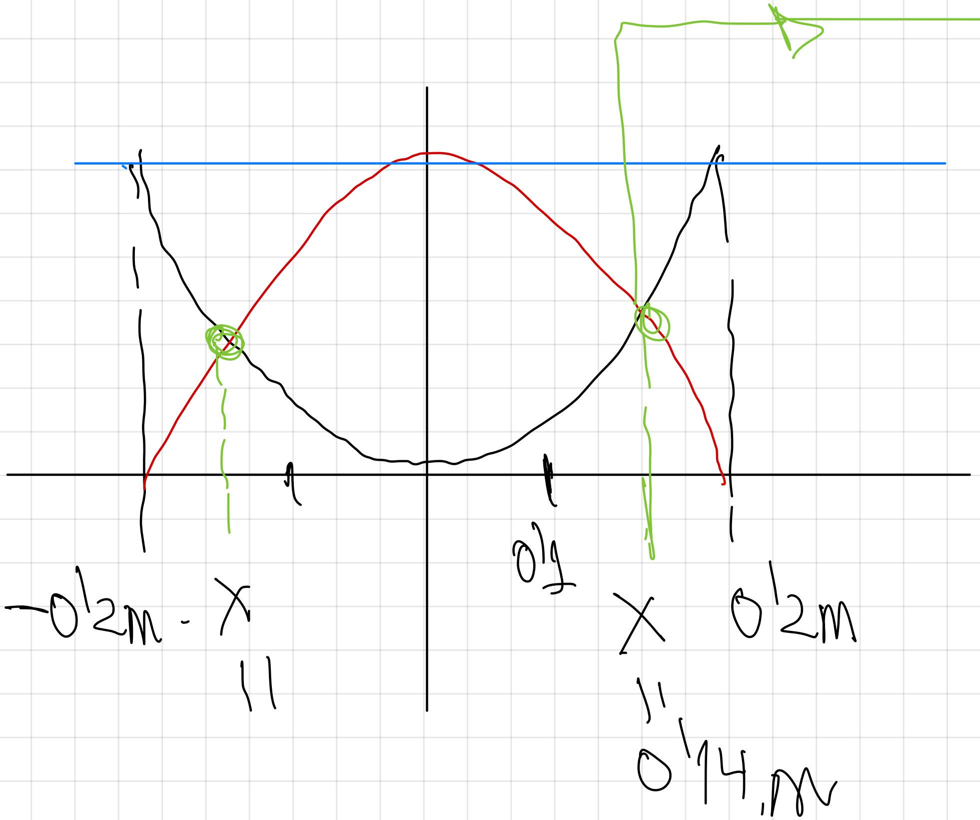
$$E_p = \frac{1}{2} K x^2 = \frac{1}{2}\, 3'16 \cdot (0'04)^2 = 2'5 \cdot 10^{-3}\ J$$

$$E_c = \frac{1}{2} K (A^2 - x^2) = \frac{1}{2}\, 3'16 \left[(0'05)^2 - (0'04)^2 \right] \simeq 1'4 \cdot 10^{-3}\ J$$

$$E_M = \frac{1}{2} K A^2 = \frac{1}{2}\, 3'16 \cdot (0'05)^2 = 3'9 \cdot 10^{-3}\ J$$

21.- Una partícula describe un movimiento armónico simple, cuya amplitud de 0,2 m. ¿Cuál será el desplazamiento en el instante en el que las energías cinética y potencial son iguales?.

x



$$E_p = E_c$$

$$\cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{k}\,x^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{k}\,(A^2 - x^2)$$

$$x^2 = A^2 - x^2$$

$$2x^2 = A^2$$

$$x = \sqrt{\frac{A^2}{2}} = x = \frac{A}{\sqrt{2}} = \frac{0'2}{\sqrt{2}}$$

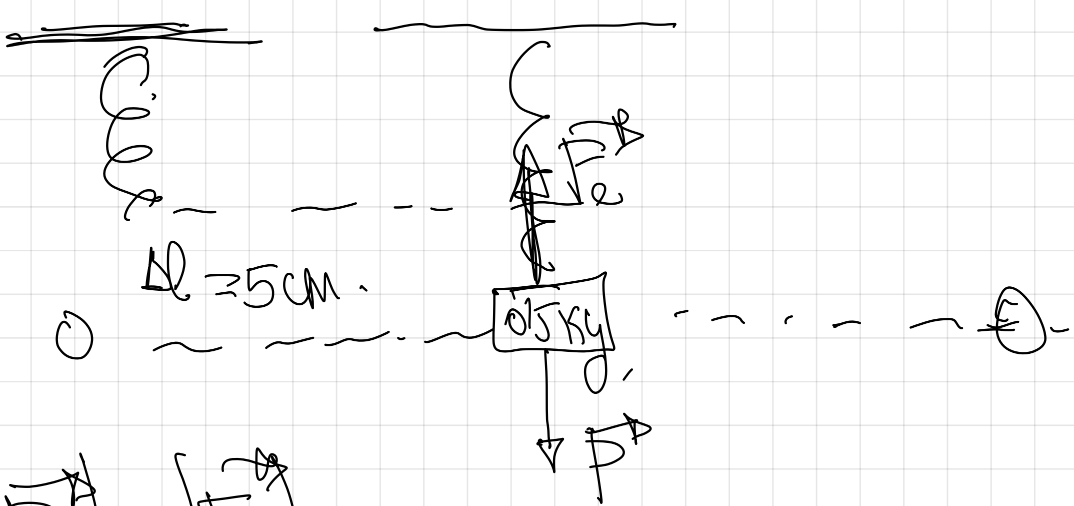
$$x =$$

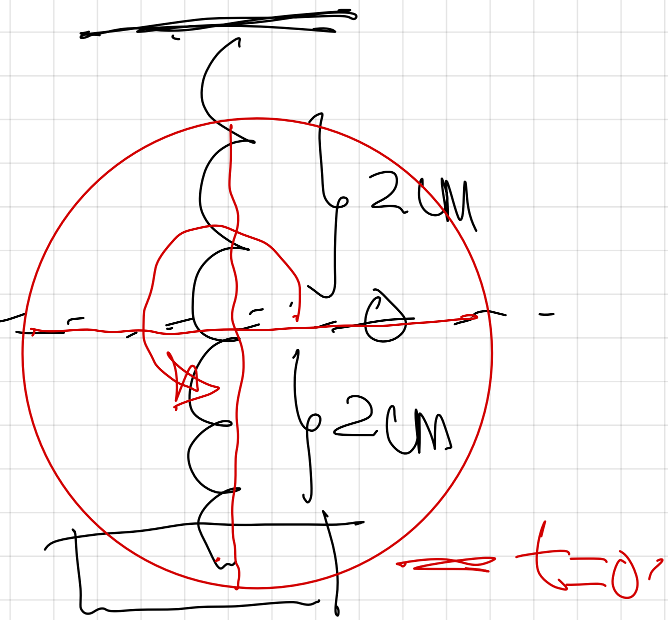
19.- Al suspender un cuerpo de 0,5 kg del extremo libre de un muelle que cuelga verticalmente, se observa un alargamiento de 5 cm. Si a continuación se tira hacia abajo del cuerpo hasta largar el muelle 2 cm más y se suelta, comienza oscilar. Sabiendo que $g=10\ m\cdot s^{-2}$, contestar a los siguientes apartados:

a) Escriba la ecuación del movimiento de la masa

b) Represente, cualitativamente las energías cinética , potencial, y total de ese m.a.s a lo largo de un periodo completo de oscilación

c) Si en lugar de estirar ese muelle 2 cm , se estira 3 cm, ¿cómo se modificaría la ecuación del movimiento del cuerpo?.





$$|\vec{P}| = |\vec{F_e}|$$

$$m\cdot g = K\cdot \Delta l$$

$$K = \frac{m\,g}{\Delta l} = \frac{0'5\cdot 10}{0'05} = 100\ \frac{N}{m}$$

$$y = A\cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

$$A = 2cm = 0'02\ m$$

Cálculo de φ_0.

$$\left.\begin{array}{l} t = 0, \\ y = -A \end{array}\right\}.$$

$$y = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

$$-A = A \cdot \operatorname{sen}(\omega \cancel{t}^{0} + \varphi_0)$$

$$-\frac{A}{A} = \operatorname{sen} \varphi_0 .$$

$$\operatorname{sen} \varphi_0 = -1 ,$$

$$\varphi_0 = \operatorname{arcsen}(-1) = \frac{3}{2}\pi \text{ rad.}$$

$$K = m \cdot \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{100}{0'5}} = \sqrt{200} \ \frac{\text{rad}}{s},$$

$$y = 0'02 \cdot \operatorname{sen}\left(\sqrt{200}\, t + \frac{3}{2}\pi\right) (SI)$$

$$y = 0'02 \cdot \operatorname{sen}\left(\sqrt{200}\,t + \frac{3}{2}\pi\right) \text{ (SI)}$$

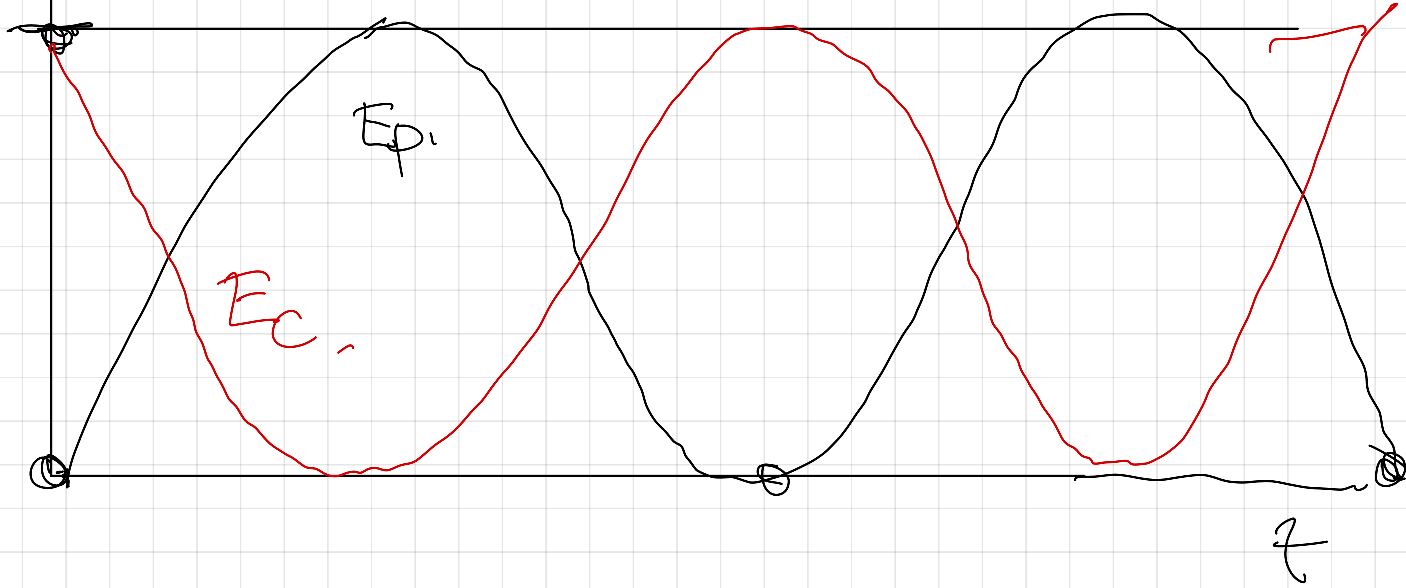
b) Representar energías en función del tiempo.

$$E_p = \frac{1}{2} K \cdot x^2 = \frac{1}{2} K \cdot A^2 \cdot \operatorname{sen}^2(\omega t + \cancel{\varphi_0}) \quad \varphi_0 = 0 \text{ por defecto.}$$

E_p

E

$E_m = \frac{1}{2} K A^2$



c)

$$y = 0'02 \cdot \operatorname{sen}\left(\sqrt{200}\,t + \frac{3}{2}\pi\right) \text{(SI)}$$

$$y = 0'03 \operatorname{sen}\left(\sqrt{200}\,t + \frac{3}{2}\pi\right)$$

$$K = m \cdot \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = cte$$

mismo muelle

misma masa.

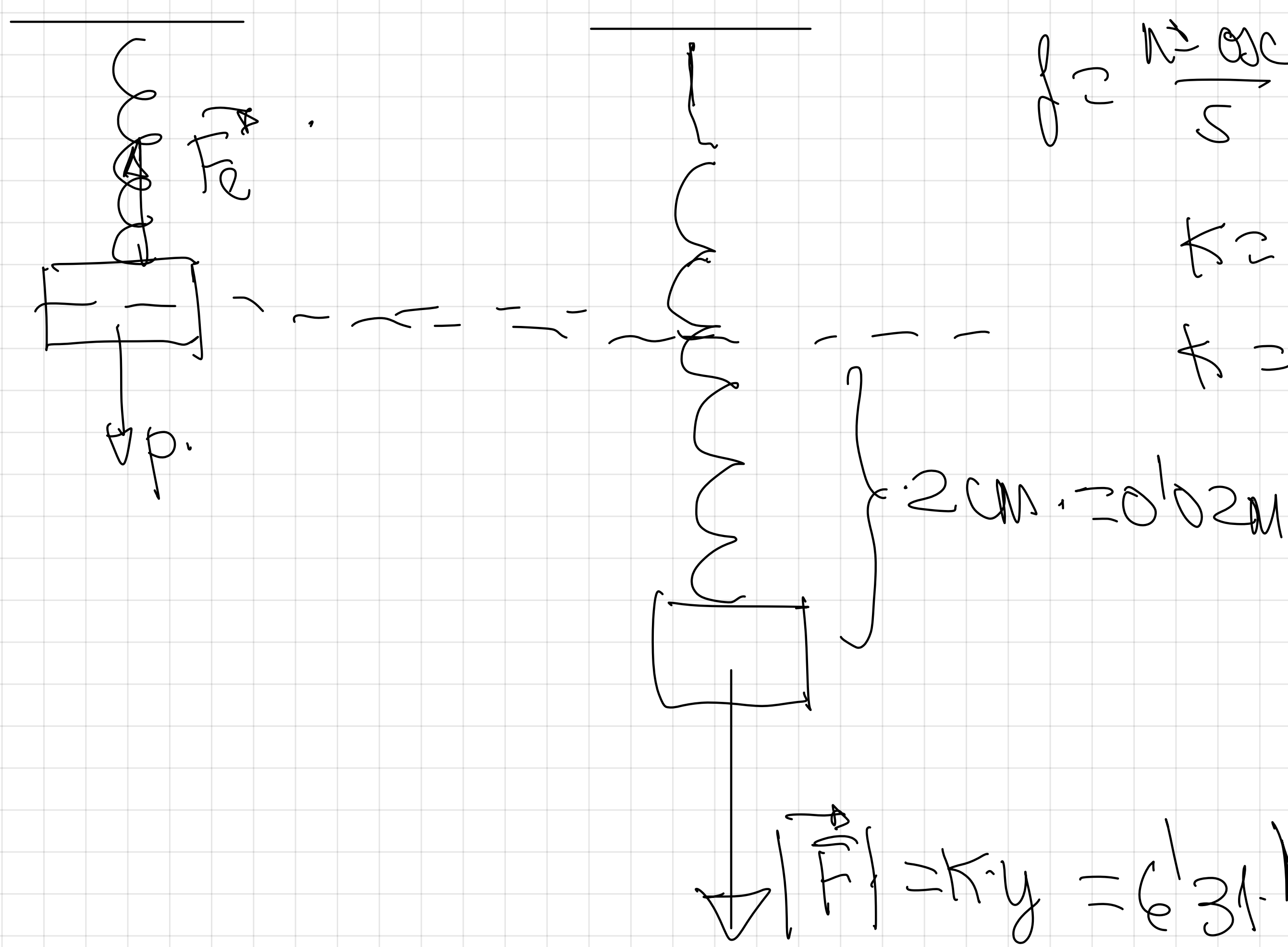
20.- Un muelle de masa despreciables se encuentra en equilibrio cuando de él depende un objeto de 10 g. Calcular:

a) La fuerza con la que debe tirarse del muelle para que al soltarlo realice 20 oscilaciones en cinco segundos con una amplitud de 2 cm

b) La energía total del sistema cuando el objeto esté 0,5 cm por encima de su posición de equilibrio.

20 oscilaciones en 5 s,

$$f = \frac{n^{\circ}\ osc}{s} = \frac{20}{5} = 4\ Hz.$$



$$K = m \cdot \omega^2$$

$$K = m \cdot (2\pi f)^2.$$

$$K = m\, 4\pi^2 f^2$$

$$K = 6'31\ N \cdot m^{-1}$$

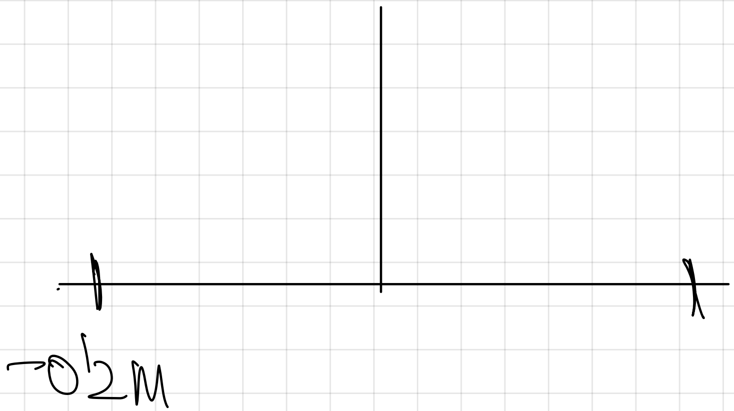
$$|\vec{F}| = K \cdot y = 6'31 \cdot \frac{N}{m}\ 0'02\,m = \boxed{0'12\,N}$$

b) La energía total o energía mecánica es la misma a lo largo de todo el ciclo, independientemente de la posición (y) en la que se encuentre, luego no necesitamos el dato $y = 0'5\,cm$

$$E_m = \frac{1}{2} K A^2 = \frac{1}{2}\, 6'31 \cdot \underbrace{(0'02)^2}_{} = 1'26 \cdot 10^{-3}\, J$$

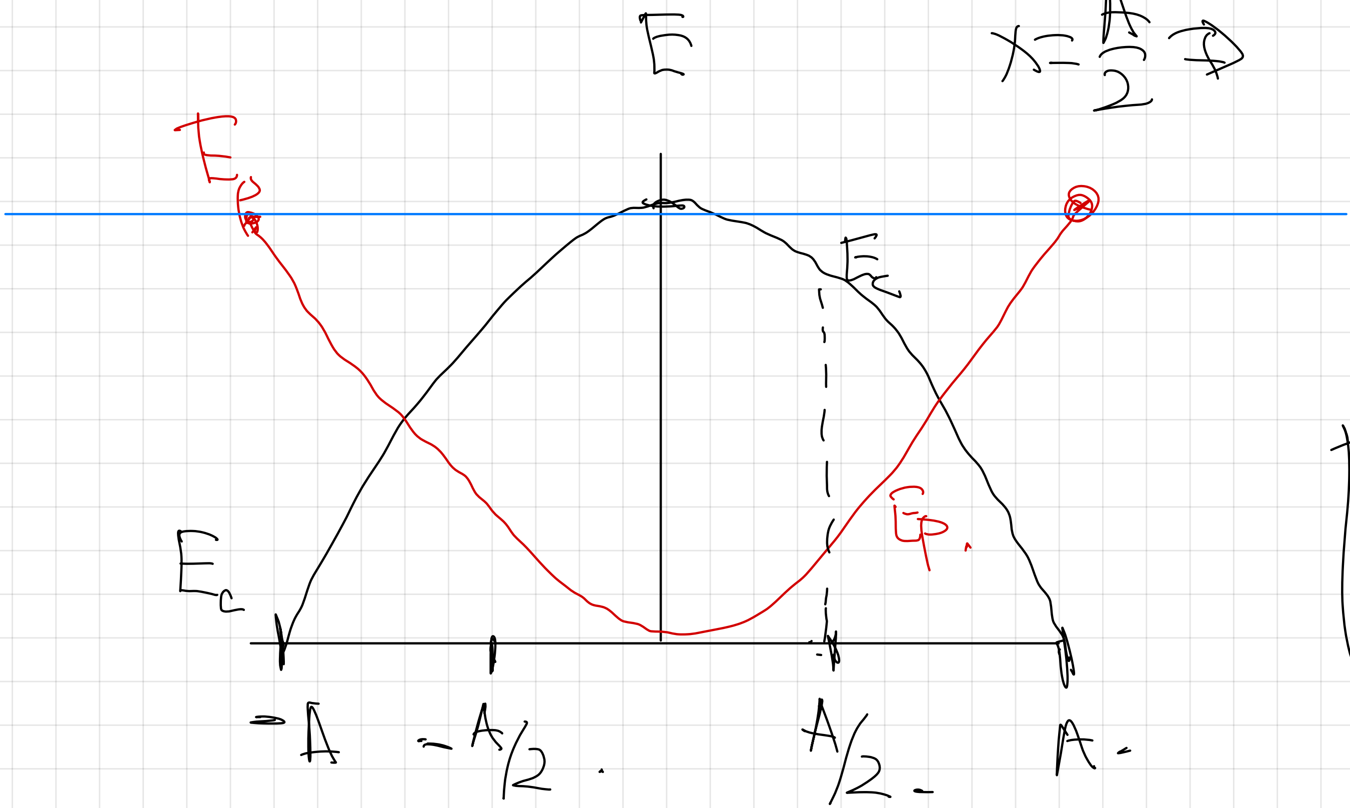
$A = 2\,cm = 0'02\,m$

21.- Una partícula describe un movimiento armónico simple, cuya amplitud de 0,2 m. ¿Cuál será el desplazamiento en el instante en el que las energías cinética y potencial son iguales?.



22.- Un oscilador armónico se encuentra en un instante en la posición x=A/2. ¿Qué relación existe entre sus energías cinética y potencial?

$x=\frac{A}{2} \Rightarrow$



$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} k \left(\frac{A}{2}\right)^2$$

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2} k \cdot \frac{A^2}{4}}$$

$$E_c = \frac{1}{2} k (A^2 - y^2)$$

$$E_c = \frac{1}{2} k \left(A^2 - \left(\frac{A}{2}\right)^2 \right)$$

$$E_c = \frac{1}{2} k \left(A^2 - \frac{A^2}{4} \right)$$

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} k \cdot \left(\frac{3}{4} A^2 \right)}$$

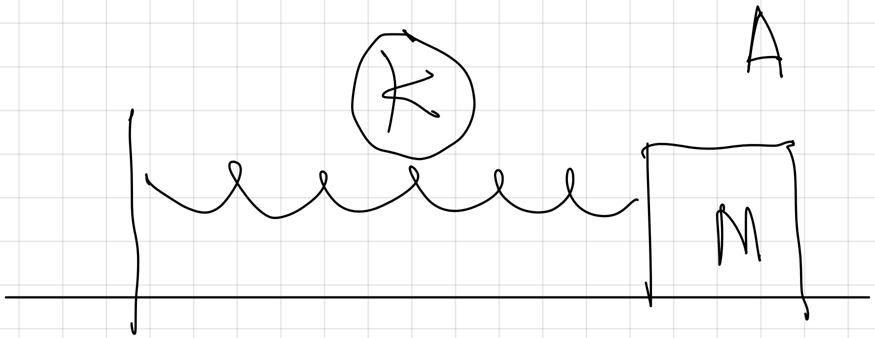
$$E_p = \frac{1}{2} k \left(\frac{A^2}{4} \right)$$

$$\frac{E_c}{E_p} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}} \cancel{k} \frac{3}{\cancel{4}} \cancel{A^2}}{\cancel{\frac{1}{2}} \cancel{k} \frac{1}{\cancel{4}} \cancel{A^2}}$$

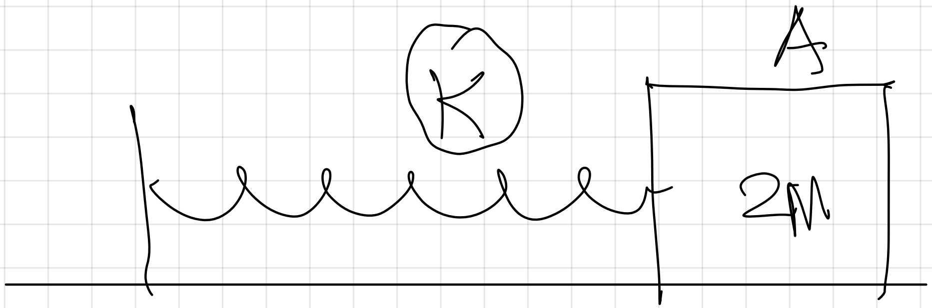
$$\boxed{E_c = 3 E_p}$$

C2. a) Dos partículas, una de masa *m* y otra de masa *2m*, unidas a resortes horizontales de igual constante elástica *k*, describen movimientos armónicos simples de igual amplitud. Determine razonadamente la relación que existe entre: **i)** la energía mecánica de ambas partículas; **ii)** la velocidad máxima de oscilación de ambas partículas.

b) Una masa de 3 kg está unida a un muelle de constante elástica de 12 N m^{-1} sobre una superficie horizontal sin rozamiento. El muelle se alarga 4 cm y se suelta en el instante inicial *t* = 0 s. Determine: **i)** el periodo de oscilación; **ii)** la expresión de la posición de la masa en función del tiempo; **iii)** la velocidad y la aceleración para *t* = 3,5 s.



$$\boxed{E_M = \frac{1}{2} K A^2}$$



$$\boxed{E_M = \frac{1}{2} K A^2}$$

$$K = m \cdot \omega^2$$

$$x = A \cdot (\text{sen}\,\omega t + \varphi_0)$$

$$k = 2m \cdot \omega'^2$$

$$\cancel{m} \cdot \omega^2 = 2\cancel{m} \cdot \omega'^2$$

$$\omega^2 = 2\omega'^2$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{\omega^2}{2}}$$

$$\omega' = \frac{\omega}{\sqrt{2}}.$$

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$v_{max} = A \cdot \omega$$

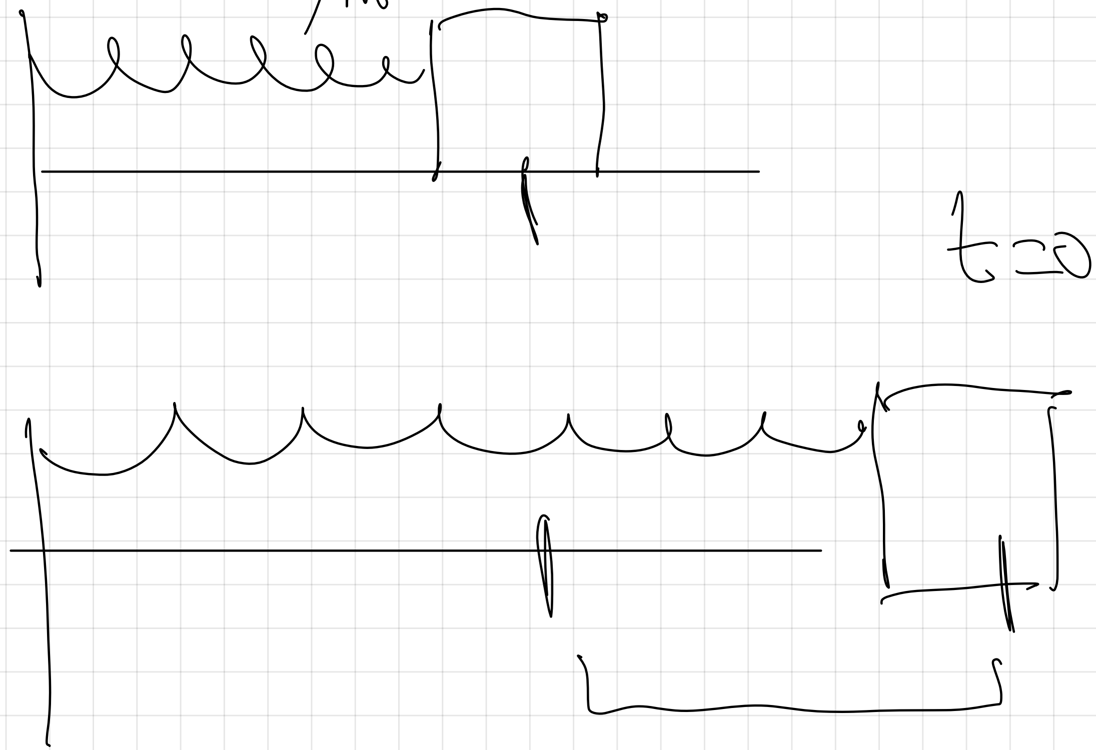
$$v'_{max} = A \cdot \frac{\omega}{\sqrt{2}}.$$

$$v'_{max} = \frac{v_{max}}{\sqrt{2}}.$$

k, describen movimientos armónicos simples de igual amplitud. Determine razonadamente la relación que exis
entre: **i)** la energía mecánica de ambas partículas; **ii)** la velocidad máxima de oscilación de ambas partículas.

b) Una masa de 3 kg está unida a un muelle de constante elástica de 12 N m^{-1} sobre una superficie horizontal s
rozamiento. El muelle se alarga 4 cm y se suelta en el instante inicial t = 0 s. Determine: **i)** el periodo de oscilació
ii) la expresión de la posición de la masa en función del tiempo; **iii)** la velocidad y la aceleración para t = 3,5 s.

$K = 12\ N/m$



$t = 0$

4 cm

a) $K = m \cdot \omega^2$

$K = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$

$K = m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2}$

$T = \sqrt{\frac{m\,4\pi^2}{K}} = 0$

ii) $x(t) = A \cdot \text{sen}\,(\omega t + \varphi_0)$ (SI)

OBSM -

$t = 0$

$X = A$

$$A = A \cdot \text{sen}\,(\omega \cancel{t}^{0} + \varphi_0)$$

$$\text{sen}\,\varphi_0 = 1$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}\,\text{rad}.$$

23.- Explica cómo varía la energía de un oscilador cuando
a) Se duplica la amplitud
b) Se duplica la frecuencia
c) Se duplica la amplitud y se reduce la frecuencia a la mitad

23 a) $E_m = \frac{1}{2} K A^2$.

$E_m' = \frac{1}{2} K (2A)^2$.

$E_m' = 4 E_m$.

b)

$E_m = \frac{1}{2} K A^2$.

$E_m = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 A^2$.

$E_m = \frac{1}{2} m (2\pi f)^2 A^2$.

$$E_m = \frac{1}{2} m \, 4\pi^2 f^2 A^2$$

$$E_m' = \frac{1}{2} m \, 4\pi^2 (2f)^2 A^2 .$$

$$E_m' = 4 E_m .$$

c)

$$E_m = \frac{1}{2} m \, 4\pi^2 f^2 A^2 .$$

$$E_m' = \frac{1}{2} m \, 4\pi^2 \left(\frac{f}{2}\right)^2 \cdot (2A)^2 .$$

$$E_m' = E_m .$$

24.- Si se duplica la energía mecánica manteniendo un mismo oscilador armónico, explica qué efecto tiene:

a) En la amplitud y en la frecuencia de las oscilaciones

b) En la velocidad y en el periodo de oscilación

misma K.

Obtengo una expresión de la amplitud en función de la Em para luego ver la influencia

$$E_m = \frac{1}{2} K A^2 \longrightarrow 2E_m = KA^2$$

$$A = \sqrt{\frac{2E_m}{K}}$$

$$\boxed{A' = \sqrt{2}\, A}$$

$$A' = \sqrt{\frac{2 \cdot 2E_m}{K}}$$

mismo oscilador.

$$K = m \cdot \omega^2.$$

$$K = m(2\pi f)^2.$$

$$K = m \cdot 4\pi^2 \cdot f^2.$$

mismo oscilador $f = cte$.

$$f = \frac{1}{T} \rightarrow T = \frac{1}{f} \rightarrow$$ Si f no varía, el periodo T tampoco lo hace

$$x(t) = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = A \cdot \overbrace{\omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)}^{\text{permanece igual}}$$

$$A' = \sqrt{2} A$$

$$v' = \sqrt{2} A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\boxed{v' = \int \Sigma \, u.}$$

29.- Un cuerpo realiza un movimiento vibratorio armónico simple.

a) Escriba la ecuación del movimiento si la aceleración máxima es de $5\pi^2$ cm·s^{-2}, el periodo de las oscilaciones 2s y la elongación del cuerpo al iniciarse el movimiento 2,5 cm.

b) Represente gráficamente la elongación y la velocidad en función del tiempo y comente la gráfica.

$$y(t) = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = \frac{dy}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A \cdot \omega^2 \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

$$a_{max} = \pm A \cdot \omega^2 \cdot$$

$$A = \frac{a_{max}}{\omega^2} = \frac{0'05\cancel{\pi^2}}{\cancel{\pi^2}} = 0'05\,m$$

$$5\pi^2\,\frac{c\cancel{m}}{s^2}\cdot\frac{1\,m}{100\,c\cancel{m}} =$$

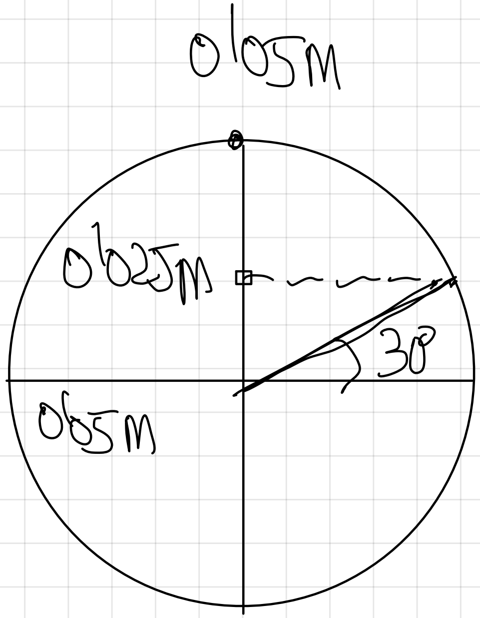
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}} = \pi\,\frac{rad}{s}$$

$$y = A\cdot \text{sen}\,(\omega t + \varphi)$$

$$y = 0'05\cdot \text{sen}\,(\pi t + \varphi_0)$$

$$y(t) = 0'05\cdot \text{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)\ (S.I.)$$

$$\begin{cases} t = 0 \\ y = 2'5\ cm = 0'025\ m \end{cases}$$



$$y(t) = 0'05 \cdot \text{sen}(\pi t + \varphi_0)$$

$$0'025 = 0'05 \cdot \text{sen}(\pi \cdot 0) + \varphi_0)$$

$$0'025 = 0'05 \cdot \text{sen}\ \varphi_0$$

$$\frac{0'025}{0'05} = \text{sen}\ \varphi_0 \Rightarrow \varphi_0 = \text{arcsen}\ \frac{1}{2} \qquad \varphi_0 = 30°$$

$$2\pi\ rad \ —\ 360°$$
$$x \ —\ 30°$$
$$x = \frac{\pi}{6}\ rad$$

25, 26, 27, 28

25.- Una partícula de 0,5 kg de describe un movimiento armónico simple de frecuencia 5 Hz y tiene inicialmente una energía cinética de 0,2 J y una energía potencial de 0,8 J.

a) Calcular la posición y la velocidad iniciales, así como la amplitud de la oscilación y la velocidad máxima.

b) ¿Podríamos saber con exactitud la posición de la partícula inicialmente?

$$\boxed{\begin{array}{l} E_{C_{inic}} = 0'2\,J \\ E_{p_{inic}} = 0'8\,J \end{array}} \longrightarrow E_c = \frac{1}{2} m v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0'2}{0'5}}$$

$$v = 0'89\ m/s$$

$$E_p = \frac{1}{2} K y^2$$

$$y = \sqrt{\frac{2E_p}{K}}$$

$$K = m \cdot \omega^2$$

$$K = m \cdot (2\pi f)^2$$

$$K = m\, 4\pi^2 f^2$$

$$y = \sqrt{\frac{2 \cdot 0'8}{492'98}} = 0'057\,m$$

$$K = 0'5 \cdot 4\pi^2 \cdot 5^2$$

$$K = 492'98\ \frac{N}{m}$$

$\pm 0'057\,m \longrightarrow$ No se puede saber con exactitud la posición inicial.

$$E_{c\,inic} = 0'2\,J$$

$$E_{p\,inic} = 0'8\,J$$

$$E_M = E_{p\,inic} + E_{c\,inic}$$

$$E_M = 0'8 + 0'2 = 1\,J$$

$$E_M = \frac{1}{2} K A^2$$

$$A = \sqrt{\frac{2E_M}{K}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1}{492'98}} = 0'063\,m$$

$$v_{max} = A \cdot \omega$$

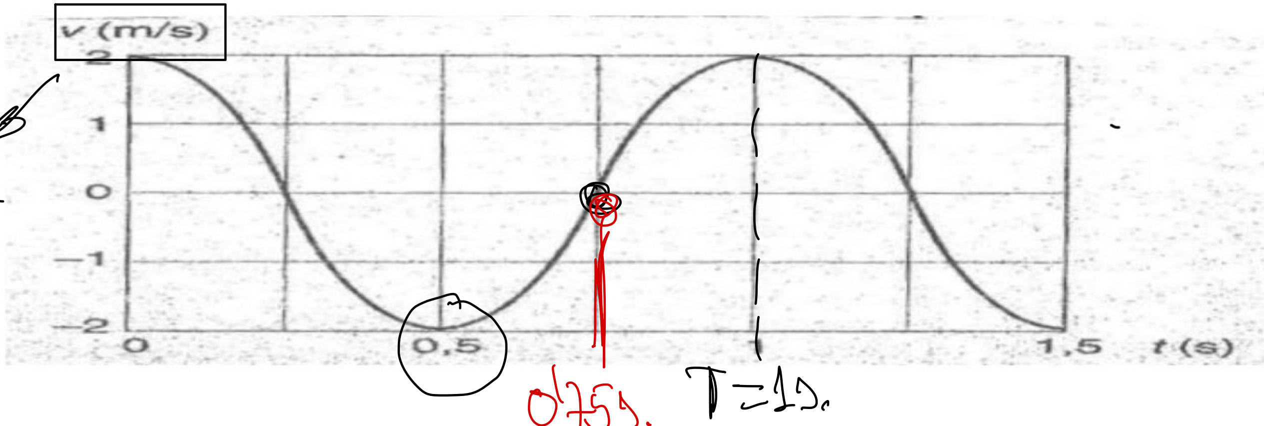
$v_{max} = A \cdot 2\pi f$.

$v_{max} = 0'063 \cdot 2\pi \cdot 5$

$v_{max} = 0'63\pi$ m/s.

26.- Una partícula de 10 g oscila armónicamente según la expresión x=A·sen (ωt). En la figura se representa la velocidad de esta partícula en función del tiempo.

$v_{max} = 2$ m/s



a) Hallar la frecuencia angular ω y la amplitud A de la oscilación.

b) Calcular la energía cinética de la partícula en el instante t_1=0,5 s y la energía potencial en t_2=0,75 s

c) ¿Qué valores tienen las dos energías anteriores? . Razónese.

a)

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \, \frac{rad}{s}$$

$v_{max} = 2 \, m/s$

$v_{max} = A \cdot \omega$

$$A = \frac{v_{max}}{\omega} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\pi}$$

$$A = \frac{1}{\pi} \, m$$

b)

en $t = 0'5 \, s \Rightarrow v = 2 \, \frac{m}{s}$

$m = 10 \, g =$
$= 10 \cdot 10^{-3} \, kg =$
$10^{-2} \, kg$

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} 10^{-2} \cdot 2^2$$

$$E_c = 2 \cdot 10^{-2} \, J$$

$$E_{c\,max} = E_m = 2 \cdot 10^{-2} \, J$$

$t = 0'75\,s \Rightarrow v = 0 \Rightarrow E_c = 0 \Rightarrow E_{p\,max}$

$$E_{p\,max} = E_m = \frac{1}{2} K A^2$$

$$t = 0'75\,s \Rightarrow E_m = \frac{1}{2} K A^2$$

$$K = m \cdot \omega^2$$
$$K = 10^{-2} \cdot (2\pi)^2$$
$$K = 4\pi^2 \cdot 10^{-2}\ N/m$$

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot 4\pi^2 \cdot 10^{-2} \left(\frac{1}{\pi}\right)^2$$

$$E_m = \frac{1}{2}\, 4\cancel{\pi^2} \cdot 10^{-2} \cdot \frac{1}{\cancel{\pi^2}}$$

$$E_m = 2 \cdot 10^{-2}\ J$$

c) $E_{p\,max} = E_{c\,max} = E_m$

27.- Cierto muelle que se deforma 20 cm cuando se le cuelga en vertical una masa de 1 kg, se coloca sin deformación, unido a la misma masa sobre una superficie horizontal sin rozamiento. En esta posición, se tira de la masa hasta que el muelle se alarga 2 cm, y posteriormente se suelta. $g=9,8\ m/s^2$

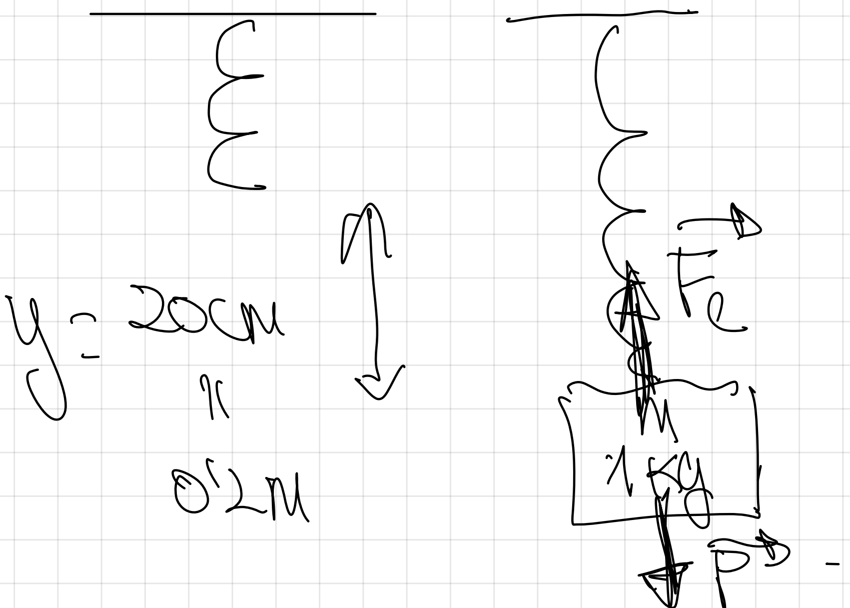
a) ~~Hallar la~~ ecuación del movimiento armónico simple resultante y representarla gráficamente.

b) Representar gráficamente la fuerza, recuperadora, en función de la posición, hallando sus valores máximos y calculando su valor cuando x= 1 cm.

c) Hallar las energías cinética, potencial elástica y mecánica cuando ha transcurrido un tiempo t=3T/4

d) Representar los valores de la energía potencial elástica, energía cinética, y energía mecánica en función del tiempo durante un periodo T. Indicar en la gráfica los valores de estas energías cuando t=0.

$g = 9'8\ m/s^2$



$|\vec{P}| = |\vec{F_e}|$

$m \cdot g = K \cdot y$

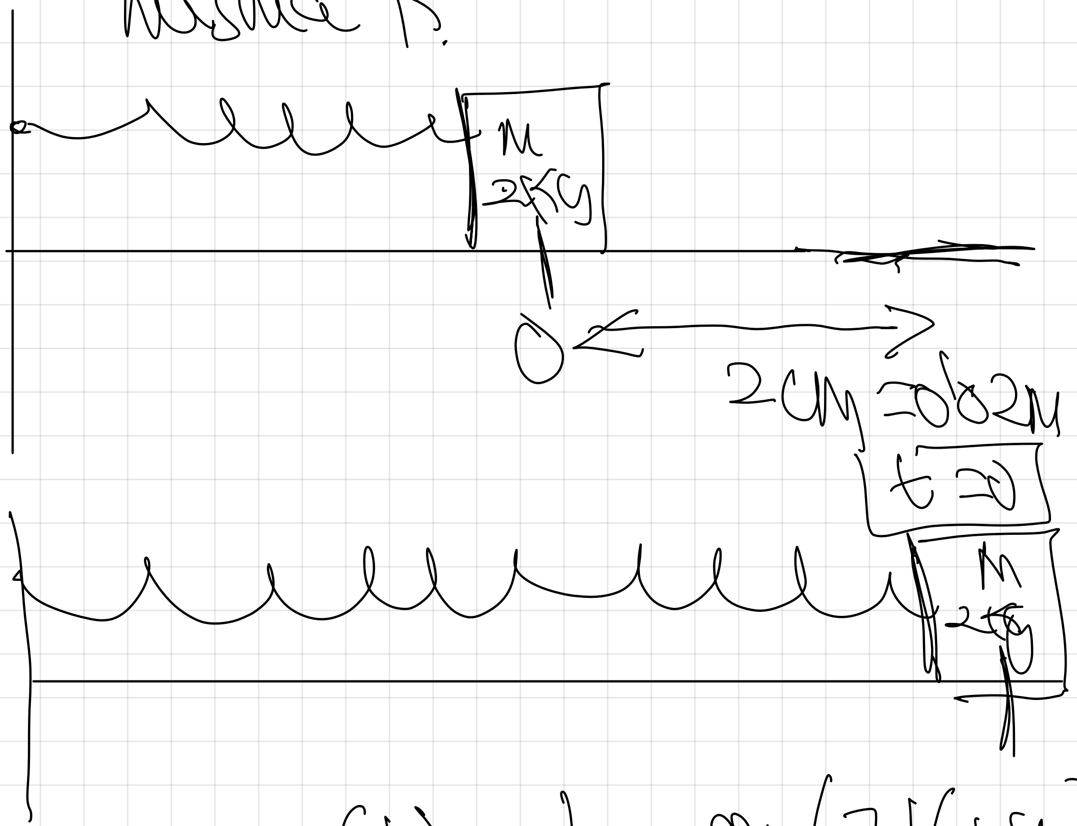
$K = \frac{m \cdot g}{y} = \frac{1 \cdot 9'8}{0'2} = 49\ \frac{N}{m}$

$K = m \cdot \omega^2$

$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{49}{1}}$

$\omega = 7\ \frac{rad}{s}$

mismo muelle
misma k.



$$\left.\begin{array}{l} t = 0 \\ x = +A \end{array}\right\}$$

$$x(t) = 0'02 \cdot \text{sen}(7t + \varphi_0)$$

$$0'02 = 0'02 \cdot \text{sen}\, \varphi_0$$

$$\text{sen}\, \varphi_0 = 1 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

$$x(t) = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi)$$

$$x(t) = 0'02 \cdot \text{sen}\left(7t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (SI)}$$

$$\Downarrow$$

$$x(t) = 0'02 \cdot \cos(7t) \text{ (SI)}$$

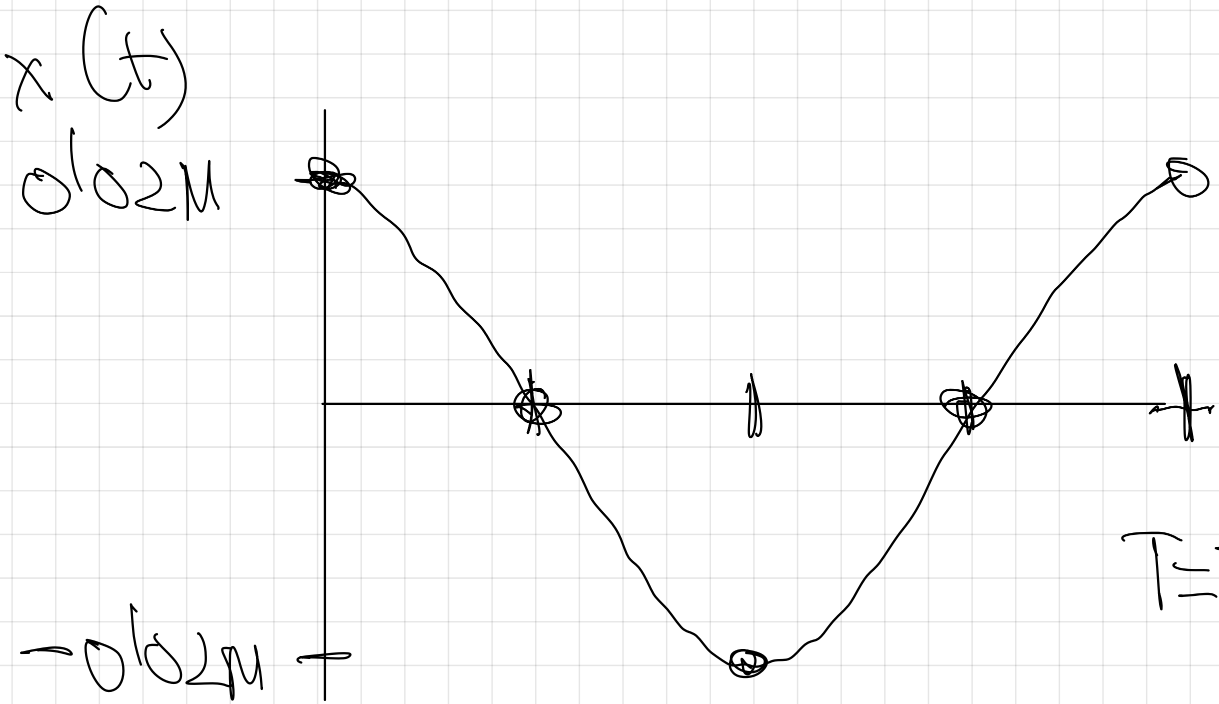
$$\Downarrow$$

Función a representar.

$x(t) = 0'02 \cdot \cos(7t) \quad (SI)$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{7} s.$

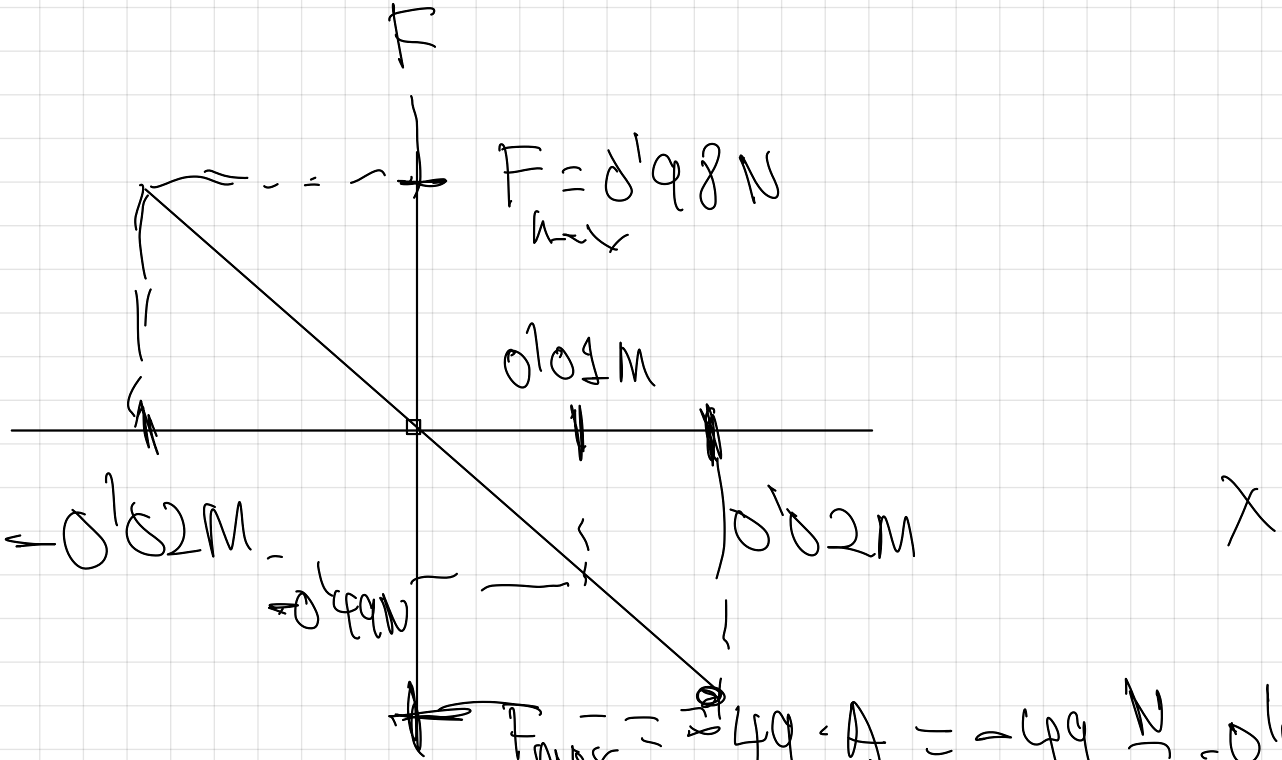


$T = \frac{2\pi}{7} s.$ t (s)

b)

$F = -K \cdot x \quad (SI)$

$F = -49 \cdot x$



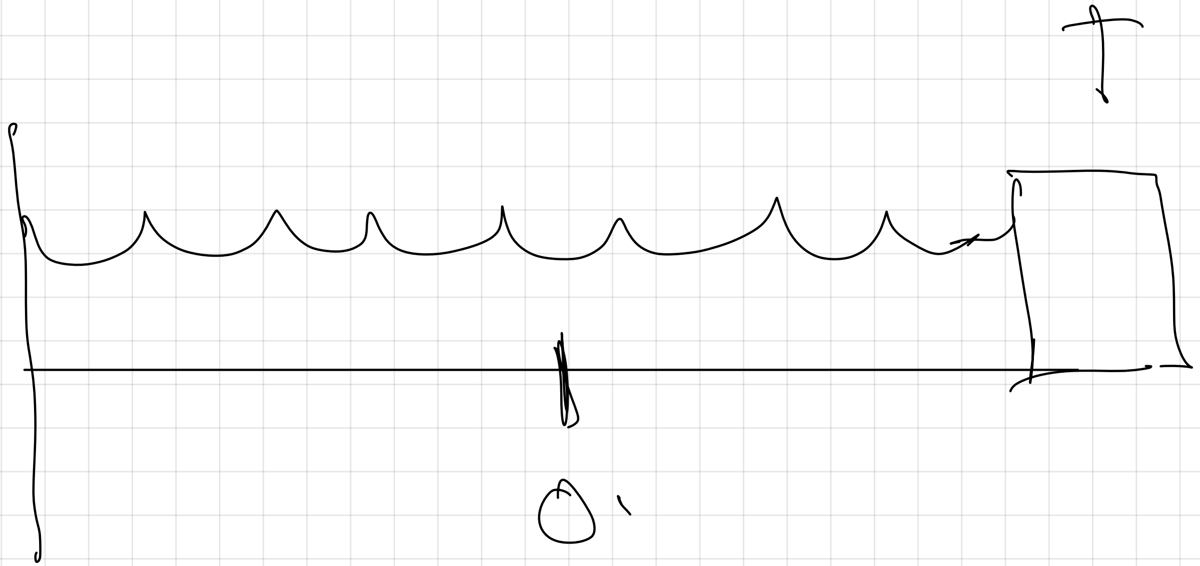
$F_{max} = -49 \cdot A = -49 \frac{N}{\cancel{m}} \cdot 0'02\cancel{m} = -0'98N.$

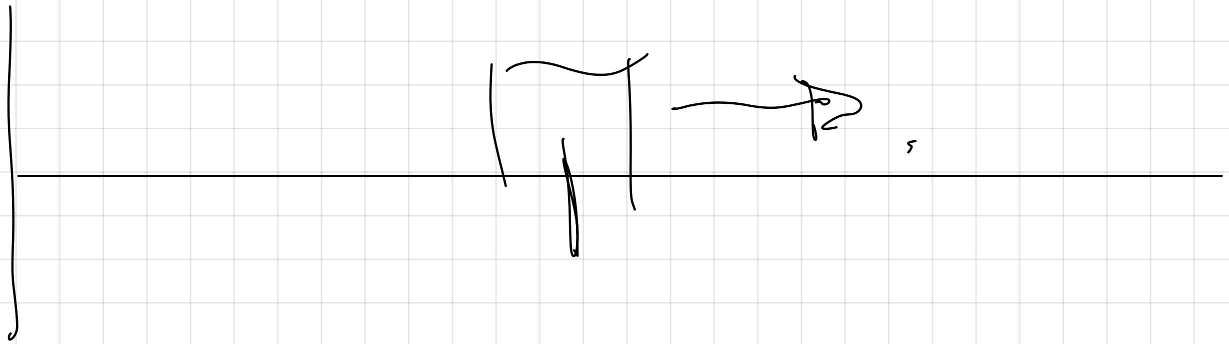
$x = 1\,cm = 0'01\,m.$

$F = -k \cdot x$

$F = -49 \cdot 0'01.$

$F = -0'49\,N.$

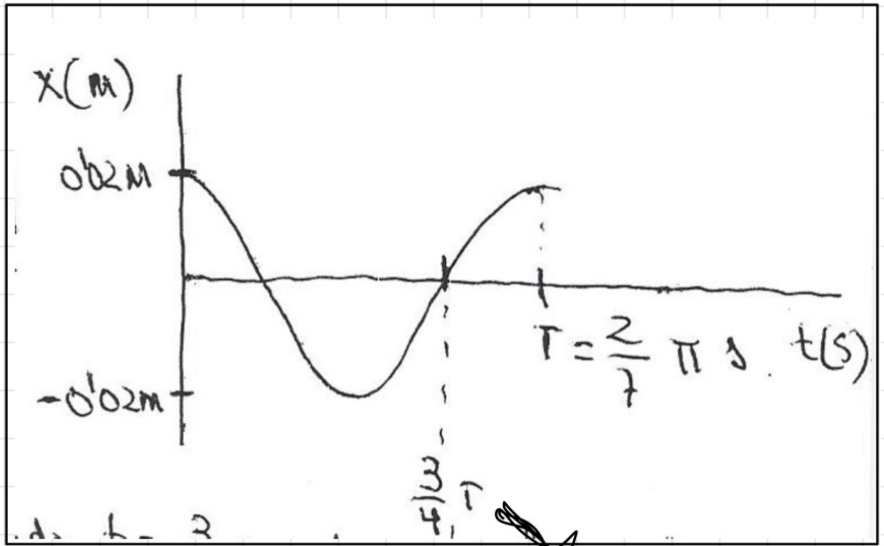




$E_c = E_{c\,max} = E_m$.

$E_p = 0$.

c)

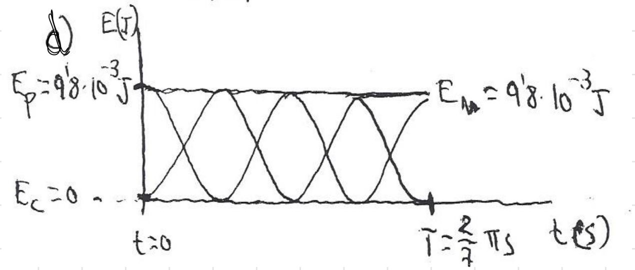


En la gráfica se observa que cuando $t=\frac{3}{4}T$, entonces la elongación $x=0$, y por ello $E_p=\frac{1}{2}K\underbrace{x^2}_{0}=0$, tomando entonces la E_c su valor máximo, es decir:

$$E_c = E_{c_{max}} = E_m = \frac{1}{2} K A^2 = \frac{1}{2} m\cdot\omega^2\cdot A^2 = \frac{1}{2}\, 1\cdot 7^2\cdot(0'02)^2 = 9'8\cdot 10^{-3}\, J$$


E
t

d)



5 cm

$2'5\ cm = 0'025\ m.$

28.- Una masa $m=10^{-3}$ kg que describe un m.a.s tarda 1s en desplazarse desde un extremo de la trayectoria al otro extremo. La distancia entre ambos extremos es de 5 cm. Determina

a) El periodo del movimiento

b) La la energía cinética de la partícula en t=2,75 s, sabiendo que en t=0 su elongación era nula.

c) El primer instante en el que las energías cinética y potencial del sistema coinciden.

a) $T = 2s.$ $\quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \pi \, rad/s$

b) $E_c = \frac{1}{2} m \boxed{v^2}$

$y(t) = A \cdot sen(\omega t + \cancel{\varphi_0})$ $\quad 0.$

$y(t) = A \cdot sen(\omega t)$

$v = \frac{dy}{dt} = A \cdot \omega \cdot cos(\omega t)$

$E_c = \frac{1}{2} m \cdot (A \omega \cdot cos\, \omega t)^2.$

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \cdot \cos^2(\omega t)}$$

$$E_c = \frac{1}{2} 10^{-3} (0'025)^2 \pi^2 \cdot \cos^2(\pi \cdot 2'75) = 1'54 \cdot 10^{-6} J$$

$$E_c = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \cdot \cos^2(\omega t)$$

$$\boxed{E_c = E_p}$$

$$E_p = \frac{1}{2} m \omega^2 \cdot A^2 \cdot \mathrm{sen}^2(\omega t)$$

$$E_p = \frac{1}{2} K \cdot y^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \cdot A^2 \cdot \mathrm{sen}^2(\omega t)$$

$$E_c = E_p$$

$$\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{m}\cancel{A^2}\cancel{\omega^2}\cdot \cos^2(\omega t) = \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{m}\cancel{\omega^2}\cancel{A^2}\cdot \operatorname{sen}^2(\omega t)$$

$$\cos^2(\omega t) = \operatorname{sen}^2(\omega t)$$

$$\cos(\omega t) = \operatorname{sen}(\omega t)$$

$$\omega \cdot t = \frac{\pi}{4}.$$

$$t = \frac{\pi/4}{\omega} = \frac{\cancel{\pi}/4}{\cancel{\pi}} = \frac{1}{4} = 0'25\,s.$$

Teoría de ondas

Clasificación de las ondas.

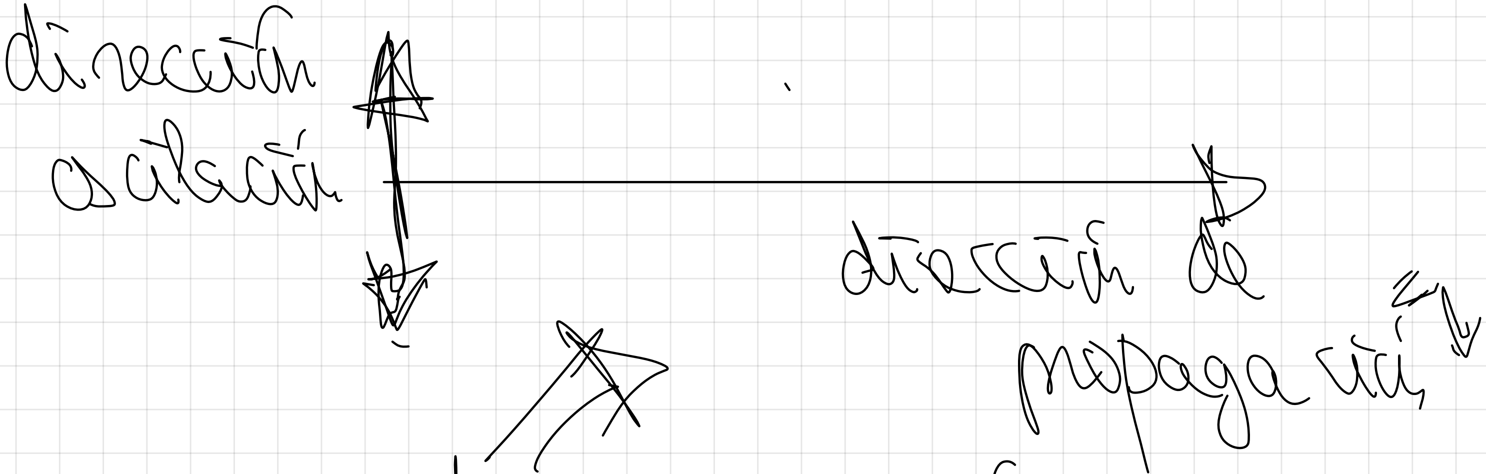
Primer criterio

Medio en el que se propagan.

- Ondas mecánicas
- Ondas electromagnéticas.

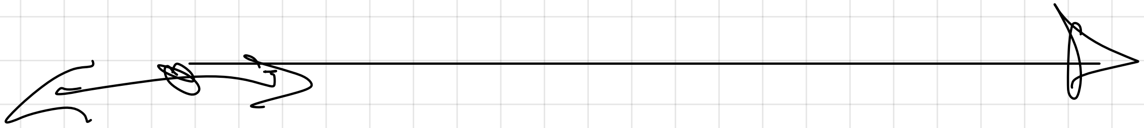
Segundo criterio

Dirección de oscilación y de propagación.



- Onda transversal. (onda de la cuerda descrita, ondas electromagnéticas.

- Ondas longitudinales (sonido)

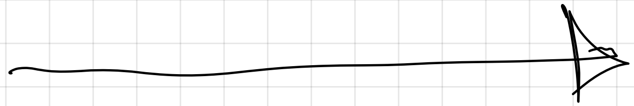


misma dirección de oscilación y propagación.

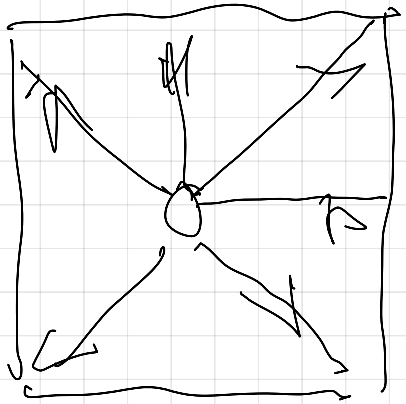
Tercer criterio

Nº de dimensiones en las que se propaga

- Unidimensional:



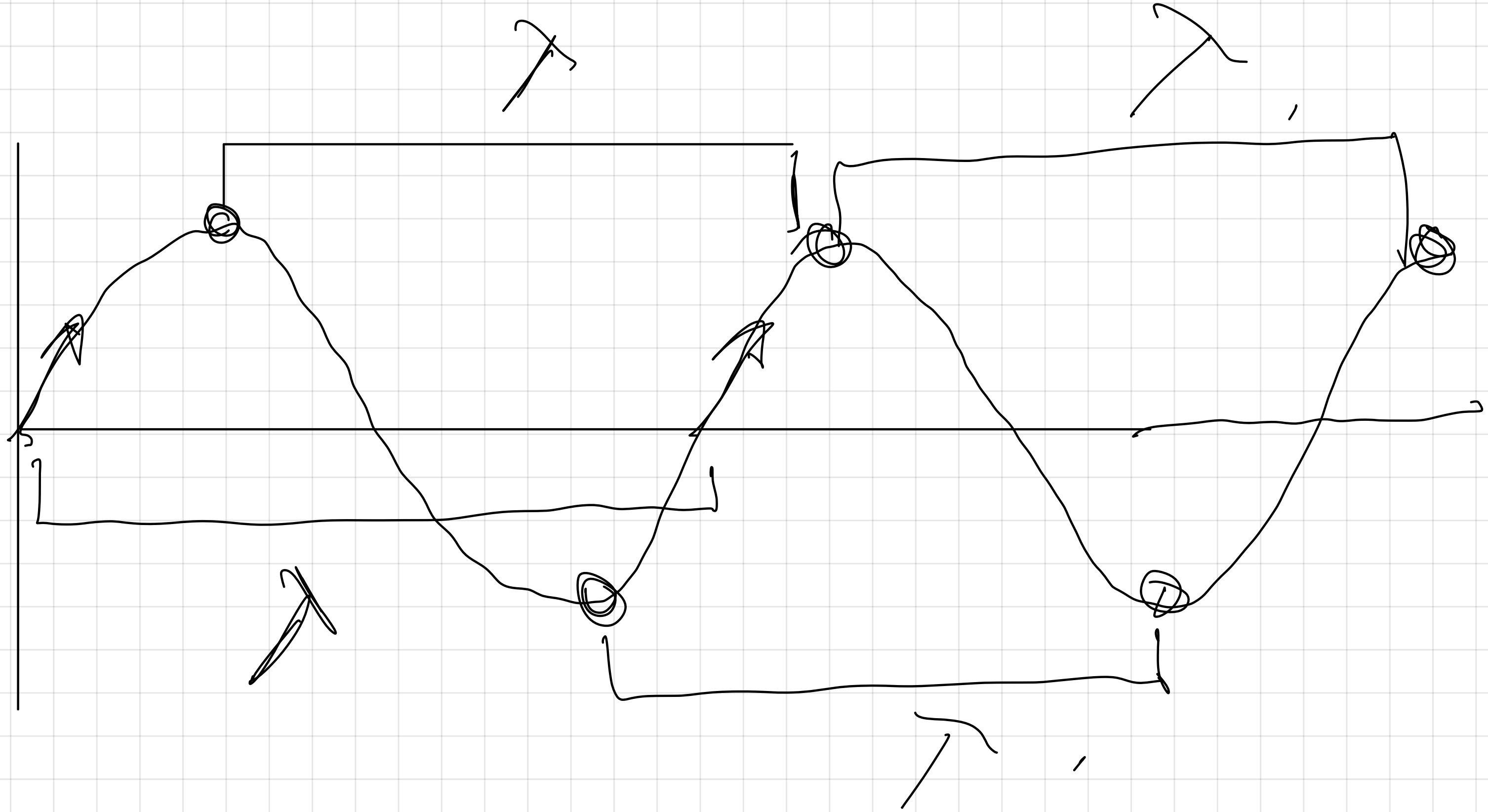
- Bidimensional



- Tridimensional sonido

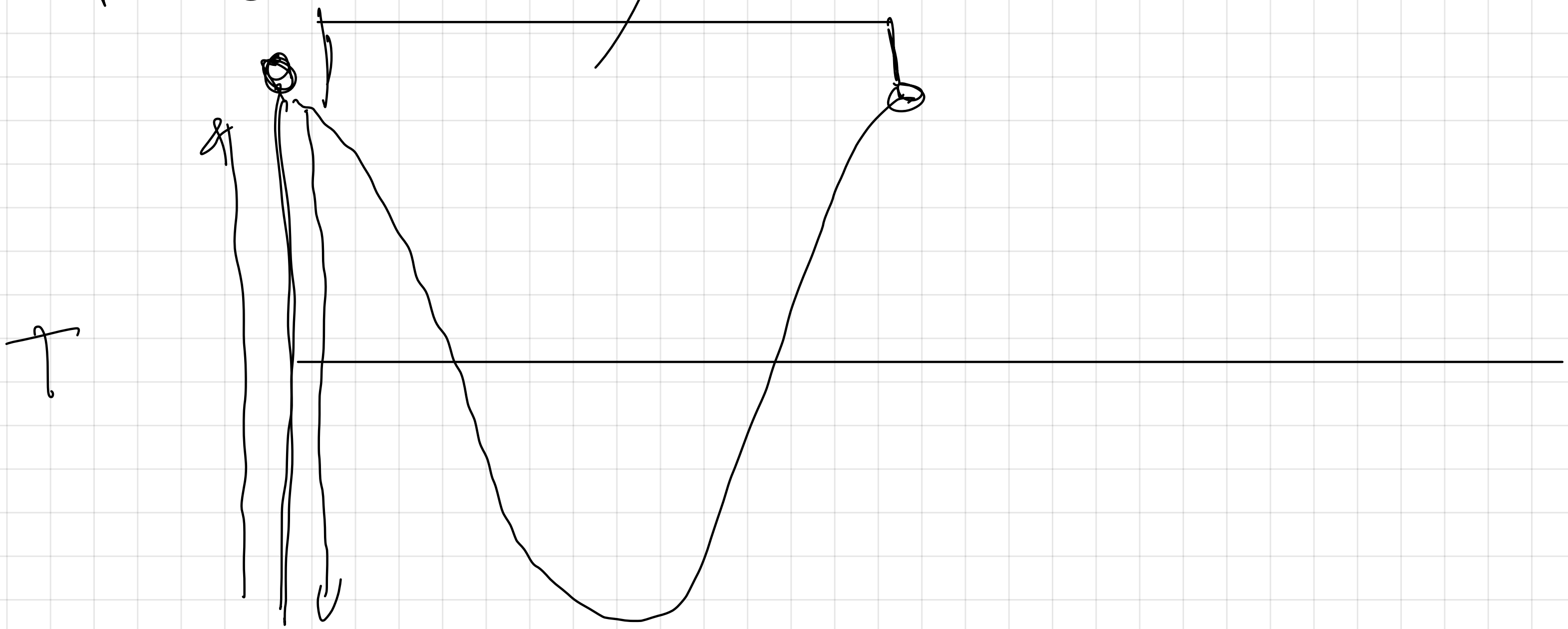
Magnitudes características de una onda

- Longitud de onda λ (m en SI)



- Periodo T. (s en SI)

FOCO: λ, T.



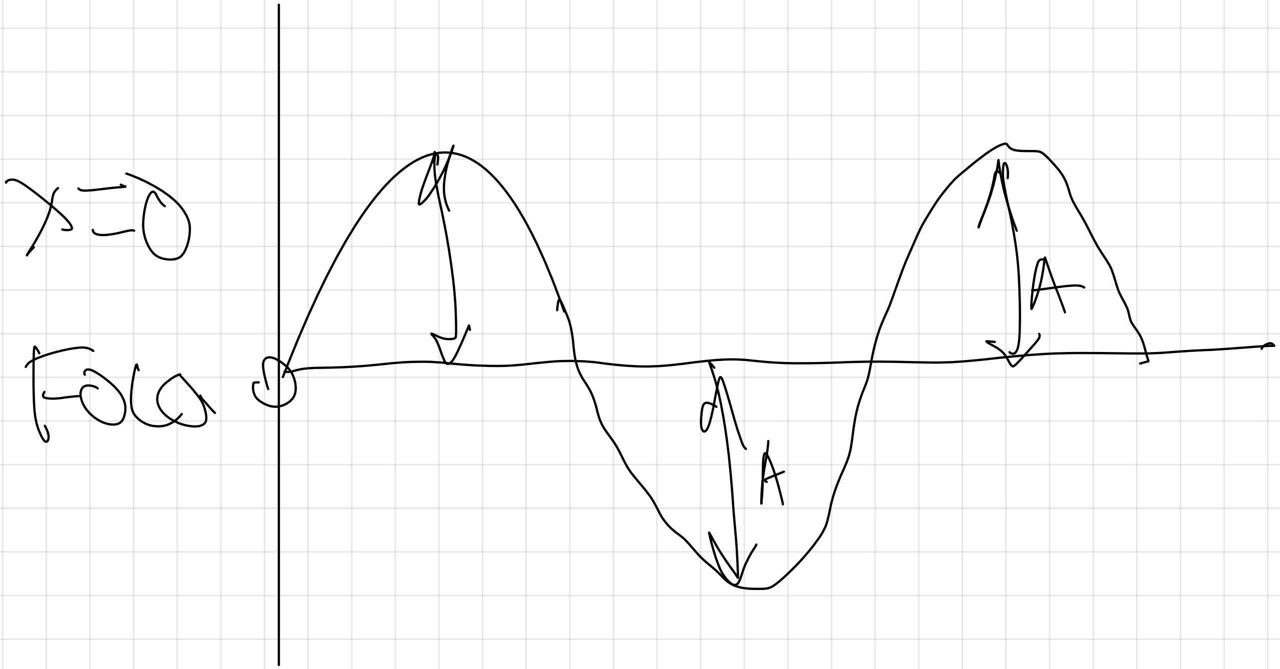
M.A.S.

- Frecuencia f $\left(\frac{osc}{s}, Hz\right)$.

$$f = \frac{\text{nº de ciclos}}{t}.$$

$$f = \frac{1}{T}.$$

- Amplitud: A. (A ≡ m en SI)



$$v = \frac{s}{t} = \boxed{\frac{\lambda}{T}} = \lambda f$$

$$v = \frac{\lambda\downarrow}{T\downarrow} = \lambda f$$