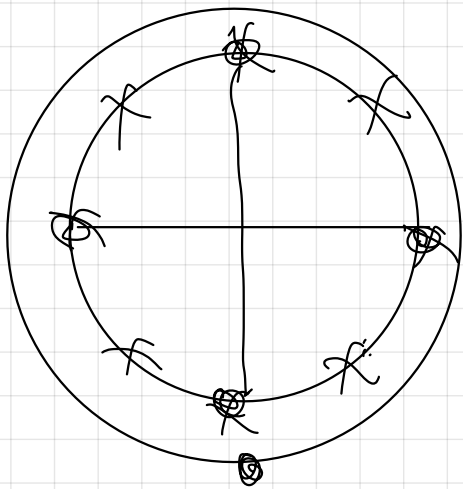


M. A. S.

libre

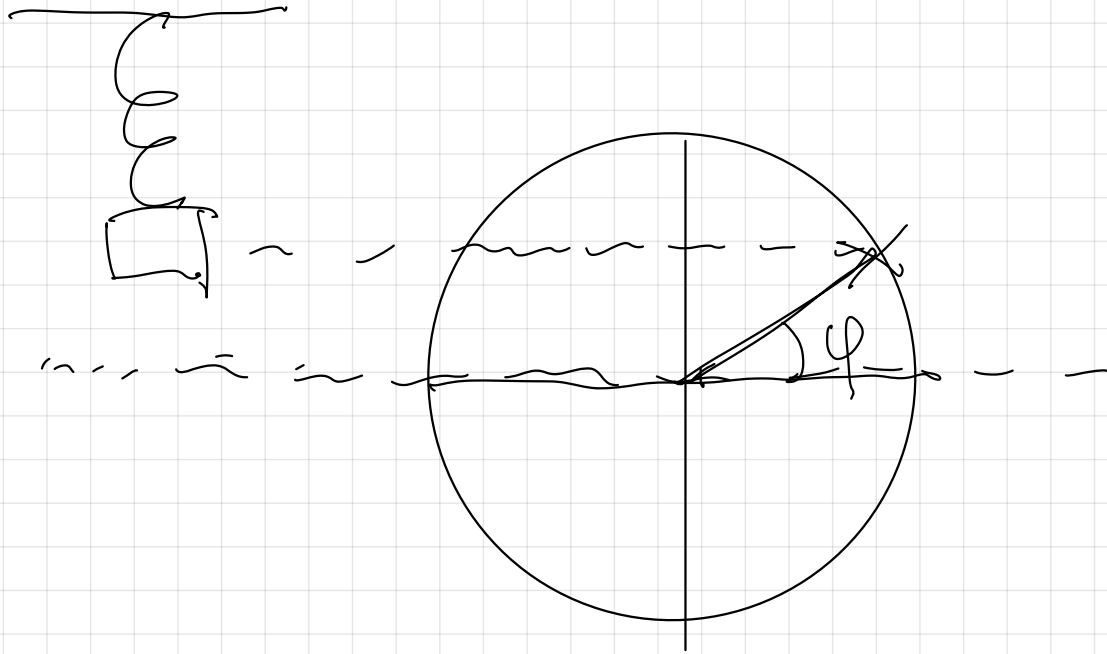
a) Ciclo u oscilación completa.



$$\omega = \frac{\varphi}{t} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi \text{ (rad)}}{T \text{ (s)}}$$

b) Velocidad angular ω , pulsación ω
frecuencia angular (rad/s)

c) Ángulo de fase φ (rad)

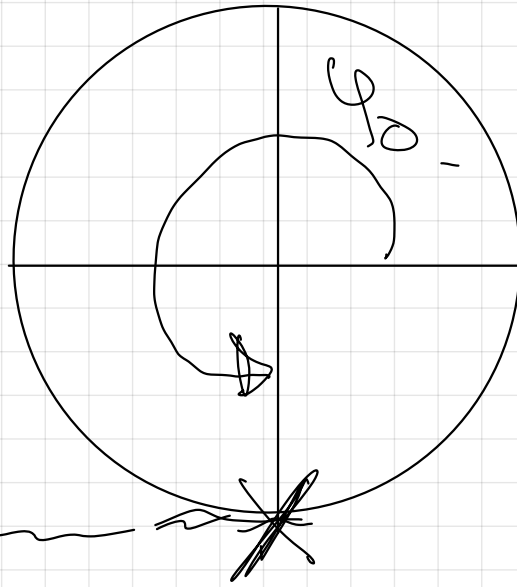
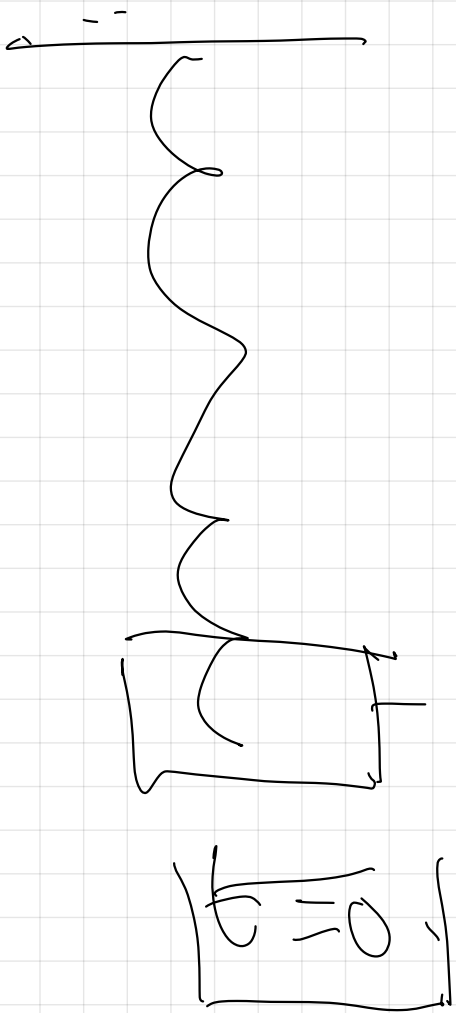


$\varphi \Rightarrow$ rad.

En un instante t determinado.

d) Ángulo de fase inicial φ_0 .

En el instante inicial.



$$\phi_0 = 270^\circ$$

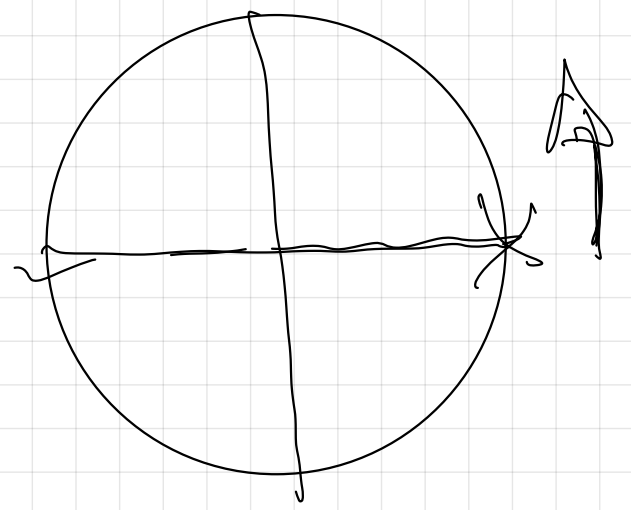
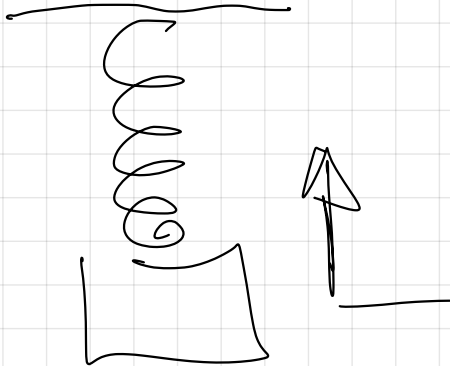
$$\phi_0 = \frac{3}{2} \pi \text{ rad.}$$

$$360^\circ \sim 2\pi$$

$$270^\circ \sim x$$

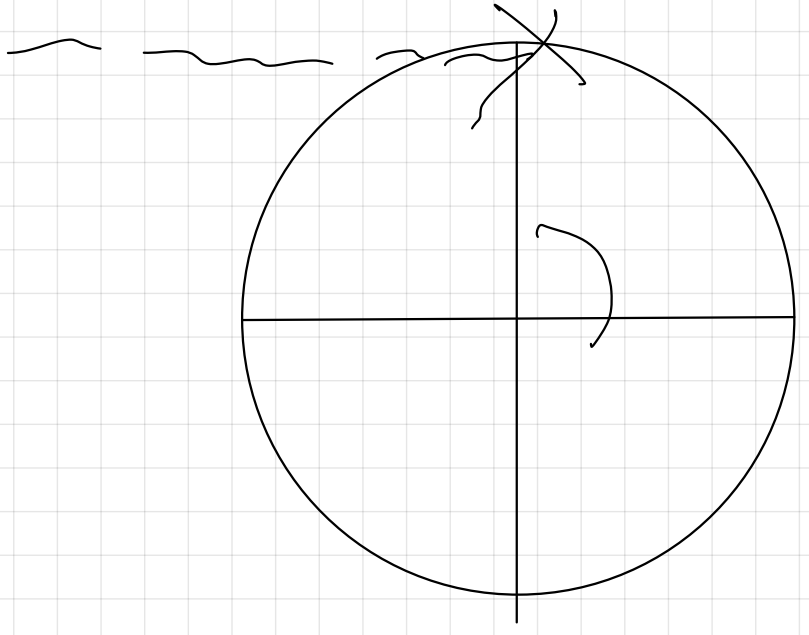
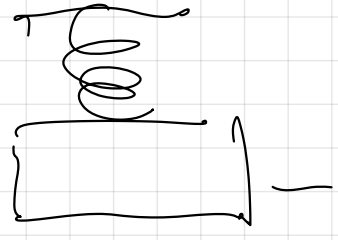
$$x = \frac{3}{2} \pi \text{ rad.}$$

$t = 0$

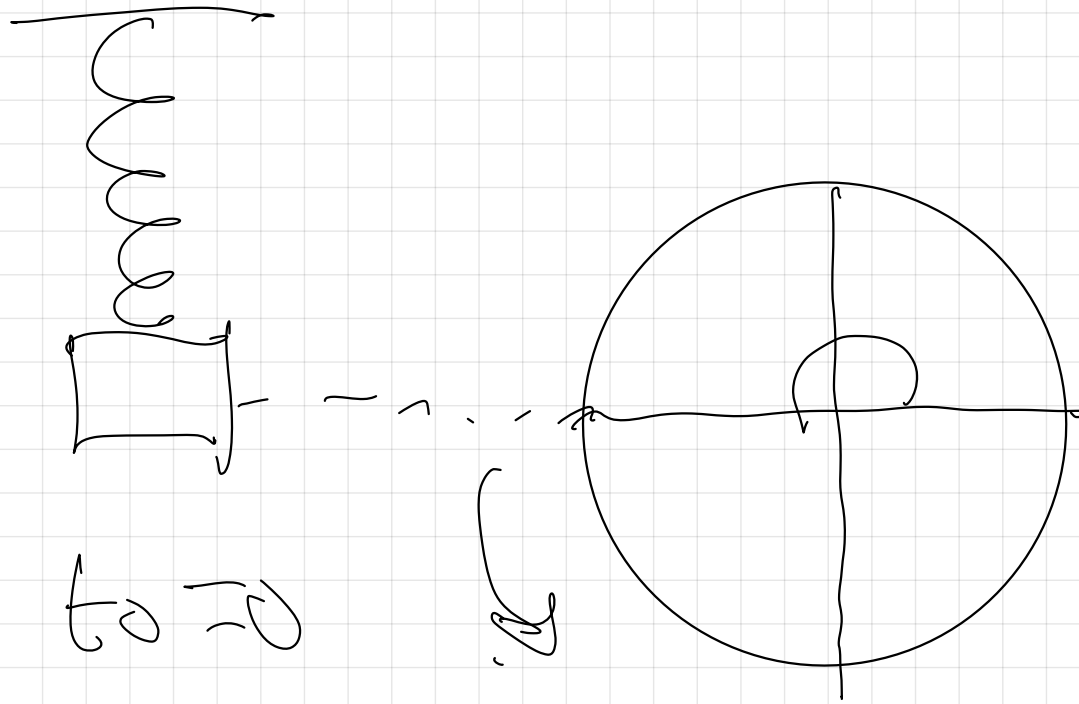


$\frac{1}{2} \pi$

$t = 0$



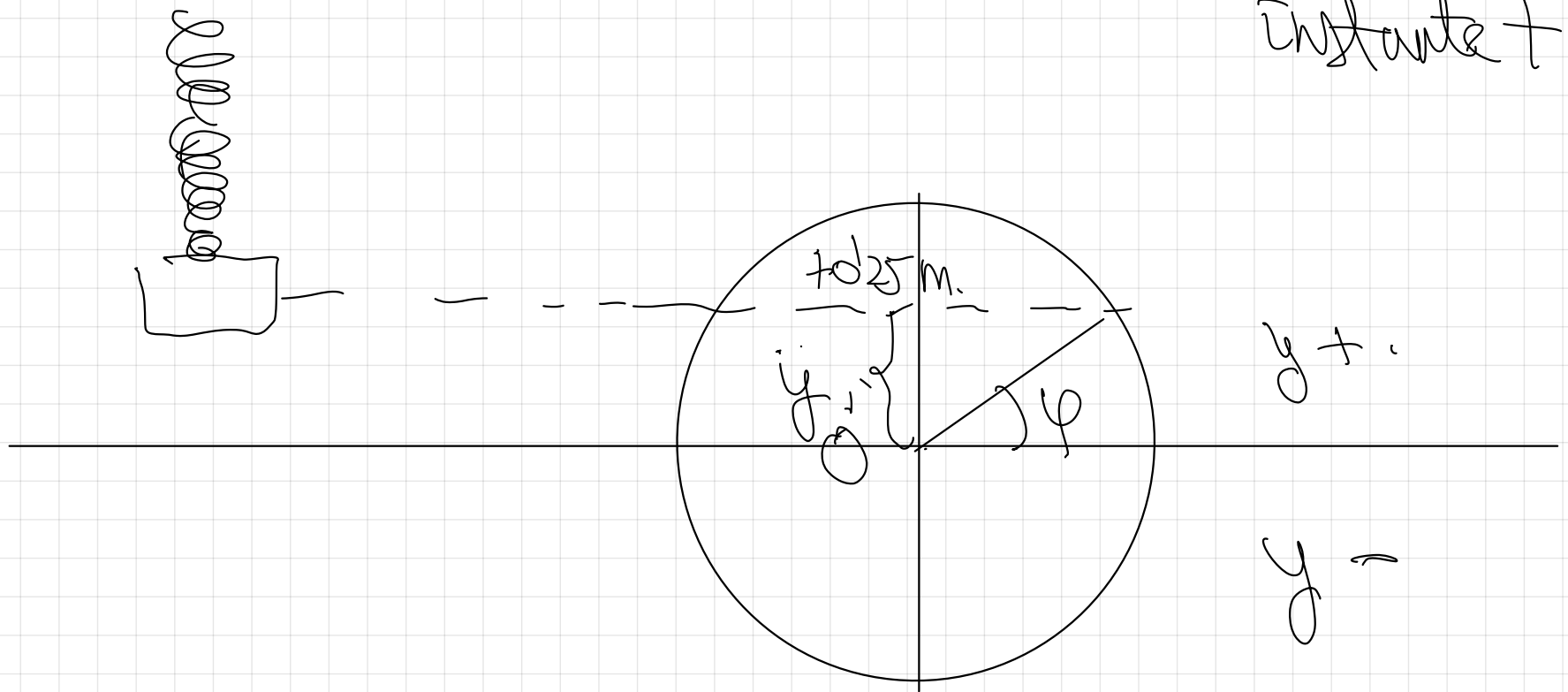
$\frac{1}{2} \pi$ rad



$$\theta = \pi \text{ rad}$$

e) Elongación y (m en S.I.)

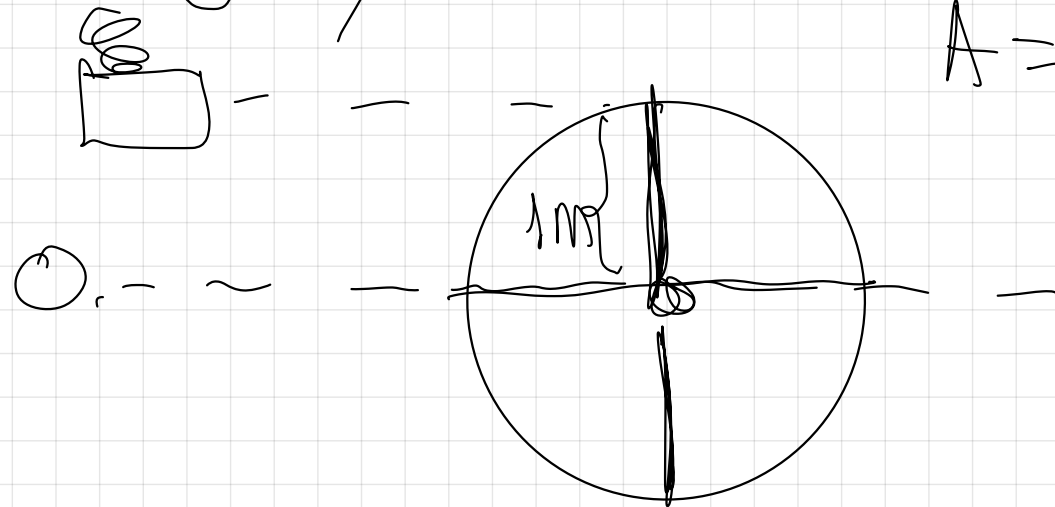
instante t .

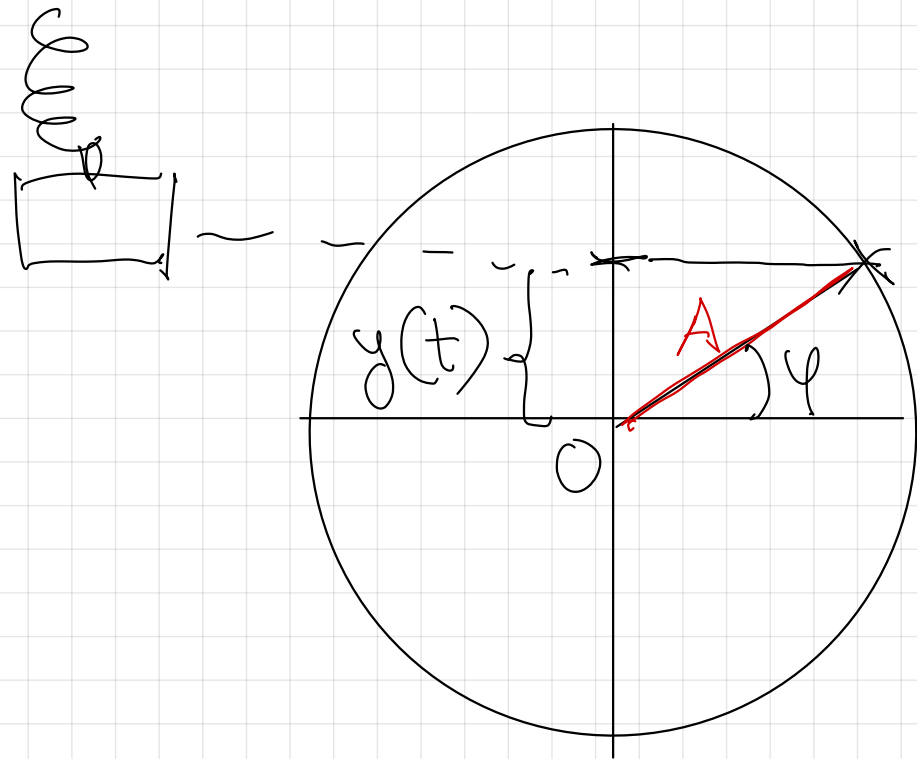
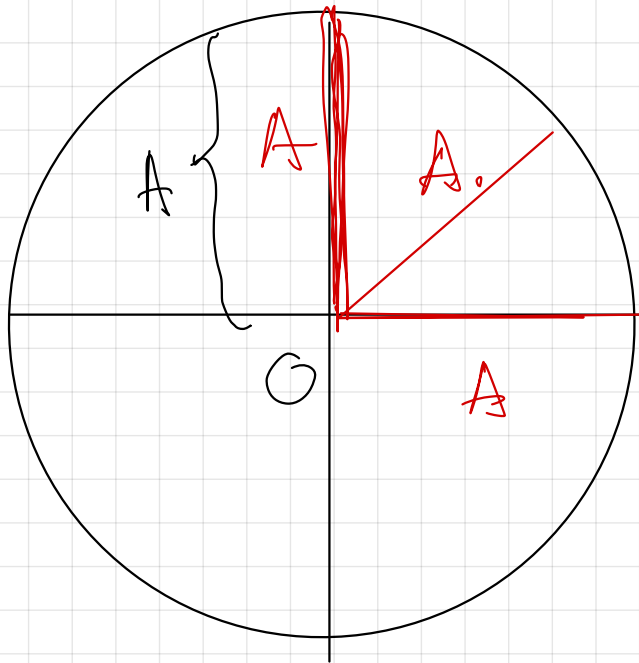


2) Amplitud (A)

$$A = 1\text{ m}$$

$$y_{\text{max}} = A$$





Sea $\varphi = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$.

Sea $\varphi = \frac{y}{A}$.

$$v = \frac{s}{t}$$

$$s = v \cdot t$$

$$s = s_0 + v \cdot t$$

$$y = A \cdot \text{sen } \varphi$$

$$\omega = \frac{\varphi}{t}$$

$$\varphi = \omega \cdot t$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t$$

$$y = A \cdot \sin(\varphi)$$

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Equación de un M.A.S.

g) T (s. en S.I.)

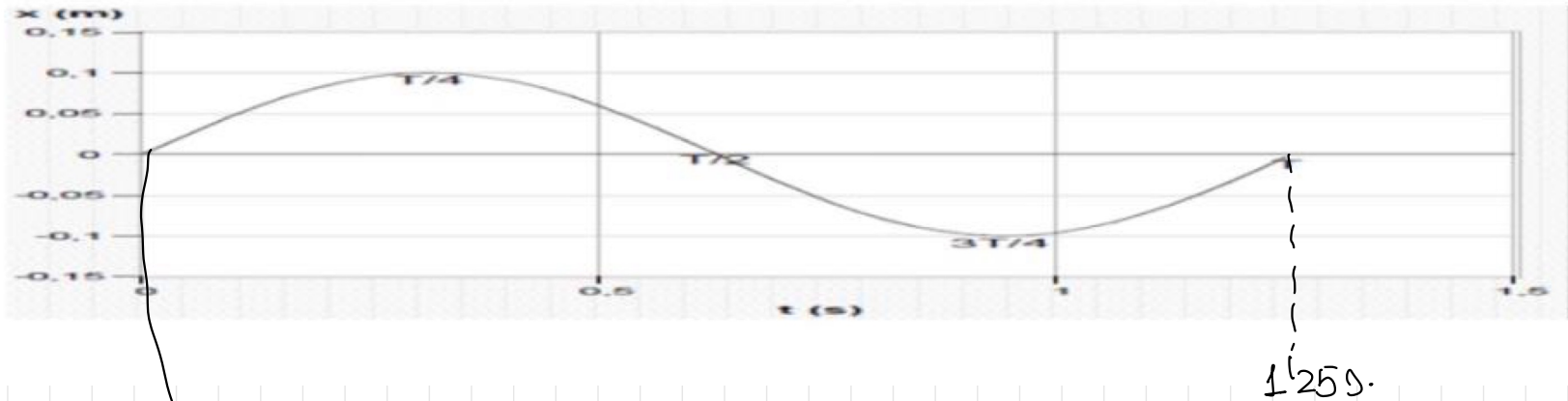
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

b) f (s^{-1} , oscilaciones / s, cycles / s) \Rightarrow f (Hz)

Viene en la página web.

1.- En la gráfica se muestra la posición en función del tiempo para una partícula que describe un m.a.s. Determina la ecuación de dicho movimiento.



$$y(t) = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0) \quad (\text{S.I.})$$

$$y(t) = 0.1 \cdot \text{sen}\left(\frac{1}{6}\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{S.I.})$$

$$\omega = \frac{\varphi}{t} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{t} = \frac{2\pi}{1.25} = \frac{8}{5} \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega = 1.6 \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$y(t) = 0.1 \cdot \cos(1.6 \pi t) \quad (\text{S.I.})$$

Para calcular matemáticamente el ángulo de fase inicial.

1º Escribimos genéricamente la ecuación del m.a.s.

2º

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

Substituímos

cuando $t = 0$.



Cuando $t = 0$
y vale 0.

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

$$0 = A \cdot \text{sen} \varphi_0$$

$$\text{sen} \varphi_0 = \frac{0}{A}$$

$$\text{sen} \varphi_0 = 0$$

$$\varphi_0 = \arcsen 0$$

$$0^\circ \text{ (asciende)}$$

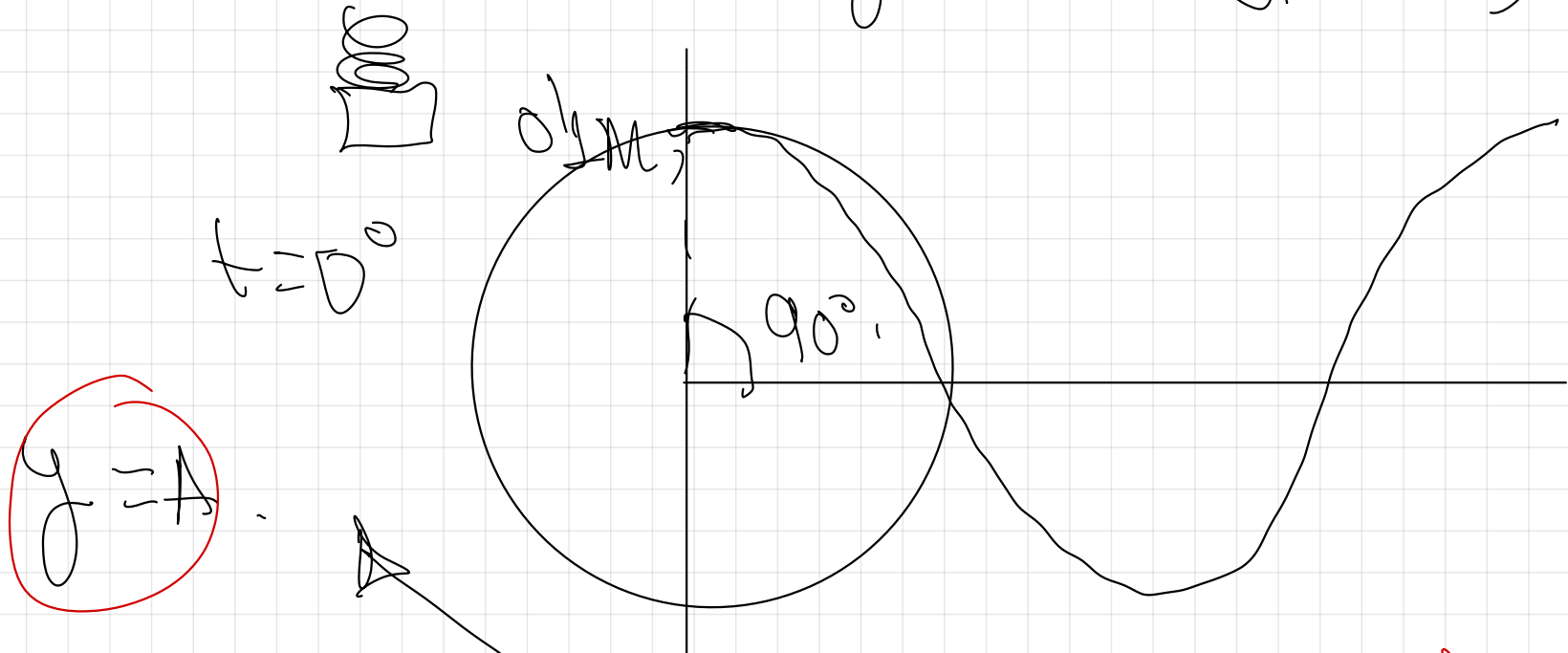
$$180^\circ \text{ (}\pi \text{ rad)}$$

→ "gráfica"

desciende.

)₁

$$y = 0.1 \cos(1/6 \pi t) \quad (5.7)$$



$$y = A$$

Calculo ϕ_0

$t = 0.$

Cuando $t = 0.$

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \phi_0)$$

$$A = A \cdot \sin(\phi_0)$$

$$\frac{A}{A} = \sin \varphi_0$$

$$1 = \sin \varphi_0$$

$$\varphi_0 = \arcsin 1 = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

$$y(t) = 0.1 \sin(16\pi t) \text{ (}$$

$$y = 0.1 \sin\left(16\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S. 7)}$$

$$y = 0.1 \cos(16\pi t) \text{ (S. 7)}$$

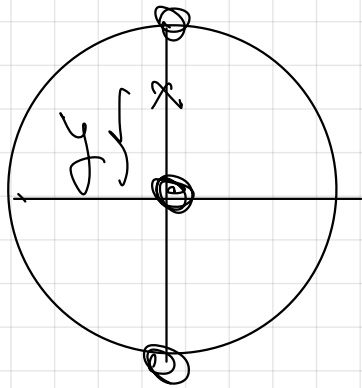
3.- MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE : CARACTERÍSTICAS CINEMÁTICAS

Ecuación del M.A.S.,

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = \frac{dy}{dt} = A \cdot [\cos(\omega t + \varphi_0)] \cdot \omega$$

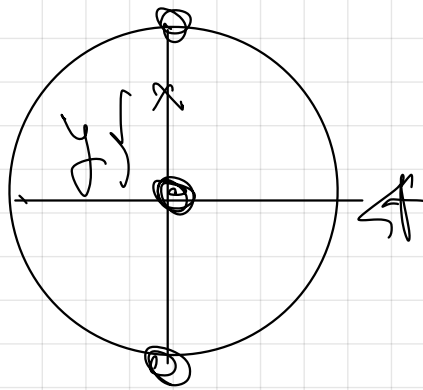
$$v = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$



~~$$v = A \cdot \omega \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$~~

v en función del tiempo t :

$$v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$



$$v_{\max} = A \cdot \omega \cdot \left(\cos(\omega t + \varphi_0) \right) \left. \begin{array}{l} +1 \\ -1 \end{array} \right\}$$

$$v_{\max} = \pm A \cdot \omega$$

Busca ahora la velocidad en función de la posición y .

$$v = A \cdot \omega \cdot \left[\cos(\omega t + \varphi_0) \right]$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$v = A \cdot \omega \cdot \sqrt{1 - \sin^2(\omega t + \varphi_0)}$$

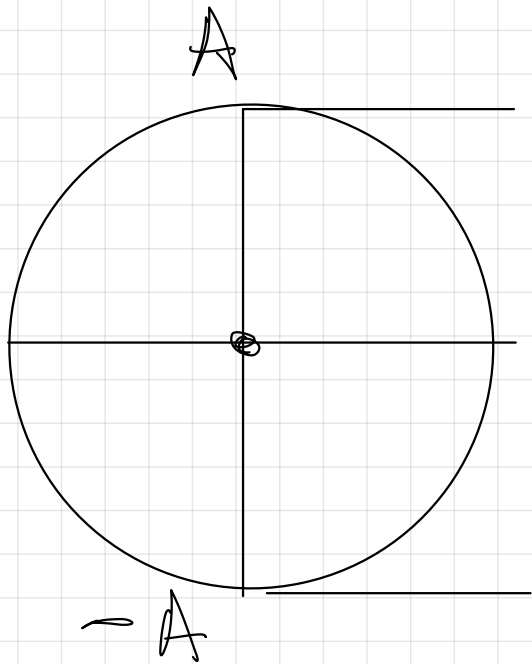
$$v = \omega \cdot \sqrt{A^2 (1 - \sin^2(\omega t + \varphi_0))}$$

$$v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - A^2 \cdot \sin^2(\omega t + \varphi_0)}$$

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - y^2}$$

$$v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - y^2}$$



$$y = A \Rightarrow v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - A^2} = 0,$$

$$y = 0 \Rightarrow v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - 0^2} \Rightarrow v = A \cdot \omega$$

max

$$y = -A \Rightarrow v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - (-A)^2} = 0.$$

aceleración del M.A.S.)

$$y(t) = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = \frac{dy}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

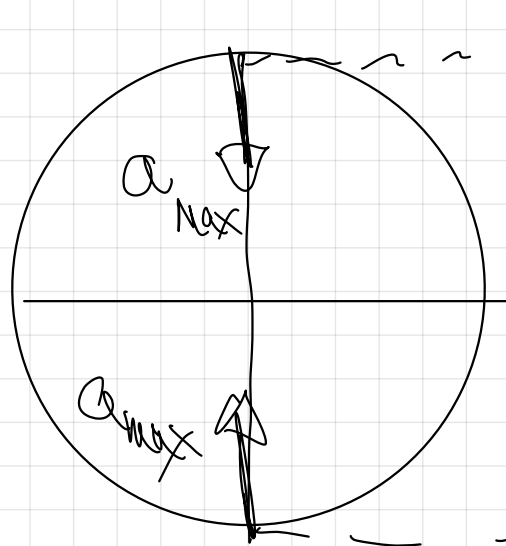
$$a = \frac{dv}{dt} = A \cdot \omega \cdot [-\text{sen}(\omega t + \varphi_0)] \cdot \omega.$$

$$a(t) = -[A \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0)].$$

$$a_{\max} = \pm \omega^2 \cdot A$$

$$\begin{matrix} \downarrow \\ \boxed{y} = A \cdot \sin(\omega t + \varphi) \end{matrix}$$

$$a = -\omega^2 \cdot y$$



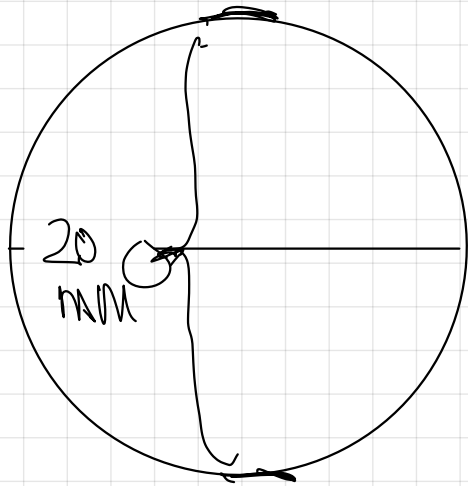
$$y = A \Rightarrow a = \ominus \omega^2 \cdot A_{\max}$$

$$y = 0 \Rightarrow a = -\omega^2 \cdot 0 = 0$$

$$-y = -A \Rightarrow a_{\max} = -\omega^2 \cdot (-A) = +\omega^2 \cdot A$$

$y \uparrow$
 $a \ominus$
 $y \uparrow$
 $a \uparrow$

2.- La aguja de una máquina de coser oscila entre dos puntos separados por una distancia vertical de 20 mm. Suponiendo que describe un m.a.s de frecuencia 30 Hz, ¿Cuál será su velocidad y aceleración máximas en unidades del Sistema Internacional?



¡OJO!

$$A = 10 \text{ mm}$$

$$A = 10 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

$$A = 10^{-2} \text{ mm}$$

$$f = 30 \text{ Hz}$$

Si no especifican nada del instante inicial, por defecto se toma $\phi_0 = 0$.

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \phi_0)$$

$$y = A \cdot \sin(\omega t)$$

$$v = \frac{dy}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)$$

$$v_{\max} = A \cdot \omega = 10^{-2} \cdot 60\pi$$

v_{\max}

$$f = 30 \text{ Hz}$$

$$A = 10^{-2} \text{ m}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega = 2\pi \frac{1}{f}$$

$$\omega = 2\pi f$$

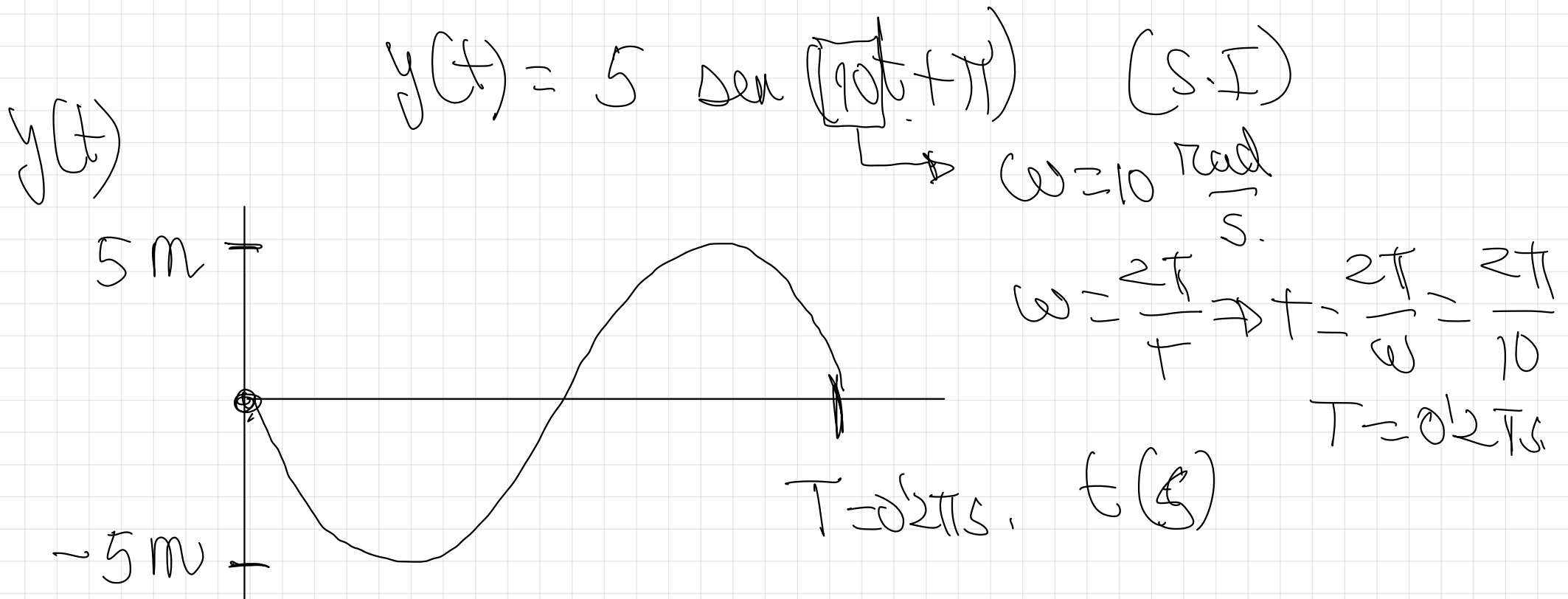
$$\omega = 2\pi \cdot 30$$

$$\omega = 60\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

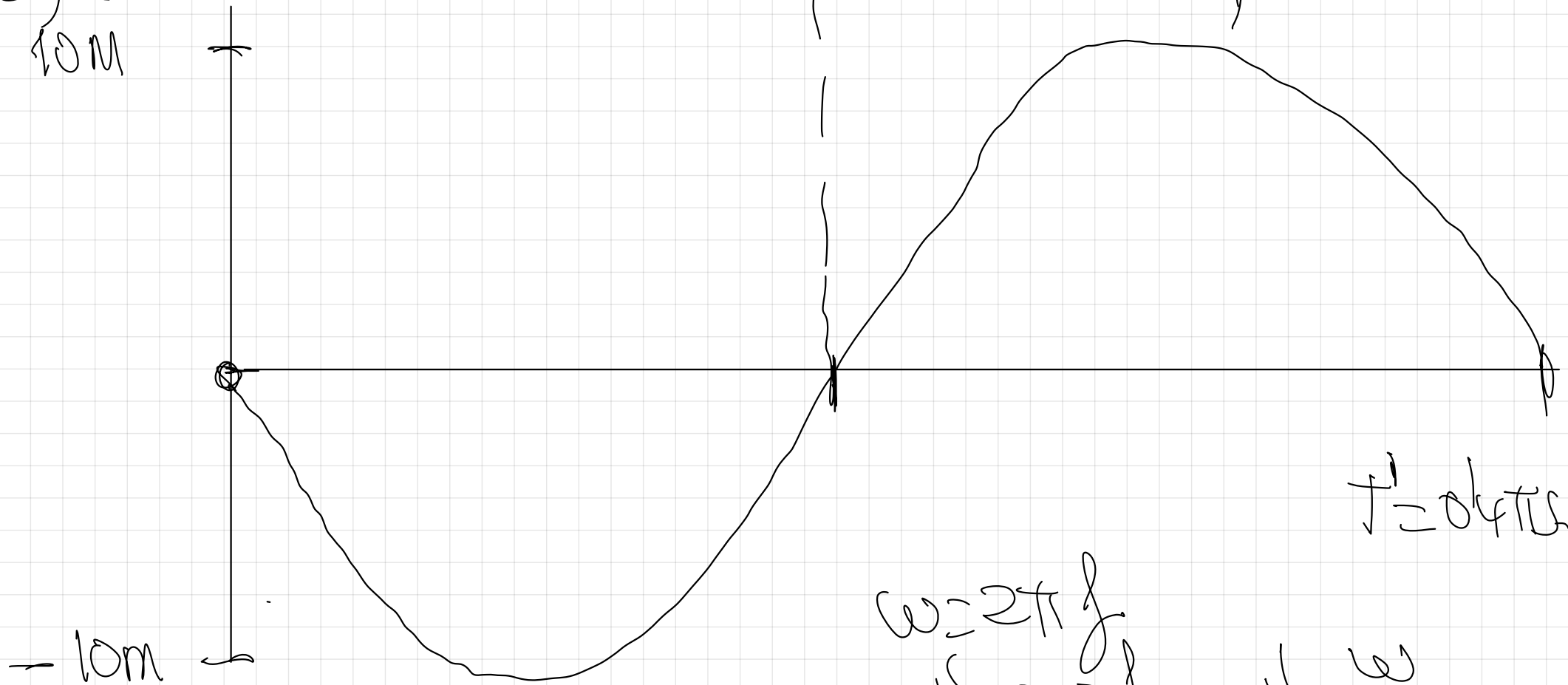
Página web.

3.- a) Represente gráficamente el movimiento armónico simple de una partícula dado por la ecuación $y(t) = 5 \cdot \text{sen}(10t + \pi)$ (S.I). Represente también otro movimiento armónico simple que tenga una amplitud doble y una frecuencia mitad que la anterior.

b) Represente gráficamente la velocidad y la aceleración del movimiento armónico simple dado por la ecuación $y(t) = 5 \cdot \text{sen}(10t + \pi)$ (S.I)



$y(t)$
10m



-10m

$$\omega = 2\pi f$$
$$\omega' = 2\pi \frac{f}{2}$$

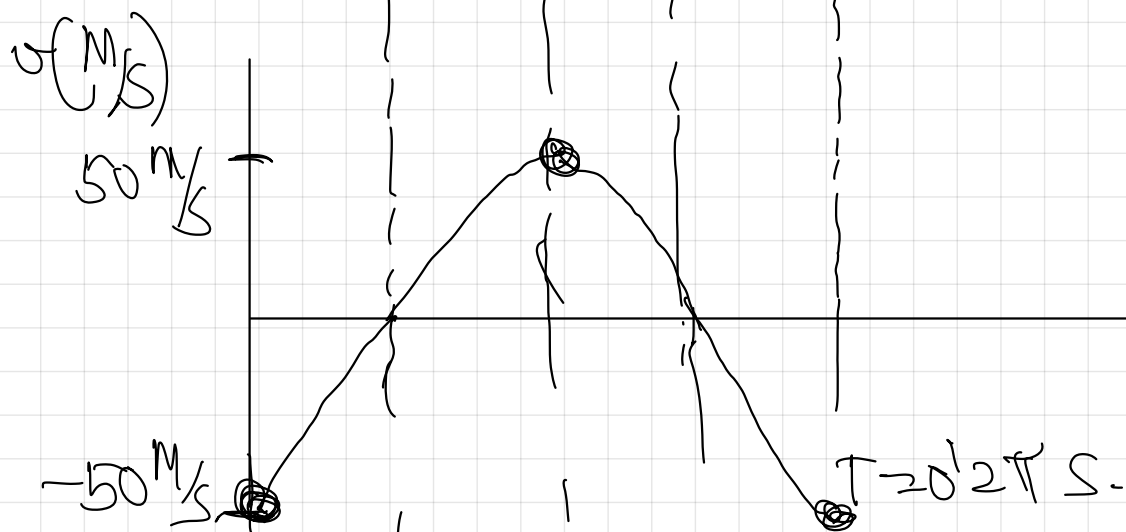
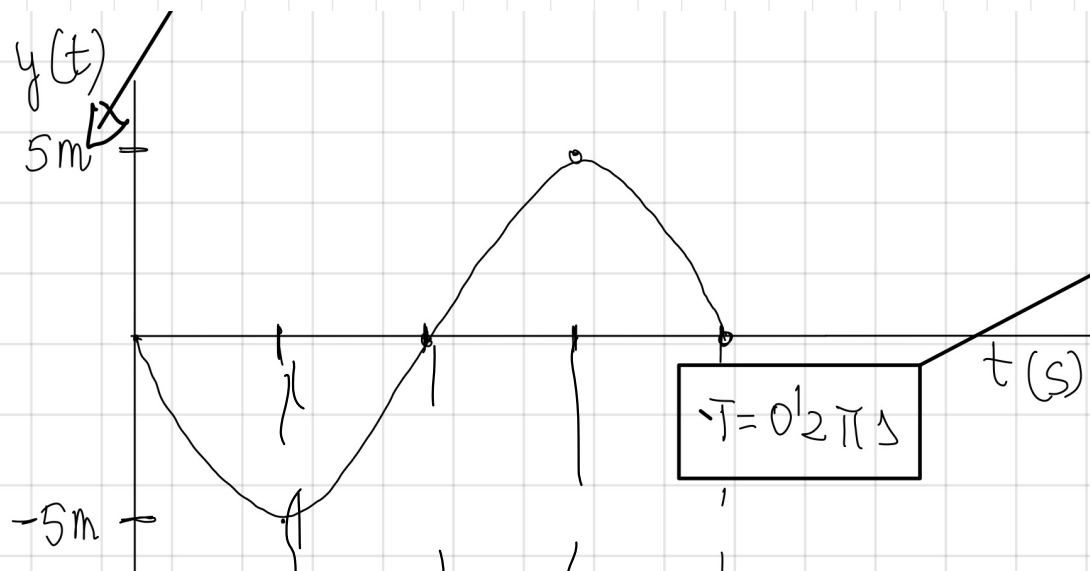
$$\omega' = \frac{\omega}{2}$$

$T = 0.4\pi s$

$$y(t) = 10 - \sin(5t + \pi)$$

b) Represente gráficamente la velocidad y la aceleración del movimiento armónico simple dado por la ecuación $y(t) = 5 \cdot \text{sen}(10t + \pi)$ (S.I)

PÁGINA WEB

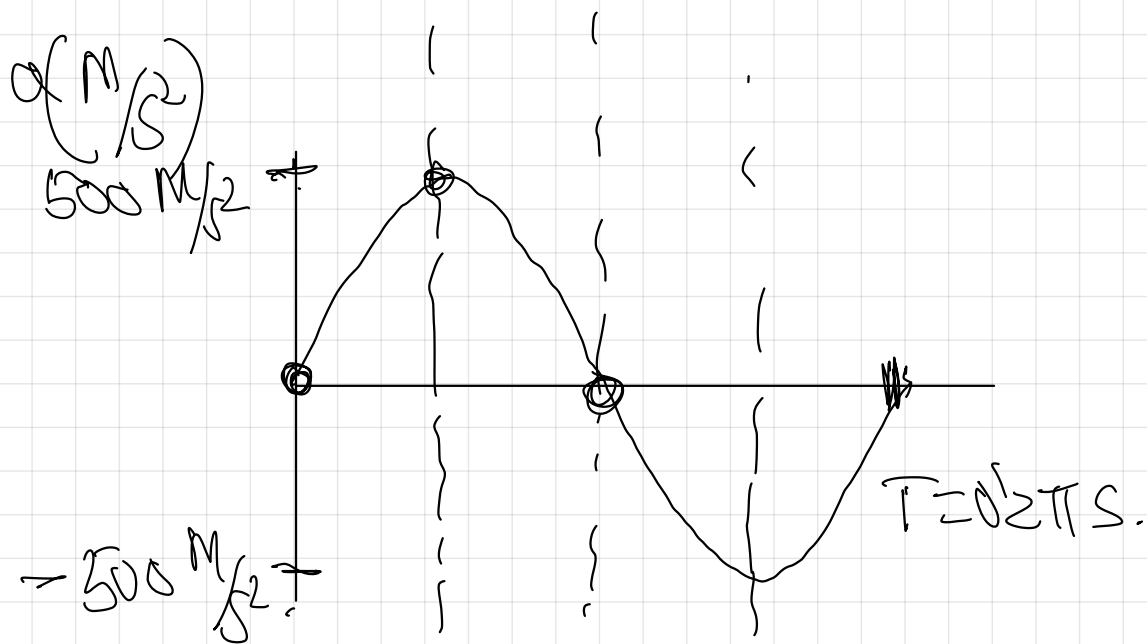


$$v = \frac{dy}{dt} = 5 \cdot \cos(10t + \pi) \cdot 10$$

$$v(t) = 50 \cdot \cos(10t + \pi) \text{ (S.I)}$$

$$v_{\text{max}} = \pm 50 \text{ m/s}$$

$$v(t) = 50 \cdot \cos(10t + \pi)$$



$$a = \frac{dv}{dt} = 500 \cdot [-\cos(10t + \pi)] \cdot 10$$

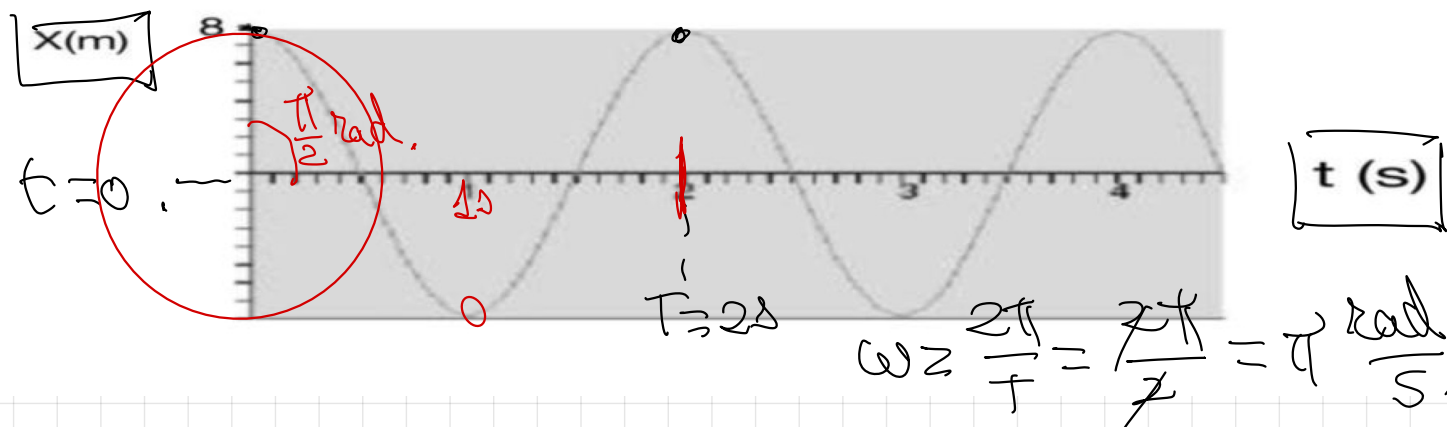
$$a(t) = -5000 \cdot \cos(10t + \pi) \quad (\text{S.I.})$$

$$a_{\max} = \pm 5000 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

4.- En la gráfica se muestra la posición en función del tiempo para una partícula que describe un m.a.s.

a) Escribir la ecuación del m.a.s en unidades S.I.

b) Calcular su posición, su velocidad y su aceleración en el instante $t=1\text{s}$, comentando los resultados.



a)

$$y(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$x(t) = 8 \cdot \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

$$x(t) = 8 \cdot \cos(\pi t) \text{ (S.I.)}$$

Cálculo de φ_0 .

$$t=0$$

$$x=8\text{m}$$

$$8\text{m} \rightarrow x(t) = 8 \cdot \sin(\pi t + \varphi_0)$$

$$8 = 8 \cdot \sin \varphi_0$$

$$\frac{8}{8} = \sin \varphi_0 \quad \sin \varphi_0 = 1$$

$$\varphi_0 = \arcsin 1$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

posición en $t=1\text{s}$.

$$x(t) = 8 \cdot \cos(\pi t) \text{ (S.I.)}$$

$$x(t=1\text{s}) = 8 \cdot \cos(\pi \cdot 1)$$

$$x(t=1\text{s}) = -8\text{m}$$

Ha transcurrido $\frac{T}{2}$ s, el móvil está en el extremo opuesto (describió medio ciclo)

$$x(t) = 8 \cdot \cos(\pi t) \text{ (S.I.)}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 8 \cdot [-\text{sen}(\pi t)] \cdot \pi$$

$$v(t) = -8\pi \cdot \text{sen}(\pi t)$$

$$\boxed{t=1\text{s.}}$$
$$v(t=1\text{s}) = -8\pi \cdot \text{sen}(\pi)$$

|

$$v(t=1\text{s}) = 0$$

En el extremo de la trayectoria está en reposo.

$$v(t) = -8\pi \sin(\pi t)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -8\pi [\cos(\pi t)] \cdot \pi$$

$$a(t) = -8\pi^2 \cos(\pi t) \quad (\text{SI})$$

$$t = 1 \text{ s.}$$

$$a(t=1 \text{ s}) = -8\pi^2 \cos(\pi)$$

$$a(t=1 \text{ s}) = +8\pi^2 \text{ m/s}^2$$

$$a_{\max} = A\omega^2$$

$$a_{\max} = 8\pi^2 \text{ m/s}^2$$

→ En el extremo de la trayectoria adquiere su a_{\max} .

5.- La ecuación de un m.a.s viene dada por la expresión

$$x(t) = 0,5 \cdot \cos(\pi t) \text{ (S.I.)}$$

a) Calcular su amplitud, su ángulo de fase inicial, su periodo, su frecuencia y su posición al cabo de 0,5 segundos.

b) Calcular la velocidad y la aceleración máximas que podría alcanzar en su movimiento.

$$a) A = 0,5 \text{ m}$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

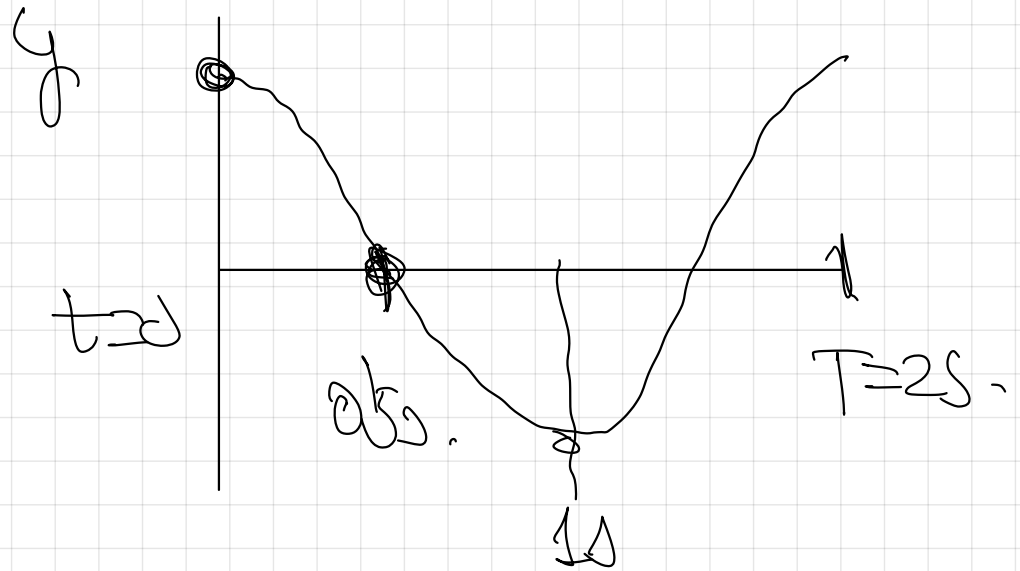
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \text{ s}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ Hz}$$

$$x(t) = 0,5 \cdot \cos(\pi t) \text{ (S.I.)}$$

$$x(t) = 0,5 \cdot \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$



$$x(t) = 0.5 \cdot \cos(\pi t) \quad (\text{S.I.})$$

$$t = 0.5 \text{ s} \quad x(t = 0.5 \text{ s}) = 0.5 \cdot \cos(\pi \cdot 0.5) \quad (\text{S.I.})$$

$$x(t = 0.5 \text{ s}) = 0 \text{ m}$$

b)

$$x(t) = 0.5 \cdot \cos(\pi t) \quad (\text{S.I.})$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 0.5 \cdot [-\sin(\pi t)] \cdot \pi,$$

$$v(t) = -0.5 \pi \cdot \sin(\pi t) \quad (\text{S.I.})$$

$$v_{\max} = \pm 0.5 \pi \text{ m/s}.$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -0.5\pi \cdot (\cos \pi t) \cdot \pi$$

$$a = -0.5\pi^2 \cdot \cos(\pi t)$$

$$a_{\max} = \pm 0.5\pi^2 \text{ m/s}^2$$

6.- La ecuación de un cuerpo que describe un m.a.s es $x(t) = 10 \cdot \sin(\pi t + 3\pi/2)$ (S.I.).

a) ¿Cuánto valen la amplitud, el periodo y la frecuencia del movimiento?

b) Representar gráficamente la posición en función del tiempo

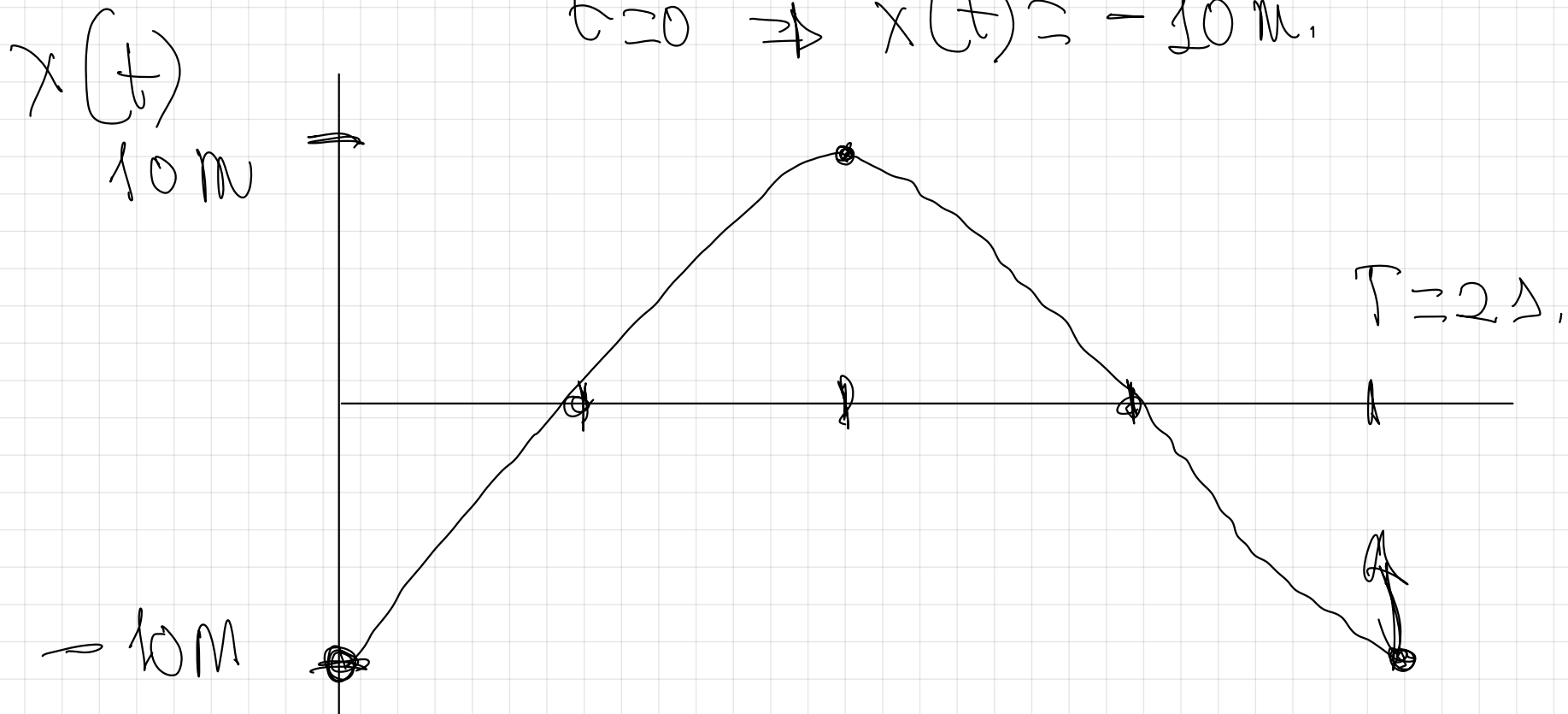
c) ¿Cuánto valen la velocidad y la aceleración del cuerpo para $t = 2\text{s}$?

a) $A = 10 \text{ m}$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \text{ s}, \quad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ Hz}$$

$$x(t) = 10 \cdot \sin\left(\pi t + \frac{3}{2}\pi\right) \text{ (SI)}$$

$$t=0 \Rightarrow x(t) = -10 \text{ m}$$



$$x(t) = 10 \cdot \sin\left(\pi t + \frac{3}{2}\pi\right)$$

$$t = 2s$$

$$x(t=2s) = 10 \cdot \sin\left(2\pi + \frac{3}{2}\pi\right)$$

$$x(t=2s) = 10 \cdot \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)$$

$$x(t=2s) = -10 \text{ m}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 10 \cdot \left[\cos\left(\pi t + \frac{3}{2}\pi\right) \right] \cdot \pi$$

$$v = 10\pi \cdot \cos\left(\pi t + \frac{3}{2}\pi\right) \quad (\text{SI})$$

$$t = 2s$$

$$v(t=2s) = 10\pi \cdot \cos\left(2\pi + \frac{3}{2}\pi\right) \quad (\text{SI})$$

$$v(t=2s) = 10\pi \cdot \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right)$$

$$v(t=2s) = 0.$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -10\pi \cdot \left[-\sin\left(\pi t + \frac{3}{2}\pi\right) \right] \cdot \pi.$$

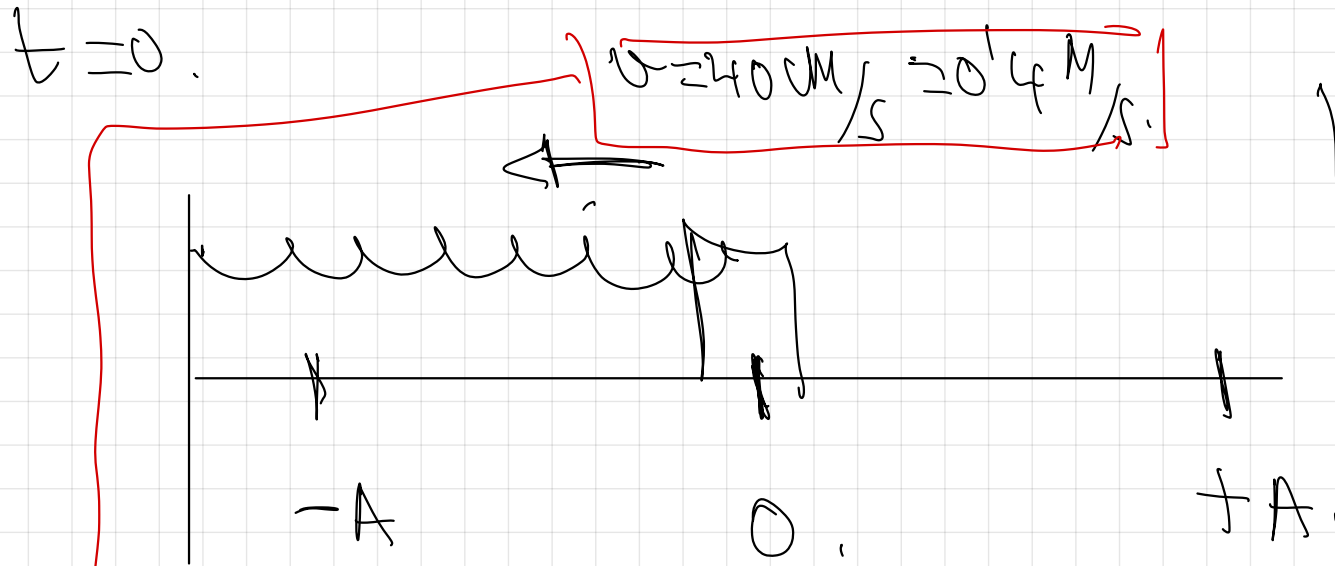
$$a(t) = 10\pi^2 \cdot \sin\left(\pi t + \frac{3}{2}\pi\right)$$

$$t=2s: \quad a(t=2s) = 10\pi^2 \cdot \sin\left(2\pi + \frac{3}{2}\pi\right)$$

$$a(t=2s) = 10\pi^2 \frac{m}{s^2}$$

7.- Un punto material está animado con un movimiento armónico simple en el eje X, alrededor de su posición de equilibrio en $x=0$. En el instante $t=0$, el punto material está situado en $x=0$ y se desplaza en el sentido negativo del eje X con una velocidad de $40 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$. La frecuencia del movimiento es de 5 Hz . Determinar:

- La posición en función del tiempo o ecuación del movimiento armónico simple
- La posición y la velocidad en el instante $t=5 \text{ s}$



$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$v_{\max} = A \cdot \omega$$

$$v_{\max} = A \cdot \omega$$

$$A = \frac{v_{\max}}{\omega} = \frac{0.4 \text{ m/s}}{10 \pi \text{ rad/s}} = 0.013 \text{ m}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 5 = 10\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$x(t) = 0.01 \text{ g} \cdot \sin(10\pi t + \pi)$$

$$t=0$$

$$x=0, \quad 0 = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$0 = \sin \varphi_0$$

$$\varphi_0 = \arcsin 0 = 0^\circ \quad \boxed{180^\circ = \pi \text{ rad}}$$

ya que se mueve
en el sentido
negativo



b) Posición y velocidad en $t=5\text{s}$

$$x(t) = 0.013 - 2m(10\pi t + \pi) \quad (\text{S.I.})$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10\pi} = 0.2\text{s}$$

$$x(t) = 0.013 \cdot \sin(10\pi t + \pi) \quad (\text{S.I.})$$

$$t = 5 \text{ s.} \quad x(t=5) = 0.013 \cdot \sin(10\pi \cdot 5 + \pi) \quad (\text{S.I.})$$

$$x(t=5) = 0.013 \cdot \sin(50\pi + \pi) \quad (\text{S.I.})$$

$$x(t=5) = 0$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 0.013 \cdot \left[\cos(10\pi t + \pi) \right] \cdot 10\pi$$

$$v = 0.13 \cdot 10\pi \cdot \cos(10\pi t + \pi)$$

$$v(t) = 0.4 \cdot \cos(10\pi t + \pi) \quad (5.7)$$

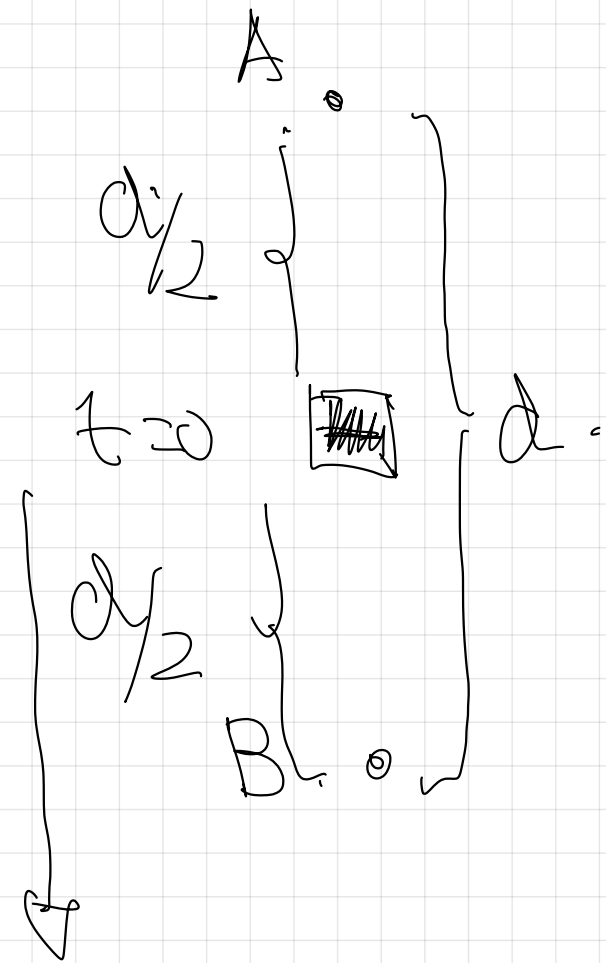
$$v(t=5) = 0.4 \cdot \cos(50\pi + \pi)$$

$$v(t=5) \stackrel{||}{=} 0.4 \text{ m/s.}$$

8.-Una partícula describe un movimiento armónico simple entre dos puntos A y B que distan una distancia vertical d , con un periodo T .

a) Escriba la ecuación de dicho movimiento armónico simple sabiendo que para $t=0$ la partícula se encuentra en el punto medio del segmento AB. Realizar una gráfica cualitativa de la elongación en función del tiempo.

b) Repita el apartado a) suponiendo que el periodo hubiese sido la mitad.



$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$y(t) = \frac{d}{2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

$$t = 0$$

$$y = 0$$

$$y = \frac{d}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right)$$

$$\text{se } \varphi_0 = 0$$

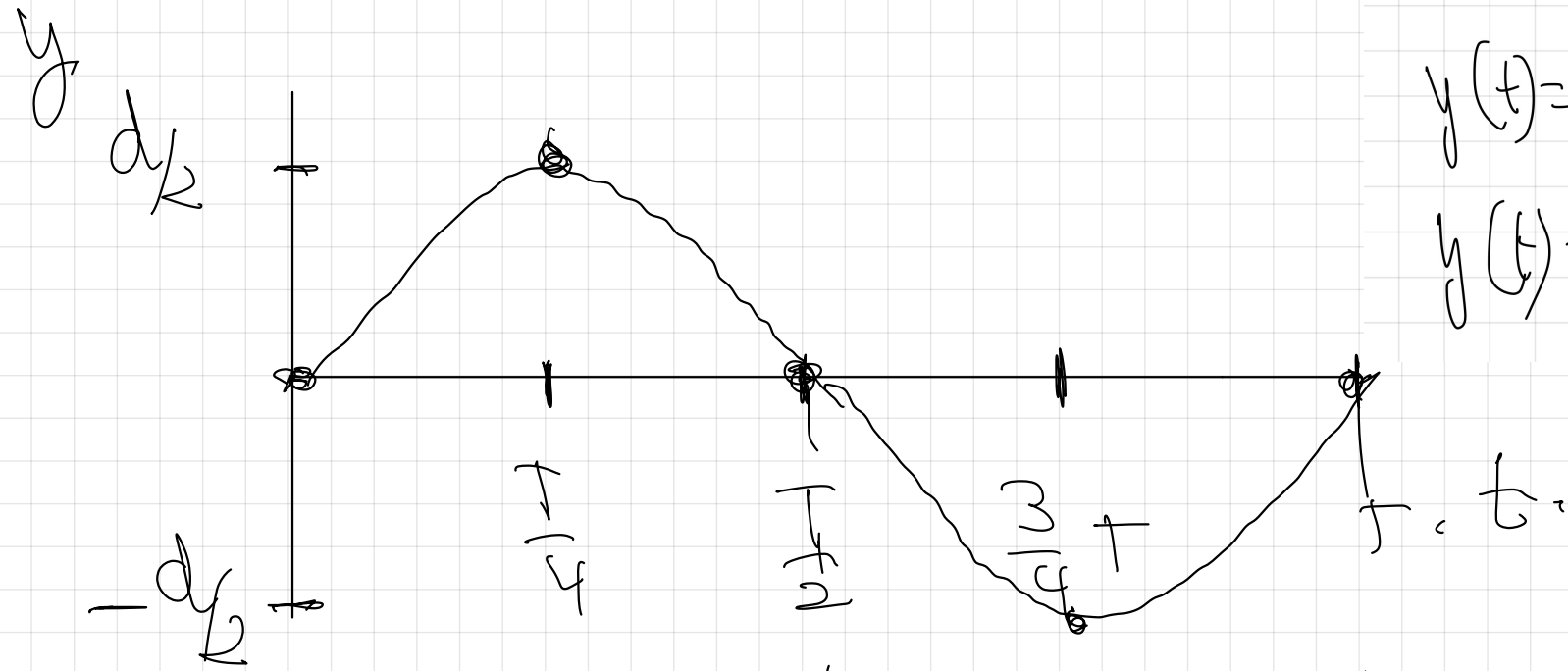
$$\varphi_0 = 0 \text{ or } 180^\circ$$



$\Rightarrow \varphi_0 = 0$ al no especificar
 π or $t = 0$ sube o
baja.

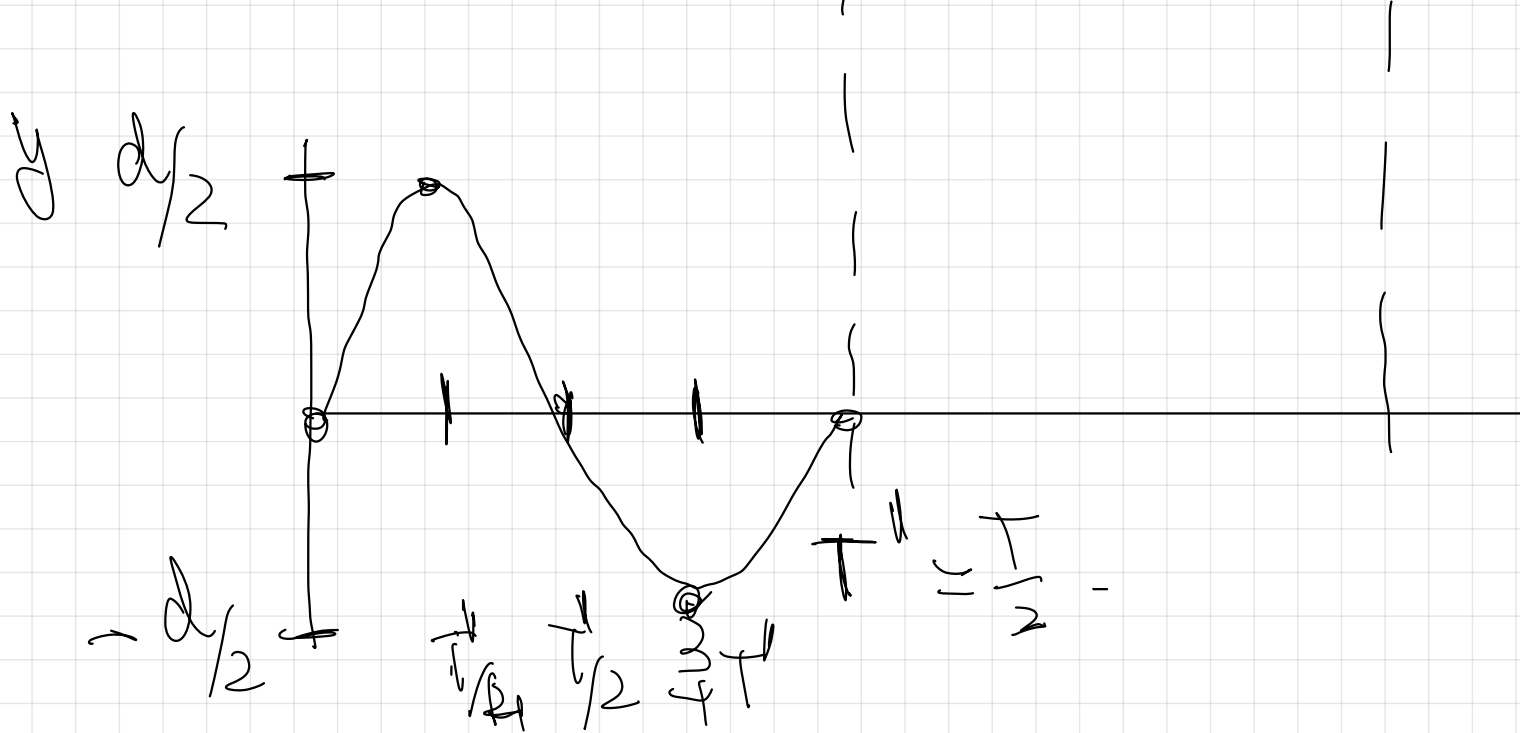
$$y = \frac{d}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$y = \frac{d}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$$



$$y(t) = \frac{d}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$$

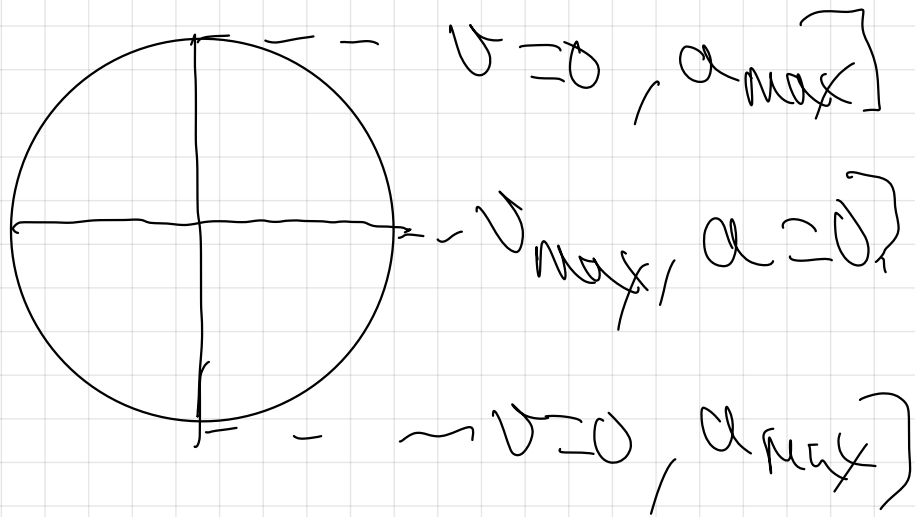
$$y(t) = \frac{d}{2} \sin(\omega t)$$



$$- y(t) = \frac{d}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{T/2} t\right)$$

$$y(t) = \frac{d}{2} \sin(2\omega t)$$

9.- ¿Pueden anularse simultáneamente la velocidad y la aceleración de un movimiento armónico simple?



$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = \frac{dy}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$



$$a = \frac{dv}{dt} = A \cdot \omega^2 \cdot [-\sin(\omega t + \varphi_0)]$$

$$a = -A \omega^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

~~$v = A \omega \cdot (\cos(\omega t + \varphi_0))$~~
 porque la v es función de
 la posición.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

$$\sin^2(\omega t + \varphi_0) + \cos^2(\omega t + \varphi_0) = 1$$

$$a = -\omega^2 \cdot y$$

y
aceleración
en función
de la
posición.

$$|\cos(\omega t + \varphi_0)| = \sqrt{1 - \sin^2(\omega t + \varphi_0)} \quad y = 0 \Rightarrow a = 0.$$

$$v = A \cdot \omega \cdot \sqrt{1 - \sin^2(\omega t + \varphi_0)}$$

$$y = \pm A \Rightarrow a_{\max} = \pm \omega^2 \cdot A$$

$$v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - A^2 \cdot \sin^2(\omega t + \varphi_0)}$$

y^2

$$v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - y^2}$$

aceleración
en función
de la
posición.

$$a = -\omega^2 \cdot y$$

aceleración
en función
de la
posición

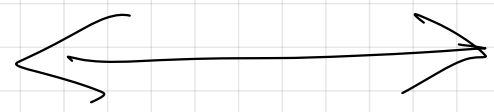
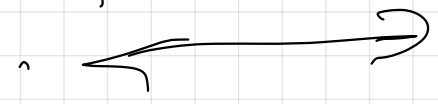


$$y = 0 \Rightarrow v_{\max} = A \cdot \omega$$

$$y = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$y = \pm A \Rightarrow v = 0$$

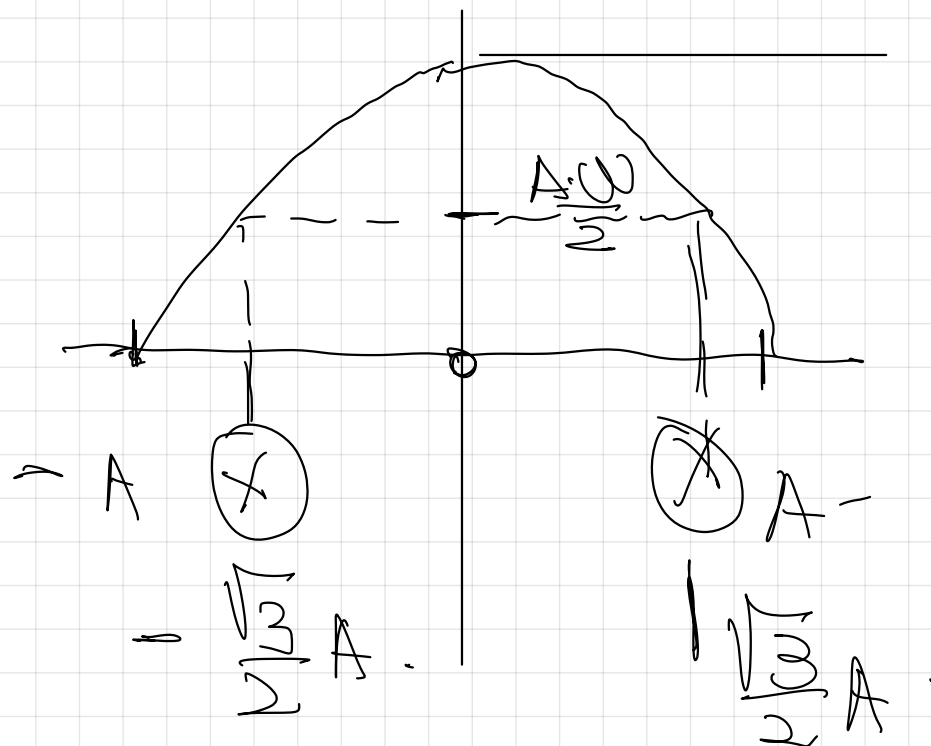
$$y = \pm A \Rightarrow a_{\max} = \pm \omega^2 \cdot A$$



10.- ¿En qué posición del movimiento armónico simple la velocidad es igual a la mitad de su valor máximo?

$$v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - x^2}$$

$$v_{\max} = A \cdot \omega$$



$$v_{\max} = A \cdot \omega$$

v_{\max}

$$2. \quad A \cdot \left[\frac{v}{2} \right] = \omega \cdot \sqrt{A^2 - \cancel{x^2}} ?$$

$$\frac{A \cdot \cancel{v}}{2} = \cancel{\omega} \cdot \sqrt{A^2 - x^2} \quad \hookrightarrow \text{despej}$$

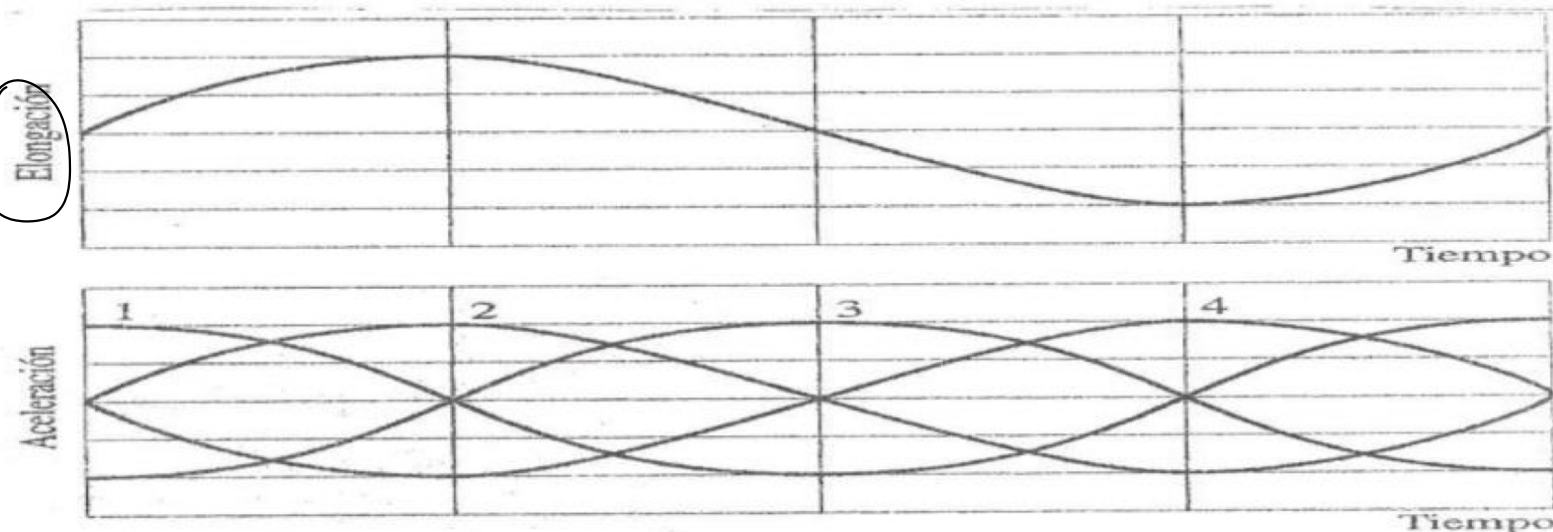
$$\left(\frac{A}{2} \right)^2 = \left(\sqrt{A^2 - x^2} \right)^2$$

$$\frac{A^2}{4} = A^2 - \cancel{x^2} \quad \rightarrow \quad x^2 = A^2 - \frac{A^2}{4}$$

$$x^2 = \frac{3}{4} A^2$$

$$\boxed{x = \frac{\sqrt{3}}{2} A}$$

11.- En la primera de las dos gráficas que se muestran, se representa la variación con el tiempo del desplazamiento (elongación) que experimenta una partícula que se mueve con un m.a.s. ¿cuál de las curvas numeradas en la segunda gráfica puede representar la variación de la aceleración con el tiempo del citado m.a.s?



$$y = A \cdot \text{sen}(\omega t)$$

$$v = \frac{dy}{dt} = A \cdot \omega \cdot \text{cos}(\omega t)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}(\omega t)$$

$$a = \underbrace{A \cdot \omega^2}_{\text{sen}(\omega t + \varphi_0)}$$

$$a = \omega^2 \cdot y''$$

y''	$a \ominus$
y'	$a \oplus$

12.-Suponiendo la gravedad constante y que no existen pérdidas energéticas, ¿es periódico el movimiento que efectúa una bola elástica al rebotar sobre una mesa?, ¿es oscilatorio?, ¿es armónico simple?

Responder nuevamente a las tres cuestiones anteriores, suponiendo la gravedad constante y que si existen pérdidas energéticas.

- \sqrt{g}

4.- MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE : CARACTERÍSTICAS DINÁMICAS

Conociendo la ecuación de la aceleración del M.A.S podemos calcular la fuerza que debe

2ª ley
de Newton

$$F = m \cdot a.$$

$a = -\omega^2 \cdot y$
a del M.A.S.

$$F = m \cdot (-\omega^2 \cdot y)$$

$$F = - \underbrace{m \cdot \omega^2}_{k} y$$

$$F \rightarrow K \cdot y$$

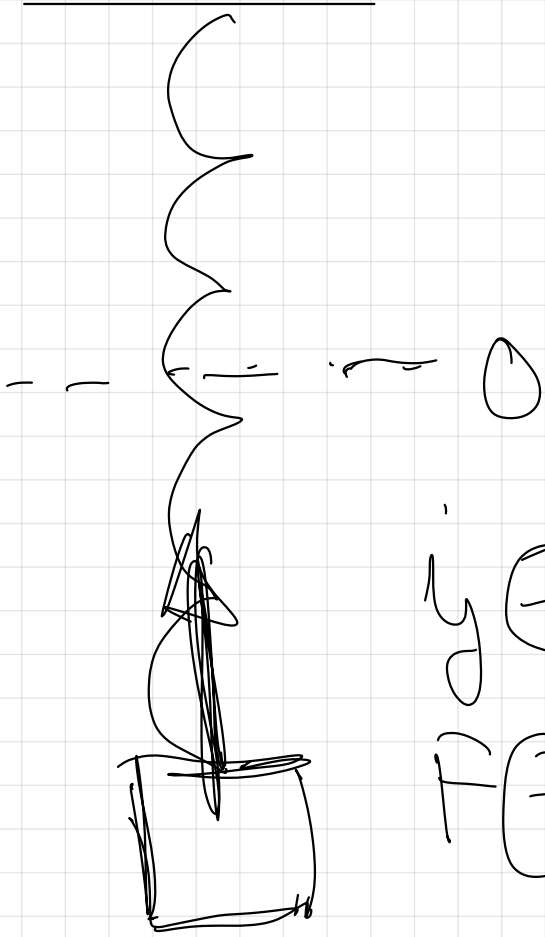
$$K = m \cdot \omega^2$$

$$K \rightarrow K \cdot g \cdot \text{rad/s}^2$$

$$\left[\frac{K}{\text{s}^2} \right]$$

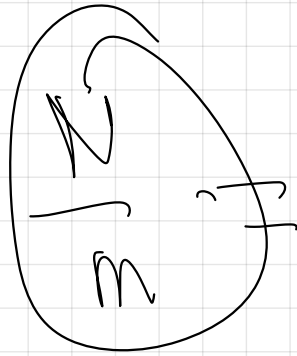
$$\left[\frac{N}{m} \right]$$

$$\frac{K \cdot g}{\text{s}^2}$$



$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

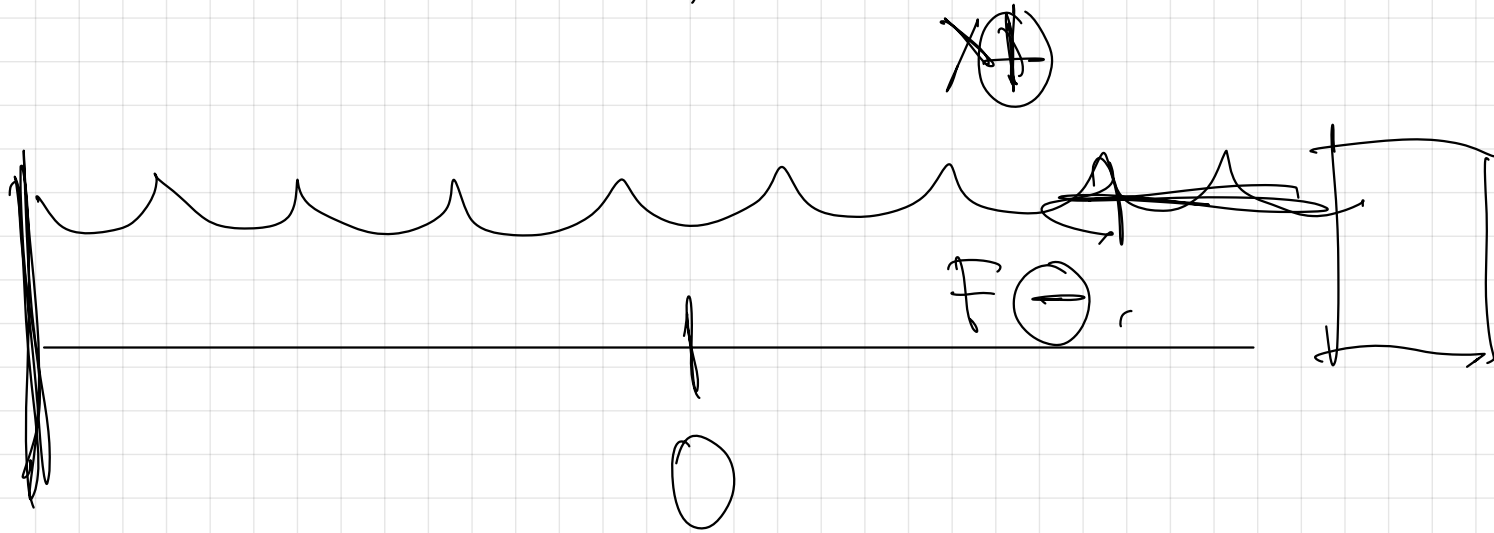
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$



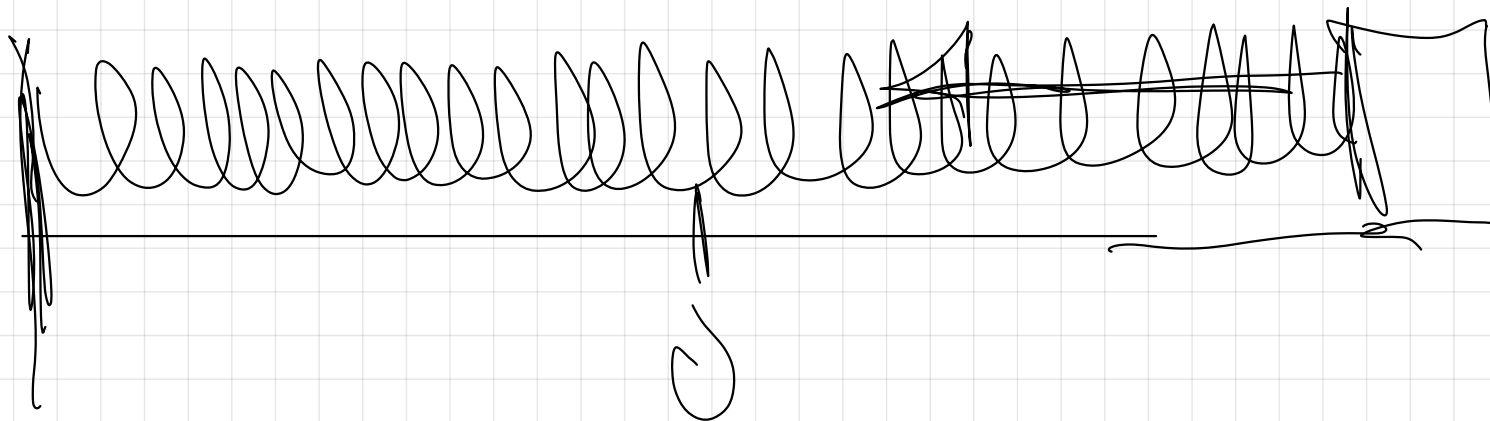
$$\frac{Kg \cdot M / s^2}{M} =$$

$$\frac{Kg}{s^2}$$

Es la misma para el mismo muelle



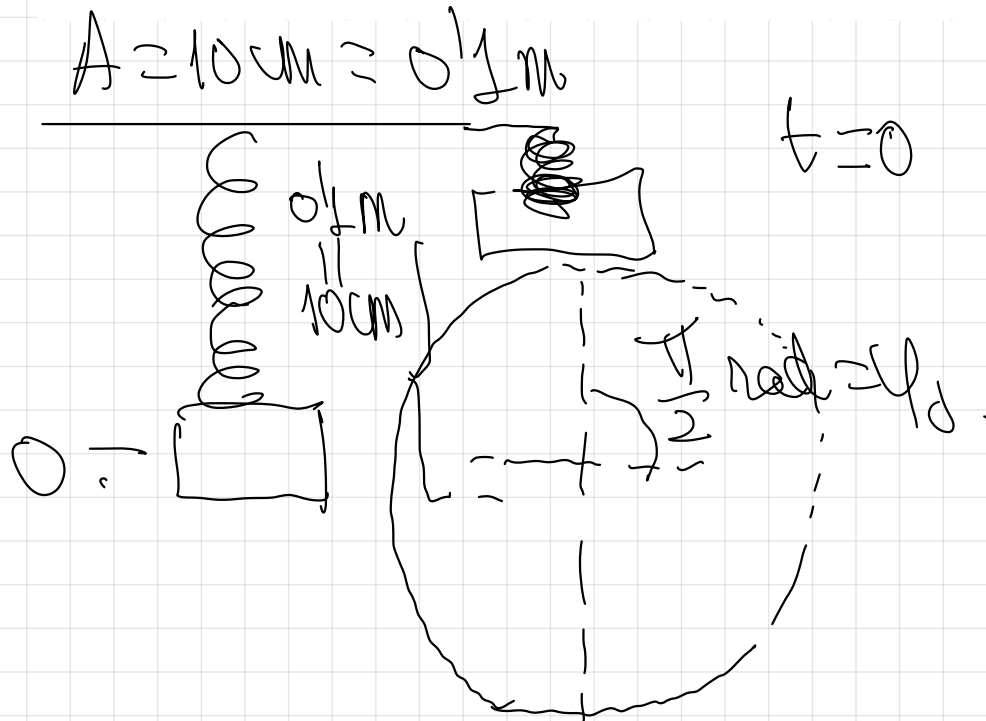
$$K = 10 \frac{N}{m}$$



$$K = 1000 \frac{N}{m}$$

14.- Una masa de 2 Kg cuelga de un resorte cuya constante elástica es $K=200 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ y puede oscilar libremente sin rozamiento. Desplazamos la masa 10 cm por encima de su posición de equilibrio y la soltamos para que empiece a oscilar.

- Calcula la ecuación del movimiento de la masa
- Representa gráficamente la posición de la masa en función del instante t
- Representa gráficamente la velocidad de la masa en función del instante t
- Representa gráficamente la aceleración de la masa en función del instante t
- Calcula su velocidad máxima y su aceleración máxima
- Calcula la fuerza recuperadora y la aceleración cuando la masa se encuentra 5 cm por encima de la posición de equilibrio
- Repetir el apartado f) para el caso en el que la masa se encuentre 7 cm por debajo de la posición de equilibrio.



$$y = A \cdot \sin(\omega t + \phi_0)$$

$$y = 0.1 \cdot \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (SI)}$$

$$y = 0.1 \cdot \cos(10t) \text{ (SI)}$$

$t=0$

$y=A$

$$K = m \cdot \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{200}{2}} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\sin \phi_0 = \frac{A}{A} = 1 \quad \phi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

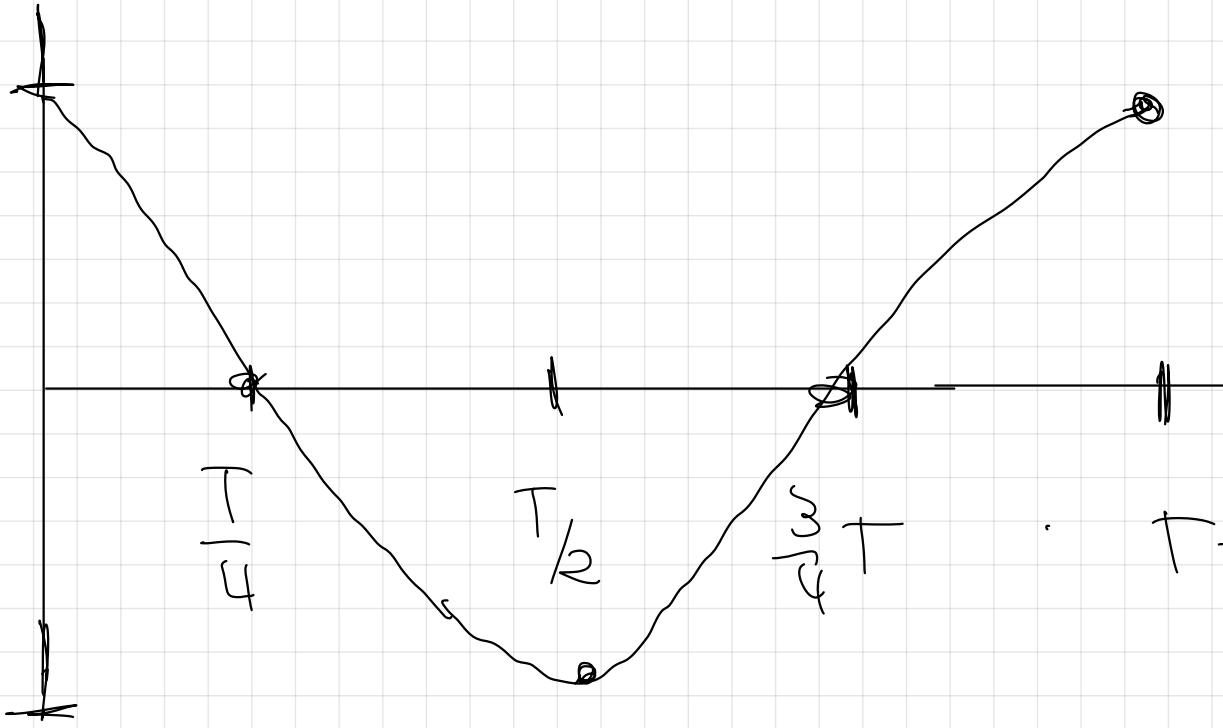
$$y = 0.1 \cdot \cos(10t) \quad (\text{s:7})$$

$$\omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$y(\text{cm})$

0.1 m

-0.1 m



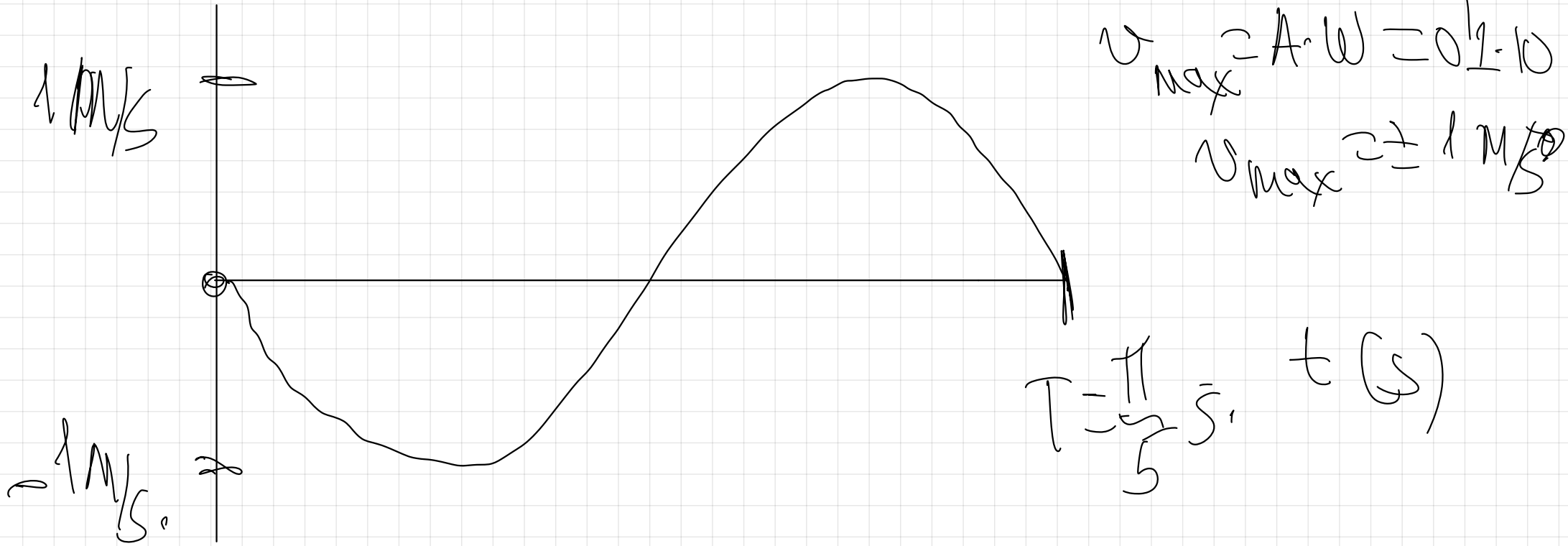
$$\omega = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5} \text{ s}$$

$$T = \frac{\pi}{5} \text{ s}$$

$$v = \frac{dy}{dt} = 0.1 \cdot [-\sin(10t)] \cdot 10$$

$$v = 1 \cdot \sin(\omega t) \quad [5 \pm]$$

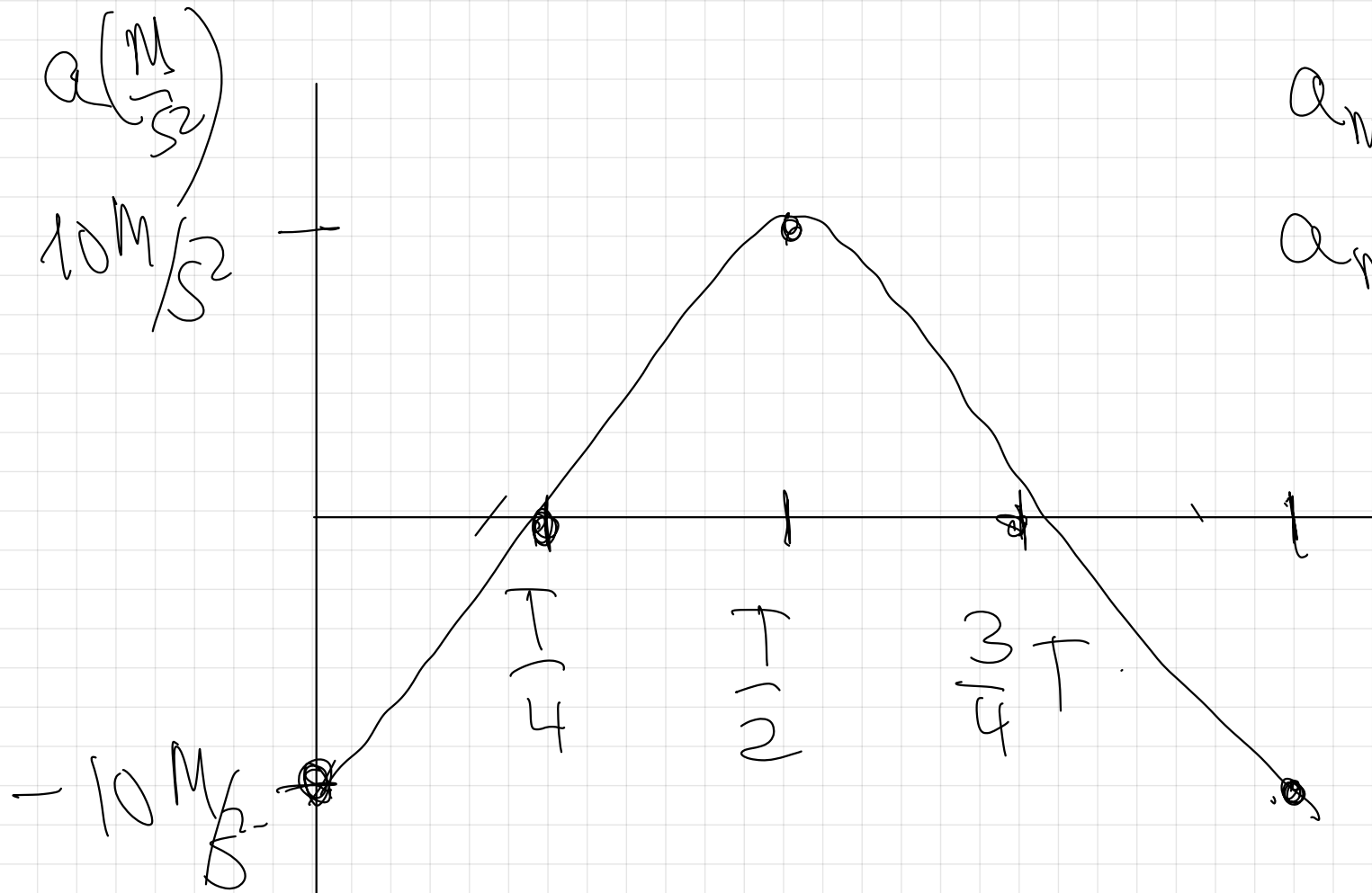


$$a = \frac{dv}{dt} = -1 \cdot (\cos(\omega t)) \cdot 10$$

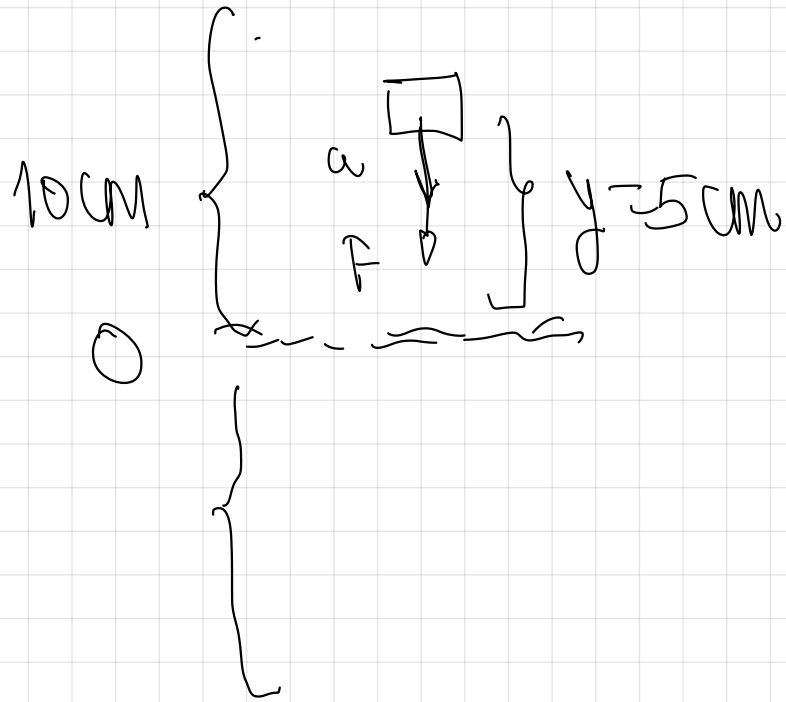
$$a = -10 \cdot \cos(\omega t) \quad (\text{CSI})$$

$$a_{\max} = A \cdot \omega^2$$

$$a_{\max} = 0.1 \cdot 10^2 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



$t \text{ (s)}$



$$y \oplus$$

$$a \ominus$$

$$F \ominus$$

$$y = +5 \text{ cm} = 0.05 \text{ m}$$

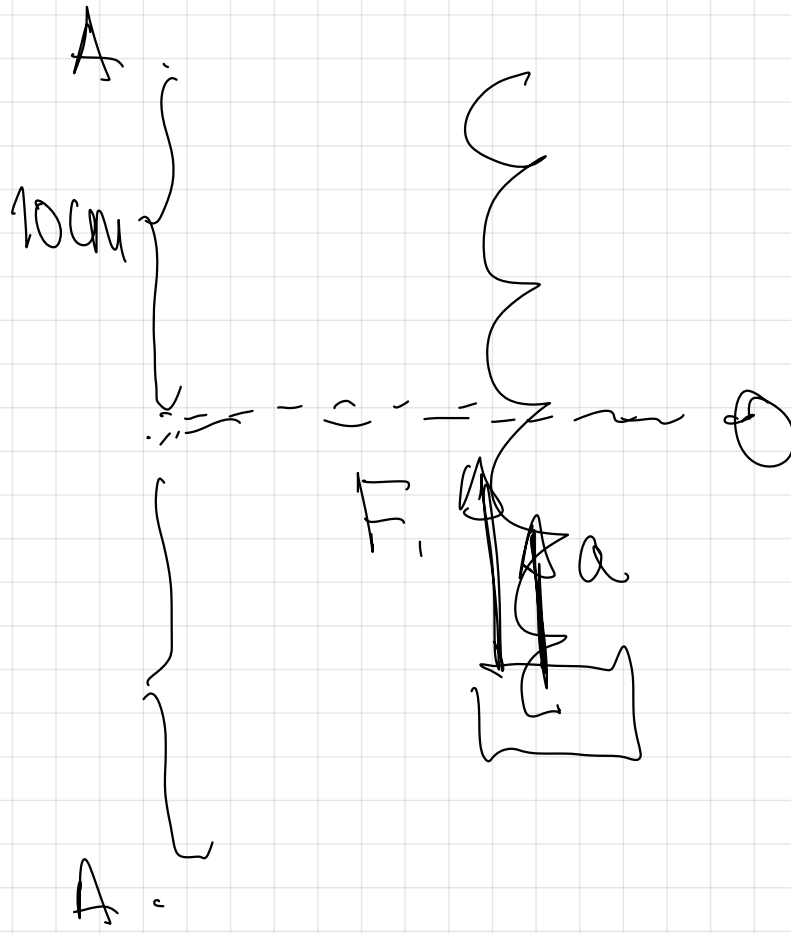
$$a = -\omega^2 y = -10^2 \cdot 0.05$$

$$a = -5 \text{ m/s}^2$$

$$F = -ky$$

$$F = -200 \cdot 0.05$$

$$F = -10 \text{ N}$$



$$y = -7 \text{ cm} = -0.07 \text{ m}$$

$$F = k \cdot y$$

$$F = 200 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0.07 \text{ m} = 14 \text{ N}$$

$$a = -\omega^2 \cdot y$$

$$a = -10^2 \cdot (-0.07) = 7 \text{ m/s}^2$$

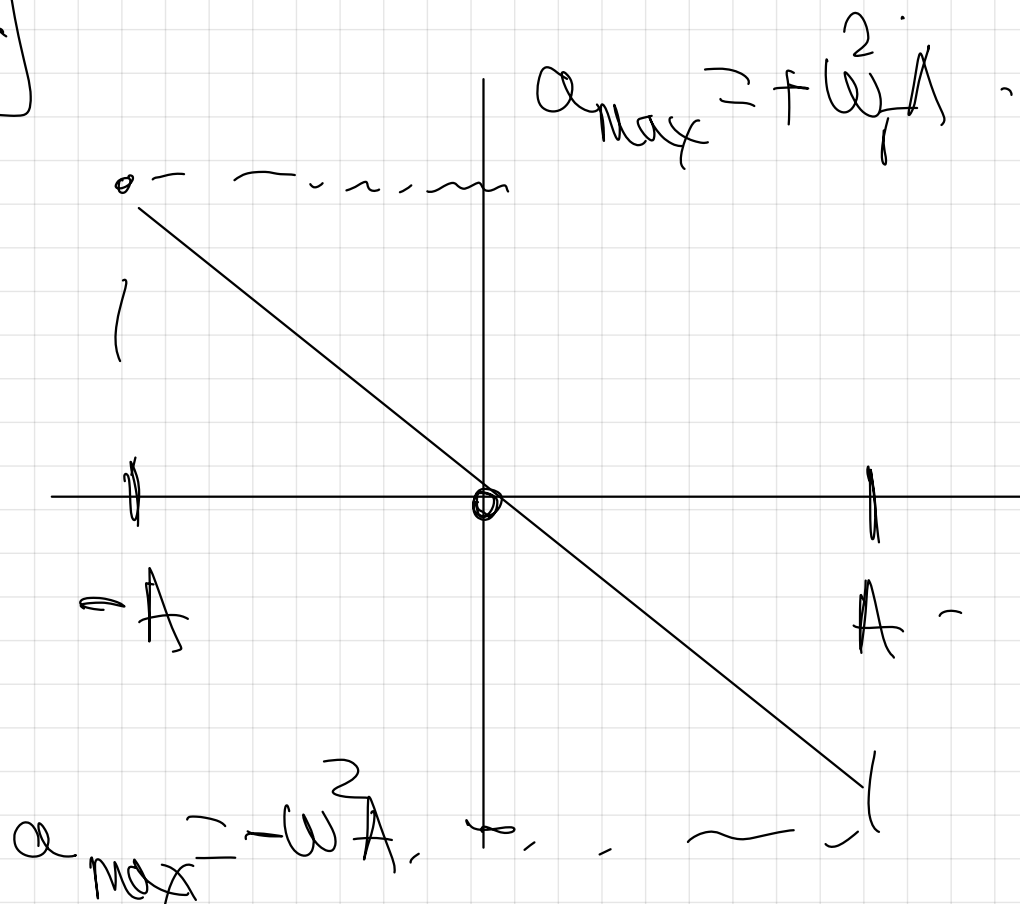
13.- a) Representar gráficamente la aceleración de un movimiento armónico simple en función de la posición.

b) Representar gráficamente la fuerza recuperadora de un movimiento armónico simple en función de la posición.

c) Representar gráficamente la fuerza recuperadora de un movimiento armónico simple en función del instante t suponiendo que el ángulo de fase inicial es cero.

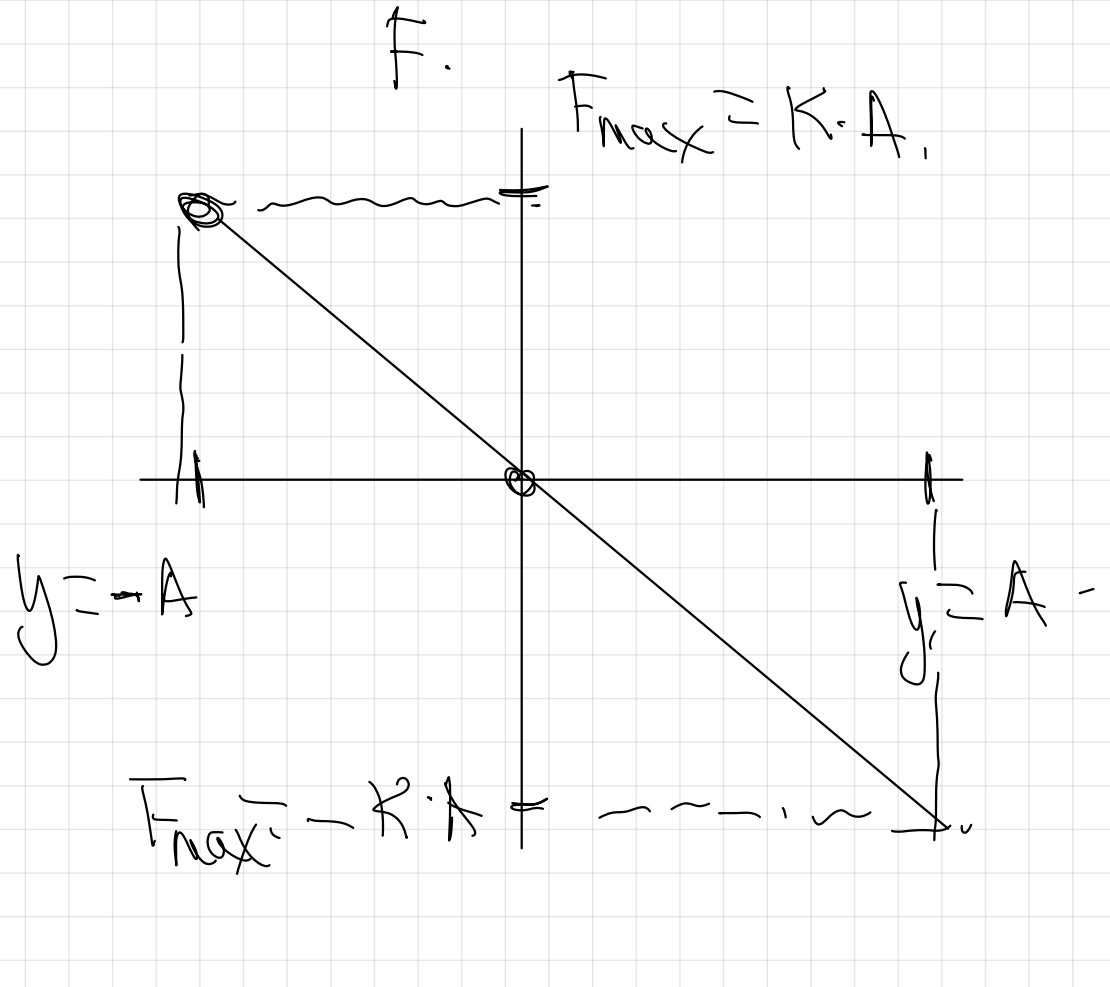
a)

$$a = -\omega^2 x$$



b)

$$F = -K \cdot y$$

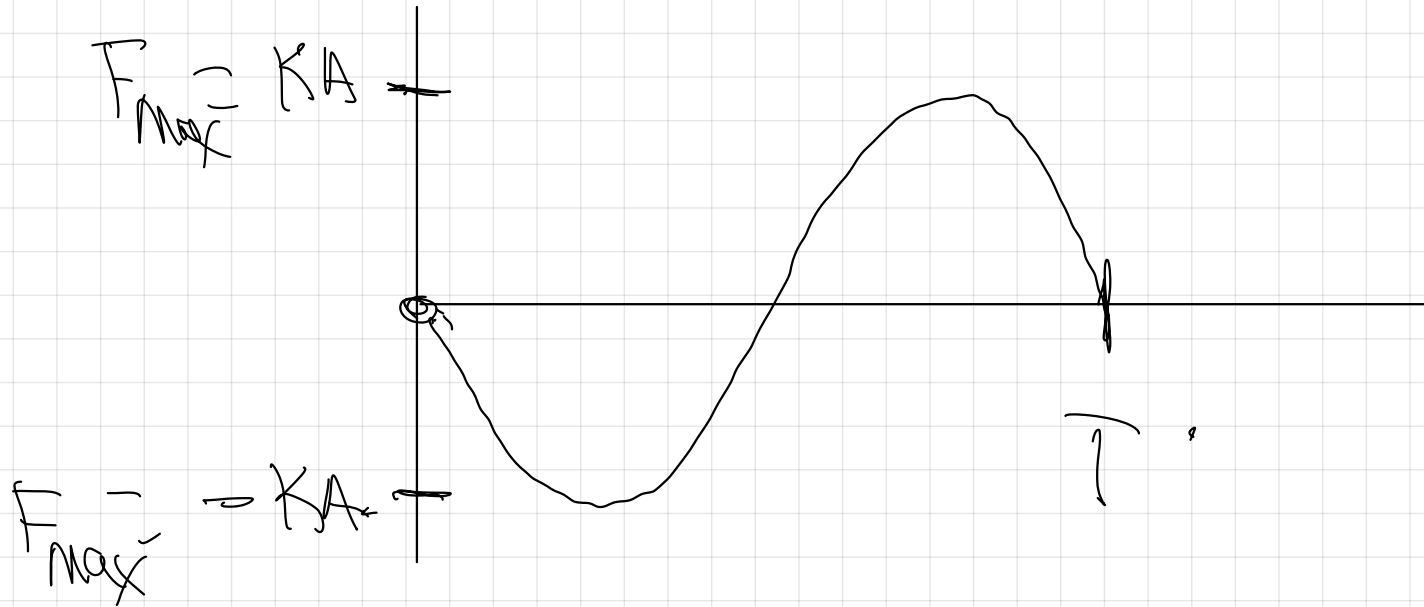


c)

$$F = -K \cdot A \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$F \approx K \cdot A \cdot \sin(\omega t)$$

F



14.- Una masa de 2 Kg cuelga de un resorte cuya constante elástica es $K=200 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ y puede oscilar libremente sin rozamiento. Desplazamos la masa 10 cm por encima de su posición de equilibrio y la soltamos para que empiece a oscilar.

- Calcula la ecuación del movimiento de la masa
- Representa gráficamente la posición de la masa en función del instante t
- Representa gráficamente la velocidad de la masa en función del instante t
- Representa gráficamente la aceleración de la masa en función del instante t
- Calcula su velocidad máxima y su aceleración máxima
- Calcula la fuerza recuperadora y la aceleración cuando la masa se encuentra 5 cm por encima de la posición de equilibrio
- Repetir el apartado f) para el caso en el que la masa se encuentre 7 cm por debajo de la posición de equilibrio.

$K=200 \text{ N/m}$
 m
 0
 0.1 m
 10 cm
 $t=0$
 $y=2A$
 $y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$
 $y(t) = 0.1 \cdot \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (SI)}$
 $y(t) = 0.1 \cdot \cos(10t) \text{ (SI)}$
 10 cm

$$K = m \cdot \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{200}{2}} = \sqrt{100} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Calculate φ_0 ,

$$\left. \begin{array}{l} t=0 \\ y=+A \end{array} \right\}$$

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$A = A \cdot \sin(\varphi_0)$$

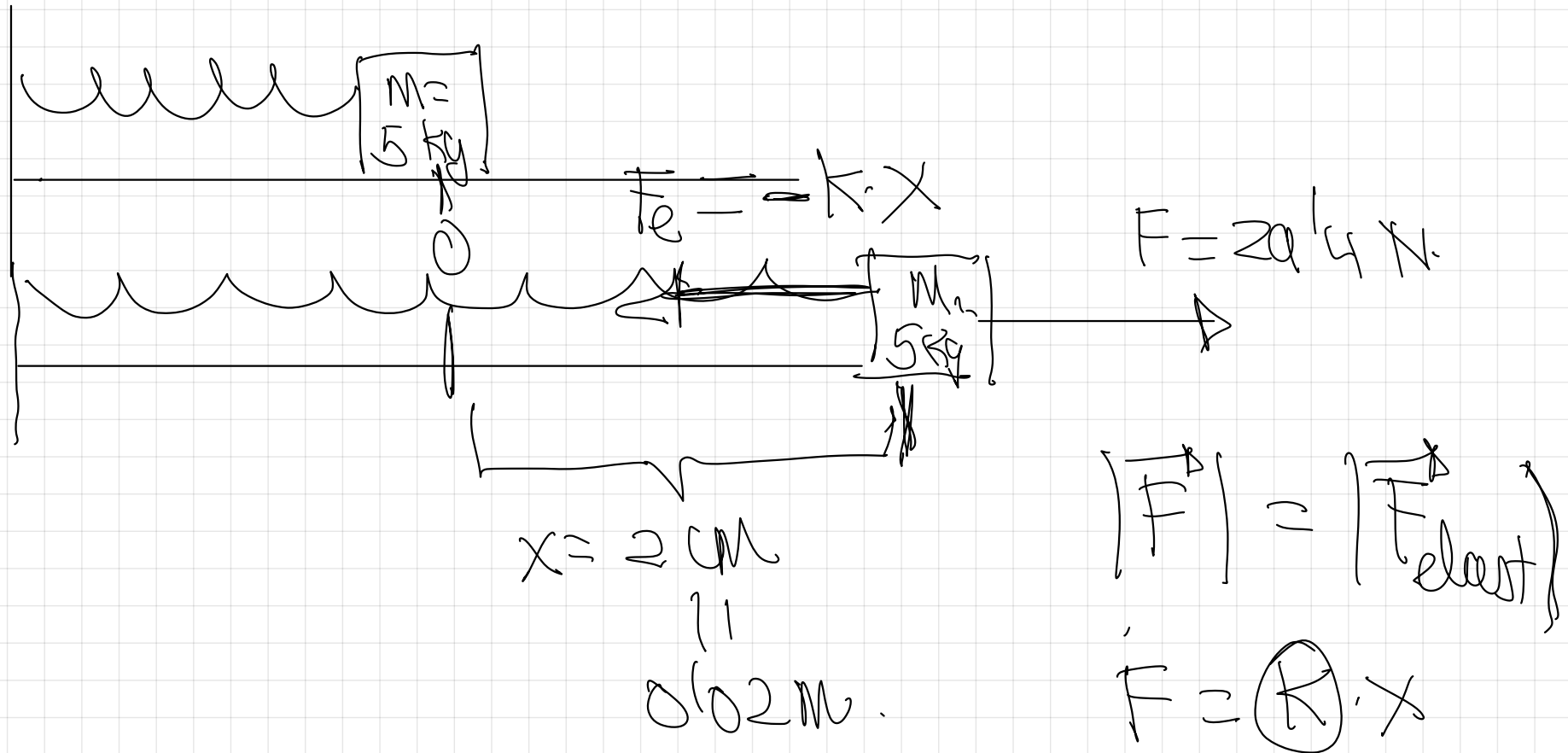
$$\sin \varphi_0 = 1 \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Ya needed

15.- Un muelle colocado horizontalmente sobre una mesa sin rozamiento, lleva en su extremo una masa de 5kg. Se sabe que una fuerza horizontal de 29,4 N alarga el muelle en 2 cm.

a) Calcular la frecuencia del movimiento

b) ¿Cómo se vería afectado el valor de la frecuencia calculada si sobre el mismo muelle con idéntica masa se hubiese ejercido inicialmente una fuerza horizontal mayor?



Subiréndola, calcula \textcircled{K} $\textcircled{K} = \frac{F}{x} = \frac{2914}{0.02} = 1470 \frac{\text{N}}{\text{m}}$

$$K = m \cdot \omega^2$$

$$\omega = \frac{2\pi f}{T} \Rightarrow \textcircled{\omega = 2\pi f}$$

$$K = m (2\pi f)^2$$

$$K = m 4\pi^2 f^2$$

$$f = \sqrt{\frac{K}{m \cdot 4\pi^2}} = \sqrt{\frac{1470 \text{ N/m}}{5 \text{ kg} \cdot 4\pi^2}} = 2.73 \text{ Hz}$$

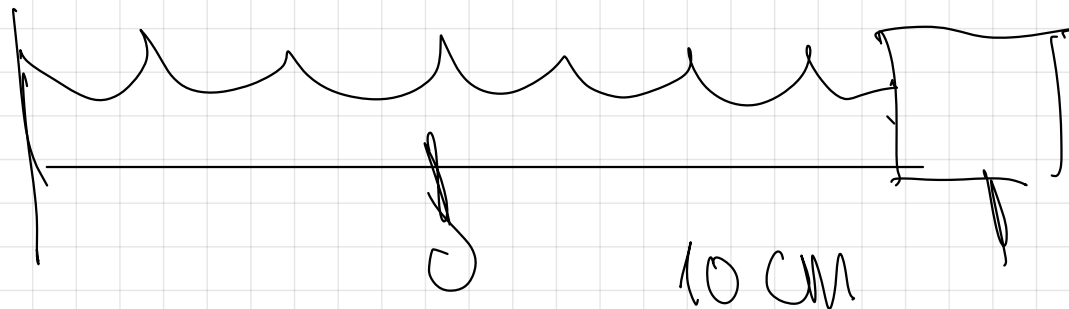
b) $f = \sqrt{\frac{\textcircled{K}}{\textcircled{m} 4\pi^2}}$ misma muelle, misma K
misma masa, oscilante

¿ no varia.

- 16.- Sobre una superficie horizontal se dispone de un cuerpo de 0,5 kg, unido a uno de los extremos de un muelle que está fijo por el otro. Cuando se tira del cuerpo hasta alargar el muelle 10 cm y se sueltan el instante inicial, comienza a oscilar con un periodo de 2 s.
- Escriba la ecuación del m.a.s y represente la posición del cuerpo en función del tiempo
 - Si se hubiese alargado el mismo muelle 10 cm pero con una masa cuatro veces mayor para soltarse en el instante inicial, escribir la nueva ecuación del m.a.s y razonar como cambiaría la representación gráfica del apartado a)
 - ¿Cómo cambiaría la ecuación y la representación del apartado a) si se hubiese comprimido inicialmente el muelle 10 cm en vez de alargarse?



$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$



$$x(t) = 0,1 \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (SI)}$$

$$x(t) = 0,1 \cdot \cos(\pi t) \text{ (SI)}$$

$$A = 0.1 \text{ m}$$

Calculo φ_0 } $t=0$
 $x=A$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ rad/s}$$

$$A = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

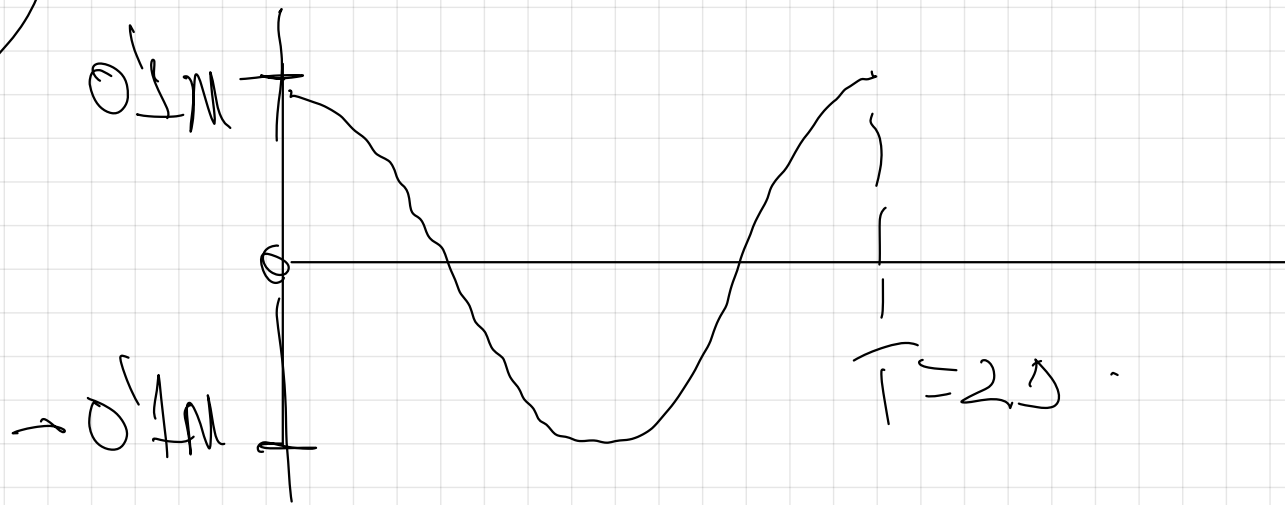
$$\frac{A}{A} = \sin \varphi_0$$

$$\sin \varphi_0 = 1 \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$x(t) = 0.1 \text{ m} \cdot \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x(t) = 0.1 \text{ m} \cdot \cos(\pi t) \quad (\text{S.I.})$$

$x(t)$



$$x(t) = 0,1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x(t) = 0,1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \quad (5T)$$

$$K = m \cdot \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

↗ *mismo muelle*

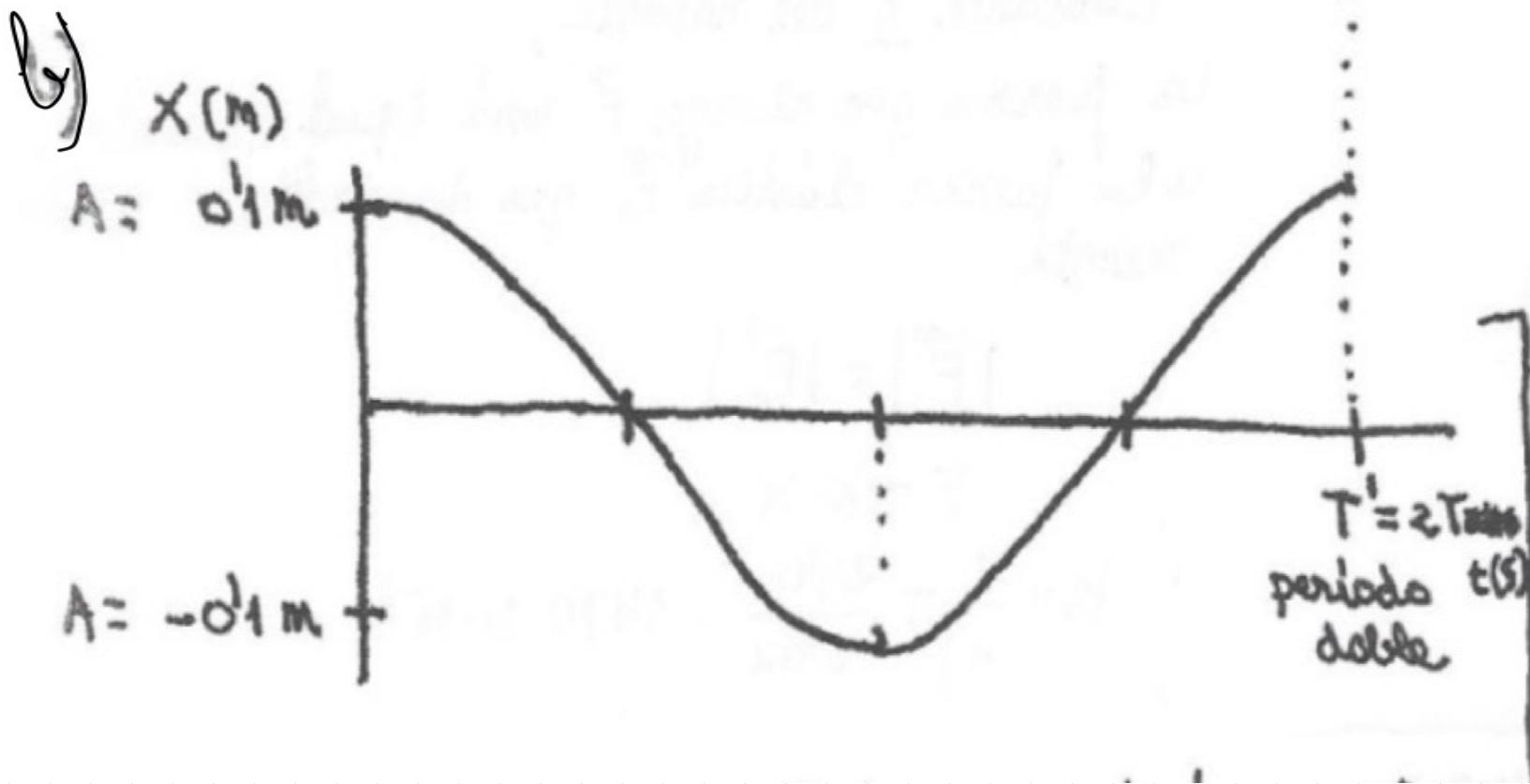
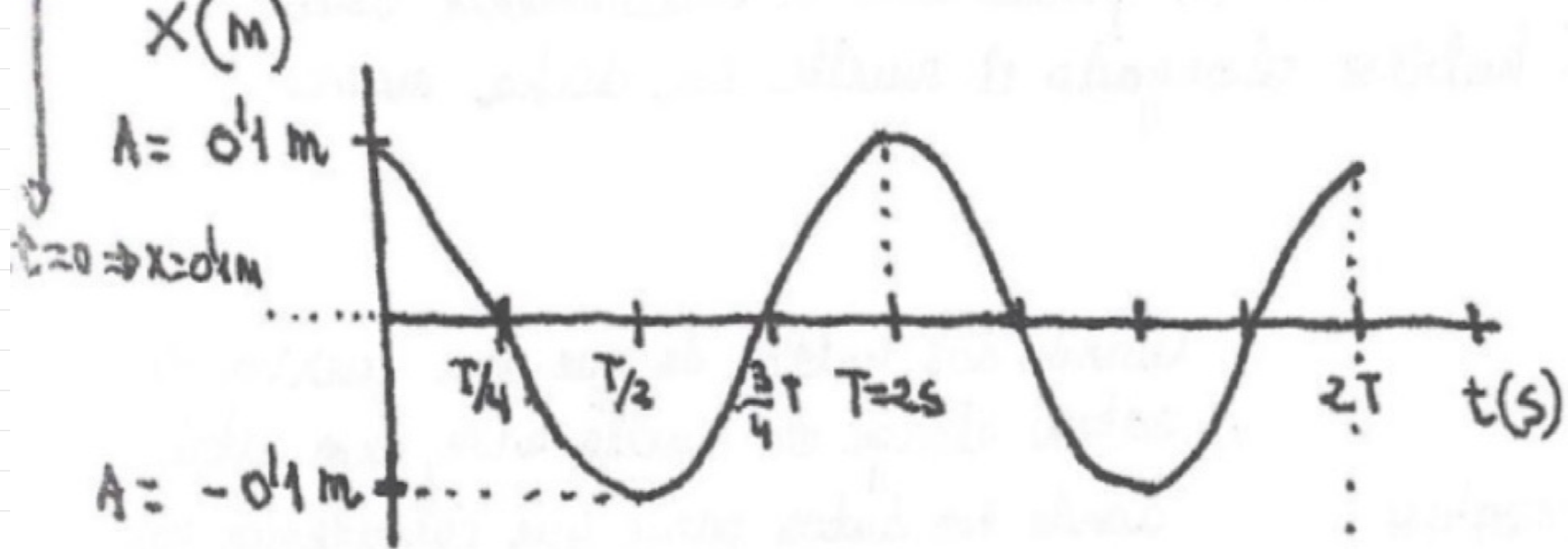
$$\omega' = \sqrt{\frac{K}{4m}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{K}{m}} \Rightarrow \omega' = \frac{\omega}{2}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega' = \frac{2\pi}{T'}$$

Ⓢ $2T$

↓
Periodo
doble



que

Pag 119

Energía de un M.A.S.

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \rightarrow v \text{ de un M.A.S.}$$

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = \frac{dy}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$E_c = \frac{1}{2} m (A \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0))^2$$

$$E_C = \frac{1}{2} \underbrace{[M \cdot A^2 \omega^2]}_K \cdot \cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

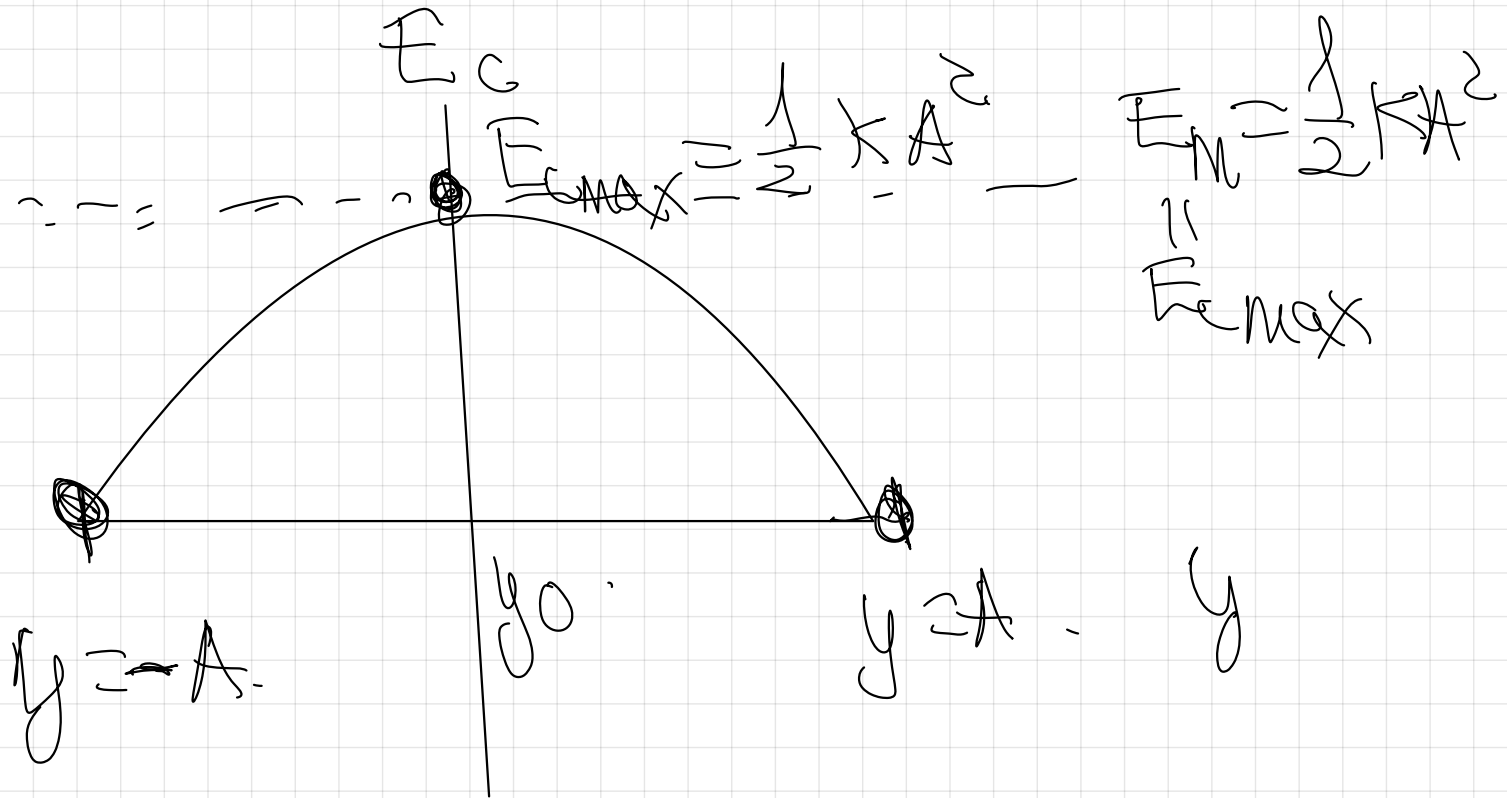
$$E_C = \frac{1}{2} K A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) \xrightarrow{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1} \sin^2(\omega t + \varphi_0) + \cos^2(\omega t + \varphi_0) = 1$$

$$E_C = \frac{1}{2} K A^2 \cdot (1 - \sin^2(\omega t + \varphi_0)) \quad \cos^2(\omega t + \varphi_0) = 1 - \sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$E_C = \frac{1}{2} K \left(A^2 - A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) \right)$$

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$E_C = \frac{1}{2} K (A^2 - y^2)$$



$$E_M = E_p + E_c,$$

$$\textcircled{E_M} = \cancel{E_p} + \textcircled{E_{Max}}$$

E_{max}

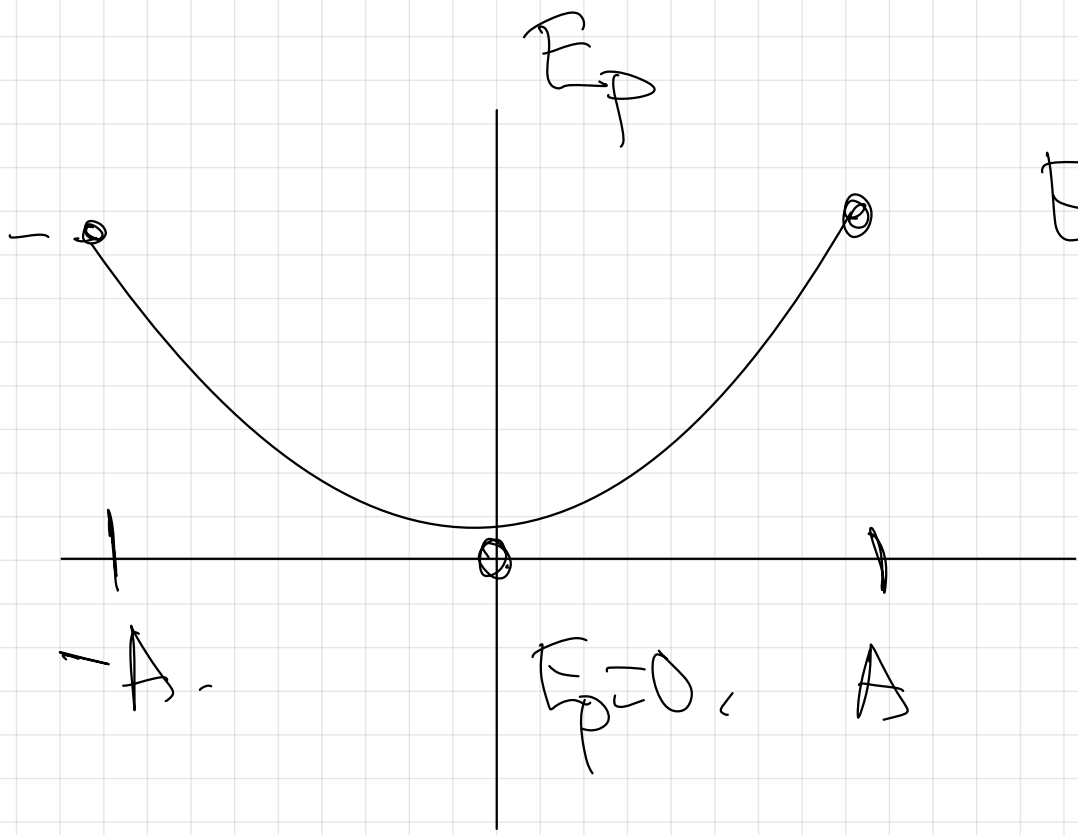
$$E_m = E_p + E_c.$$

$$\frac{1}{2} K A^2 = \left(\frac{1}{2} K A^2 + \frac{1}{2} K (A^2 - y^2) \right)$$

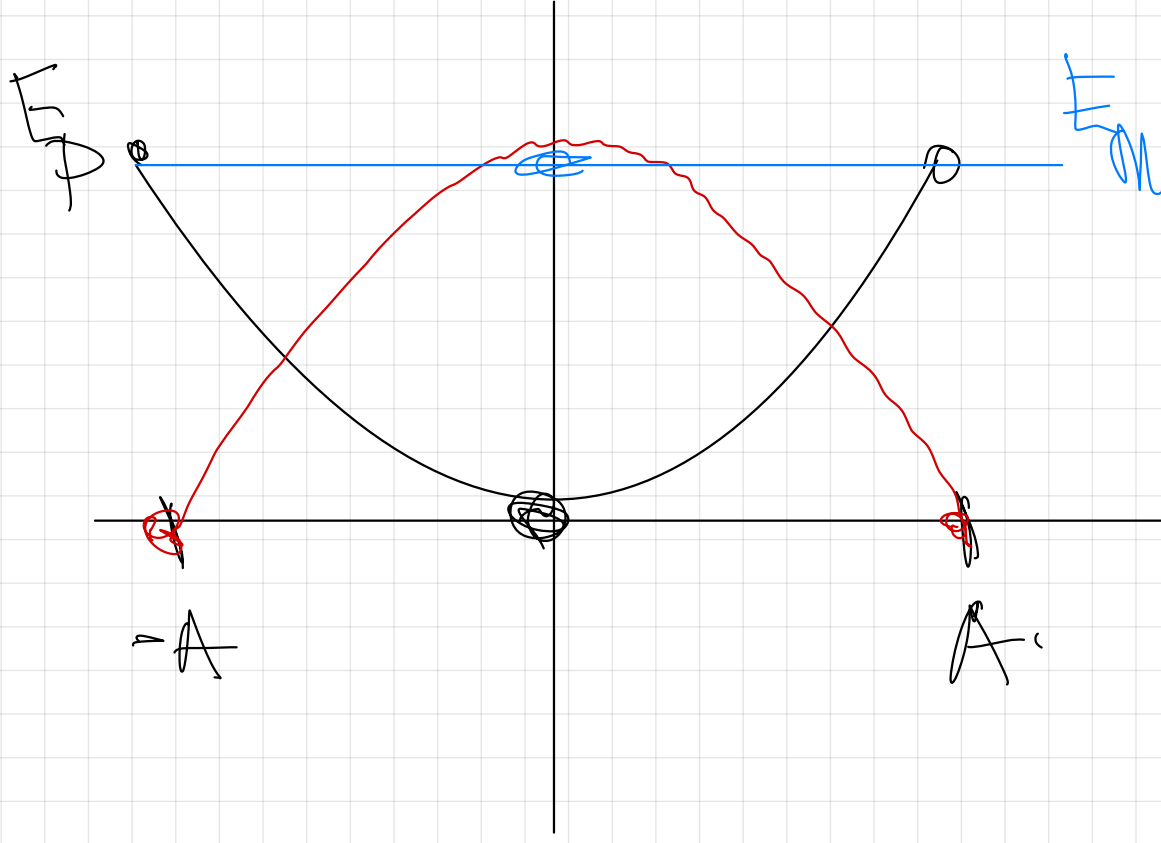
~~$$\frac{1}{2} K A^2 = \frac{1}{2} K A^2 - \frac{1}{2} K A^2 + \frac{1}{2} K y^2$$~~

$$E_p = \frac{1}{2} K y^2.$$

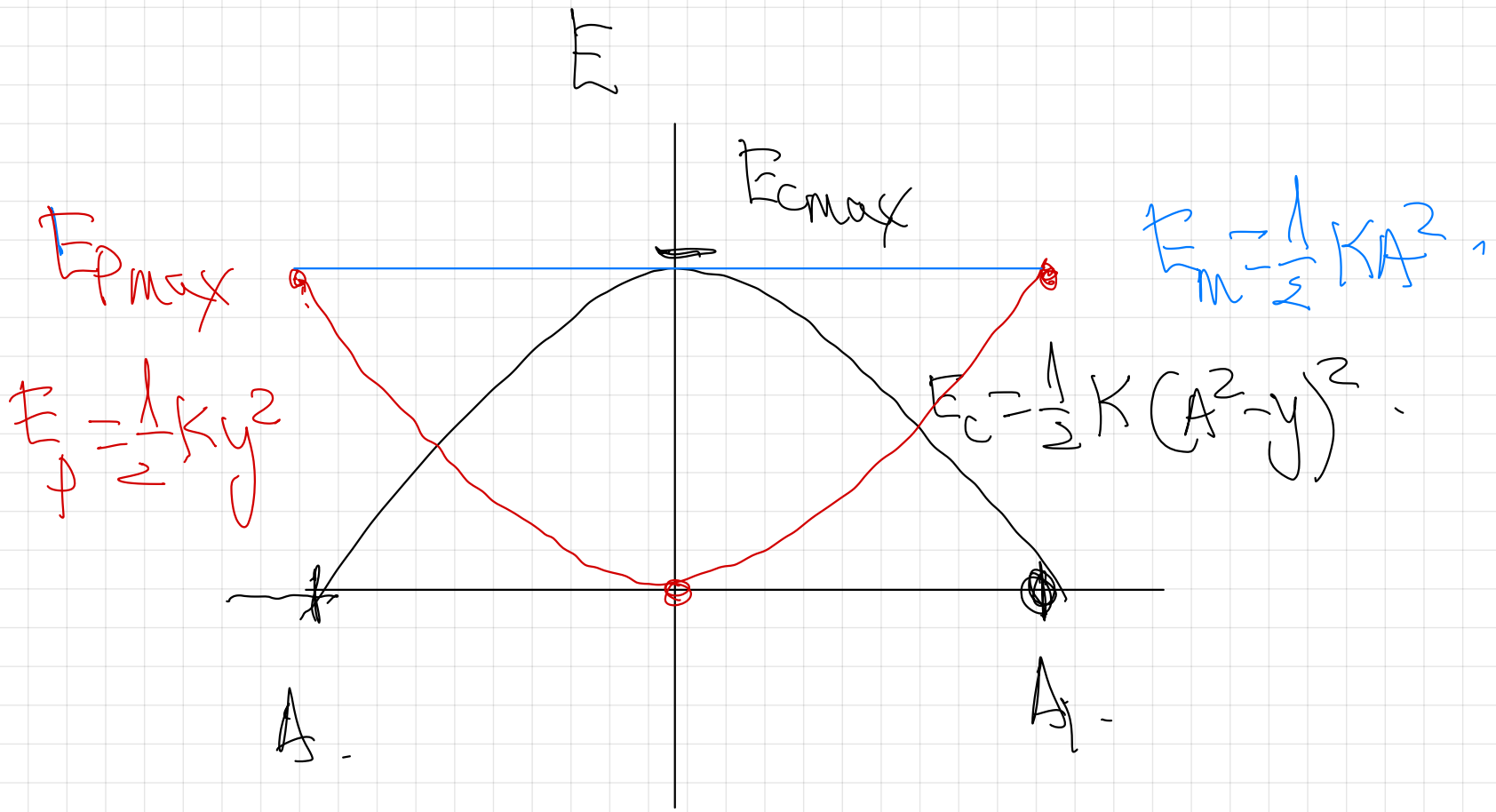
$$F_{p \max} = \frac{1}{2} K A^2.$$



$$F_{p \max} = \frac{1}{2} K A^2.$$



$\int_{-A}^A f(x) dx = \int_{-A}^A g(x) dx$
 $\int_{-A}^A f(x) dx = \int_{-A}^A g(x) dx$



17.- Un cuerpo de 800 g de masa describe un m.a.s con una elongación máxima de 30 cm y un periodo de 2 s. Calcula su máxima energía cinética.

$$y_{\max} = A$$

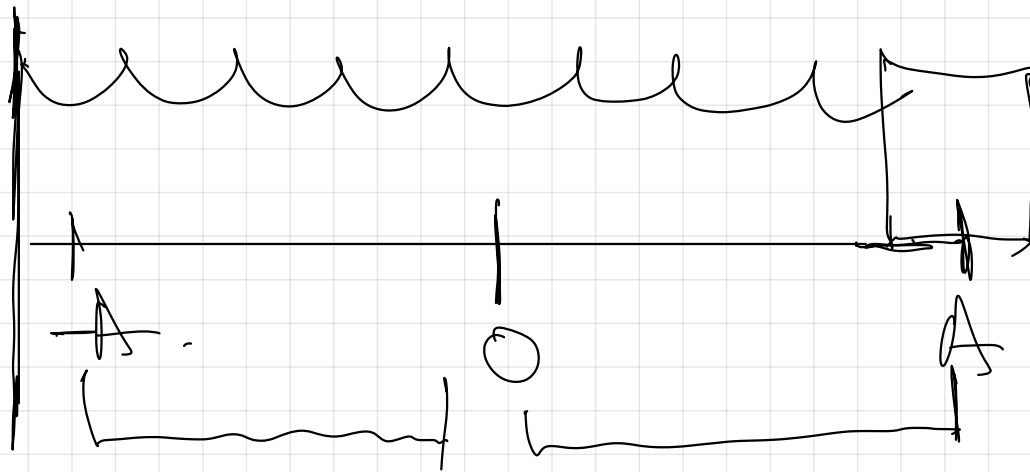
$$E_{\max} = E_m = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} \cdot 7189 \cdot (0.3)^2 = 0.35 \text{ J}$$

$$k = m \cdot \omega^2 = 0.8 \text{ kg} \cdot \left(\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 = 7189 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ rad/s}$$

18.- Una masa de 20g realiza un movimiento vibratorio armónico en el extremo de un resorte que da dos oscilaciones por segundo a lo largo del eje X, siendo la amplitud de 5 cm.

- Calcula la velocidad máxima de la masa que oscila
- Calcula la aceleración de la masa en el extremo de su movimiento
- Calcula la constante K del resorte
- Realiza un análisis de las variaciones energéticas
- Calcula su energía mecánica, su energía cinética y su energía potencial cuando se encuentra en la posición $x=4$ cm



$$E_{\text{max}} = \frac{1}{2} K A^2$$

$$\frac{1}{2} m v_{\text{max}}^2 = \frac{1}{2} K A^2$$

$$\frac{1}{2} m v_{\text{max}}^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$$

$$v_{\text{max}}^2 = \omega^2 A^2$$

$$v_{\text{max}} = A \cdot \omega$$

$$f = \frac{n \text{ osc}}{t} = 2 \frac{\text{osc}}{\text{s}} = 2 \text{ Hz}$$

$$5 \text{ cm} = 0.05 \text{ m}$$

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = \frac{dy}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$v_{\max} = A \omega$$

$$v_{\max} = A \cdot 2\pi f$$

$$v_{\max} = 0.05 \cdot 2\pi \cdot 2$$

$$v_{\max} = 0.63 \text{ m/s}$$

$$v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

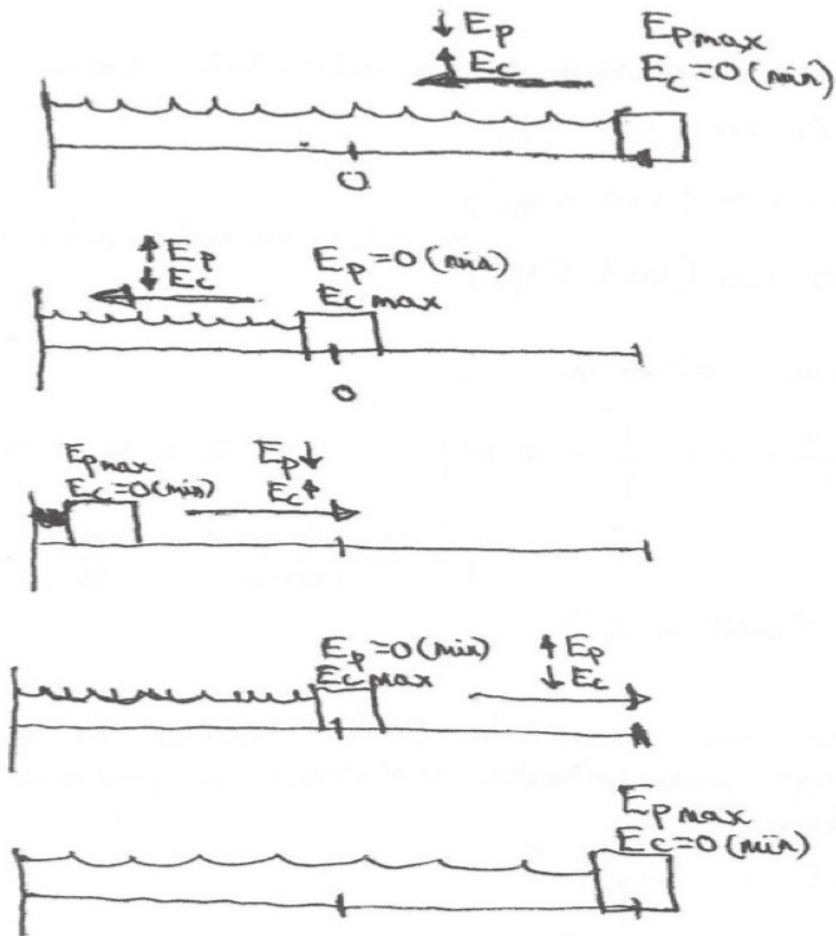
$$a = \frac{dv}{dt} = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\text{En el extremo} \Rightarrow |a_{\max}| = A \cdot \omega^2 = 0.05 \cdot 4\pi^2 = 7.19 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$K = m \cdot \omega^2 = m (2\pi f)^2 = m 4\pi^2 f^2 =$$
$$= 20 \cdot 10^{-3} \cdot 4\pi^2 \cdot 2^2 = 3.16 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$m = 20 \text{ g} = 20 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$$

d)



$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} k (A^2 - x^2)$$

$$E_m = \frac{1}{2} k A^2$$

Si suponemos que actúa una única fuerza conservativa (F elástica), tendremos que la energía mecánica se conserva, es decir, la E_m (suma de E_p y E_c) se mantiene constante durante todo el trayecto ya que las disminuciones de E_p coinciden con los aumentos de E_c (y viceversa). En las expresiones de E_p y E_c se comprueban sus valores máximos y mínimos en las posiciones correspondientes y en la expresión de la E_m se comprueba que ésta es independiente de la posición en la que está el móvil a lo largo de todo el trayecto.

$$d) \quad x = 4 \text{ cm} \quad E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} 3'16 \cdot (0'04)^2 = 25 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

$$x = 0'04 \text{ m} \quad E_c = \frac{1}{2} k (A^2 - x^2) = \frac{1}{2} 3'16 \cdot ((0'05)^2 - (0'04)^2) = 14 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

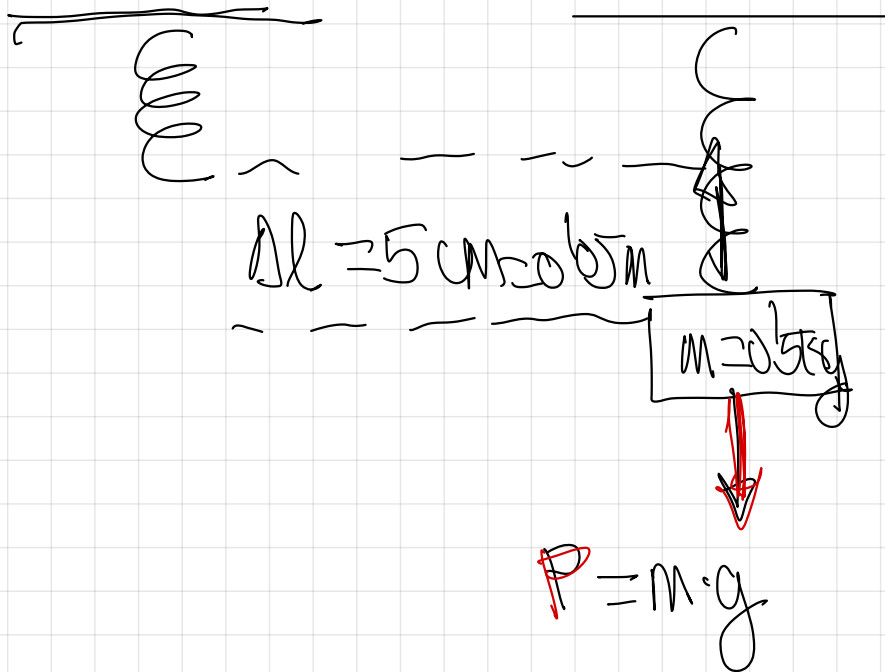
$$E_m = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} 3'16 \cdot (0'05)^2 = 39 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

19.- Al suspender un cuerpo de 0,5 kg del extremo libre de un muelle que cuelga verticalmente, se observa un alargamiento de 5 cm. Si a continuación se tira hacia abajo del cuerpo hasta largar el muelle 2 cm más y se suelta, comienza oscilar. Sabiendo que $g=10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, contestar a los siguientes apartados:

a) Escriba la ecuación del movimiento de la masa

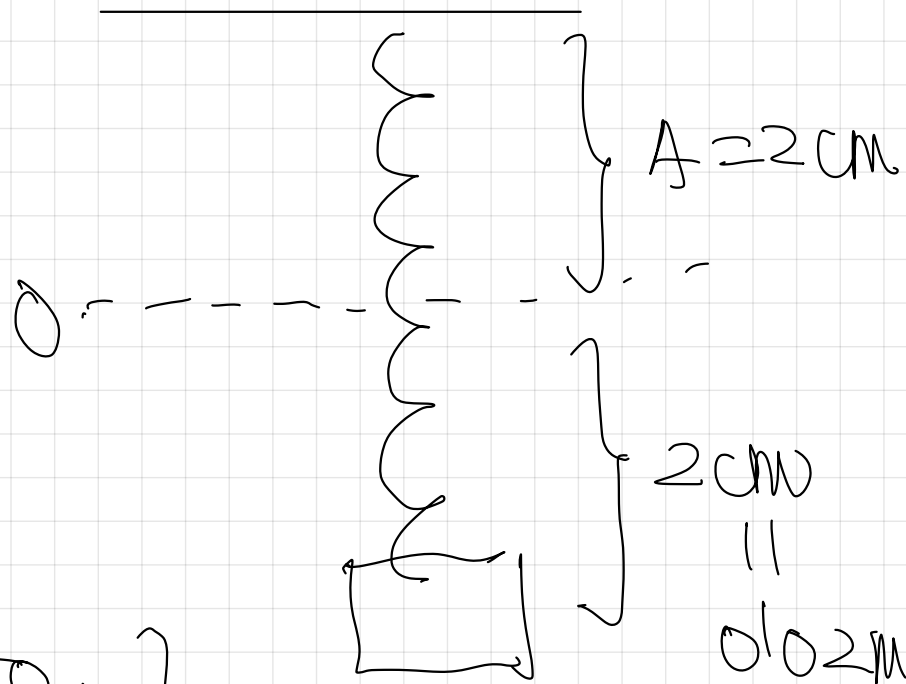
b) Represente, cualitativamente las energías cinética, potencial, y total de ese m.a.s a lo largo de un periodo completo de oscilación

c) Si en lugar de estirar ese muelle 2 cm, se estira 3 cm, ¿cómo se modificaría la ecuación del movimiento del cuerpo?.



A free-body diagram of the mass, showing a vertical rectangle with two arrows pointing downwards from its top edge, labeled P and F_e .

$$m \cdot g = k \cdot \Delta l.$$
$$k = \frac{m \cdot g}{\Delta l} = \frac{0,5 \cdot 10}{0,05} = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$



$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$y(t) = 0.02 \cdot \sin(\sqrt{200}t + \frac{3}{2}\pi)$$

$$y = -A$$

$$\rightarrow -A = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

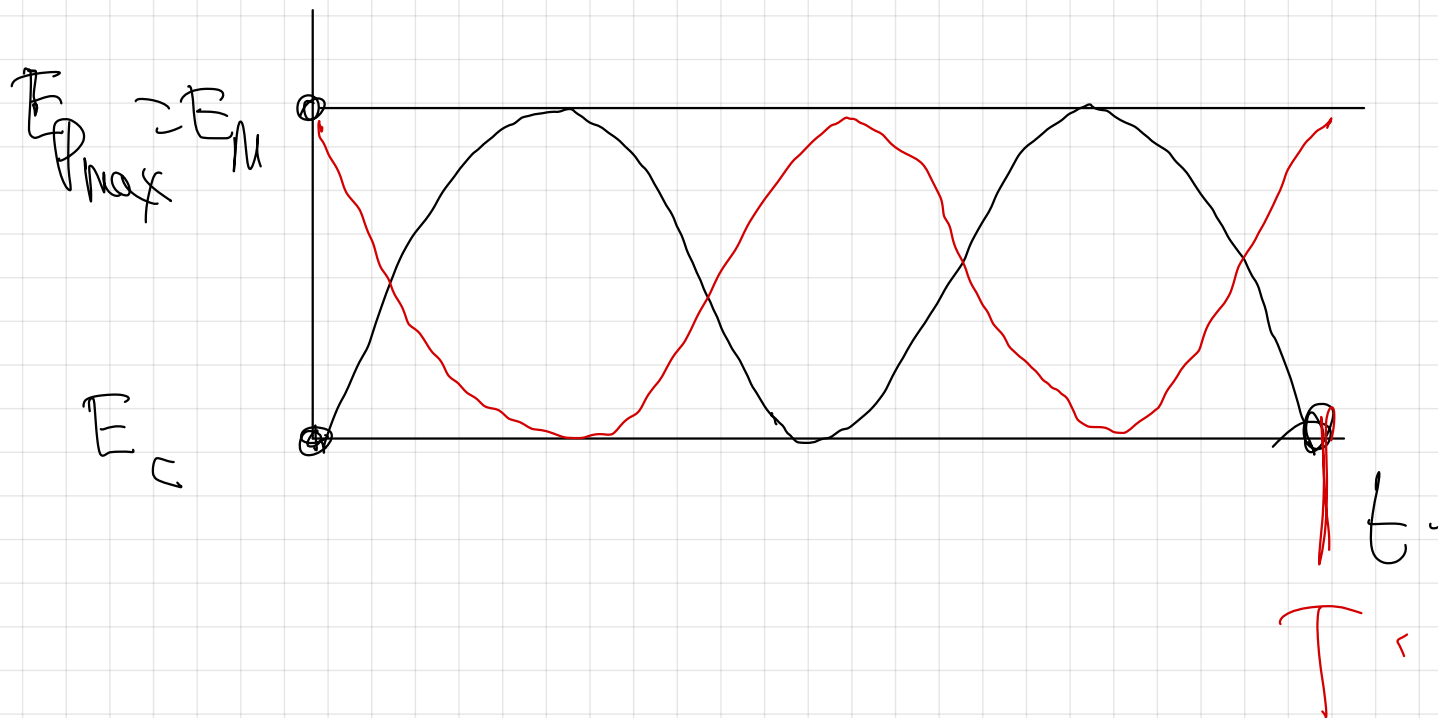
$$\sin \varphi_0 = -1 \rightarrow \varphi_0 = \arcsin(-1) = \frac{3\pi}{2} \text{ rad.}$$

$$K = m \cdot \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{100}{0.5}} = \sqrt{200} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

b) E.

$$E_m = \frac{1}{2} K A^2$$



c)
2 cm

$$y(t) = 0.02 \cdot \sin\left(\sqrt{200}t + \frac{3}{2}\pi\right) \quad (\text{SI})$$

3 cm

$$y(t) = 0.03 \cdot \sin\left(\sqrt{200}t + \frac{3}{2}\pi\right)$$

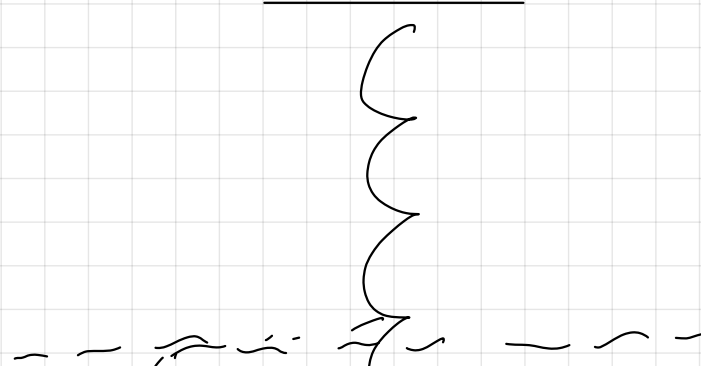
$$F = m \cdot \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{F}{M}} \rightarrow \text{mismo muelle}$$
$$M \rightarrow \text{misma masa}$$

20.- Un muelle de masa despreciables se encuentra en equilibrio cuando de él depende un objeto de 10 g. Calcular:

- La fuerza con la que debe tirarse del muelle para que al soltarlo realice 20 oscilaciones en cinco segundos con una amplitud de 2 cm
- La energía total del sistema cuando el objeto esté 0,5 cm por encima de su posición de equilibrio.

20 oscilaciones en $\frac{1}{2}$ s
 con una amplitud de
 2cm.



$2\text{cm} = 0.02\text{m}$



$F = kx$

$$|F| = |kx|$$

$\ddot{x} = ?$

$$\ddot{x} = -K \frac{y}{l}$$

$A = 2\text{cm} = 0.02\text{m}$

$$K = m \cdot \omega^2$$



$$K = m \cdot (2\pi f)^2$$

$$K = m \cdot 4\pi^2 f^2$$

$$K = 0.01 \cdot 4\pi^2 \cdot 4^2 = 6.32 \text{ N/m}$$

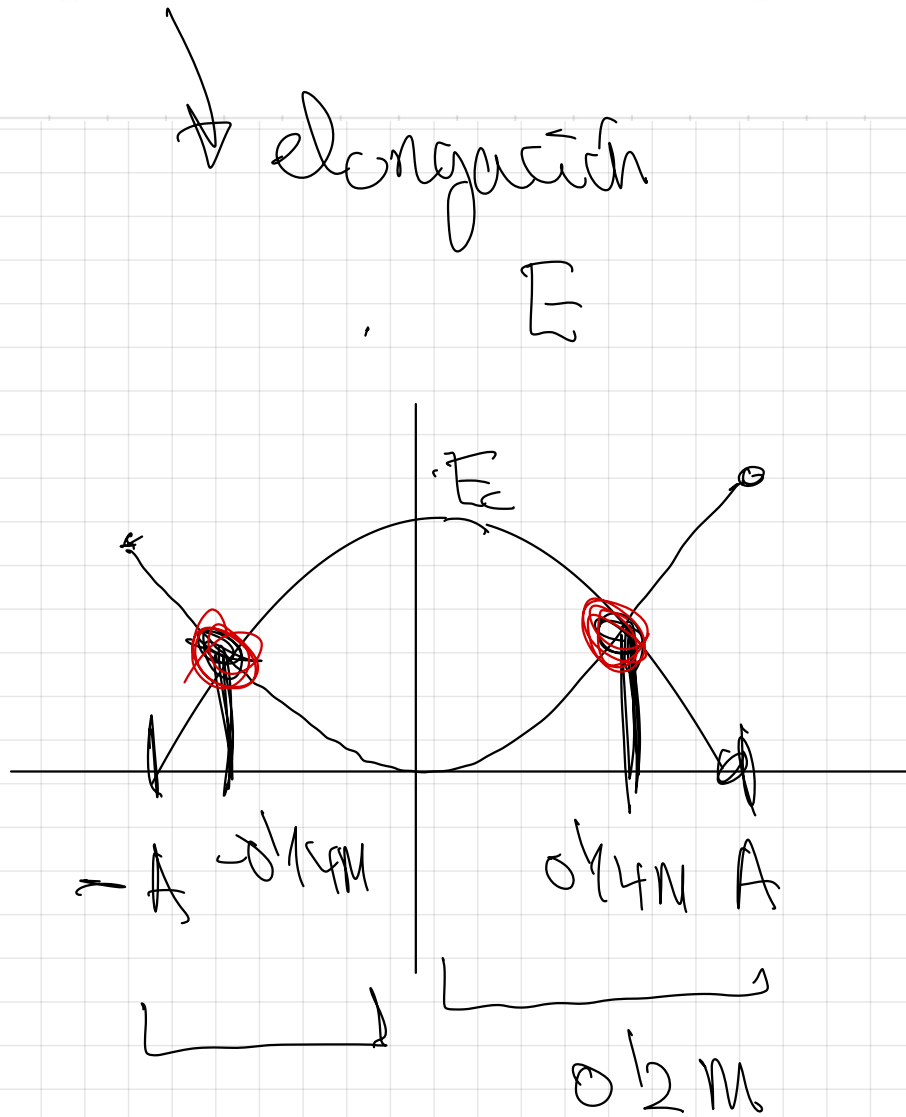
$$f = \frac{v = 20 \text{ cm}}{t = 5 \text{ s}} = 4 \text{ Hz}$$

$$F = K y$$

$$F = 6.32 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0.02 \text{ m} = 0.13 \text{ N}$$

$$b) E_m = \frac{1}{2} K A^2 = \frac{1}{2} 6.32 \cdot (0.02)^2 = 1.26 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

21.- Una partícula describe un movimiento armónico simple, cuya amplitud de 0,2 m.
 ¿Cuál será el desplazamiento en el instante en el que las energías cinética y potencial son iguales?.



$x?$

$$E_c = E_p$$
~~$$\frac{1}{2} k(A^2 - x^2) = \frac{1}{2} kx^2$$~~

$$A^2 - x^2 = x^2$$

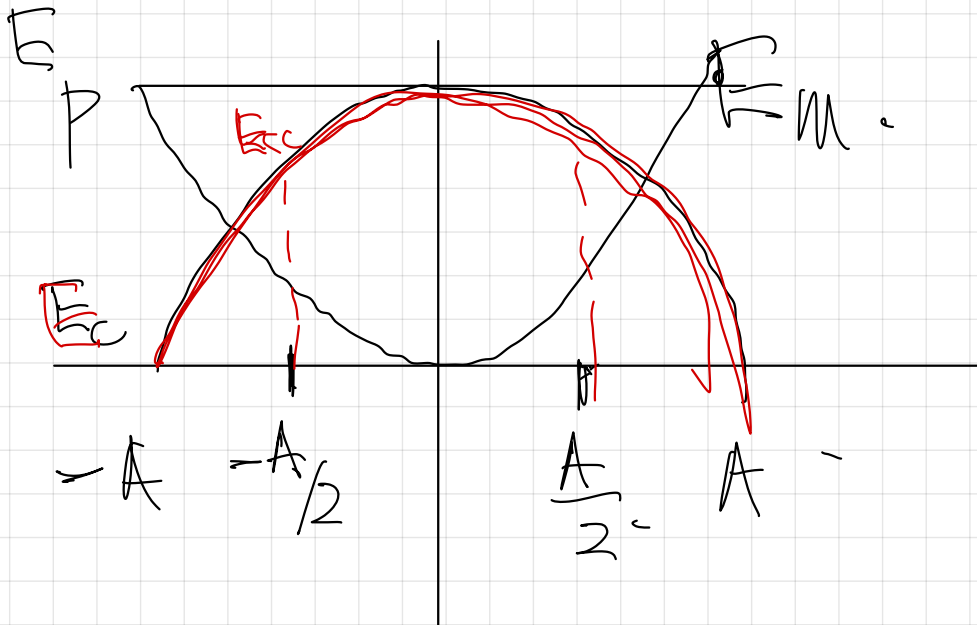
$$A^2 = 2x^2$$

$$x^2 = \frac{A^2}{2}$$

$$x = \sqrt{\frac{A^2}{2}}$$

$$x = \frac{A}{\sqrt{2}} = \frac{0,2}{\sqrt{2}} = \pm 0,1414 \text{ m}$$

22.- Un oscilador armónico se encuentra en un instante en la posición $x=A/2$. ¿Qué relación existe entre sus energías cinética y potencial?



$$E_p = \frac{1}{2} K y^2 = \frac{1}{2} K \left(\frac{A}{2} \right)^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} K \frac{A^2}{4}$$

$$E_c = \frac{1}{2} K (A^2 - y^2)$$

$$E_C = \frac{1}{2} K A^2$$

$$E_P = \frac{1}{2} K A^2$$

$$E_C = 3 E_P$$

$$E_C = \frac{1}{2} K \left(A^2 - \left(\frac{A}{2} \right)^2 \right)$$

$$E_C = \frac{1}{2} K \cdot \frac{3}{4} A^2$$

- 23.- Explica cómo varía la energía de un oscilador cuando
- Se duplica la amplitud
 - Se duplica la frecuencia
 - Se duplica la amplitud y se reduce la frecuencia a la mitad

$$a) E_M = \frac{1}{2} K \cdot A^2$$

$$E_n' = \frac{1}{2} k (2A)^2 = \frac{1}{2} k 4A^2.$$

$$\frac{E_n'}{E_n} = \frac{\frac{1}{2} k 4A^2}{\frac{1}{2} k A^2}$$

$$E_n' = 4E_n$$

La E_n se multiplica

2)

$$E_n = \frac{1}{2} k \cdot A^2 \rightarrow$$

Debo conseguir que
figure f en esta
expresión.

$$E_n = \frac{1}{2} m \omega^2 \cdot A^2.$$

$$E_n = \frac{1}{2} m (2\pi f)^2 \cdot A^2.$$

$$E_n = \frac{1}{2} m 4\pi^2 f^2 A^2$$

$$E_n' = \frac{1}{2} m 4\pi^2 (2f)^2 A^2$$

$$E_n' = 4E_n$$

$$E_n = \frac{1}{2} m 4\pi^2 f^2 A^2$$

$$E_n' = \frac{1}{2} m 4\pi^2 \left(\frac{f}{2}\right)^2 (2A)^2$$

$$E_n' = E_n \quad \text{permanese equal.}$$

24.- Si se duplica la energía mecánica manteniendo un mismo oscilador armónico, explica qué efecto tiene:

- a) En la amplitud y en la frecuencia de las oscilaciones
- b) En la velocidad y en el periodo de oscilación

a) Para ver el efecto en la amplitud, dejaremos una expresión de A en función de la E_m .

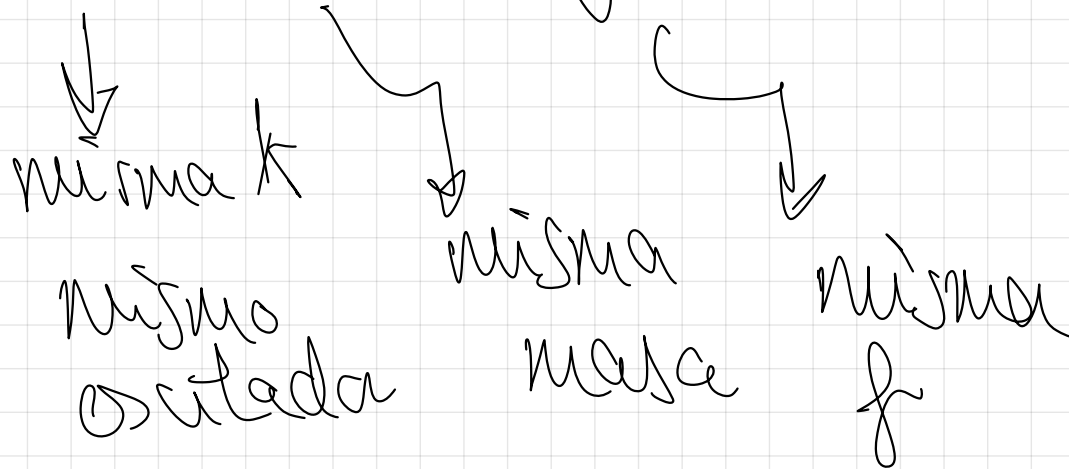
$$E_m = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2 E_m}{k}}$$
$$A' = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 E_m}{k}}$$
$$\frac{A'}{A} = \frac{\sqrt{\frac{2 \cdot 2 E_m}{k}}}{\sqrt{\frac{2 E_m}{k}}}$$
$$A' = \sqrt{2} A$$

mesmo oscilador \Rightarrow mesma k .

$$k = m \cdot \omega^2.$$

$$k = m \left(2\pi f \right)^2.$$

$$k = m \cdot 4\pi^2 f^2.$$



2a) $f = \frac{1}{T} \Rightarrow T = \frac{1}{f} \Rightarrow$ Se f no cambia, T

no cambio.

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

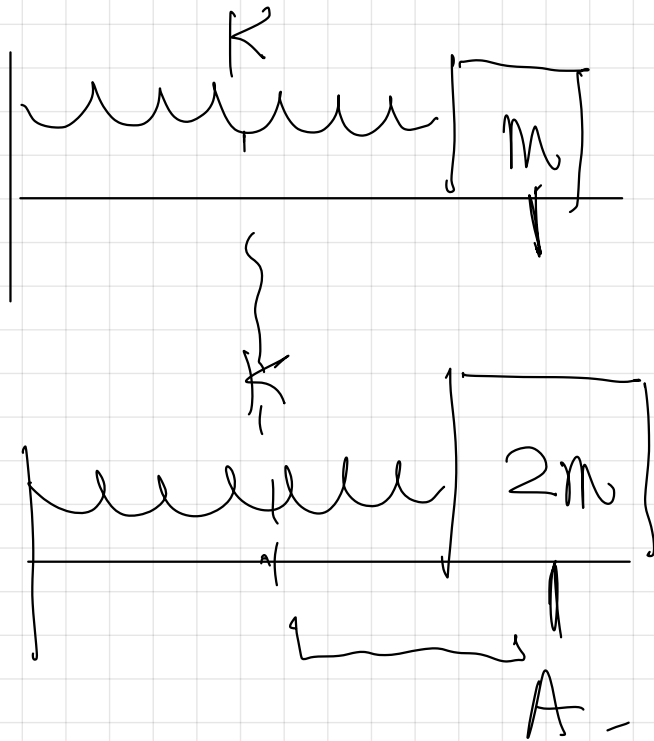
$$v = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$v^0 = \sqrt{2} A \omega \cos(\omega t + \varphi_0)$$

↑
máximo
amplitud

$$v^0 = \sqrt{2} v$$

- C2. a)** Dos partículas, una de masa m y otra de masa $2m$, unidas a resortes horizontales de igual constante elástica k , describen movimientos armónicos simples de igual amplitud. Determine razonadamente la relación que existe entre: **i)** la energía mecánica de ambas partículas; **ii)** la velocidad máxima de oscilación de ambas partículas.
- b)** Una masa de 3 kg está unida a un muelle de constante elástica de 12 N m^{-1} sobre una superficie horizontal sin rozamiento. El muelle se alarga 4 cm y se suelta en el instante inicial $t = 0 \text{ s}$. Determine: **i)** el periodo de oscilación; **ii)** la expresión de la posición de la masa en función del tiempo; **iii)** la velocidad y la aceleración para $t = 3,5 \text{ s}$.



$$E_m = \frac{1}{2} k A^2$$

$$E_m = \frac{1}{2} k A^2$$

$$E_M = E_m$$

$$v_{\max} = [A] \cdot \omega$$

$$v_{\max} = A \cdot \frac{\omega}{\sqrt{2}}$$

$$v_{\max} = \frac{v_{\max}}{\sqrt{2}}$$

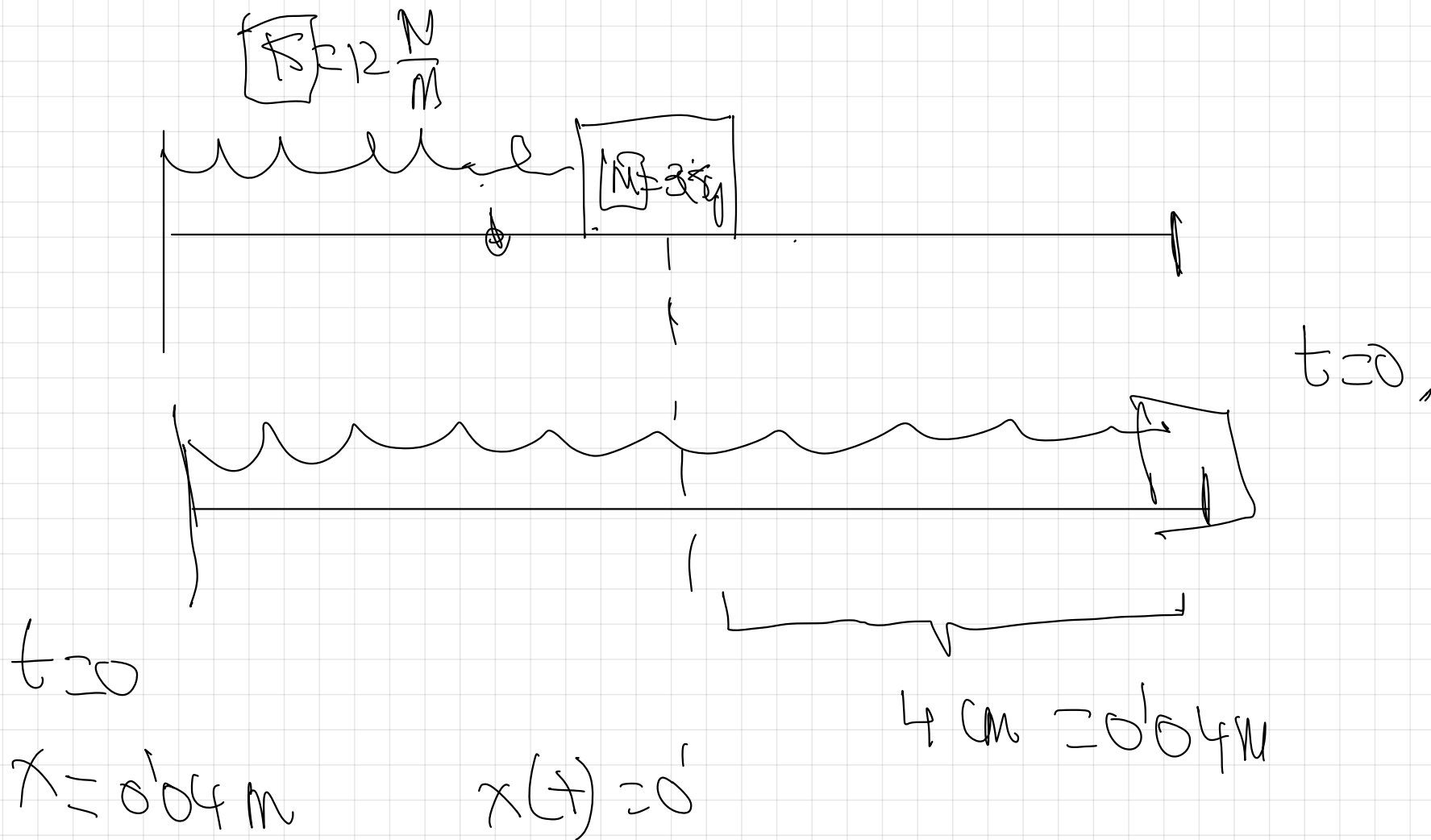
$$K = m \cdot \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{2m}}$$

$$\omega = \frac{\omega}{\sqrt{2}}$$

- C2. a)** Dos partículas, una de masa m y otra de masa $2m$, unidas a resortes horizontales de igual constante elástica k , describen movimientos armónicos simples de igual amplitud. Determine razonadamente la relación que existe entre: **i)** la energía mecánica de ambas partículas; **ii)** la velocidad máxima de oscilación de ambas partículas.
- b)** Una masa de 3 kg está unida a un muelle de constante elástica de 12 N m^{-1} sobre una superficie horizontal sin rozamiento. El muelle se alarga 4 cm y se suelta en el instante inicial $t = 0 \text{ s}$. Determine: **i)** el periodo de oscilación; **ii)** la expresión de la posición de la masa en función del tiempo; **iii)** la velocidad y la aceleración para $t = 3,5 \text{ s}$.



$$K = m \cdot \omega^2$$

$$K = m \cdot \left(\frac{2\pi f}{T} \right)^2$$

$$K = m \cdot \frac{4\pi^2 f^2}{T^2}$$

$$T = \sqrt{\frac{m \cdot 4\pi^2}{K}} = 2\pi \text{ s.}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s.}}$$

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$x(t) = 0.04 \cdot \sin(2t + \varphi)$$

$$x(t) = 0.04 \cdot \sin(2t + \varphi_0)$$

$$t=0$$

$$x(t) = 0.04 \text{ m}$$

$$0.04 = 0.04 \cdot \sin(2 \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$\frac{0.04}{0.04} = \sin \varphi_0$$

$$\varphi_0 = \arcsin 1$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

29.- Un cuerpo realiza un movimiento vibratorio armónico simple.

a) Escriba la ecuación del movimiento si la aceleración máxima es de $5\pi^2 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-2}$, el periodo de las oscilaciones 2s y la elongación del cuerpo al iniciarse el movimiento 2,5 cm.

b) Represente gráficamente la elongación y la velocidad en función del tiempo y comente la gráfica.

a)

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -A \cdot \omega \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$a_{\max} = \pm A \cdot \omega^2$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_{\max} = A \cdot \omega^2$$

$$\left| \frac{5 \pi^2 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} = 1 \text{ m}}{100 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}} \right|$$

$$\omega = \frac{2\pi}{2} = \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$A = \frac{a_{\max}}{\omega^2} = \frac{0.05 \pi^2}{\pi^2}$$

$$= 0.05 \text{ m}$$

$$A = 0.05 \text{ m}$$

$$t = 0$$

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$x = 25 \text{ cm} = 0.25 \text{ m}$$

$$x(t) = 0.05 \cdot \sin(\pi t + \varphi_0)$$

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

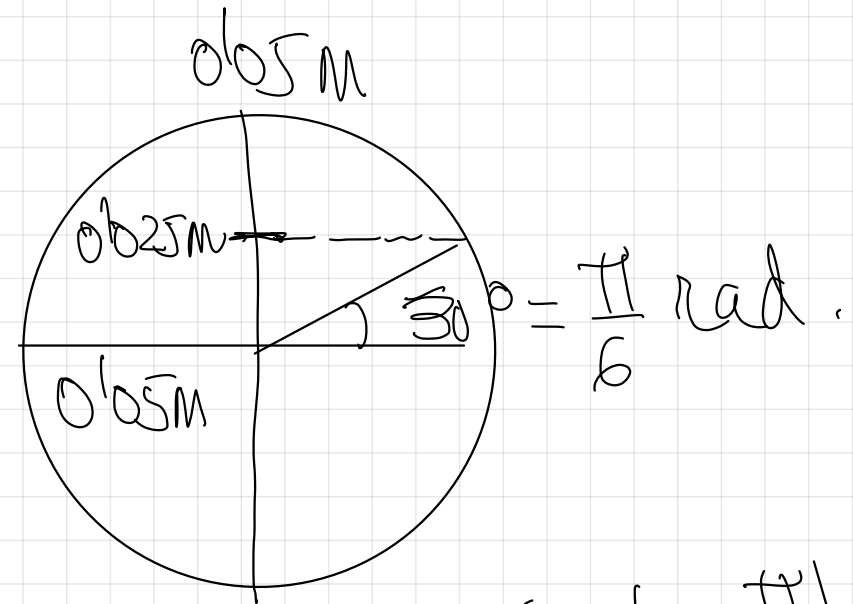
$$0.25 = 0.05 \cdot \sin(\pi \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$\frac{0.025}{0.05} = \sin \varphi_0$$

$$\frac{1}{2} \sin \varphi_0$$

$$\varphi_0 = \arcsin \frac{1}{2}$$

$$\varphi_0 = 30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$



$$x(t) = 0.05 \cdot \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

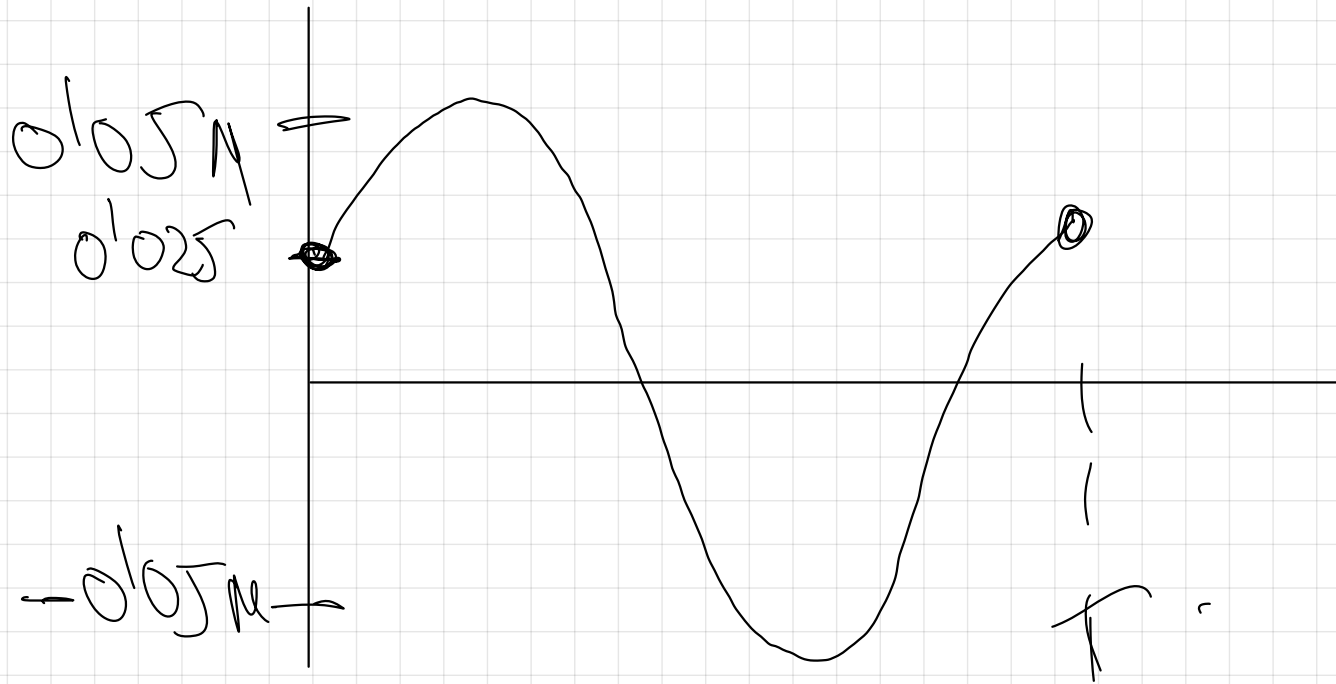
$$360^\circ \rightarrow 2\pi \text{ rad}$$

$$30^\circ \rightarrow x$$

$$x = \frac{2\pi \cdot 30}{360} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

$$x(t) = 0.05 \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$x(t)$



$t \text{ (s)}$

25.- Una partícula de 0,5 kg describe un movimiento armónico simple de frecuencia 5 Hz y tiene inicialmente una energía cinética de 0,2 J y una energía potencial de 0,8 J.

a) Calcular la posición y la velocidad iniciales, así como la amplitud de la oscilación y la velocidad máxima.

b) ¿Podríamos saber con exactitud la posición de la partícula inicialmente?

$$E_m = E_p + E_c = 1 \text{ J.}$$

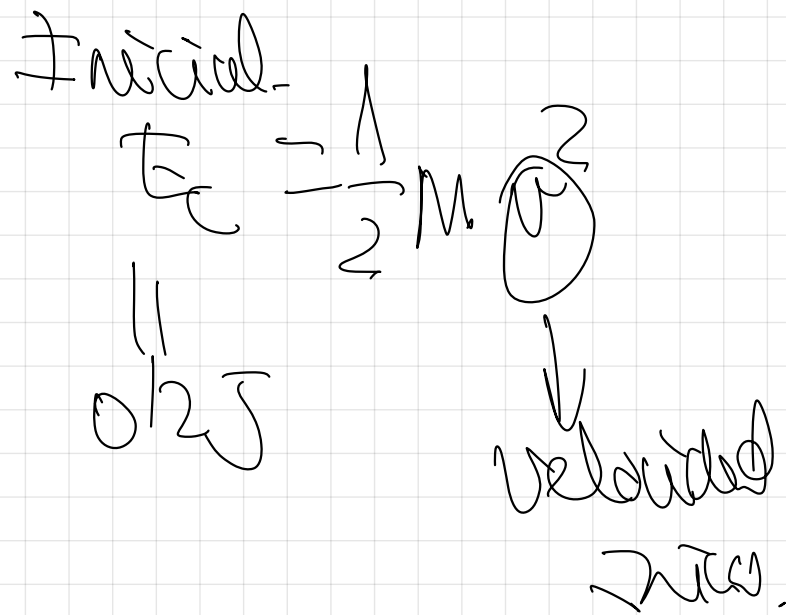
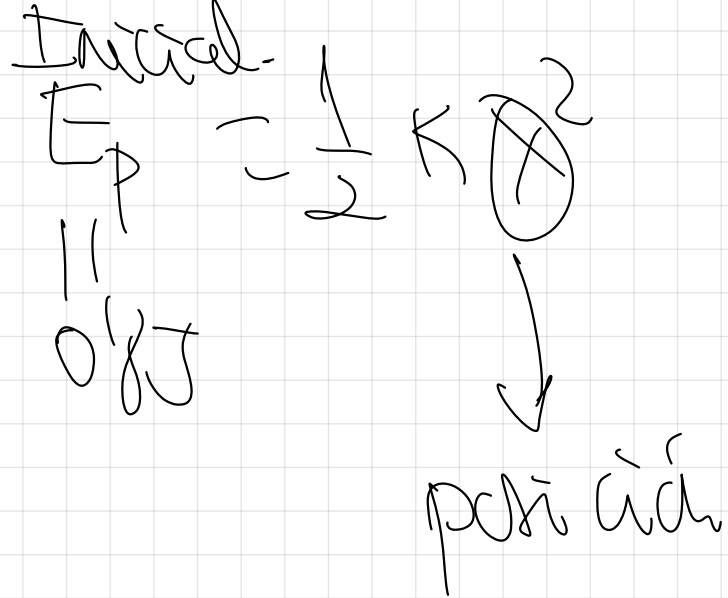
$$E_m = \frac{1}{2} k A^2.$$

$$A = \sqrt{\frac{2E_m}{k}}$$

$$k = m \omega^2.$$

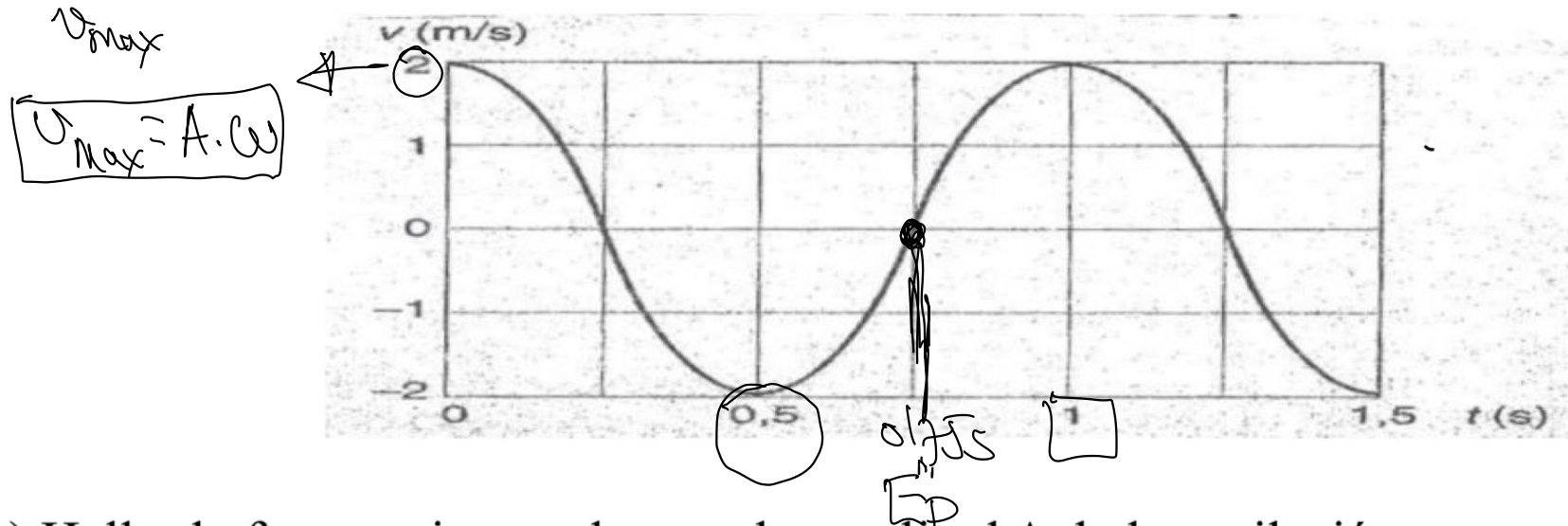
$$k = m (2\pi f)^2.$$

$$k = m \cdot 4\pi^2 f^2.$$



$\rightarrow m = 10 \cdot 10^{-3} = 10^{-2} \text{ kg}$

26.- Una partícula de 10 g oscila armónicamente según la expresión $x=A \cdot \text{sen}(\omega t)$. En la figura se representa la velocidad de esta partícula en función del tiempo.



- Hallar la frecuencia angular ω y la amplitud A de la oscilación.
- Calcular la energía cinética de la partícula en el instante $t_1=0,5$ s y la energía potencial en $t_2=0,75$ s
- ¿Qué valores tienen las dos energías anteriores? . Razónese.

a)

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \text{ rad/s}$$

$$v_{\text{max}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{\text{max}} = A \cdot \omega$$

$$A = \frac{v_{\max}}{\omega} = \frac{2}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \text{ m}$$

b)

$$t = 0,5 \text{ s} \Rightarrow E_{C \max} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} \cdot 2^2 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

$$t = 0,75 \text{ s} \Rightarrow v = 0 \Rightarrow E_C = 0 \Rightarrow E_{P \max} = E_{C \max} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

c)

$$E_{C \max} = E_{P \max} = E_m = 2 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

$$E_m = \frac{1}{2} k \cdot A^2$$

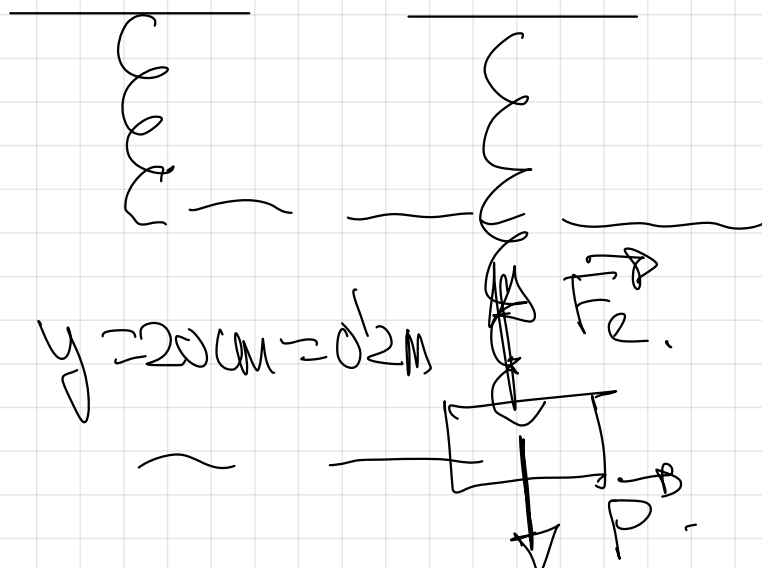
$$E_m = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \cdot A^2$$

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} \cdot (2\pi)^2 \cdot \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2$$

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} \cdot 4\pi^2 \cdot \frac{1}{4\pi^2} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

27.- Cierta muelle que se deforma 20 cm cuando se le cuelga en vertical una masa de 1 kg, ^{después} se coloca sin deformación, unido a la misma masa sobre una superficie horizontal sin rozamiento. En esta posición, se tira de la masa hasta que el muelle se alarga 2 cm, y posteriormente se suelta. $g=9,8 \text{ m/s}^2$

- Hallar la ecuación del movimiento armónico simple resultante y representarla gráficamente.
- Representar gráficamente la fuerza, recuperadora, en función de la posición, hallando sus valores máximos y calculando su valor cuando $x=1 \text{ cm}$.
- Hallar las energías cinética, potencial elástica y mecánica cuando ha transcurrido un tiempo $t=3T/4$
- Representar los valores de la energía potencial elástica, energía cinética, y energía mecánica en función del tiempo durante un periodo T . Indicar en la gráfica los valores de estas energías cuando $t=0$.



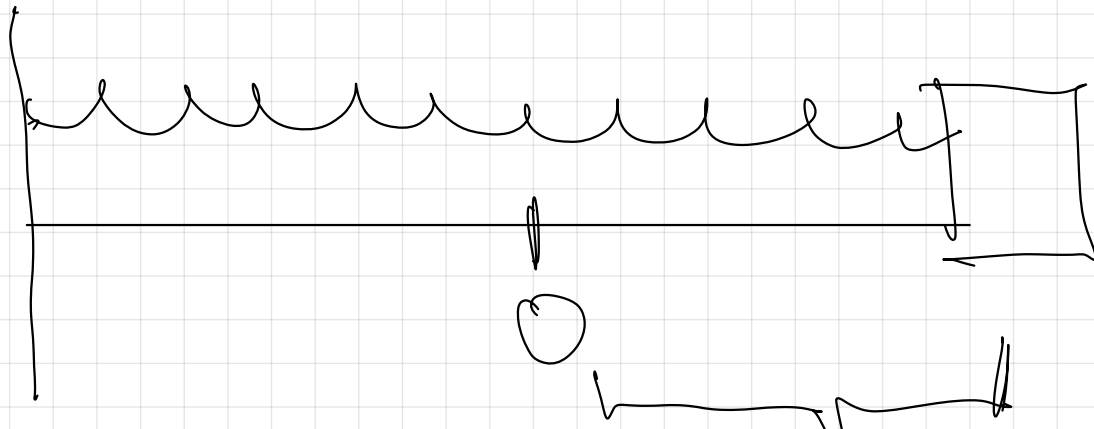
$$|P| = |F_e|$$

$$m \cdot g = k \cdot y$$

$$k = \frac{m \cdot g}{y} = \frac{1 \cdot 9.8 \cdot \text{N}}{0.2 \text{ m}} = 49 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$$

mismo muelle, misma k.

$$[t=0]$$



$$K = m \cdot \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{49}{1}} = 7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

2 cm
1
0.02 m

t=0
x=0.02

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$x(t) = 0.02 \cdot \sin\left(7t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (SI)}$$

$$x(t) = 0.02 \cdot \cos(7t) \text{ (SI)}$$

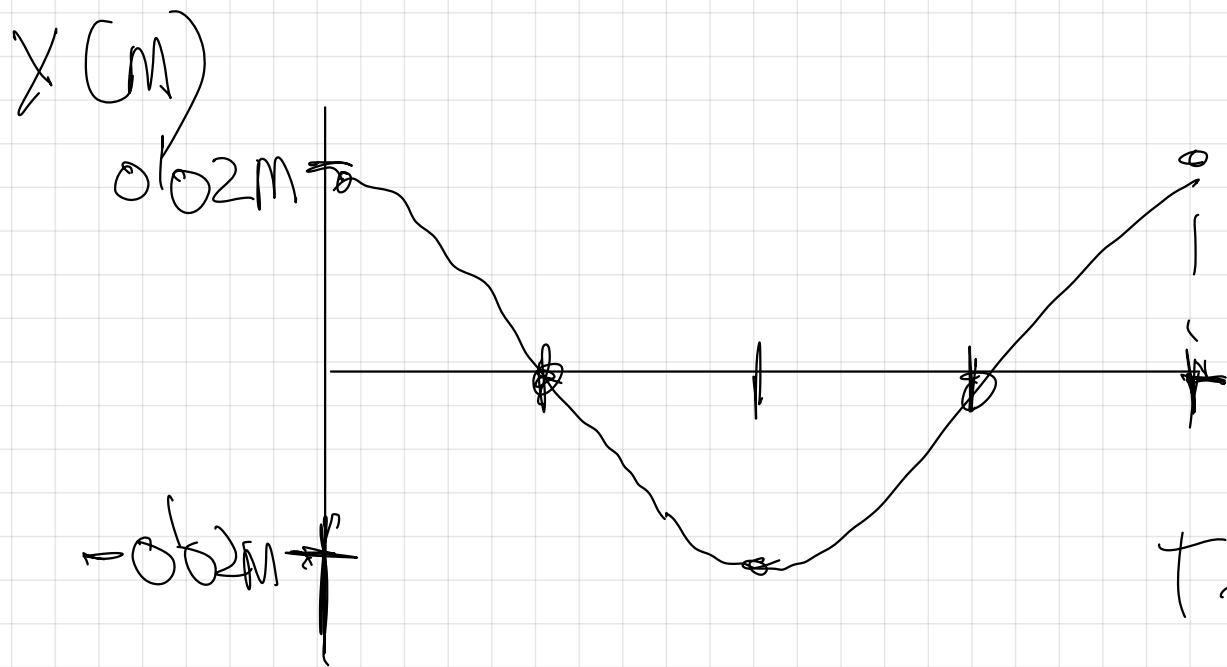
$$x(t) = 0.02 \cdot \sin(7t + \varphi_0)$$

$$0.02 = 0.02 \cdot \sin \varphi_0$$

$$\sin \varphi_0 = 1$$

$$\varphi_0 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

a) $x(t) = 0.02 \cdot \cos(7t)$ (S.I.)



$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{7} \text{ s}$$

$$T = \frac{2}{7} \pi \text{ s.}$$

b) Fuerza recuperadora en función de la posición.

$$F = -k \cdot x$$

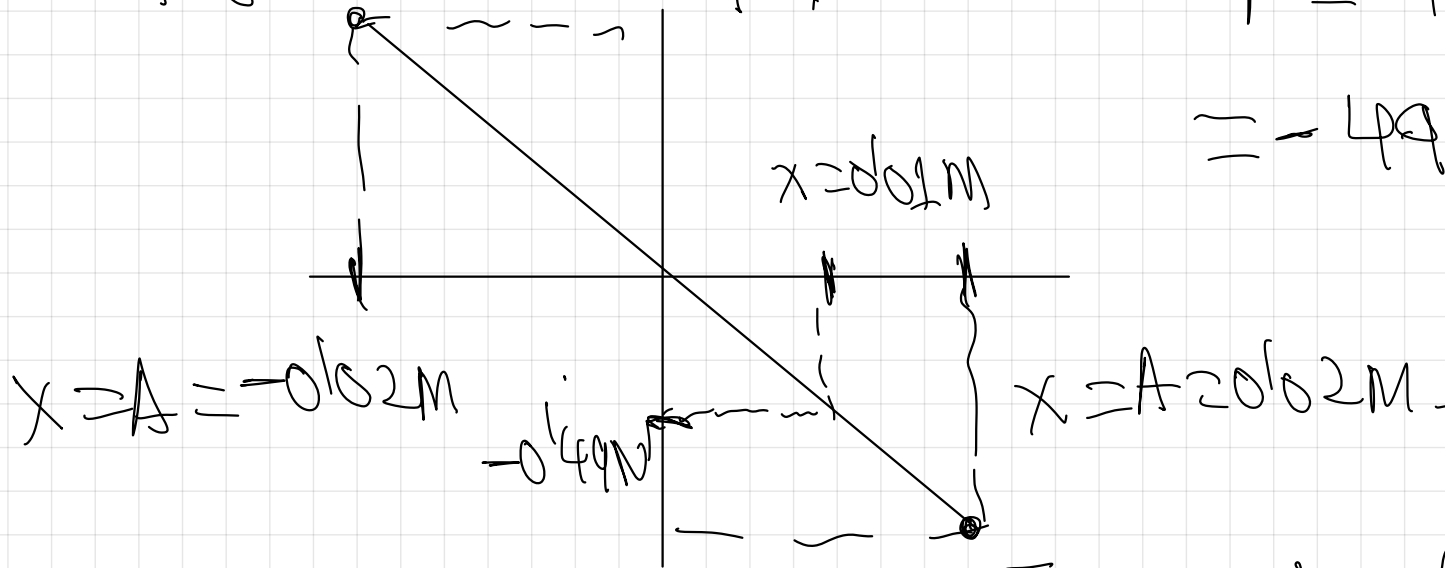
$$F = -49x$$

$$x = 1 \text{ cm} = 0.01 \text{ m.}$$

$$F_{\text{max}} = -49 \cdot (-0.02) = 0.98 \text{ N}$$

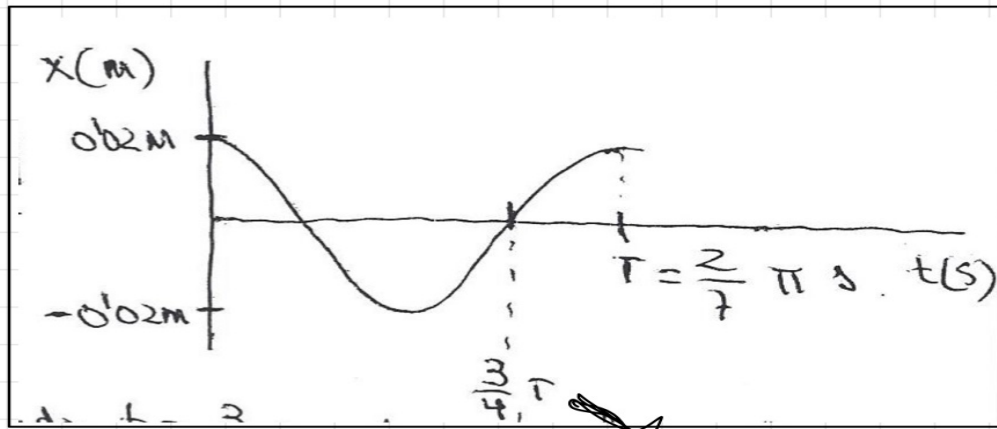
$$F = -49x =$$

$$= -49 \cdot 0.01 = \boxed{-0.49 \text{ N}}$$



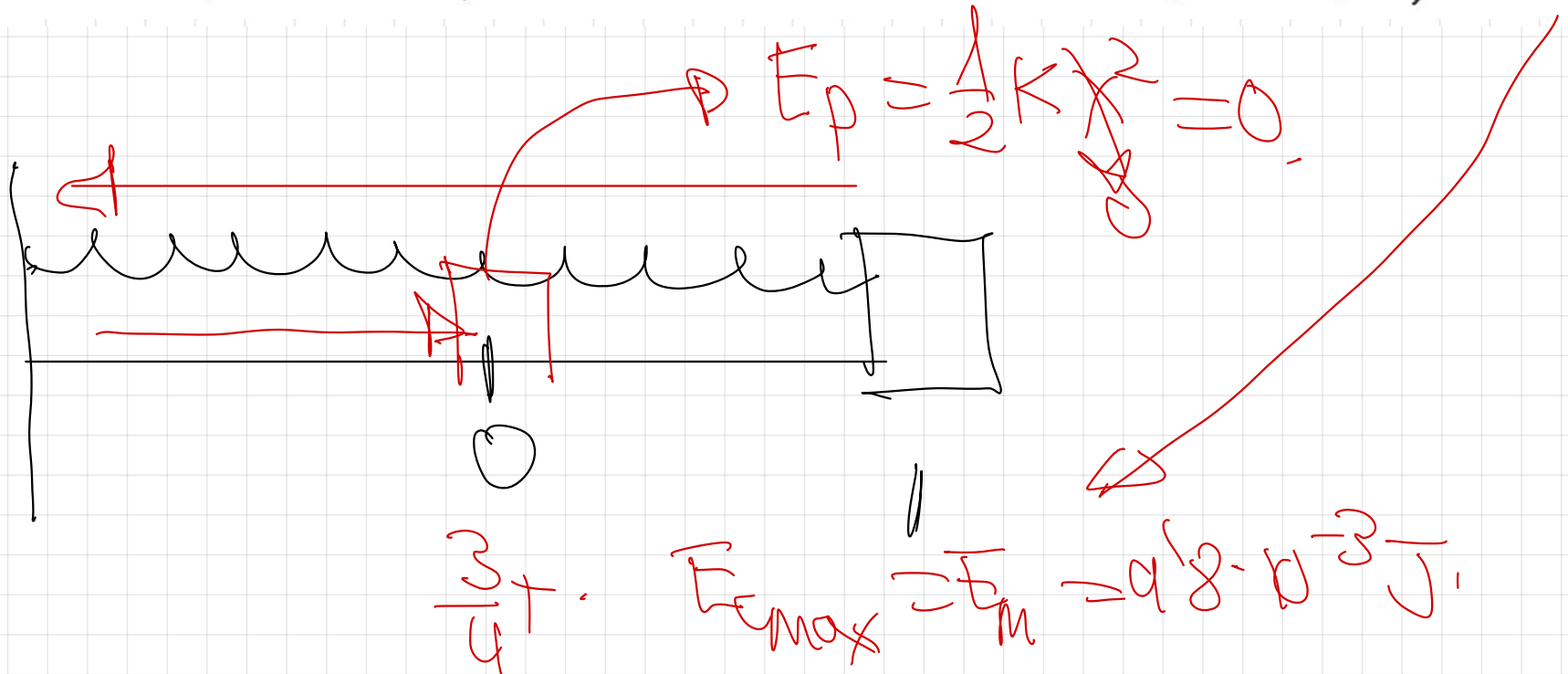
$$F_{\text{max}} = -49 \cdot (0.02) = -0.98 \text{ N}$$

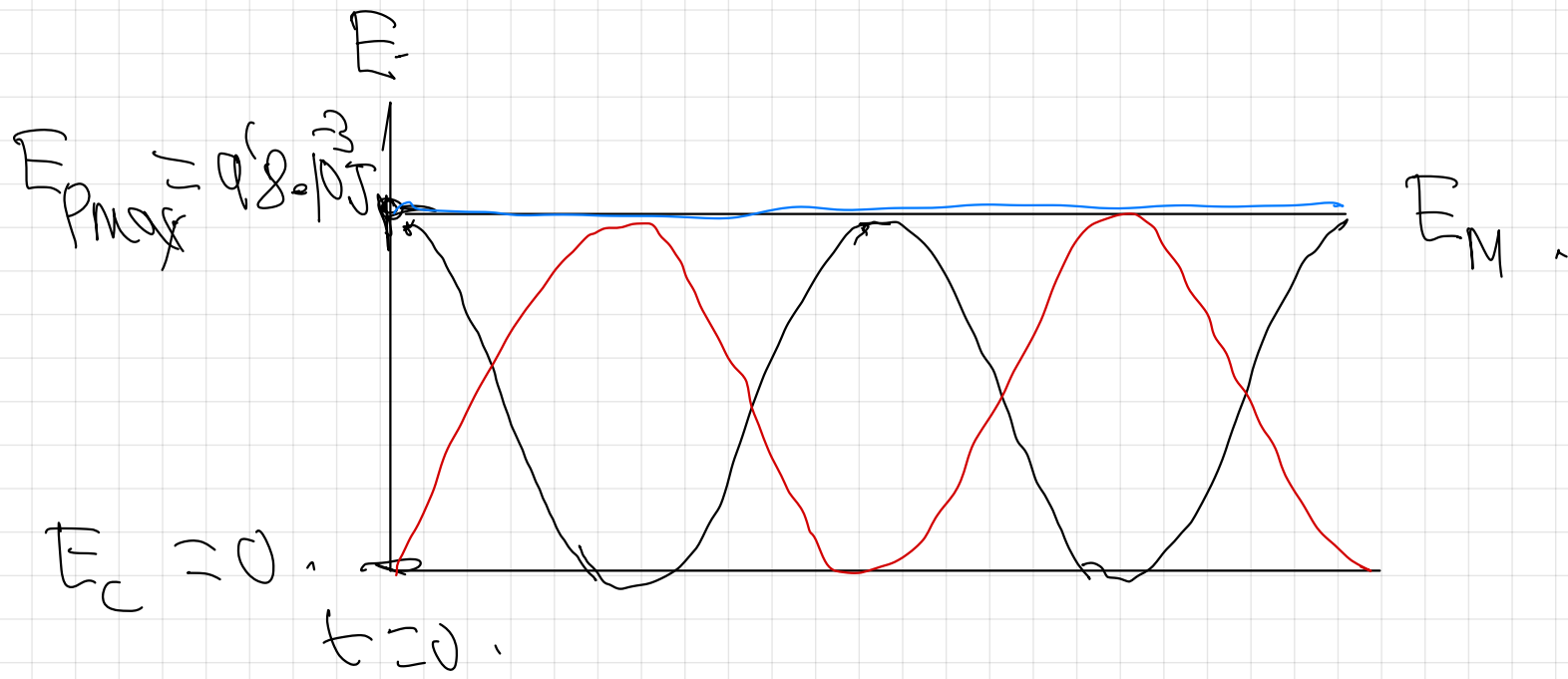
c)



En la gráfica se observa que cuando $t = \frac{3}{4}T$, entonces la elongación $x = 0$,
 y por ello $E_p = \frac{1}{2}kx^2 = 0$, tomando entonces la E_c su valor máximo,
 es decir:

$$E_c = E_{cmax} = E_m = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 \cdot A^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 7^2 \cdot (0.02)^2 = 9.8 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$





28.- Una masa $m=10^{-3}$ kg que describe un m.a.s tarda 1s en desplazarse desde un extremo de la trayectoria al otro extremo. La distancia entre ambos extremos es de 5 cm. Determina

- El periodo del movimiento
- La energía cinética de la partícula en $t=2,75$ s, sabiendo que en $t=0$ su elongación era nula.
- El primer instante en el que las energías cinética y potencial del sistema coinciden.

a) $T = 2\pi$

b) $E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$

$E_c = \frac{1}{2} M A^2 \omega^2 \cdot \cos^2(\omega t) \rightarrow$ Se sustituye

\downarrow En función de t .

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = A \omega \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 \cdot A^2 \cdot \sin^2(\omega t)$$

↓ En funcție de t.

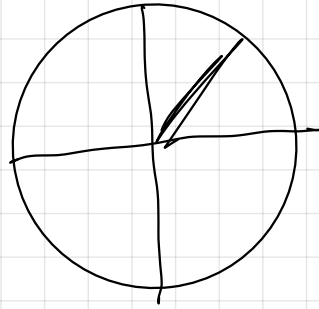
$$E_p = E_c$$

$$\frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t) = \frac{1}{2} m \cdot A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t)$$

$$\sin^2(\omega t) = \cos^2(\omega t)$$

$$\sin(\omega t) = \cos(\omega t)$$

$$\omega \cdot \text{t} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$



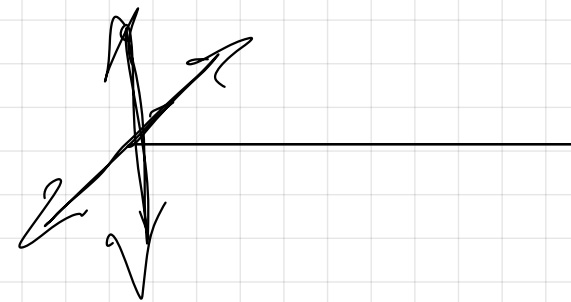
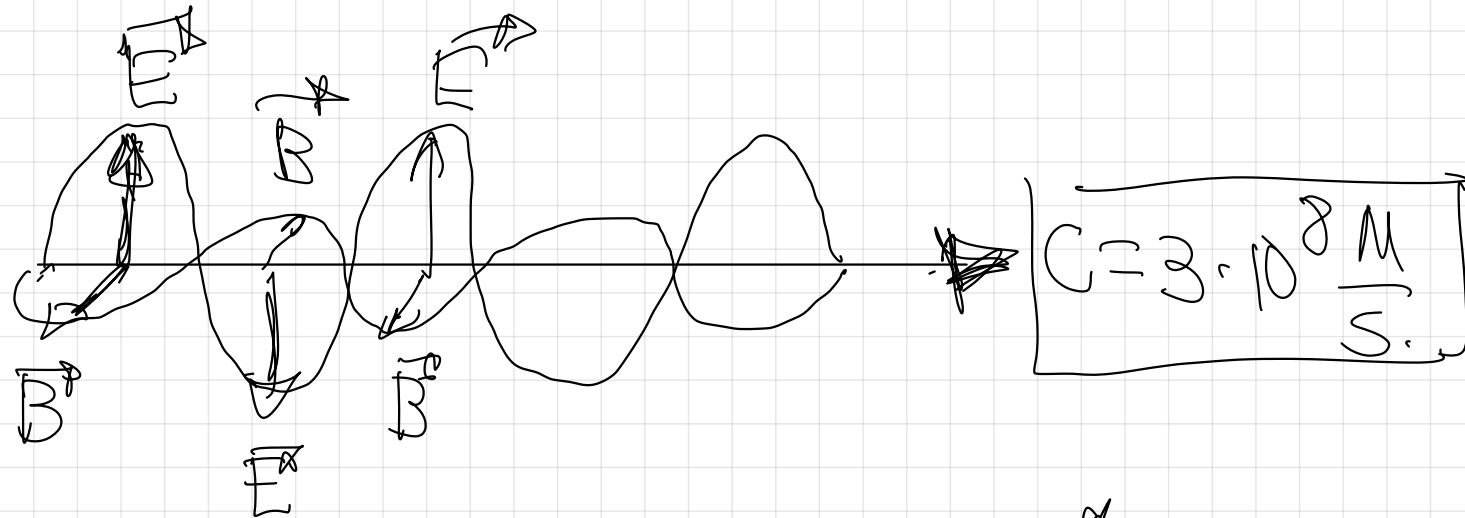
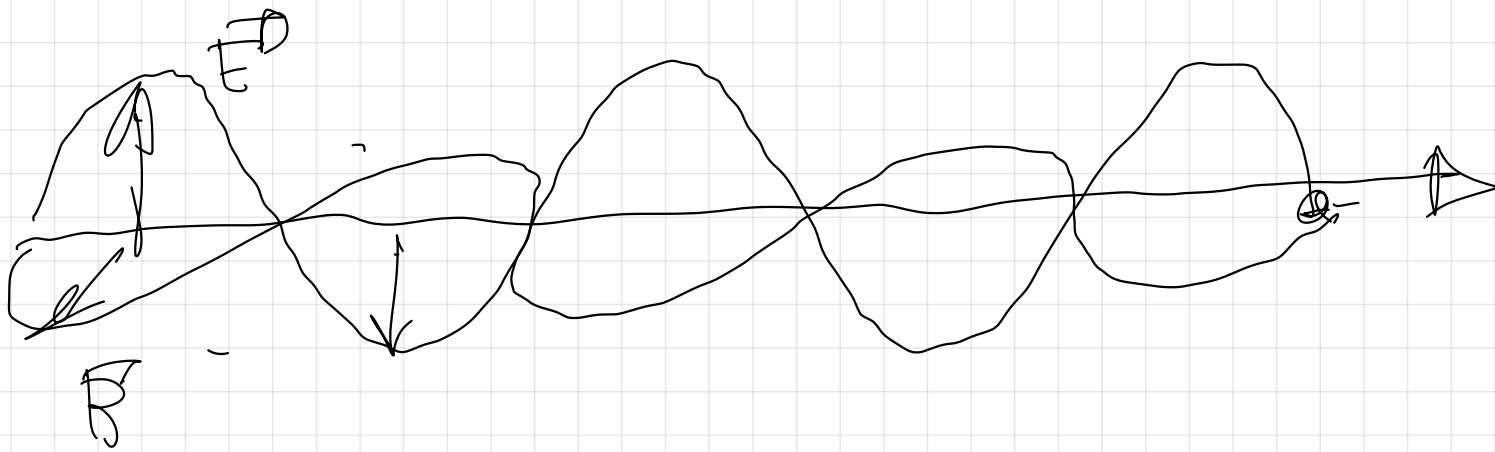
Teoría Ondas

pag 123

Clasificación de las ondas

1^{er} Criterio: medio en el que se propagan.

- Ondas mecánicas o materiales. → necesitan del medio material
- Ondas electromagnéticas. → no necesitan del medio material.



2º criterio

chaves de ondas y propagación

- dirección de oscilación ↓ dirección propagación.
direcc oscilac



direcc propagación

Ondas transversales → cuerda, ondas
electromagnéticas.

- dirección de oscilación es la misma que
la dirección de propagación.



direcc osc.



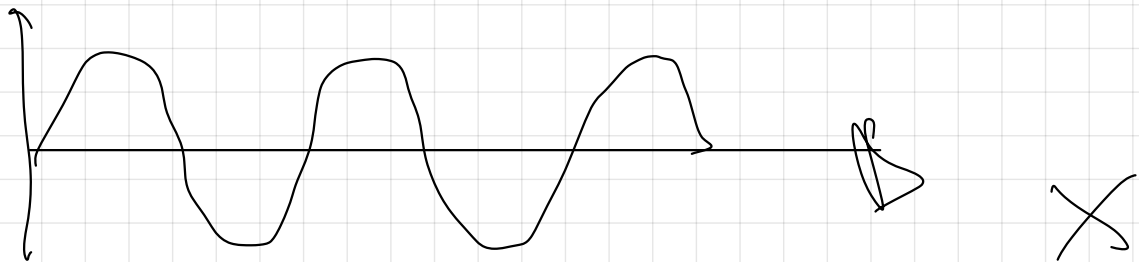
direcc propagación.

Ondas longitudinales \rightarrow somido

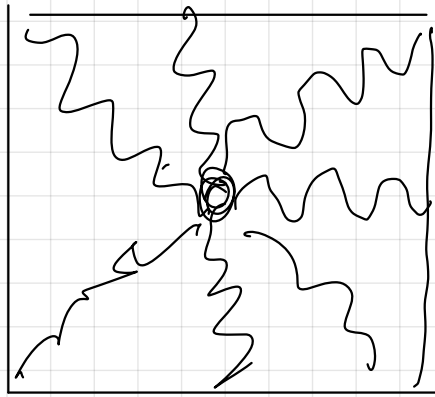
3^o meio

\rightarrow N^o dimensões

• Unidimensionais



• Bidimensionais



Onda en el
estanco

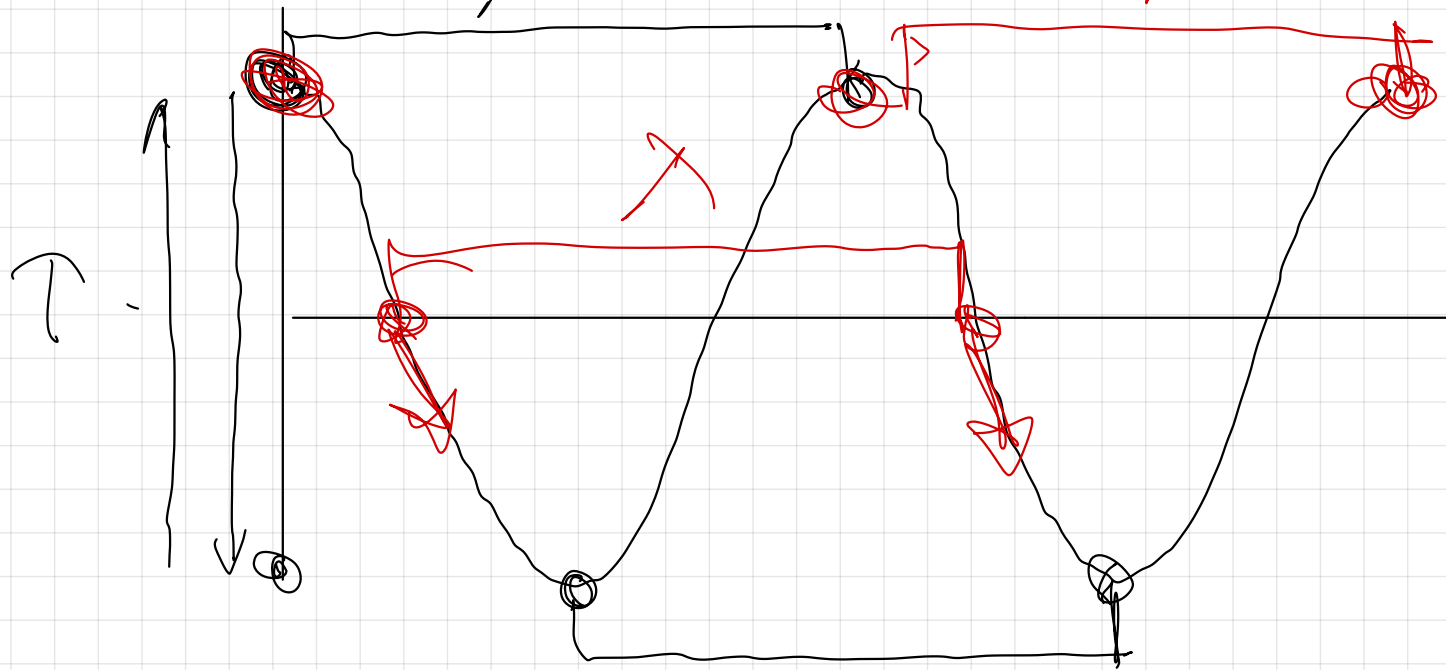
~ Tridimensionales -

Sonido

longitud de onda λ

$\lambda \Rightarrow$

$\boxed{\text{m en S.I.}}$



(m)

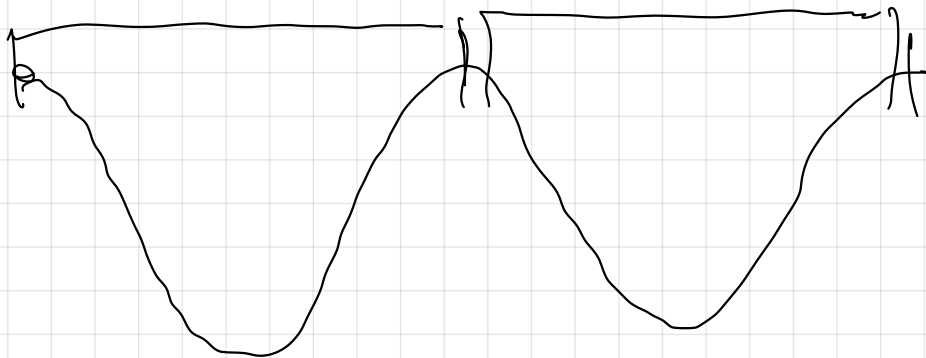
periodo T

$T \Rightarrow$ s en S.I.

frecuencia f

$f \Rightarrow$ Hz en S.I.

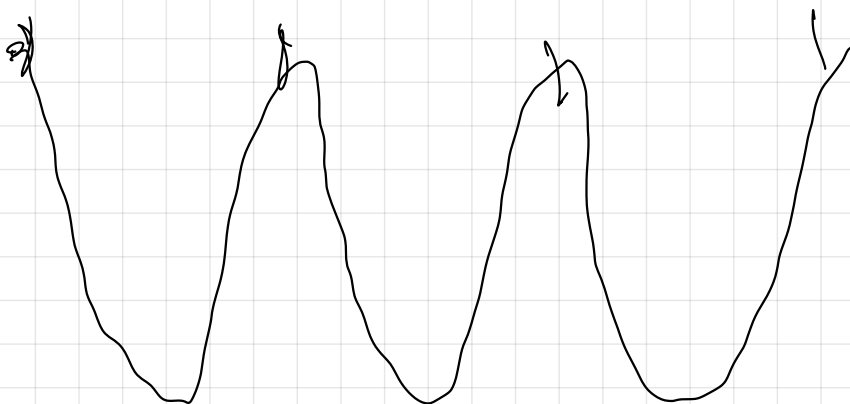
$$f = \frac{v_{osc}}{l}$$



1s

$$f = 2 \frac{v}{l}$$

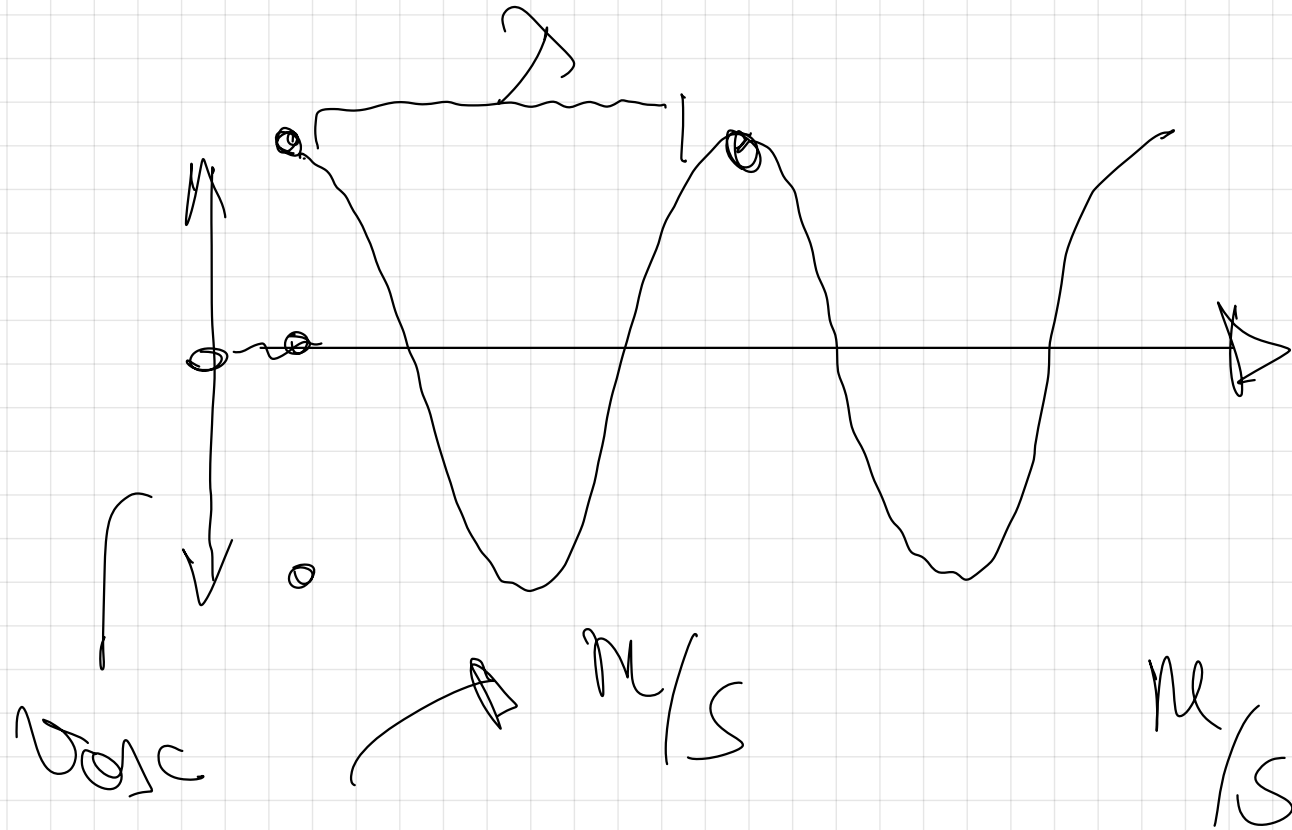
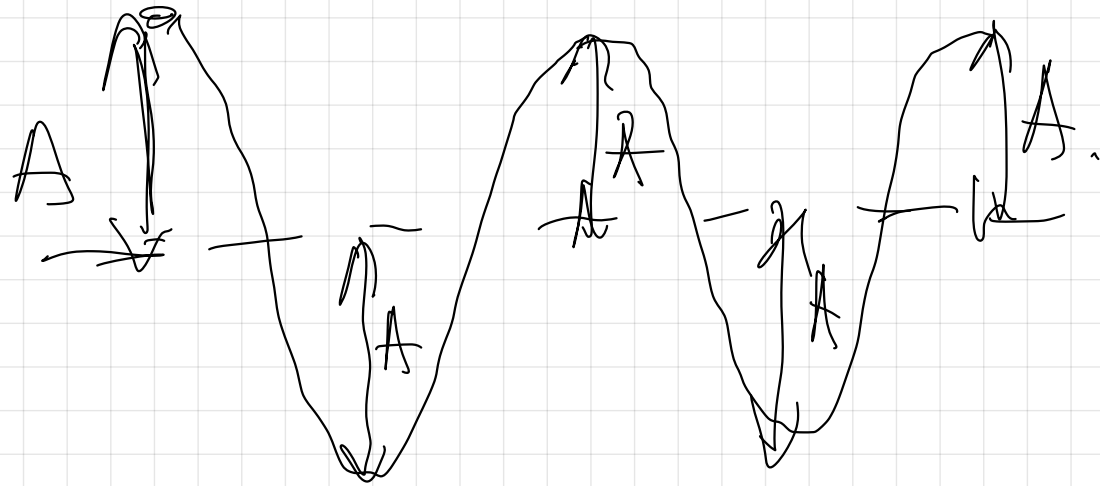
$$f = \frac{v_{osc}}{l}$$



1s

$$f = 3 \frac{v}{l}$$

Amplitud A m/s

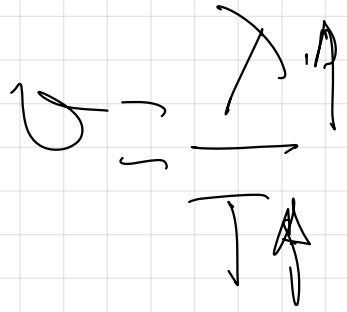
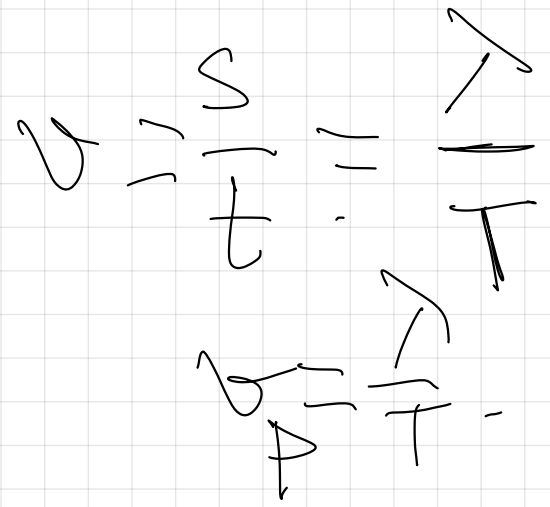


v propagación
 \downarrow
 v vite.

del R.A.S.



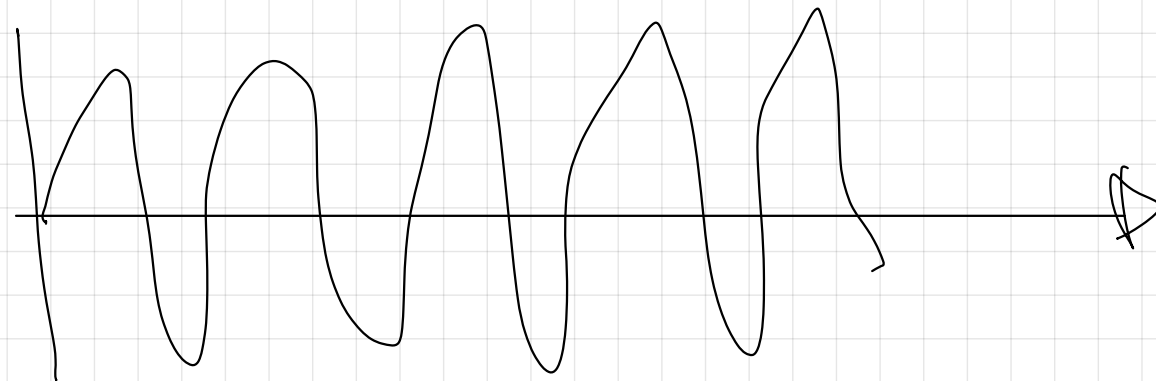
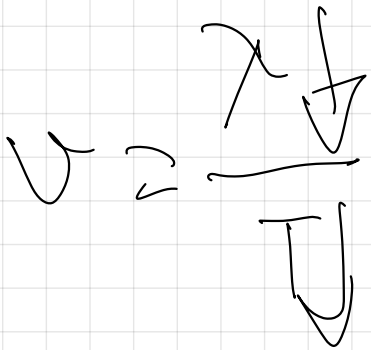
no es de.



de



$3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$



$3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

$k \Rightarrow$ número de onda

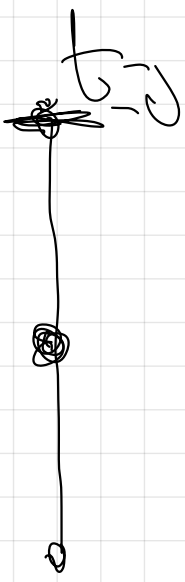
$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

$\omega \Rightarrow$ ω del M.A.S.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

M.A.S. $t \rightarrow \boxed{t=0}$

y_0
 $t=0,$



$$y(x) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

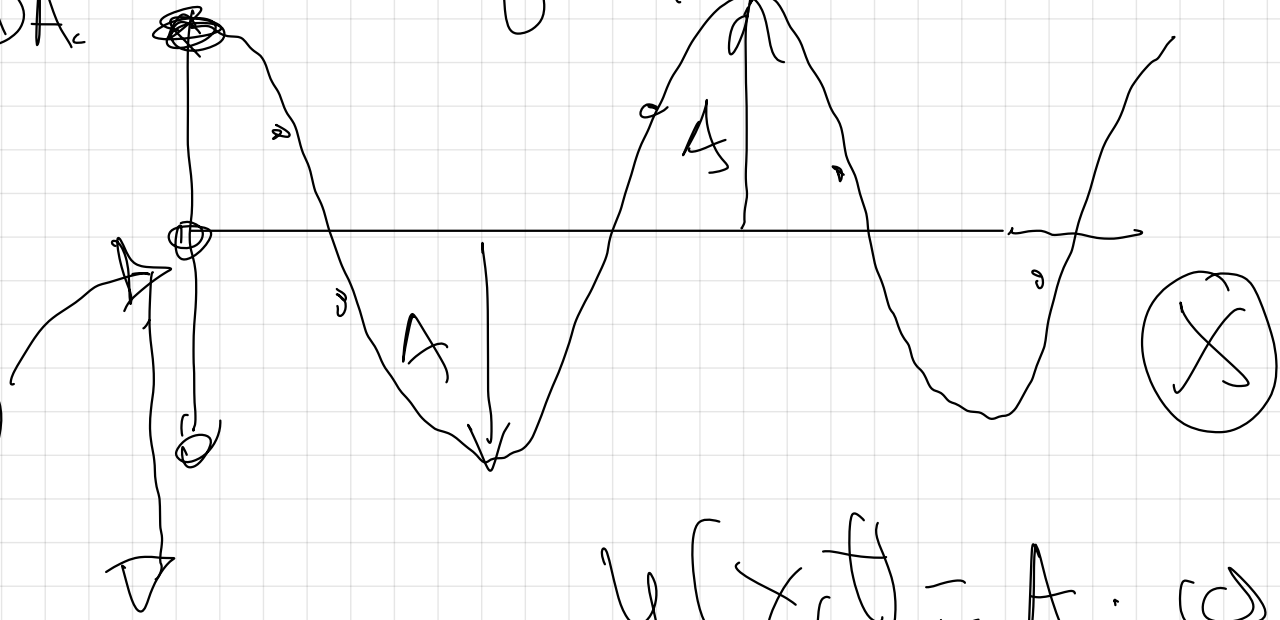
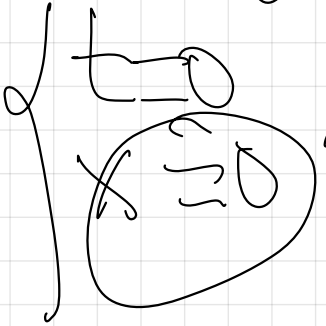
$$y(t) = A \cdot \cos(\omega t)$$

$$y(x,t) = A \cdot \sin(\omega t - kx + \varphi_0)$$

$$y(x,t) = A \cdot \sin(\omega t - kx + \frac{\pi}{2})$$

ONDA

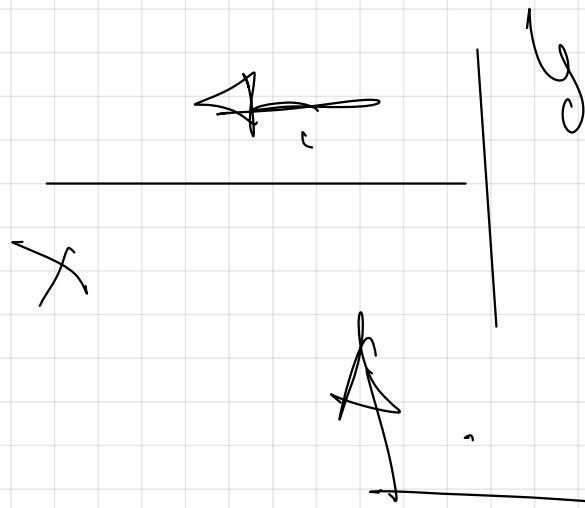
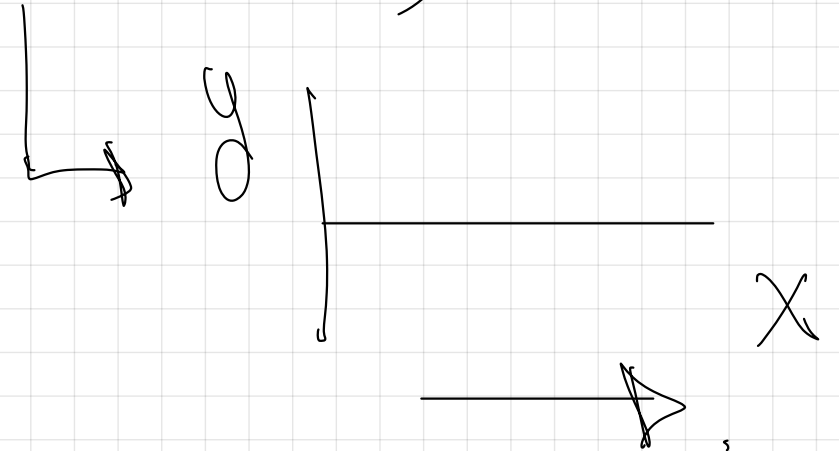
y



$$y(x,t) = A \cdot \cos(\omega t - kx)$$

N.A.S $y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$

$$y(x, t) = A \sin(\omega t \ominus kx + \varphi_0)$$

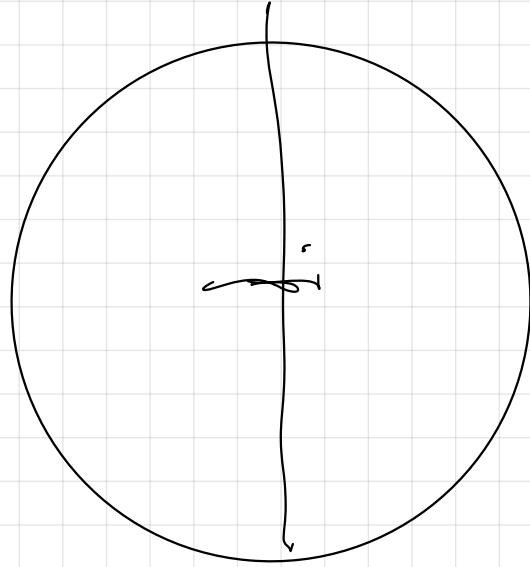


$$y(x, t) = A \cdot \sin(\omega t \oplus kx + \varphi_0)$$



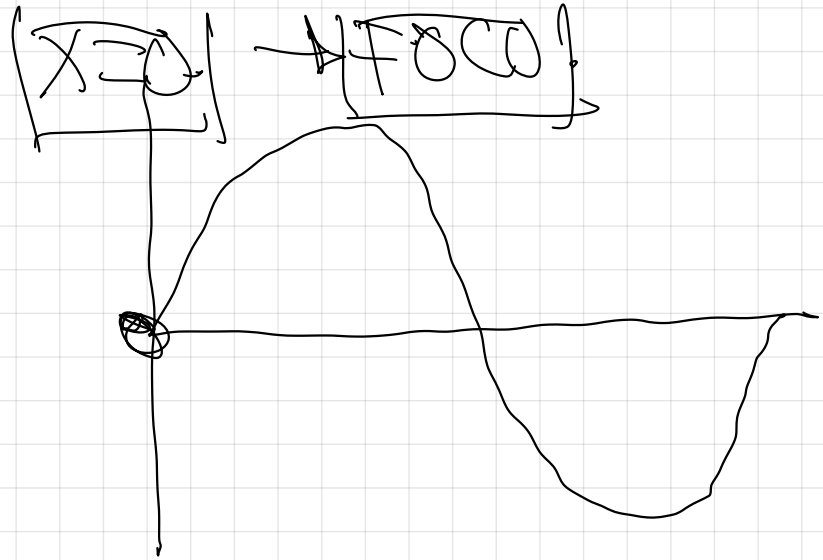
M.A.S. \Rightarrow

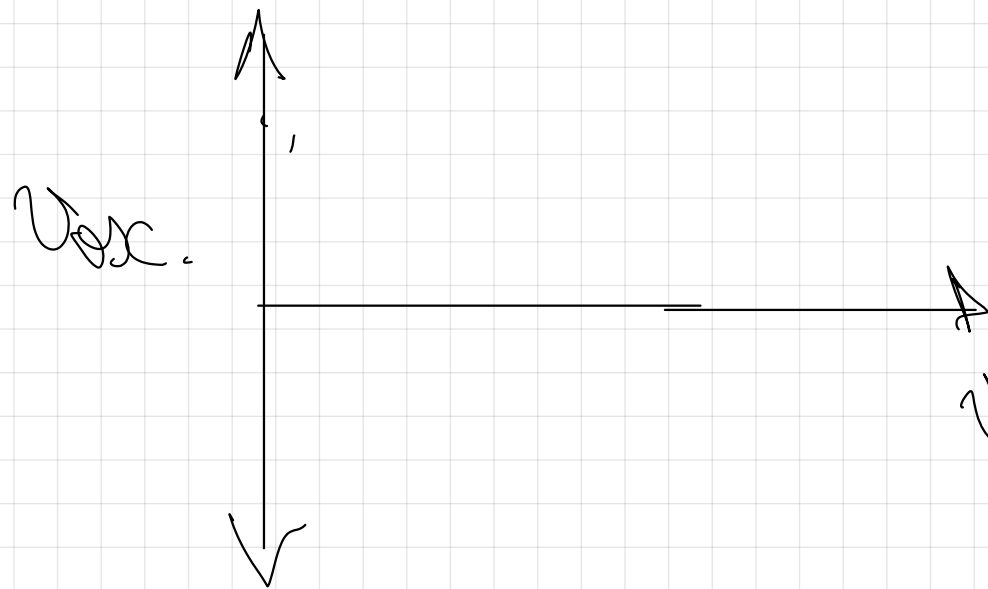
$$\psi_0$$
$$\boxed{t=0}$$



ONDA \Rightarrow

$$\psi_0$$
$$\boxed{\begin{matrix} t=0 \\ x=0 \end{matrix}}$$





\vec{v}_p de en el mismo medio.

$$\vec{v}_p = \frac{s}{t} = \frac{\uparrow}{\downarrow} \left(\frac{m}{s} \right)$$

4.- La ecuación de una onda en una cuerda es $y(x,t) = 0,03 \cdot \text{sen}(2t - 3x)$ (S.I)

- Explicar la doble periodicidad de la onda
- Calcula su amplitud, su período, su longitud de onda y su frecuencia
- Calcular su velocidad de propagación así como la velocidad de oscilación que puede tener un punto cualquiera de la cuerda y explicar el significado de cada una de ellas.
- Calcular la velocidad máxima de oscilación que puede tener un punto cualquiera de la cuerda

a) Doble periodicidad de la onda,
pag 129. del libro

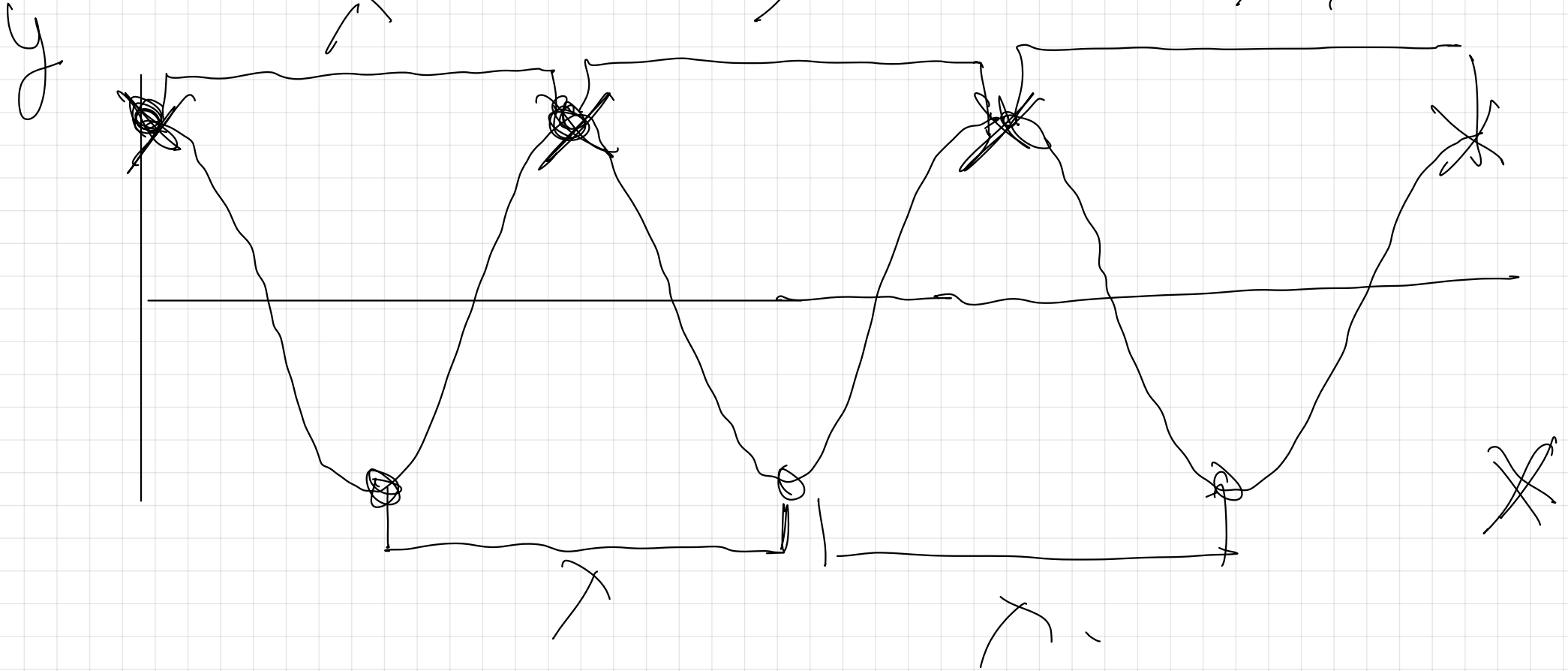
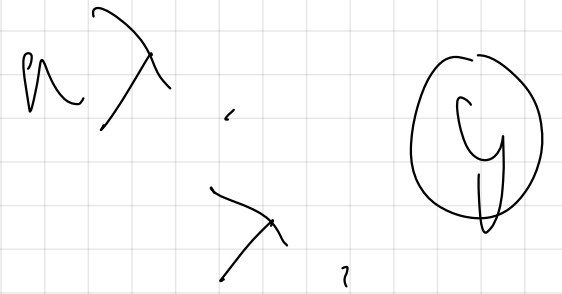
Periodicidad
espacial

Periodicidad
temporal

Periodicidad espacial

instante t fijo

$$t = \text{cte.}$$



periodicidad temporal.

$$x = \text{cte.}$$

4.- La ecuación de una onda en una cuerda es $y(x,t) = 0,03 \cdot \text{sen}(2t - 3x)$ (S.I)

a) Explicar la doble periodicidad de la onda

b) Calcula su amplitud, su período, su longitud de onda y su frecuencia

c) Calcular su velocidad de propagación así como la velocidad de oscilación que puede tener un punto cualquiera de la cuerda y explicar el significado de cada una de ellas.

d) Calcular la velocidad máxima de oscilación que puede tener un punto cualquiera de la cuerda

$$y(x,t) = 0,03 \cdot \text{sen}(2t - 3x) \text{ (S.I.)}$$

$$y(x,t) = A \cdot \text{sen}(\omega t - kx + \phi_0)$$

a) $A = 0,03 \text{ m.}$ $\omega = 2 \text{ rad/s.}$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ s.}$$

$$k = 3 \frac{\text{rad}}{\text{m}} \Rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{3} \text{ m}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{\pi} \text{ Hz}$$

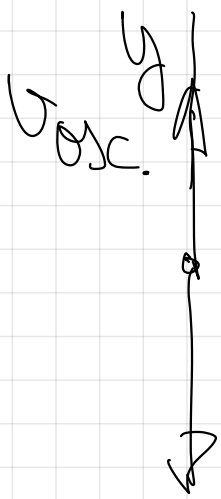
b)

$$v_p = \frac{1}{T}$$

$$v_p = \frac{\frac{2\pi}{3} \text{ m}}{\pi \text{ s}} = \frac{2}{3} \text{ m/s}$$

$$y(x,t) = 0,03 \cdot \text{sen}(2t - 3x) \text{ (S.I.)}$$

velocidad de oscilación de un pto
* x determinado (x = cte)



$$v_{osc} = \left(\frac{dy}{dt} \right)_{x=cte} = 0.03 \cdot \left[\cos(2t - 3x) \right] \cdot 2$$

$$v_{osc} = 0.06 \cdot \cos(2t - 3x) \text{ (SI)}$$

$$v_{max} \text{ osc.} = \pm 0.06 \text{ m/s}$$

$$v_{osc} = \left(\frac{dy}{dt} \right)_{x=cte} y(x,t) = A \cdot \sin(\omega t - kx + \varphi_0)$$

$$v_{osc} = \left(\frac{dy}{dt} \right)_{x=cte} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

$$v_{\max} = A \cdot \omega = 0.03 \text{ m} \cdot 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 0.06 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

3.- Escribe la ecuación de una onda transversal de 10 cm de amplitud y periodo de 0,5 s que se desplaza con una velocidad de fase de $340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ hacia la parte positiva del eje X. Supóngase que en el foco y en el instante inicial la elongación es máxima.



$$y(x, t) = A \cdot \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

$$A = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.5} = 4\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$y(x,t) = 0.1 \cdot \sin\left(4\pi t - \frac{2\pi}{170}x + \phi_0\right)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{170} \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

$$v_p = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_p = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \lambda = v_p \cdot T = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0.5 \text{s} = 170 \text{m}$$

Cálculo de ϕ_0

$$\left[\begin{array}{l} t=0 \\ x=0 \end{array} \right]$$

$$y = A$$

elongación máxima.

A

0

$$y(x, t) = A \cdot \sin(\omega t - kx + \varphi_0)$$

$$A = A \cdot \sin(\varphi_0)$$

$$\varphi_0 = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

$$y(x, t) = 0.1 \cdot \sin\left(4\pi t - \frac{2\pi}{170}x + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{SI})$$

$$y(x, t) = 0.1 \cdot \cos\left(4\pi t - \frac{2\pi}{170}x\right) \quad (\text{SI})$$

Vmax DC

1.- ¿Con qué velocidad se desplaza una onda armónica cuya longitud de onda es de 0,5 cm y su frecuencia de $6 \cdot 10^{10}$ Hz?. ¿Cuál será el tiempo que tarda la onda en recorrer una distancia igual a una longitud de onda?

$$v_p = \lambda \cdot f$$

$$v_p = \lambda \cdot f$$

$$v_p = \lambda \cdot f$$

$$\lambda = 0,5 \text{ cm}$$

$$\lambda = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$v_p = \lambda \cdot f = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot 6 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1} = \left[3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow T = \frac{1}{f} = \frac{1}{6 \cdot 10^{10}} \text{ s.}$$

2.- El sonido de la sirena de una fábrica tarda 10 s en llegar a un determinado receptor situado a una distancia equivalente a 5000 veces la longitud de onda del sonido emitido. Calcula la frecuencia de dicho sonido.

$$v_p = \frac{s}{t} \Rightarrow \left[v_p = \frac{5000 \lambda}{10} \right] \quad \frac{5000 \lambda}{10} = \cancel{\lambda} \cdot f$$

$$v_p = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \left[v_p = \lambda \cdot f \right]$$

$$\boxed{f = 500 \text{ Hz}}$$

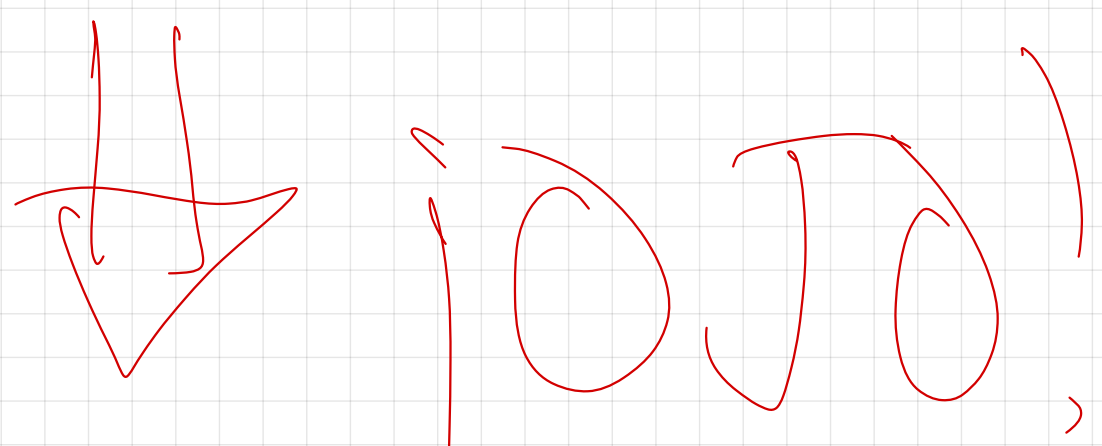
6.- Suponga que en una onda armónica se duplica la frecuencia. Indicar cómo se modifican el período, la velocidad de propagación, la longitud de onda, la amplitud, y la velocidad máxima de oscilación de un punto cualquiera.

$f = \frac{1}{T}$ → obtengo una expresión del T en función de f y veo cómo varía.

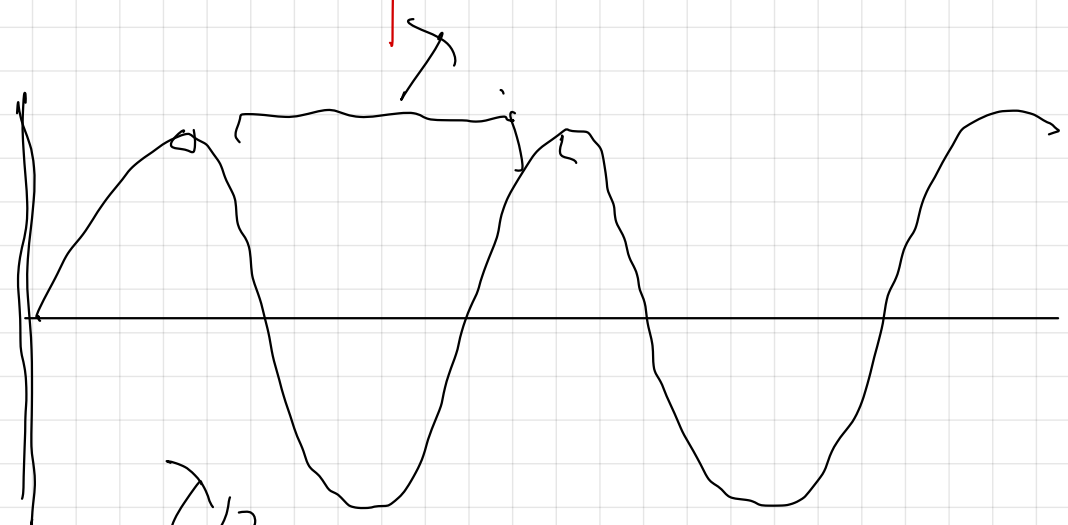
$$\begin{array}{l} T = \frac{1}{f} \\ T' = \frac{1}{2f} \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} T = \frac{1}{f} \\ T' = \frac{1}{2f} \end{array}} \right\} \quad \begin{array}{l} \frac{T'}{T} = \frac{\frac{1}{2f}}{\frac{1}{f}} \\ \frac{T'}{T} = \frac{1}{2} \end{array} \quad T' = \frac{1}{2} T$$

El período \times

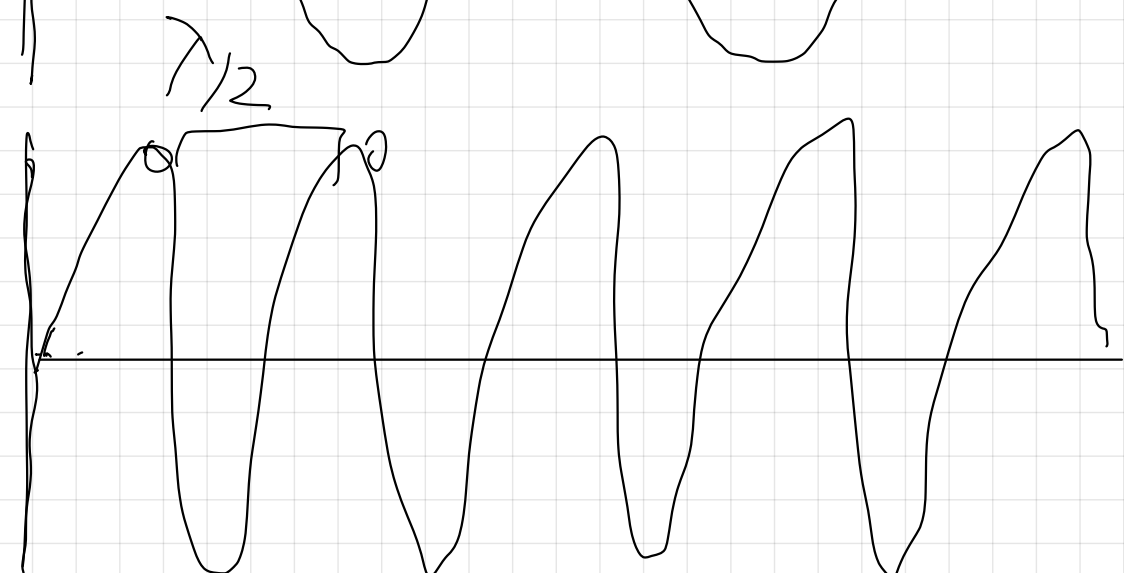
reduce a la unidad.



Mismo Medid



$$U_p \approx \frac{1}{T} \int_{ct} dt$$



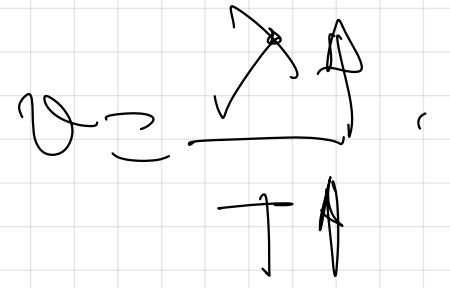
$$U_p \approx \frac{1}{2} \frac{1}{T} \int_{ct} dt$$

¡OJO! ¡MISMO MEDIO!

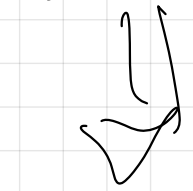
~~$v = c$~~

IR

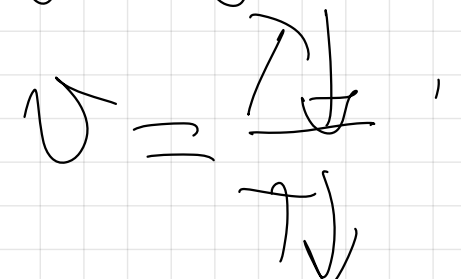
ROJO



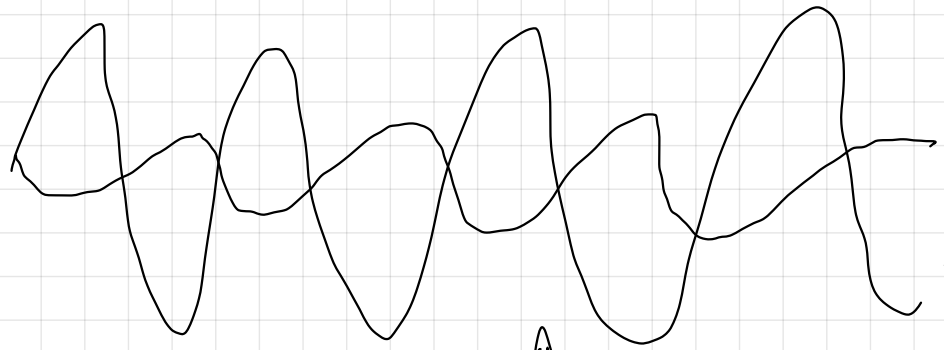
$$v_p = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$



vacío.



VIOLETA



$$\begin{aligned}
 & \ddot{u} = \frac{1}{2} \dot{v} \quad \text{and} \quad \dot{u} = \frac{1}{2} \ddot{v} \\
 & \ddot{u} = \frac{1}{2} \dot{v} \quad \text{and} \quad \dot{u} = \frac{1}{2} \ddot{v} \\
 & \ddot{u} = \frac{1}{2} \dot{v} \quad \text{and} \quad \dot{u} = \frac{1}{2} \ddot{v} \\
 & \ddot{u} = \frac{1}{2} \dot{v} \quad \text{and} \quad \dot{u} = \frac{1}{2} \ddot{v}
 \end{aligned}$$

A sí que siendo la misma.

$$u_{\max} = [A] \cdot \omega$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega = 2\pi \frac{1}{T}$$

Al duplicar la frecuencia

$$v_{\text{max osc}} = A \cdot 2\pi f$$

$$v'_{\text{max osc}} = A \cdot 2\pi 2f$$

$$v'_{\text{max osc}} = 2 v_{\text{max osc}}$$

8.- Una partícula realiza un movimiento periódico transversal definido por su función (M.A.S) $y=3 \cdot \text{sen}(4\pi t)$ (S.I), que se propaga en un medio elástico con velocidad de $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ de derecha a izquierda.

a) Escribir la ecuación de dicha onda

b) Calcular la elongación, velocidad y aceleración de un punto que se encuentra a 6m de la partícula, medido en la dirección de propagación, en el instante $t=8\text{s}$

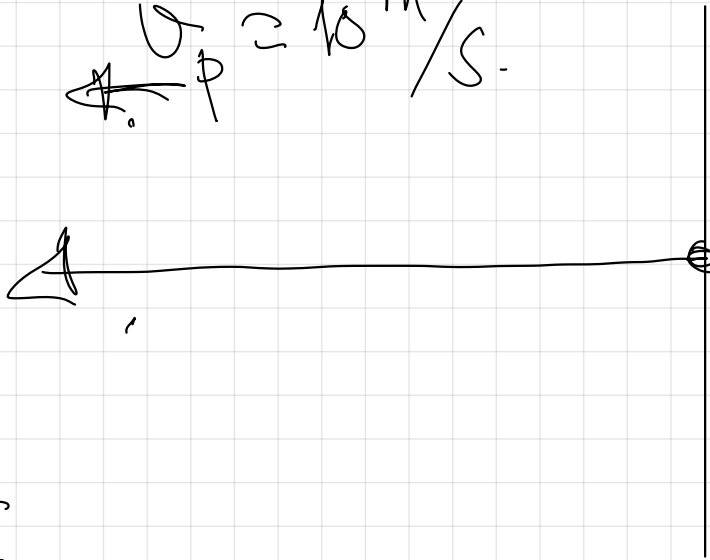
c) ¿Se transmite la materia?, ¿se transmite la energía?

FOCO.

$$y(t) = 3 \cdot \sin(4\pi t)$$

$$y(x, t) = 3 \cdot \sin\left(4\pi t + \frac{2\pi}{5}x\right) \text{ (SI)}$$

$$v_p = 10 \text{ m/s.}$$



$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$v_p = \frac{\omega}{k}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4\pi} = 0.5 \text{ s.}$$

$$\lambda = v_p \cdot T = 10 \cdot 0.5 = 5 \text{ m.}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{5} \text{ rad/m.}$$

$$y(x,t) = 3 \cdot 20 \text{ m} \left(4\pi t + \frac{2\pi}{5} x \right) \text{ (SI)}$$

$$x = -6 \text{ m}$$

$$t = 8 \text{ s}$$

$$v_{\text{osc}} = \left(\frac{dy}{dt} \right)_{x=\text{cte}} = 3 \cdot \left[\omega \left(4\pi t + \frac{2\pi}{5} x \right) \right] \text{ (SI)}$$

$$v_{\text{osc}} = 12\pi \omega \left(4\pi t + \frac{2\pi}{5} x \right) \text{ (SI)}$$

$$x = -6 \text{ m}$$

$$t = 8 \text{ s.}$$

$$a = \left(\frac{dv}{dt} \right)_{x=cte} = 12\pi \cdot \left[-\sin\left(4\pi t + \frac{2\pi}{5}x\right) \right] \cdot 4\pi,$$

$$a = -48\pi^2 \cdot \sin\left(4\pi t + \frac{2\pi}{5}x\right)$$

$$x = -6$$

$$t = 8 \text{ s.}$$

6.- Suponga que en una onda armónica se duplica la frecuencia. Indicar cómo se modifican el período, la velocidad de propagación, la longitud de onda, la amplitud, y la velocidad máxima de oscilación de un punto cualquiera.

$$v_{\max} = A \cdot \omega$$

$$v_{\max}^1 = A \cdot 2\omega$$

$$v_{\max}^1 = 2 v_{\max}$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$\omega^1 = 2\pi \cdot 2f$$

$$\omega^1 = 2\omega$$

10.- Una onda viene dada por la ecuación:

$$y(x,t) = 2 \cdot \cos(100t - 5x) \text{ (S.I)}$$

donde x e y son coordenadas cartesianas

- a) Haga un análisis razonado del movimiento ondulatorio representado por la ecuación anterior y explique si es longitudinal o transversal, y cuál es su sentido de propagación.
- b) Calcule la frecuencia, el período, la longitud de onda y el número de onda, así como el módulo, dirección y sentido de la velocidad de propagación de la onda. ¿Se mueven los puntos del medio con esa velocidad?

Handwritten analysis of the wave equation $y(x,t) = 2 \cdot \cos(100t - 5x)$ (S.I).

The wave is identified as a transverse wave propagating in the positive x direction. The amplitude is $A = 2$.

Key parameters derived from the equation:

- Wave number: $k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{5}$
- Angular frequency: $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{100}$
- Phase velocity: $v_p = \frac{\omega}{k}$

Diagrams illustrate the wave's motion:

- A horizontal line with an arrow pointing right, labeled v_p , representing the direction of wave propagation.
- A vertical line with an arrow pointing up, labeled v_p , representing the transverse motion of particles in the medium.
- A diagram showing a particle moving up and down (transverse motion) while the wave pulse moves to the right (longitudinal propagation).

The final boxed result is:

$$v_p = \frac{\omega}{k}$$

$$v_p = \frac{100}{5} = 20 \text{ m/s}$$

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{100}{2\pi} = \frac{50}{\pi} \text{ Hz}$$

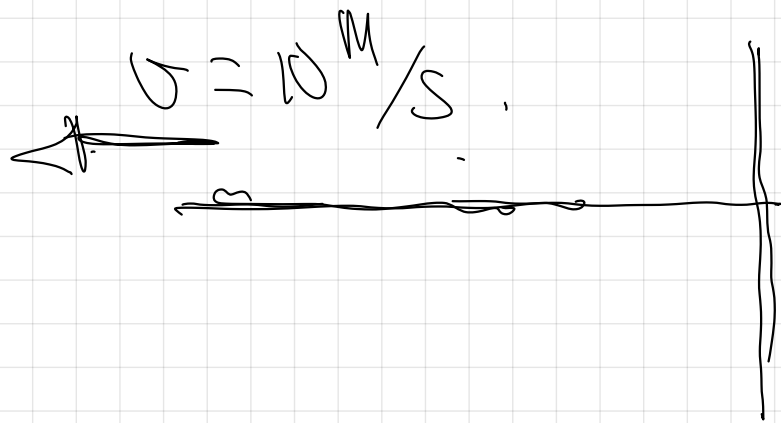
$$T = \frac{1}{f} = \frac{\pi}{50} \text{ s}$$

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{K} = \frac{2}{5} \pi \text{ m}$$

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\frac{2}{5} \pi}{\frac{\pi}{50}} = \frac{50 \cdot 2}{5} = 20 \text{ m/s}$$

8.- Una partícula realiza un movimiento periódico transversal definido por su función (M.A.S) $y=3 \cdot \text{sen}(4\pi t)$ (S.I), que se propaga en un medio elástico con velocidad de $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ de derecha a izquierda.

- Escribir la ecuación de dicha onda
- Calcular la elongación, velocidad y aceleración de un punto que se encuentra a 6m de la partícula, medido en la dirección de propagación, en el instante $t=8\text{s}$
- ¿Se transmite la materia?, ¿se transmite la energía?



Ecuación del M.A.S.
 $y = 3 \cdot \text{sen}(4\pi t)$ (SI)

$$y(x,t) = A \cdot \text{sen}(\omega t + kx + \phi_0)$$

$$y(x,t) = 3 \cdot \text{sen}\left(4\pi t + \frac{2}{5}\pi x\right) \text{ (SI)}$$

0 (no especifican)

$$y_p = \frac{1}{T}$$

$$\lambda = v_p \cdot T$$

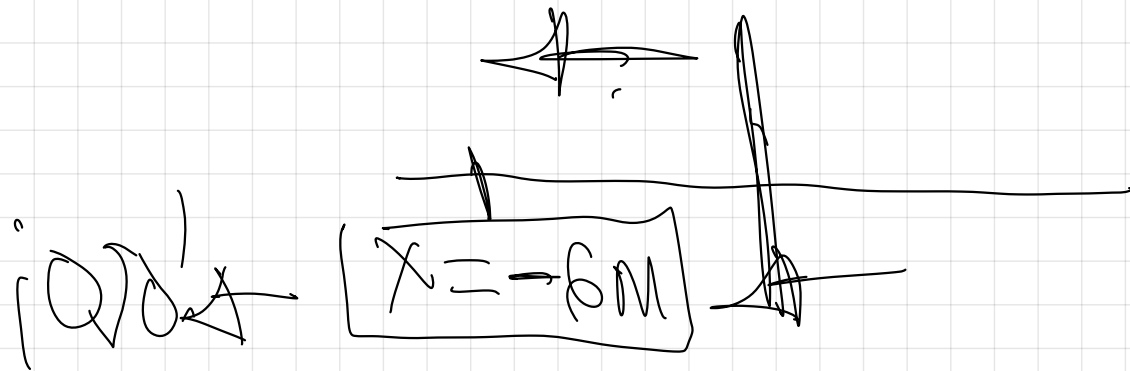
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4\pi} = 0.5 \text{ s.}$$

$$\lambda = 10 \cdot 0.5 = 5 \text{ m}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2}{5} \pi \frac{\text{rad}}{\text{m.}}$$

$$y(x,t) = 3 \cdot \sin(4\pi t + \frac{2}{5}\pi x) \quad (\text{SI})$$



$$t = 8 \text{ s}$$

$$y(\ominus 6 \text{ m}, 8 \text{ s}) = -2.853 \text{ m}$$

Velocidad

$$x = -6 \text{ m}, t = 8 \text{ s} \quad y(x,t) = 3 \cdot \sin\left(4\pi t + \frac{2}{5}\pi x\right) \text{ (SI)}$$

$$v = \left(\frac{dy}{dt}\right)_{x=\text{cte.}} = 3 \cdot \left[\cos\left(4\pi t + \frac{2}{5}\pi x\right)\right] \cdot 4\pi$$

Velocidad de
oscilación de un pto x

$$v(x, t) = 12\pi \cos\left(4\pi t + \frac{2}{5}\pi x\right) \text{ (SI)}$$

$$x = -6 \text{ m}, t = 8 \text{ s} \Rightarrow v(-6 \text{ m}, 8 \text{ s}) = 1164 \text{ m/s}$$

$$a \Rightarrow \left(\frac{dv}{dt}\right)_{x=0} = -48\pi^2 \sin\left(4\pi t + \frac{2}{5}\pi x\right)$$

5.- Sobre el extremo de una cuerda tensa y horizontal se aplica un movimiento armónico simple perpendicular a la cuerda con una frecuencia de 100 Hz. Como consecuencia, en la cuerda se produce una onda transversal que se propaga hacia la izquierda con una velocidad de $40 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, siendo la velocidad máxima de un punto cualquiera de la cuerda $6,28 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

a) Calcular la ecuación de la onda

b) Cuánto valdrá la elongación de los puntos que presenten la velocidad máxima?

$v = 40 \text{ m/s}$
 $v_{\text{max osc}} = 6,28 \text{ m/s}$
 $f = 100 \text{ Hz}$

$y(x,t) = A \cdot \text{sen}(\omega t + kx + \phi)$

Caso específico

$$v = \left(\frac{dy}{dt} \right)_{x=cte} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + kx) \quad (\text{SI})$$

$$v_{\max} = A \cdot \omega$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$\omega = 2\pi \cdot 100$$

$$\omega = 200\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$A = \frac{v_{\max}}{\omega} = \frac{6.28 \text{ m/s}}{200\pi \text{ rad/s}}$$

$$A = 0.01 \text{ m}$$

$$y(x,t) = 0.01 \cdot \sin(200\pi t + 5\pi x) \quad (\text{SI})$$

$$v_p = \frac{\lambda}{T}$$

$$v_p = \lambda \cdot f$$

$$\lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{40}{100} = 0.4 \text{ m}$$

La $y=0$ cuando v_{osc} es máxima.

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0.4} = 5\pi \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

9.- Una onda armónica transversal que se propaga a lo largo de la dirección positiva del eje de las X tiene 5 cm de amplitud, 8π cm de longitud de onda, y velocidad de propagación de $40 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$. Sabiendo que la elongación de la partícula de abscisa $x=0$ en el instante $t=0$ es de 5 cm por debajo de la posición de equilibrio, determinar:

- El número de onda y la frecuencia angular de la onda
- La ecuación que representa el movimiento vibratorio armónico simple de la partícula de abscisa $x=0$
- la ecuación que representa la onda armónica transversal indicada

$$y(x,t) = A \cdot \text{sen}(\omega t - kx + \phi)$$

$$y(x,t) = 0.05 \cdot \text{sen}\left(10t - 25x + \frac{3}{2}\pi\right) \text{ [SI]}$$

$$\lambda = 8\pi \text{ cm}$$

$$\lambda = 0.08\pi \text{ m}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0.08\pi} = 25 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

$$v_p = 40 \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 0.4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_p = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow T = \frac{\lambda}{v_p} = \frac{0.08\pi}{0.4} = 0.2\pi \text{ s.}$$

$$k = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.2\pi} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Calculate y_0 , $x=0$, $t=0$

$$y = -0.05 \text{ m.}$$



$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

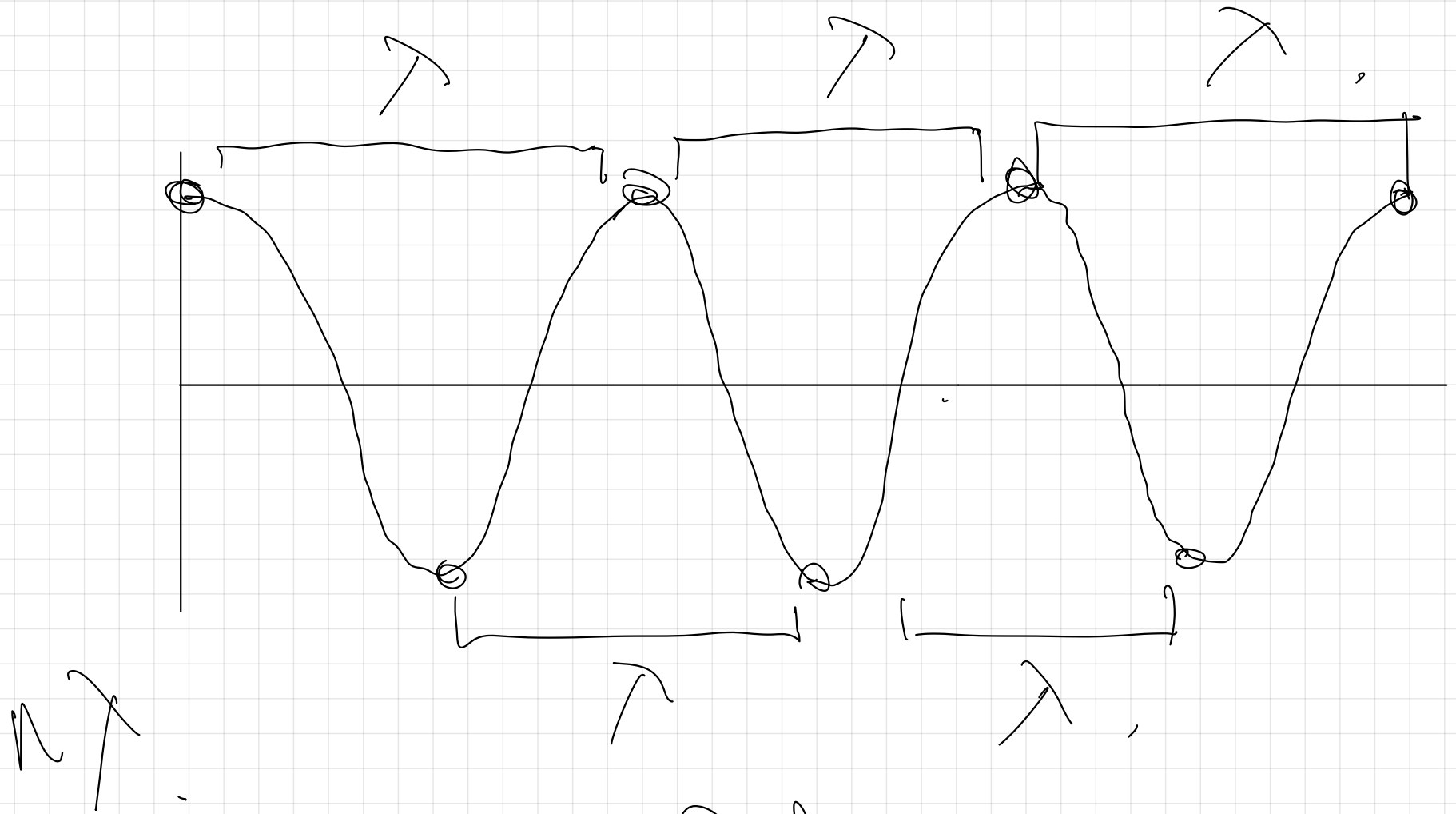
$$\sin \varphi_0 = 1$$

$$\varphi_0 = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$y(x,t) = 0,05 \cdot 2\pi \left(10t - 25x + \frac{3}{2}\pi \right) \text{ (SI)}$$

Ecuación
del M.A.S
del $x=0$.

$$y(t) = 0,05 \cdot 2\pi \left(10t + \frac{3}{2}\pi \right) \text{ (SI)}$$



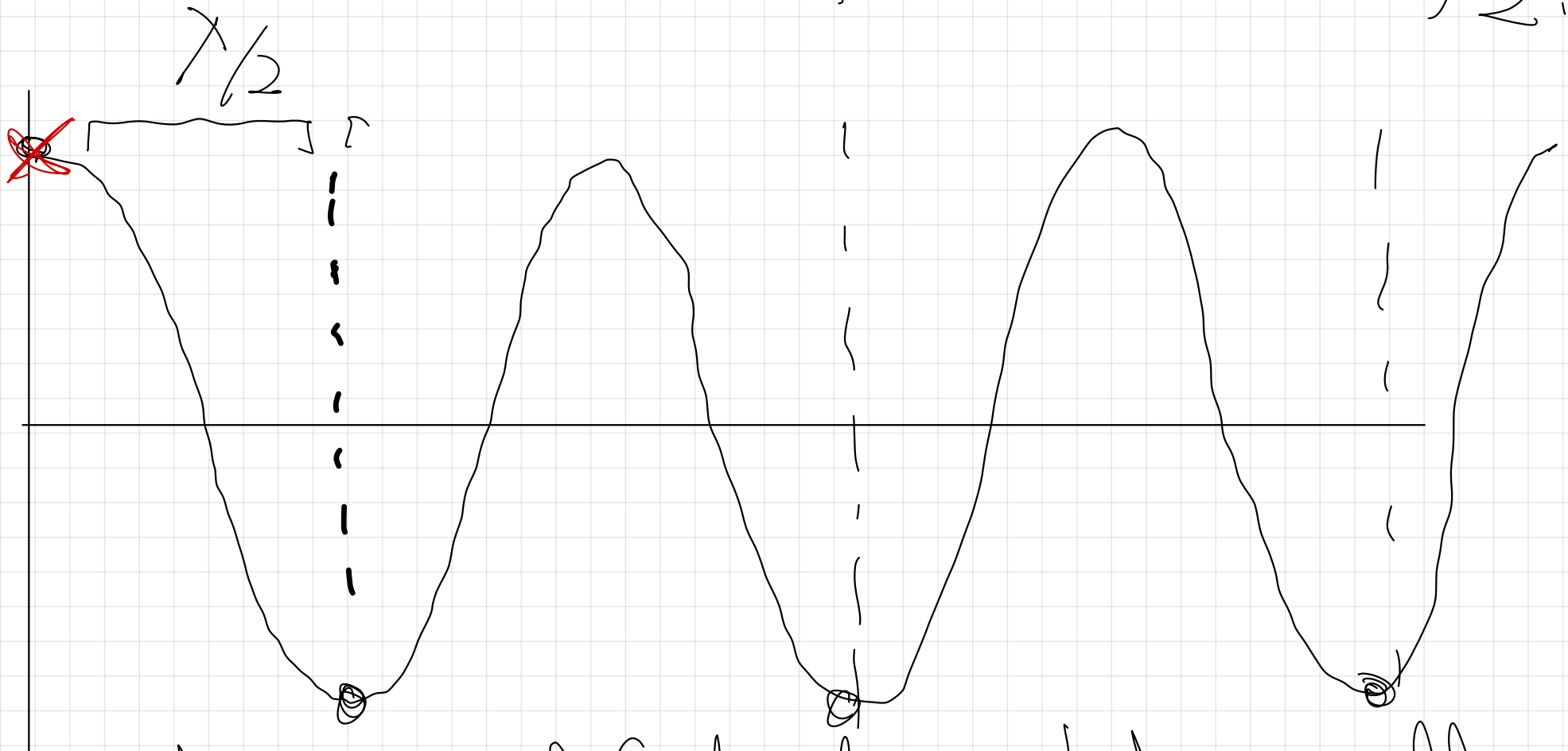
$N \times$

en fase.

$$\frac{\lambda}{2} + \lambda + \lambda = \frac{5\lambda}{2} \quad \lambda = 5 \left(\frac{\lambda}{2}\right)$$

$$\frac{\lambda}{2} + \lambda = \frac{3\lambda}{2} \quad \lambda = 3 \left(\frac{\lambda}{2}\right)$$

$$(2n+1) \frac{\lambda}{2}$$



ptos en oposición de fase, todas aquellas

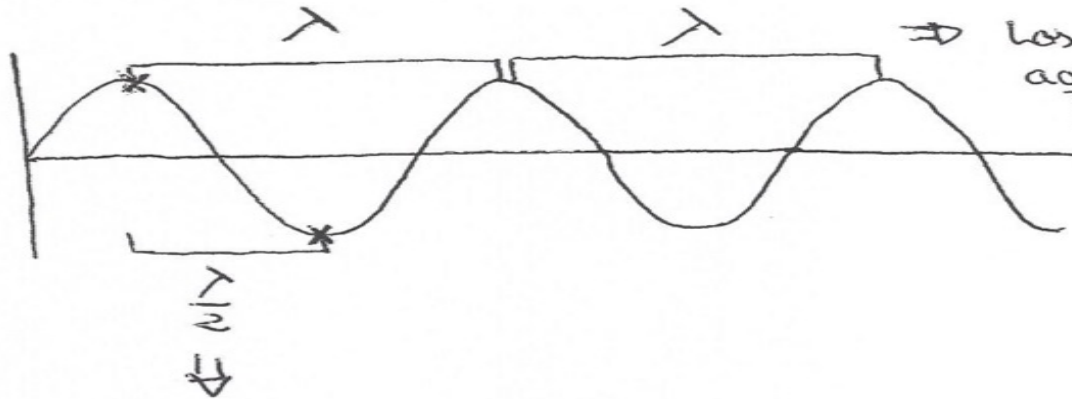
separados por $(2n+1) \frac{\lambda}{2}$
($n=0, 1, 2, 3, \dots$) (nº impar de
señales en antenas de onda.

- 11.- Una onda transversal tiene de ecuación $y = 25 \cdot \sin(0,4t - 1,25x)$ (x e y expresados en cm y t en segundos). Determinar:
- Puntos que están en fase y puntos que están en oposición de fase
 - ¿Qué tiempo ha de transcurrir para que un punto situado a 5 cm del foco tenga velocidad máxima?

a) $n\lambda$
En fase

$(2n+1) \frac{\lambda}{2}$
En oposición de fase.

11 a)



Los ptes en fase son aquellos ptes que poseen el mismo estado de vibración, es decir, todos aquellos separados por una distancia igual a λ o número entero de longitudes de onda ($n\lambda$)

Los ptes en oposición de fase dentro de una misma onda son ptes con estados de vibración opuestos, es decir, separados entre si por una distancia de $\frac{\lambda}{2}$ o número impar de semilongitudes de onda

$$y = 25 \cdot \sin(\underbrace{0.4t}_{\omega} - \underbrace{1.25x}_{k}) \quad (x \text{ y } y \text{ en cm, } t \text{ en s})$$

$$\omega = 0.4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$k = 1.25 \frac{\text{rad}}{\text{cm}}$$

Es un caso no frecuente en el que se nos dan unas unidades que no son las del S.I., y por ello k no va en $\frac{\text{rad}}{\text{m}}$, sino en $\frac{\text{rad}}{\text{cm}}$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{1.25} = 5.02 \text{ cm} \Rightarrow \text{Los ptes en fase son aquellos separados entre si por } 5.02 \text{ cm } (\lambda) \text{ o múltiplo entero. } n\lambda$$

Los ptes en oposición de fase son todos aquellos separados entre si por una distancia $\frac{\lambda}{2} = \frac{5.02 \text{ cm}}{2} = 2.51 \text{ cm}$ o múltiplo impar, $(2n+1)\frac{\lambda}{2}$

b) $y = 25 \cdot \text{sen}(0,4t - 1,25x)$ ($x, t \in \mathbb{R}$)

$$v_{osc} = \left(\frac{dy}{dt} \right)_{x=0} = 25 \left[\cos(0,4t - 1,25x) \right] \cdot 0,4$$

$$v_{osc} = 25 \cdot 0,4 \cdot \left[\cos(0,4t - 1,25x) \right]$$

$$x = 5 \text{ cm}$$

Pense tener
 v_{max}

$$\cos(0,4t - 1,25x) = 1$$

0

* $0,4t - 1,25x = 0$

$$0,4t - 125,5 = 0$$

$$t \geq 157,25$$

▷ 14.- La ecuación de una onda transversal que se propaga por una cuerda es:

$$y(x,t) = 0,06 \cdot \cos 2\pi (4t - 2x) \text{ (S.I)}$$

- a) Calcule la diferencia de fase entre los estado de vibración de una partícula de la cuerda en los instantes $t=0$ y $t=0,5$ s.
- b) Haga una representación gráfica aproximada de la forma que adopta la cuerda en los instantes anteriores.

$$y = A \cdot \sin(\omega t - kx)$$

$$y = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right)$$

$$y = A \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

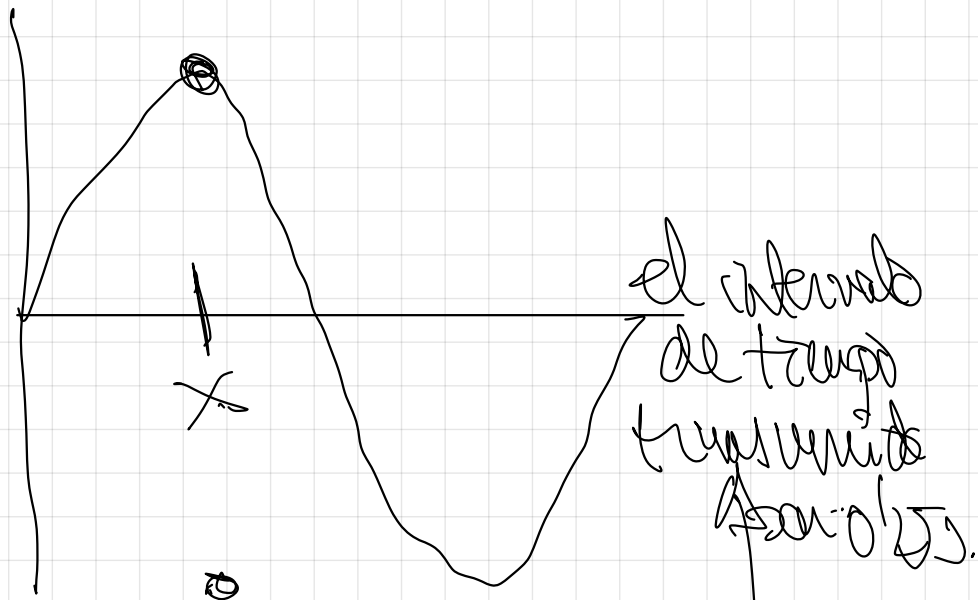
$$y(x,t)$$

$$y(x,t) = 0,06 \cdot \cos\left(\underbrace{8\pi t}_{\omega t} - \underbrace{4\pi x}_{kx}\right)$$

ω κ

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{8\pi} = 0.25 \text{ s} \quad T = 0.25 \text{ s}.$$

Misma pto
x



Misma pto x

$$y(x,t) = 0.06 \cdot \cos\left(8\pi t - 4\pi x\right)$$

ángulo de fase φ .

$$y(x, t) = 0.06 \cdot \cos \left(8\pi \left(t + \frac{1}{25} \right) - 4\pi x \right)$$

desplazo de fase φ_2 .

diferencia de fase.

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 8\pi \left(t + \frac{1}{25} \right) - 4\pi x - \left(8\pi t - 4\pi x \right)$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 8\pi + 2\pi - 4\pi x - 8\pi t + 4\pi x$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi \text{ rad} \Rightarrow$$

los pto estan
en fase.

a) Calcule la diferencia de fase entre los estado de vibración de una partícula de la cuerda en los instantes $t=0$ y $t=0,5$ s.

$$y(x,t) = 0,06 \cdot \cos \left(\underbrace{8\pi t - 4\pi x}_{\varphi_1} \right)$$

transcurren 0,5 s.

Mismo pto x

$$y(x,t) = 0,06 \cdot \cos \left(\underbrace{8\pi(t+0,5) - 4\pi x}_{\varphi_2} \right)$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 8\pi(t+0,5) - 4\pi x - (8\pi t - 4\pi x)$$

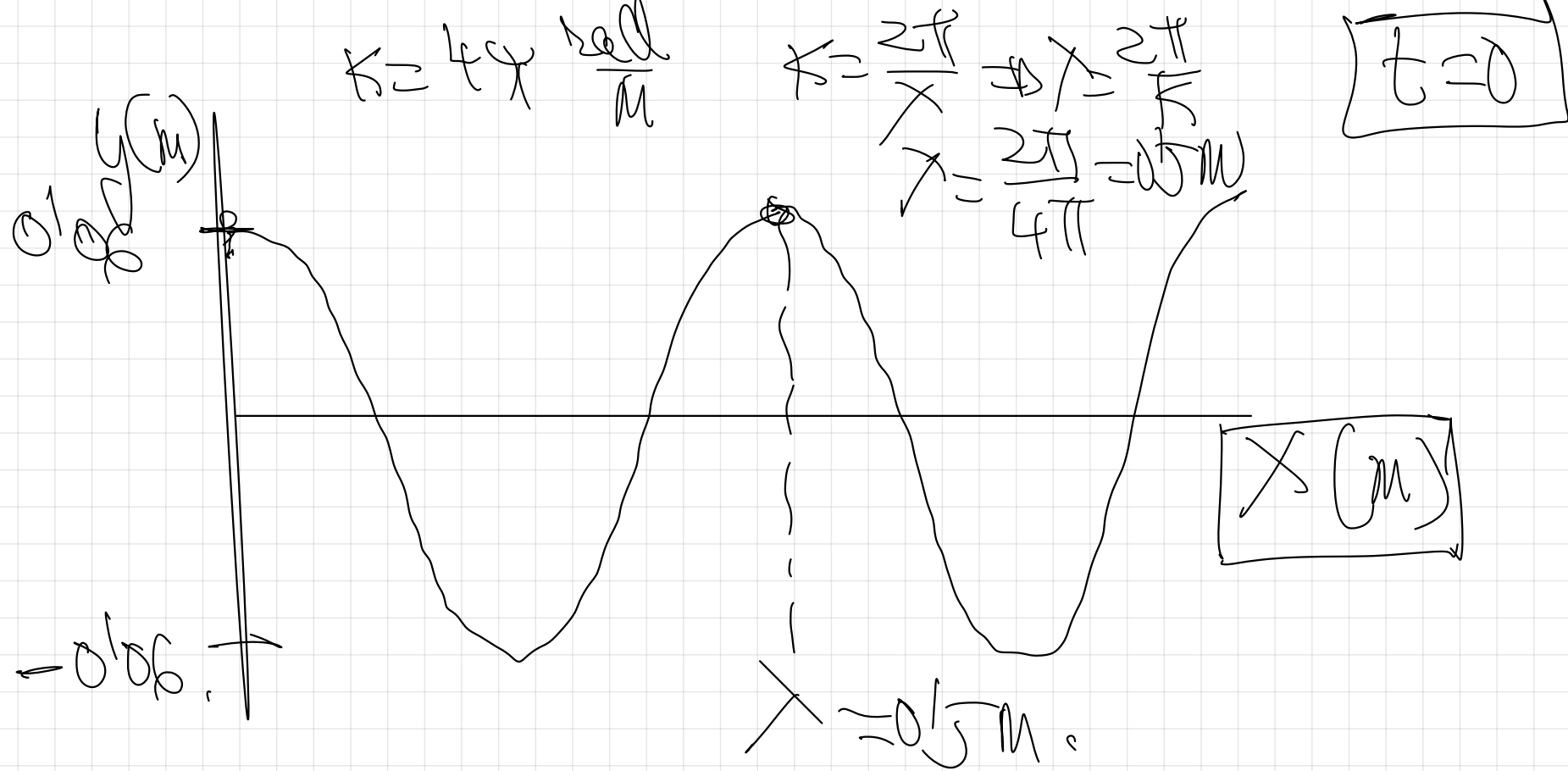
$$\varphi_2 - \varphi_1 = 8\pi x + 4\pi - 4\pi x - 8\pi t + 4\pi$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 4\pi \text{ rad}$$

b) Forme de la corde $t=0$ s et $t=0,5$ s.

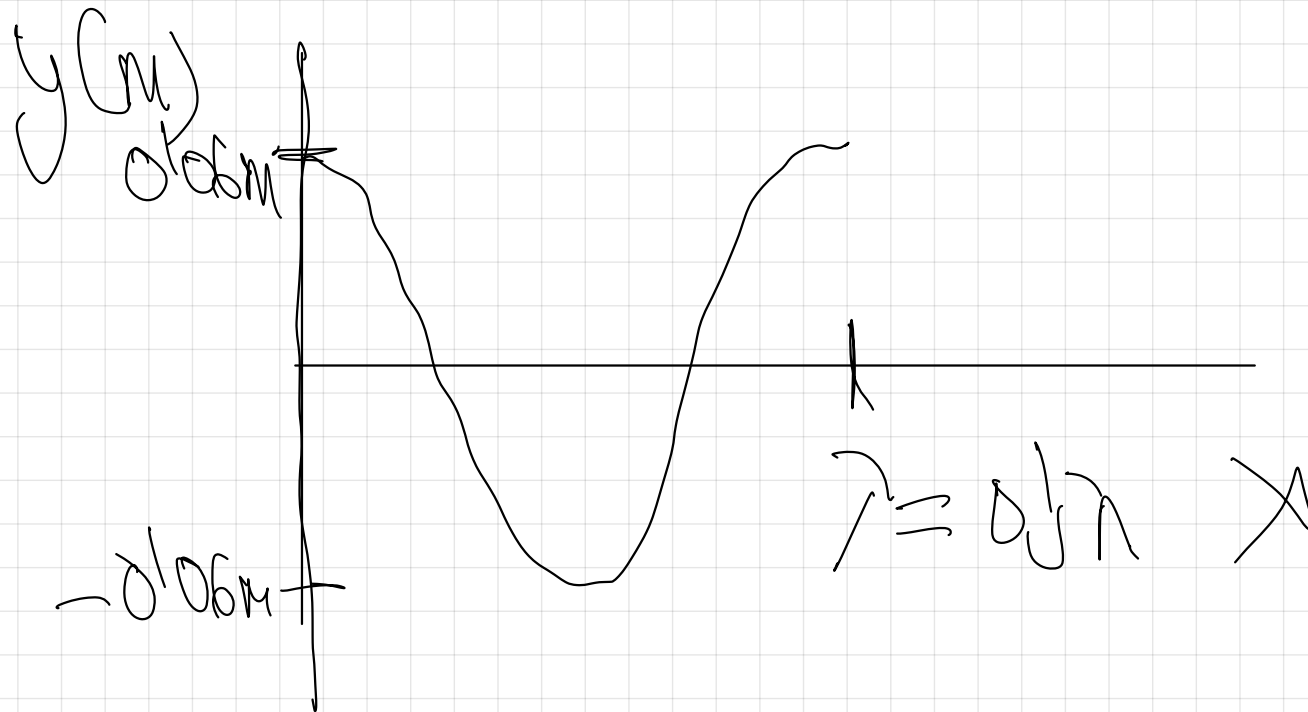
$$y(x,t) = 0,06 \cdot \cos(8\pi t - 4\pi x)$$

$$t=0 \text{ s} \quad y(x,t=0) = 0,06 \cdot \cos(-4\pi x) \quad (\text{SI})$$



$$y(x, t) = 0.06 \cdot \cos(8\pi|t| - 4\pi x)$$

$$t = 0.5 \text{ s} \Rightarrow y(x) = 0.06 \cdot \cos(4\pi - 4\pi x)$$



$$t = 0.5 \text{ s}$$

15.- Una onda armónica se propaga por un medio elástico siguiendo la ecuación

$$y(x,t) = 24 \cdot \sin 2\pi (2000t - 5x) \text{ (S.I)}$$

Calcula el desfase que existirá entre dos puntos separados 0,2 m entre si a lo largo de la dirección de propagación de la onda. *en un cierto instante t.*

$$y(x,t) = 24 \cdot \sin (4000\pi t - 10\pi x) \text{ (SI)}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{10\pi} = 0.2 \text{ m}$$

risultato

però x
separato
per 0.2 m

$$y(x, t) = 24 \cdot 20 \text{ m} \left(4000\pi t - 10\pi x \right) \text{ (SI)}$$

$$y(x, t) = 24 \cdot 20 \text{ m} \left(4000\pi t - 10\pi \left(x + 0.2 \right) \right)$$

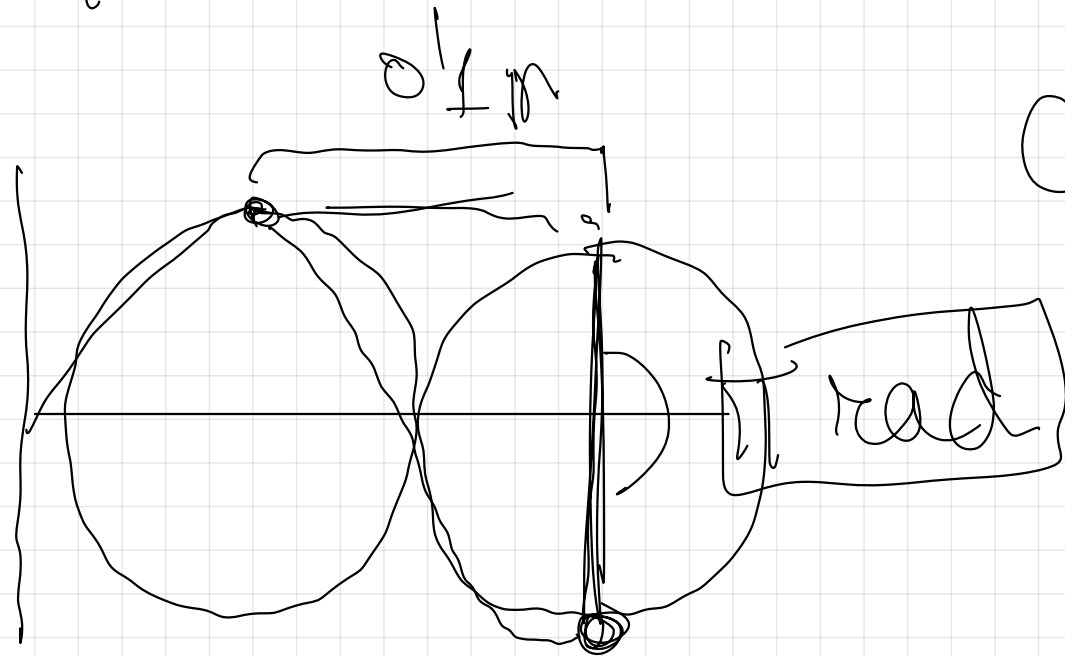
$$\varphi_2 - \varphi_1 = 4000\pi t - 10\pi \left(x + 0.2 \right) - \left(4000\pi t - 10\pi x \right)$$

$$\phi_2 - \phi_1 = 4000\pi t - 10\pi x - 2\pi - 4000\pi t + 10\pi x$$

$$\phi_2 - \phi_1 = -2\pi \text{ rad.}$$

en fase.

$$|\phi_2 - \phi_1| = 2\pi \text{ rad} \rightarrow$$



En oposición
de fase.

15.- Una onda armónica se propaga por un medio elástico siguiendo la ecuación

$$y(x,t) = 24 \cdot \text{sen } 2\pi (2000t - 5x) \text{ (S.I)}$$

Calcula el desfase que existirá entre dos puntos separados 0.2 m entre sí a lo largo de la dirección de propagación de la onda. *en el mismo*.

*mismo
separados
0.2 m.*

$$y(x,t) = 24 \cdot 2\pi (4000\pi t - 10\pi x)$$

$$y(x,t) = 24 \cdot 2\pi (4000\pi t - 10\pi(x + 0.2))$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 4000\pi t - 10\pi(x + 0.2) - (4000\pi t - 10\pi x)$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \cancel{4000\pi t} - \cancel{10\pi x} - \pi - \cancel{4000\pi t} + \cancel{10\pi x}$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\pi \text{ rad.}$$

$$|\varphi_2 - \varphi_1| = \pi \text{ rad} \rightarrow \text{en oposición de fase}$$

➤ 16.- Una onda armónica cuya frecuencia es de 50 Hz, se propaga en la dirección positiva del eje X. Sabiendo que la diferencia de fase, en un instante dado, para dos puntos separados 20 cm es de $\pi/2$ rad, determinar:

a) El período, la longitud de onda y la velocidad de propagación de la onda

b) En un punto dado, ¿Qué diferencia de fase existe entre los desplazamientos que tienen lugar en dos instantes separados por un intervalo de 0,01 s?

16 b) \rightarrow Calcula $T \Rightarrow f = \frac{1}{T} \Rightarrow T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50}$

$$T = 0.02 \text{ s}$$

$$\omega = 2\pi f = 100\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

mismo pto
X

cuando transcurre 0.01 s .

$$y = A \cdot \sin(100\pi t - Kx)$$

mismo
pto X
cuando

φ_1

transcurre $T/2$

$$y = A \cdot \sin(100\pi(t + 0.01) - Kx)$$

φ_2

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 100\pi(t + 0.01) - Kx - (100\pi t - Kx)$$

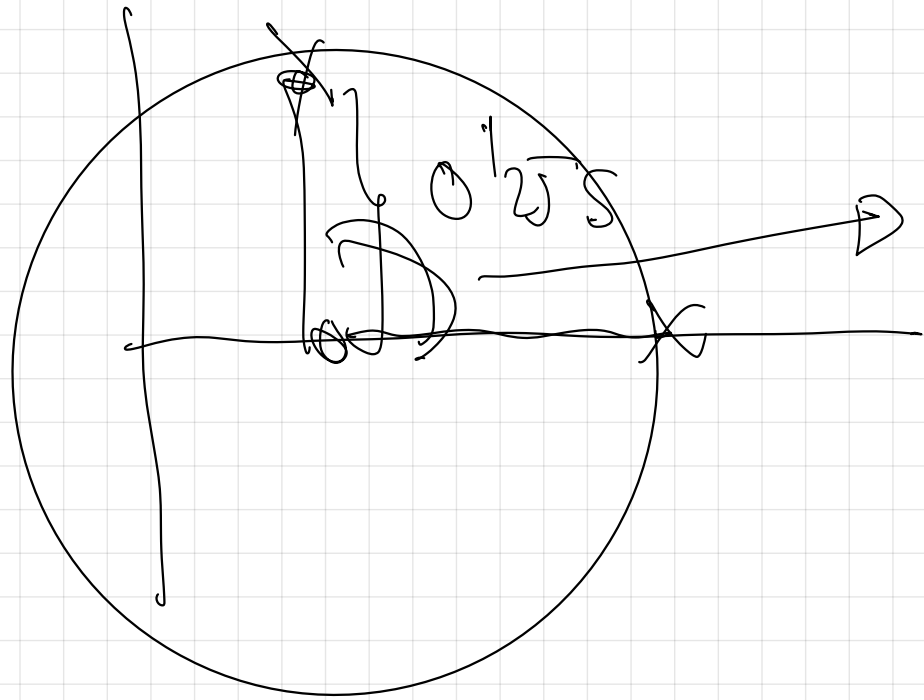
$$\varphi_2 - \varphi_1 = 100\pi t + \pi - \cancel{Kx} - 100\pi t \cancel{+ Kx}$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \pi \text{ rad} \quad (\text{En oposición de fase})$$

$$T = 1 \text{ s.}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s.}}$$

0,5 s. número de π



$$y = 0.3 \cdot \sin(2\pi t - 4\pi x)$$

$$\frac{y}{x}$$

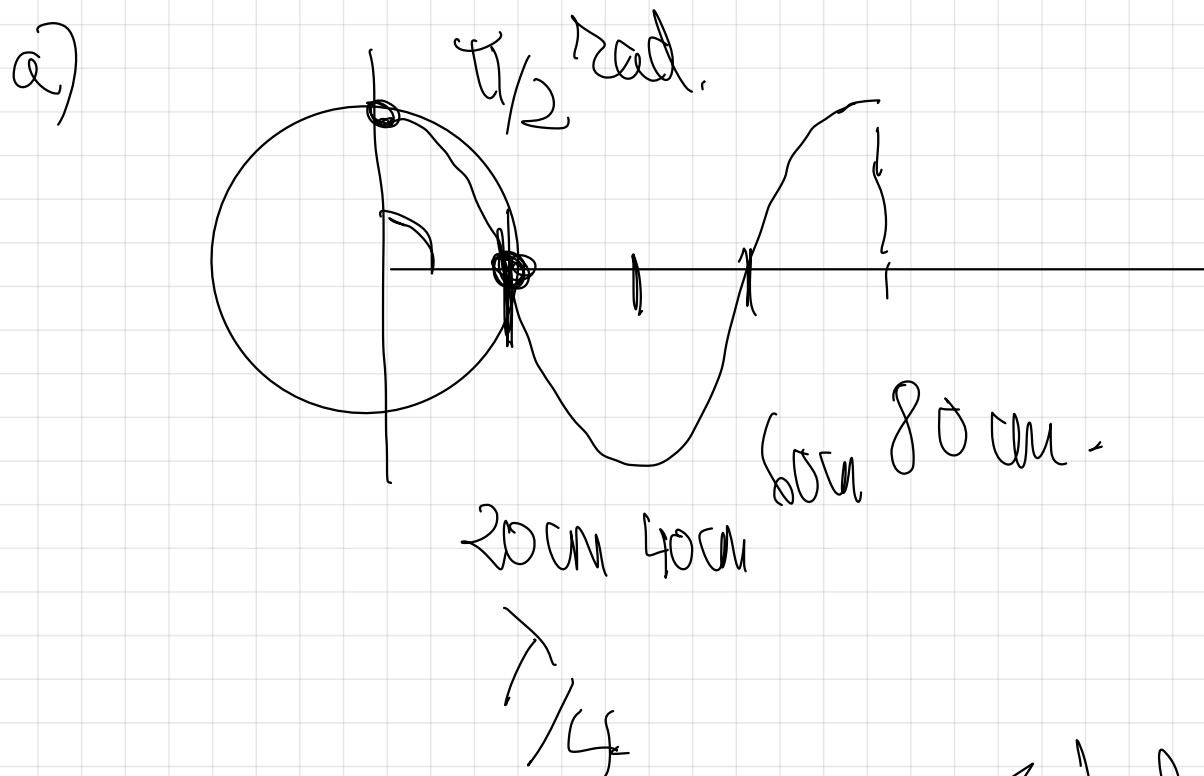
$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi(t + 0.25) - 4\pi x - 2\pi t + 4\pi x$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi \cdot 0.25 = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

16.- Una onda armónica cuya frecuencia es de 50 Hz, se propaga en la dirección positiva del eje X. Sabiendo que la diferencia de fase, en un instante dado, para dos puntos separados 20 cm es de $\pi/2$ rad, determinar:

a) El período, la longitud de onda y la velocidad de propagación de la onda

→ b) En un punto dado, ¿Qué diferencia de fase existe entre los desplazamientos que tienen lugar en dos instantes separados por un intervalo de 0,01 s?



$$\lambda = 80 \text{ cm} = 0,8 \text{ m}$$

$$t \text{ fijo,}$$

$$f = \frac{1}{T}$$

$$\rightarrow t \text{ fijo, } T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50} = 0,02 \text{ s}$$

$$y = A \sin(\omega t + kx)$$

$$y' = A \sin(\omega t - kx')$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$\omega t - kx - (\omega t - kx') = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

$$\cancel{\omega t} - kx - \cancel{\omega t} + kx' = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

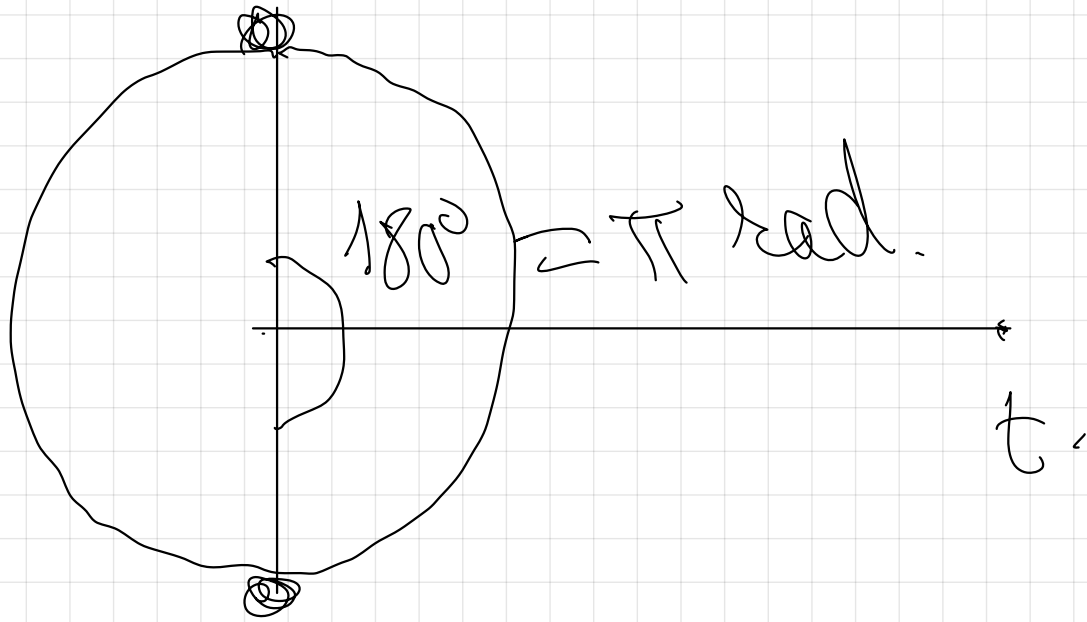
$$k(x' - x) = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

20 cm
11
0.2 m

$$\frac{2\cancel{\lambda}}{\cancel{\lambda}} \cdot 0.2 = \frac{\cancel{\lambda}}{2}$$
$$\lambda = 0.8 \text{ m}$$

$$a_p = \frac{\lambda}{T} = \frac{0.8 \text{ m}}{0.02 \text{ s}} = 40 \text{ m/s}$$

B) Fijo un pto λ ($T = 0.02 \text{ s}$)



$$x = A \cos(\omega t)$$

$$t = 0.01 \text{ s} \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$y = A \cdot \sin(\omega t - \phi_1)$$

misal pto
X

$$y' = A \cdot \sin(\omega(t + 0.01) - \phi_2)$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \omega t - kx - \omega(t + 0.01) + kx$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \cancel{\omega t} - \cancel{kx} + \cancel{\omega t} - \omega \cdot 0.01 + \cancel{kx}$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\omega \cdot 0.01$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{2\pi}{T} \cdot 0.01$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{0.02} \cdot 0.01 = \pi \text{ rad.}$$

$$|\varphi_1 - \varphi_2| = \pi \text{ rad} \quad \nabla$$

Ator en oposición de
fase (estado de
vibración opuesta).

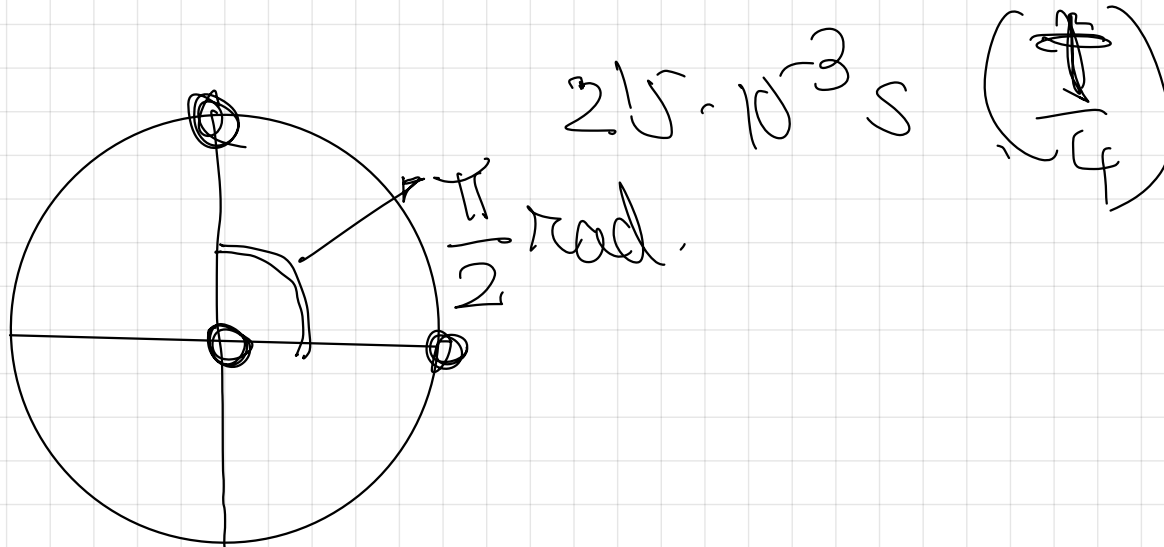
▷ 17.- Una onda armónica sinusoidal se propaga en el sentido positivo del eje OX con una frecuencia de 100 Hz, con una velocidad de $500 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ y tiene una amplitud de 15 cm. Calcular:

a) La separación entre dos puntos cuya diferencia de fase, en un cierto instante, es de $\pi/5$ radianes

b) La diferencia de fase entre dos vibraciones de un mismo punto del espacio, separadas por un intervalo de tiempo de $2,5 \cdot 10^{-3} \text{ s}$



$$b) \quad f = \frac{1}{T} \Rightarrow T = \frac{1}{f} = \frac{1}{100} = 0,01 \text{ s.}$$



$$y(x, t) = A \cdot \sin(\omega t - kx) \quad \text{mit } x \rightarrow$$

$$y'(x, t') = A \cdot \sin(\omega(t + 2.5 \cdot 10^{-3}) - kx) \quad \text{mit } x \rightarrow$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = (\omega(t + 2.5 \cdot 10^{-3}) - kx) - (\omega t - kx)$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \cancel{\omega t} + 2.5 \cdot 10^{-3} \omega - \cancel{kx} - \cancel{\omega t} + \cancel{kx}$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2.5 \cdot 10^{-3} \cdot \omega$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 215 \cdot 10^{-3} \cdot 2\pi f$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 215 \cdot 10^{-3} \cdot 2\pi \cdot 100$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

2)

$$z = A \cdot \sin(\omega t - kx)$$

$$y = A \cdot \sin(\omega t - kx')$$

φ_2

misnot -

t es d misno

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \cancel{cst} - kx - \cancel{cst} + kx'$$

$$\frac{\varphi}{5} = \boxed{(x' - x)}$$

→ separacija.

$$\frac{\cancel{\varphi}}{5} = \frac{2\cancel{\varphi}}{10} (x' - x)$$

$$\frac{\cancel{\varphi}}{5} = \frac{\cancel{\varphi}}{10}$$

$$\frac{1}{10} = (x' - x)$$

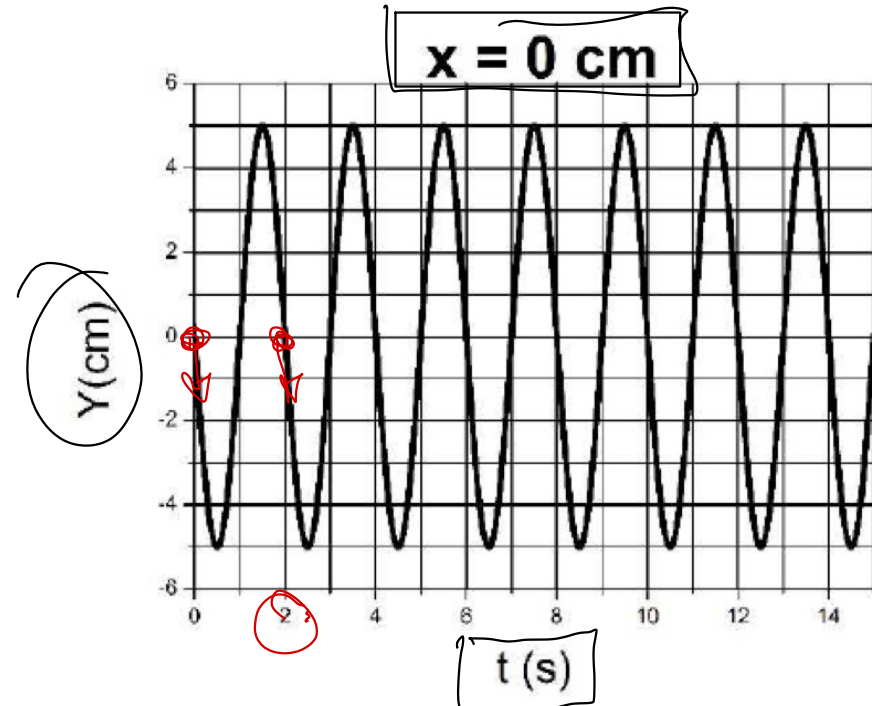
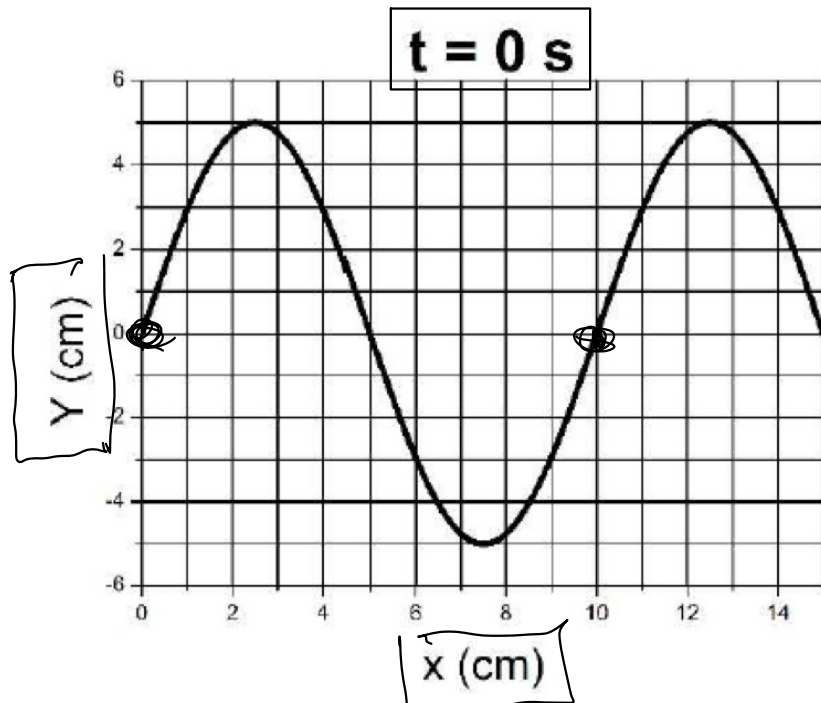
$$\uparrow = \cancel{v_p} \cdot \uparrow$$

$$\uparrow = 500 \cdot 0'01$$

$$(x' - x) = \frac{5}{10} = 0.5 \text{ m}$$

$$\uparrow = 5 \text{ m}$$

60.- Una onda armónica transversal se propaga en el sentido de las x positivas. A partir de la información contenida en las figuras y justificando su respuesta:



- Determine el período, la frecuencia angular, el número de onda y la longitud de onda.
- Escriba la expresión de la función de onda.
- La velocidad de propagación y la velocidad de oscilación en $x=0$ y $t=0$

a) $T = 2\text{ s}$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ rad/s}$
 $\lambda = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}$, $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0.1} = 20\pi \text{ rad/m}$

b)

$$y = A \cdot \sin(\omega t - kx + \varphi_0)$$

$$y = 0,05 \cdot \sin(\pi t - 20\pi x + \pi) \text{ (SI)}$$

$$A = 5 \text{ cm}$$

$$A = 0,05 \text{ m}$$

Calcula de φ_0

$$\begin{aligned} t &= 0 \\ x &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

$$y = A \cdot \sin(\omega t - kx + \varphi_0)$$

$$0 = A \cdot \sin \varphi_0$$

$$\sin \varphi_0 = \frac{0}{A} = 0$$

$$\varphi_0 = \arcsin 0 = 0 \text{ or } 180^\circ \text{ (rad)}$$

$$c) v_{\text{prop}} = \frac{\omega}{k} = \frac{\pi}{20\pi} \cdot \frac{\lambda}{T} = \frac{0,1}{2} = 0,05 \text{ m/s}$$

La velocidad de oscilación para una posición fija ($x=0$ cm) es la pendiente de la gráfica elongación

frente a tiempo del enunciado, negativa $v_{\text{osc}} = \frac{dy(x,t)}{dt} = -5 \cdot 10^{-2} \cdot \pi \cos(\pi t - 20\pi x)$

$$v_{\text{osc}}(x=0, t=0) = -5 \cdot 10^{-2} \cdot \pi \cos(0) = -5 \cdot 10^{-2} \cdot \pi \text{ m/s}$$

$$v_{\text{prop}} = \frac{\cancel{2\pi} / k}{\cancel{2\pi} / \omega} = \frac{\omega}{k}$$

18.- La ecuación de una onda que se propaga por una cuerda es :

$$y(x,t) = 0,5 \text{ sen } \pi(8t - 4x) \text{ (S.I)}$$

- Calcular la velocidad y la aceleración máximas de un punto cualquiera de la cuerda
- Representa gráficamente la posición de los puntos de la cuerda en el instante $t=0$
- Representa gráficamente la elongación en $x=0$ en función del tiempo
- Representa gráficamente la velocidad de un punto $x=0$ en función del tiempo
- ¿Son iguales los valores máximos de la elongación y velocidad en otro punto cualquiera?

18) a) Primero escribimos la ecuación de la onda en forma conocida $y(x,t) = A \cdot \text{sen}(\omega t - kx)$
| $y(x,t) = 0,5 \cdot \text{sen}(8\pi t - 4\pi x) \text{ (S.I)} |$

$$v = \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_{x=\text{cte}} = 0,5 \cdot [\cos(8\pi t - 4\pi x)] \cdot 8\pi$$

$$v = 4\pi \cdot \cos(8\pi t - 4\pi x) \text{ (S.I)}$$

$$v_{\text{max}} = \pm 4\pi \frac{\text{m}}{\text{s}} //$$

$$a = \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_{x=\text{cte}} = 4\pi [-\text{sen}(8\pi t - 4\pi x)] \cdot 8\pi$$

$$a = -32\pi^2 \cdot \text{sen}(8\pi t - 4\pi x) \text{ (S.I)}$$

$$a_{\text{max}} = \pm 32\pi^2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} //$$

b)

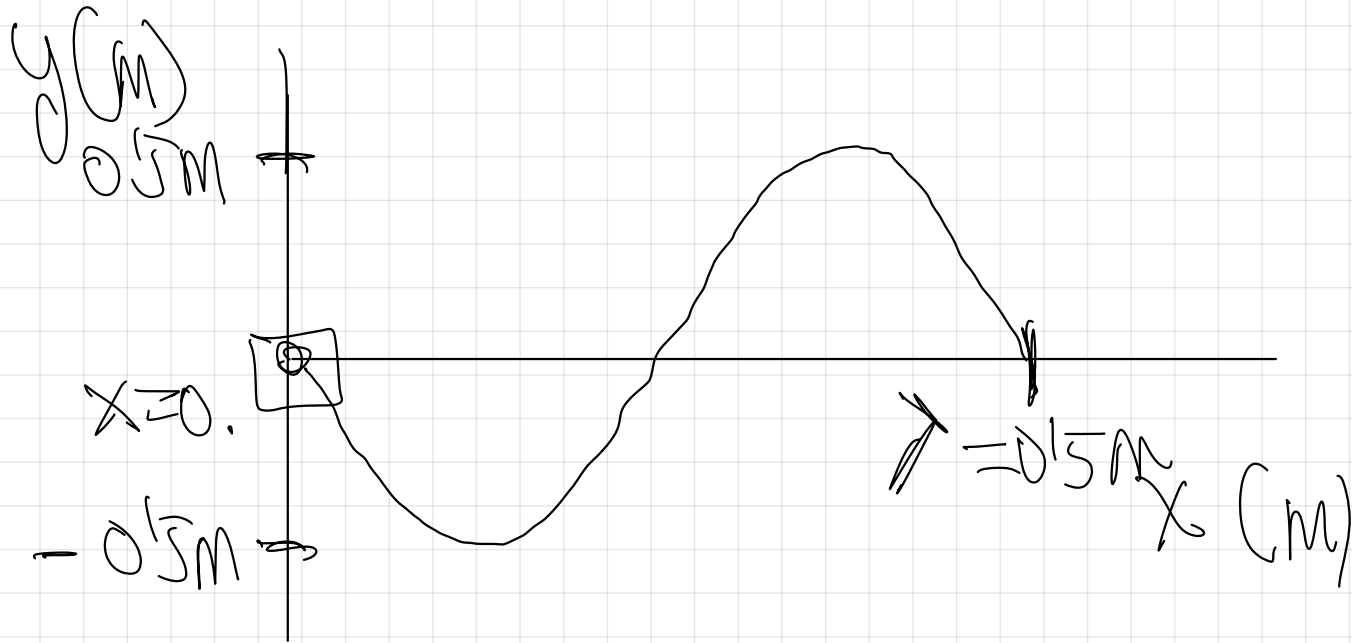
$$y(x,t) = 0,5 \text{ sen}(8\pi t - 4\pi x) \text{ (S.I)}$$

$$t=0,$$

$$y(x,0) = 0,5 \cdot \text{sen}(-4\pi x) \text{ (S.I)}$$

forma de la
cuerda en $t=0$,

$$y(x) = 0.5 \cdot \sin(-4\pi x) \quad (\text{SI})$$



$$k = 4\pi \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

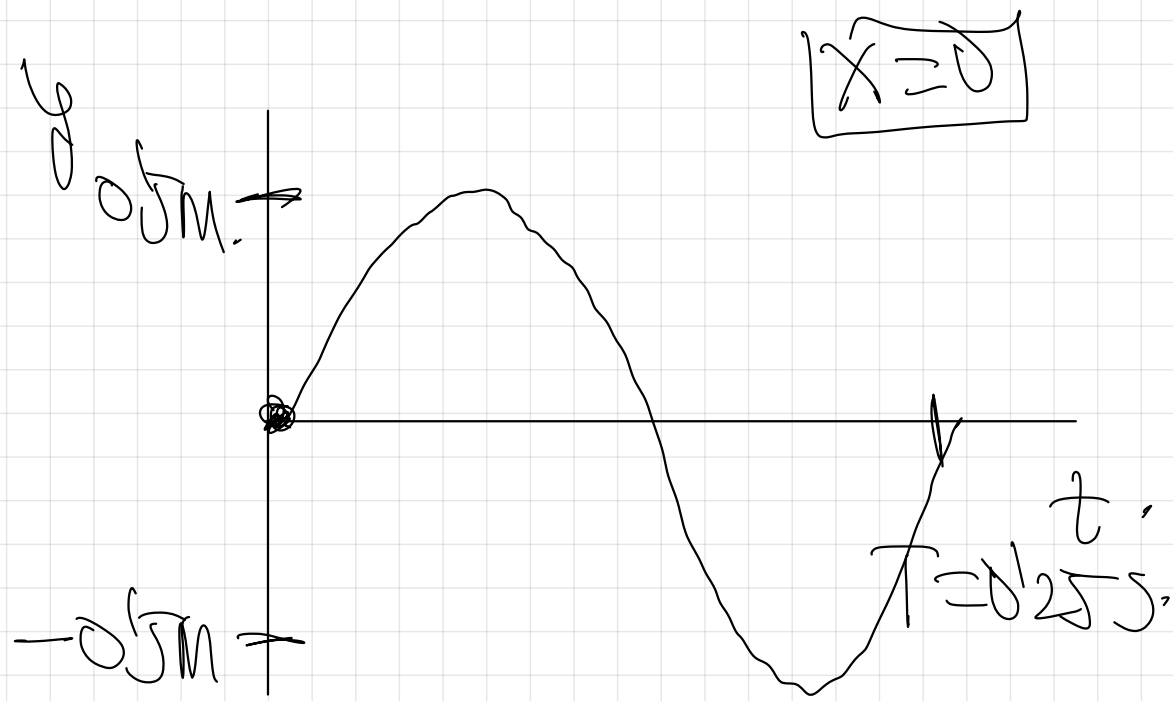
$$\lambda = \frac{2\pi}{4\pi} = 0.5\text{m}$$

c)

$$y(x,t) = 0.5 \sin(8\pi t - 4\pi x)$$

$x=0$

$$y(t) = 0.5 \sin(8\pi t) \quad (\text{SI})$$



$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$T = \frac{2\pi}{8\pi}$$

$$T = 0.25s$$

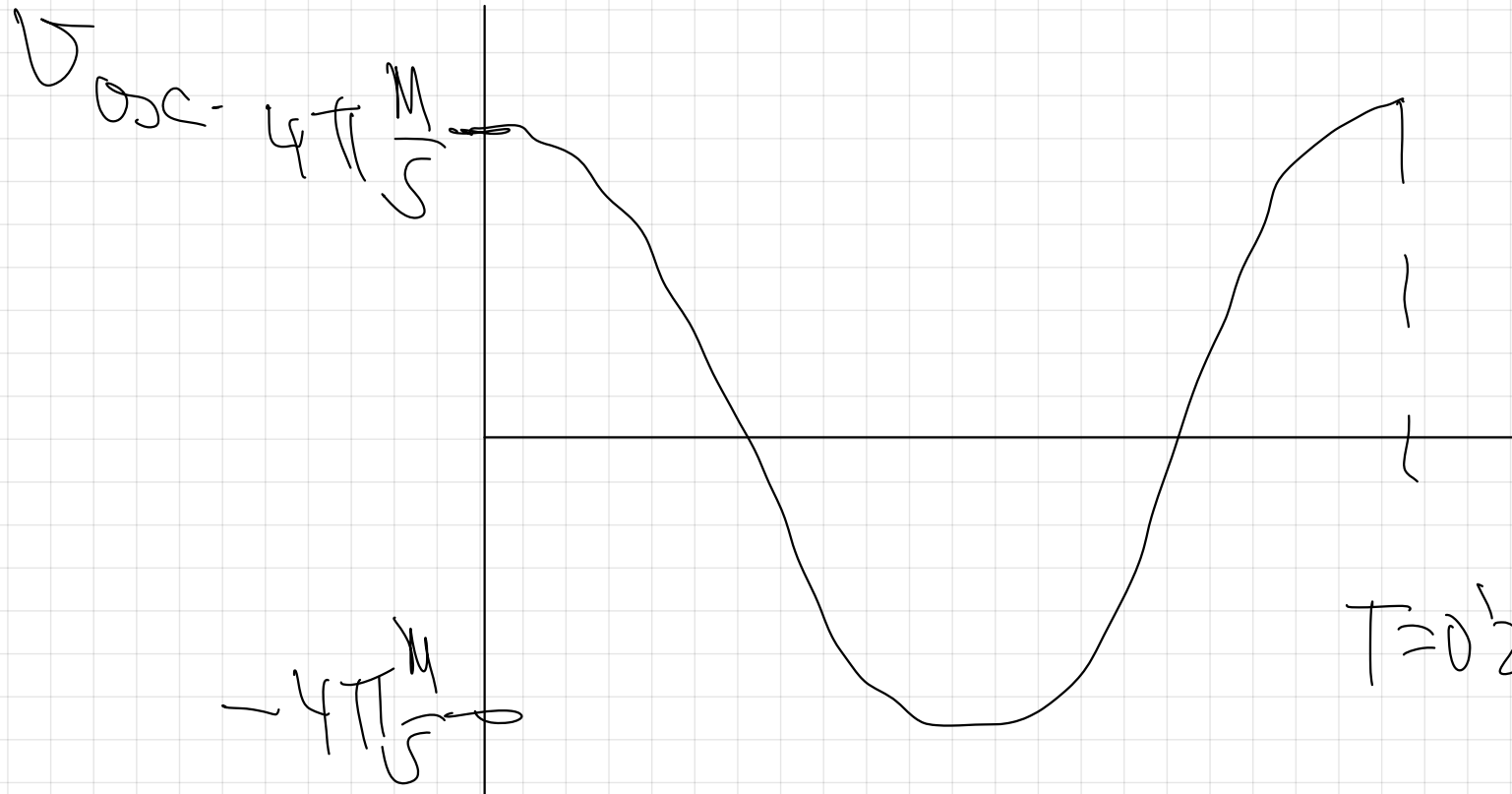
$$y(x,t) = 0.5 \sin(8\pi t - 4\pi x)$$

$$v = \left(\frac{dy}{dt} \right)_{x=0} = 0.5 \cdot \left[\cos(8\pi t - 4\pi x) \right] 8\pi$$

$$v = 4\pi \cdot \cos(8\pi t - 4\pi x) \quad (\text{SI})$$

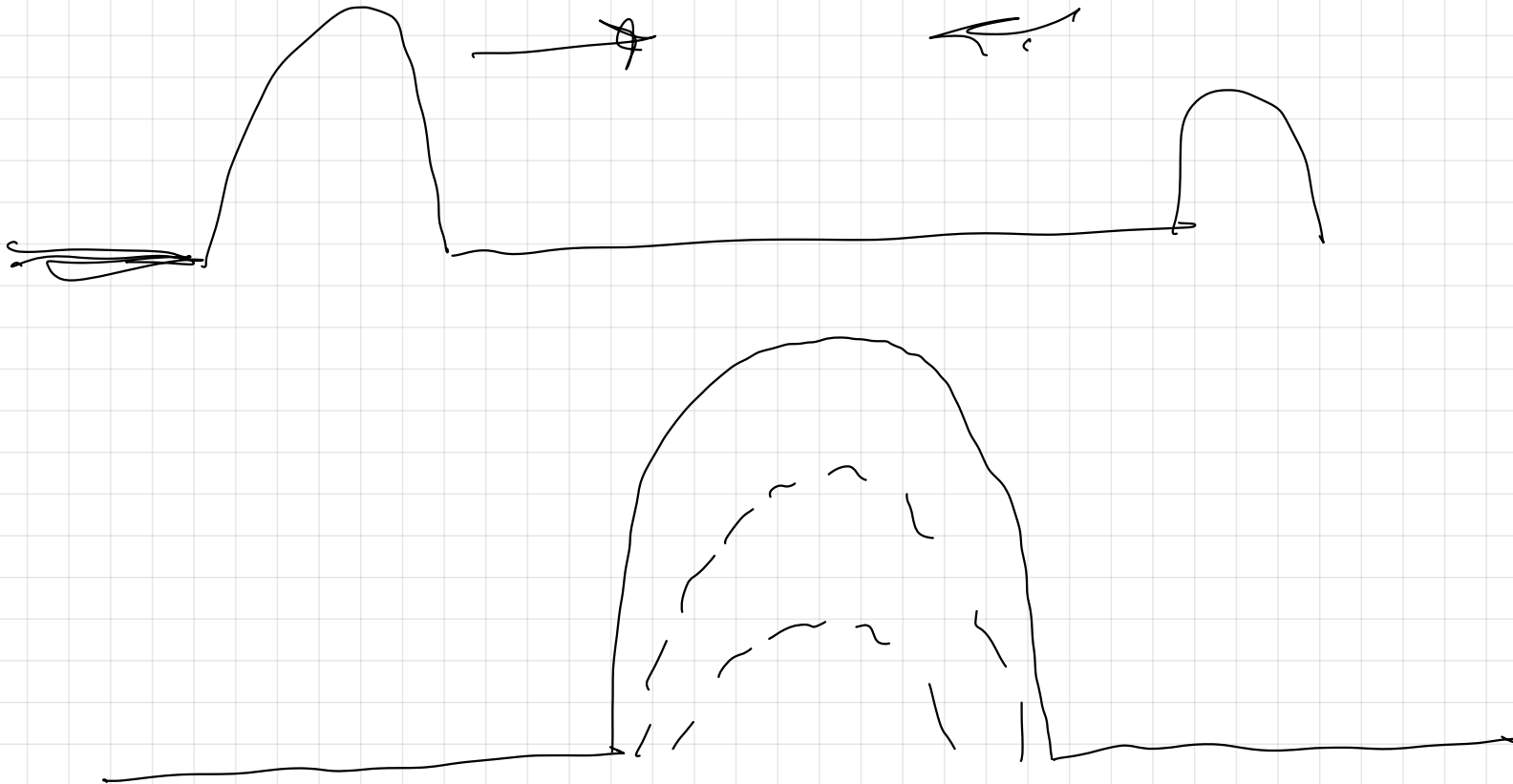
$$x=0 \quad v(x=0, t) = 4\pi \cdot \cos(8\pi t)$$

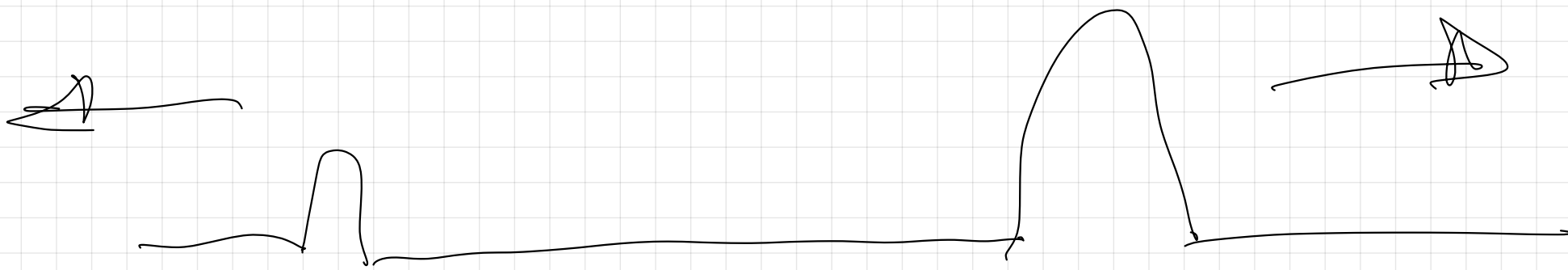


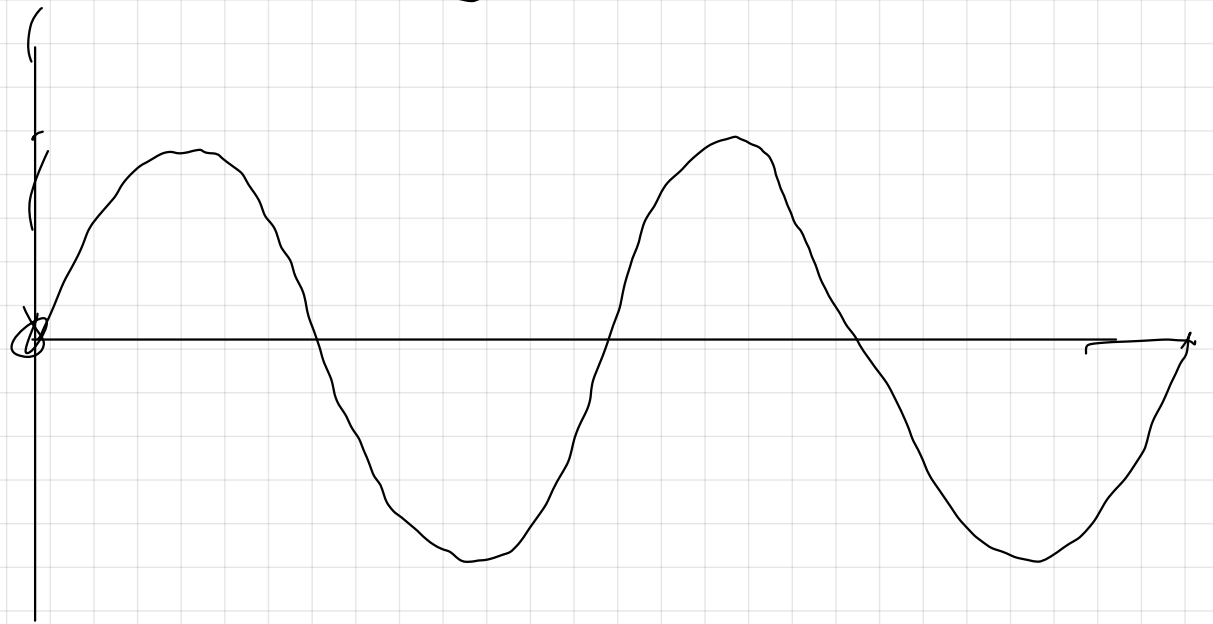
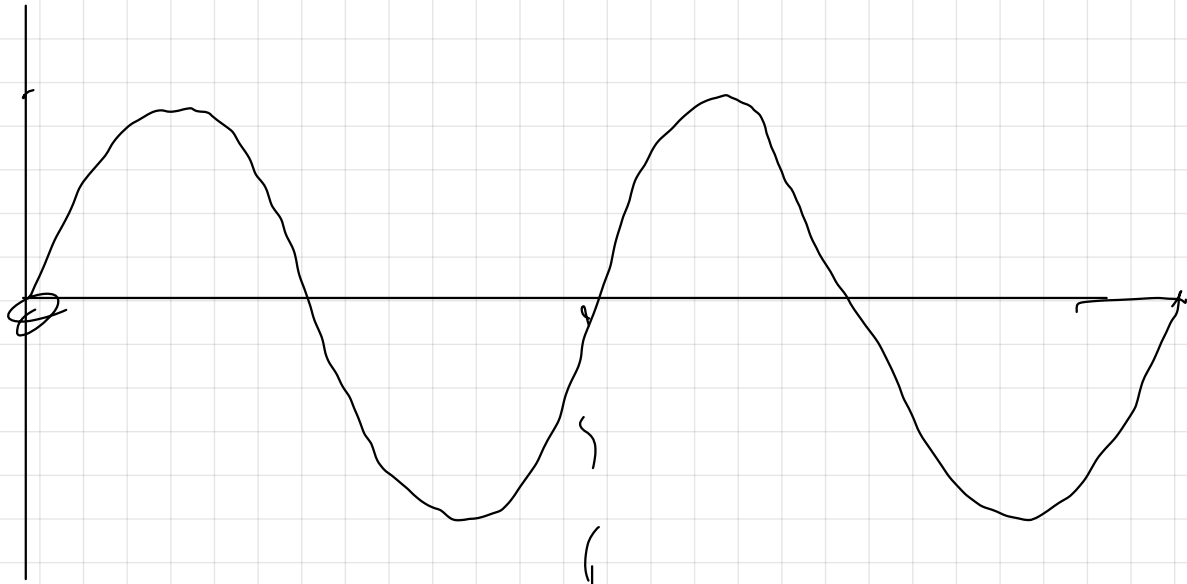


$$T = 0.25 \text{ s}$$

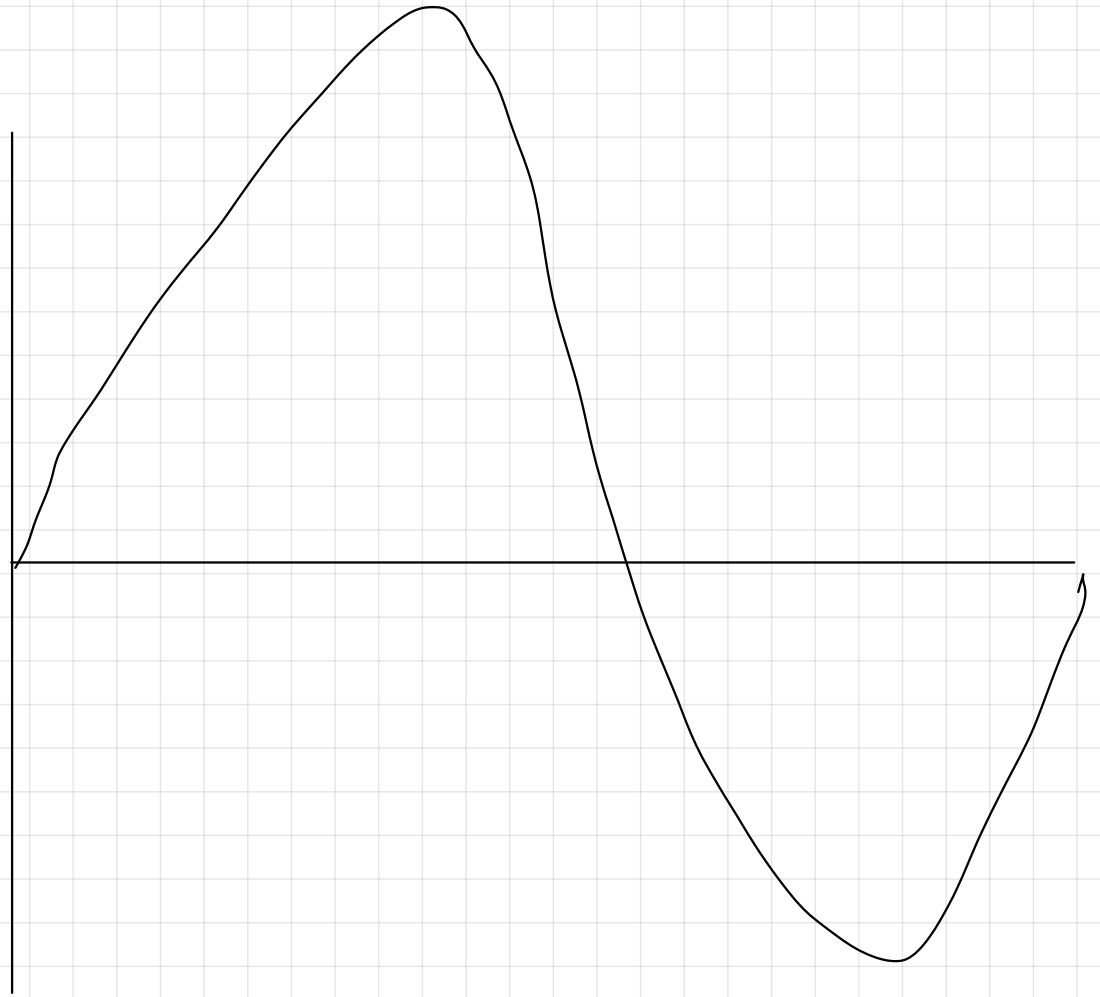
9.2 INTERFERENCIA DE LAS ONDAS





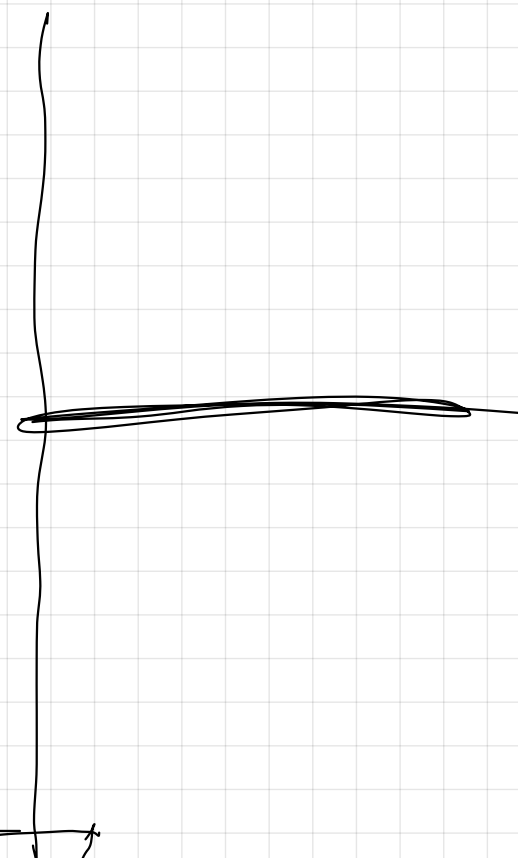
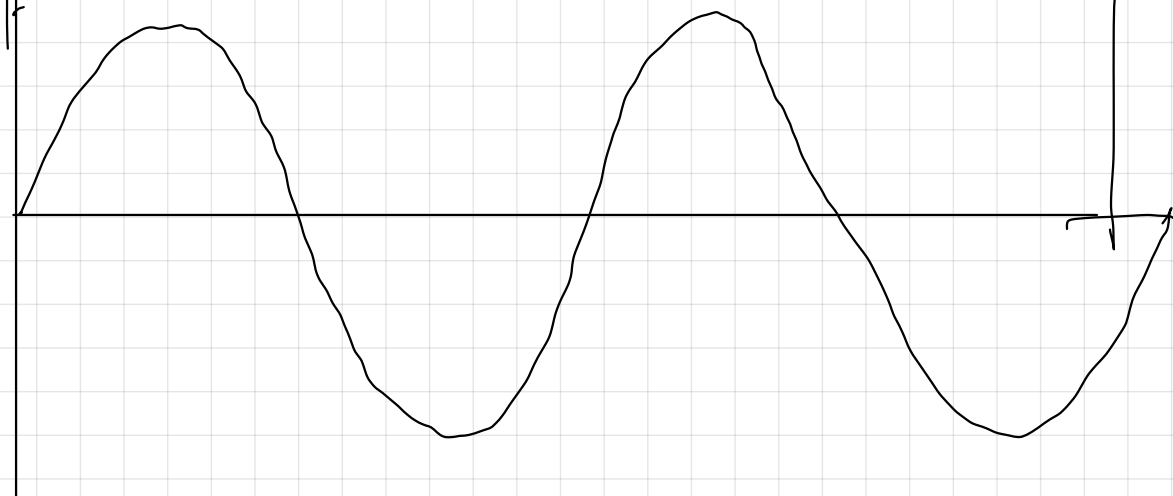


~~N~~



21

~~$(2\pi f)$~~



5.- ENERGÍA QUE TRANSPORTAN LAS ONDAS

pag 130.

$$E_m = \frac{1}{2} K A^2.$$

$$E_m = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2.$$

$$E_m = \frac{1}{2} m (2\pi f)^2 A^2.$$

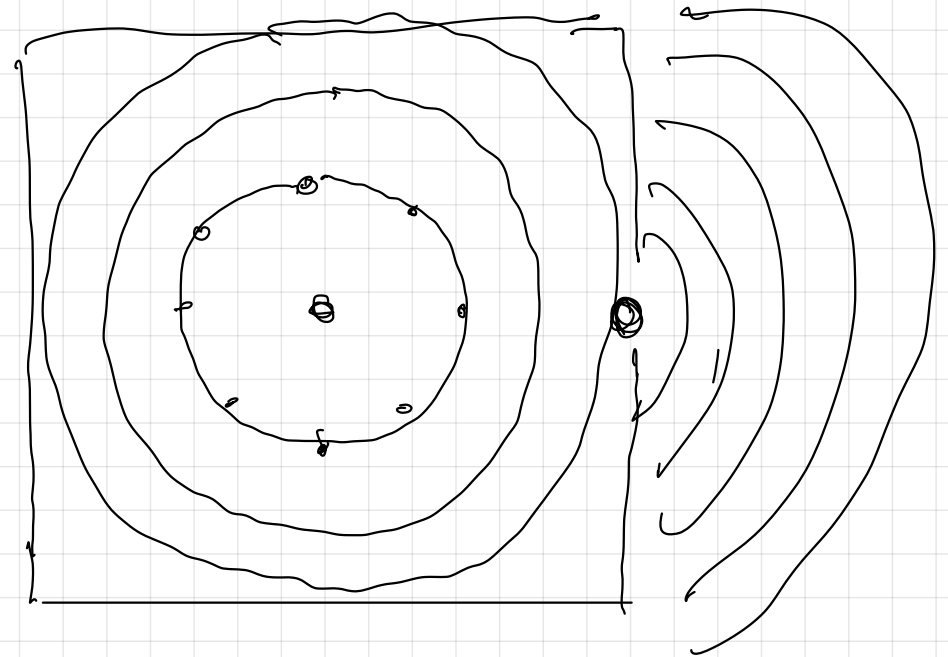
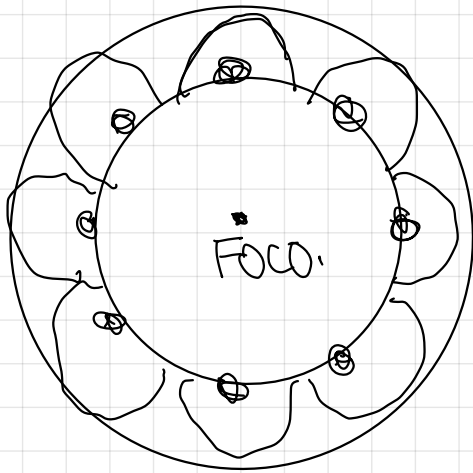
$$E_m = \frac{1}{2} m 4\pi^2 f^2 A^2.$$

$A f$

$A A \rightarrow A^2$

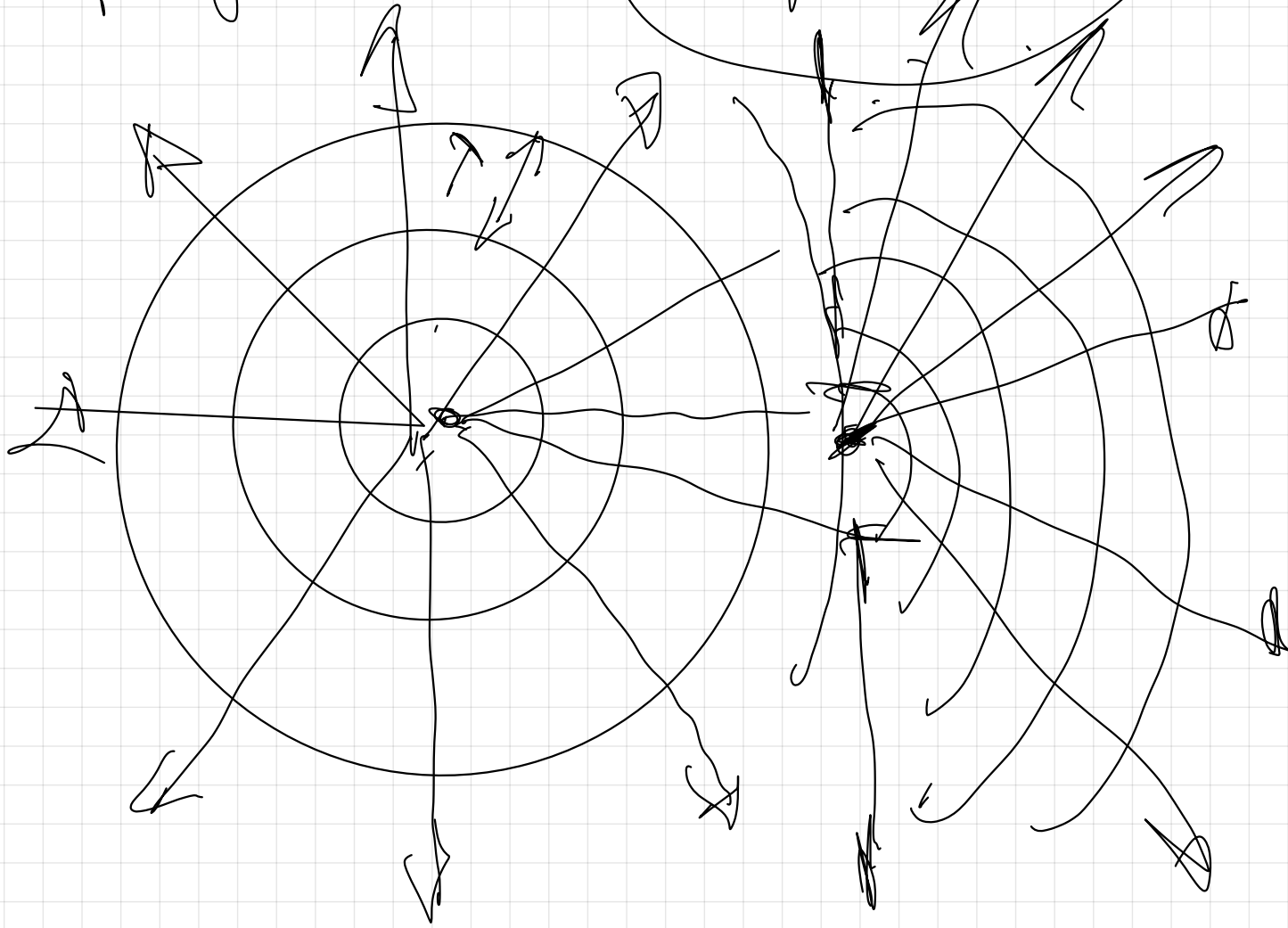
8.- PRINCIPIO DE HUYGENS

Pag 133.



pag 135

Difracción



terceros del
orden de
↑

Polariçación de ondas.

pag 138 - 139.

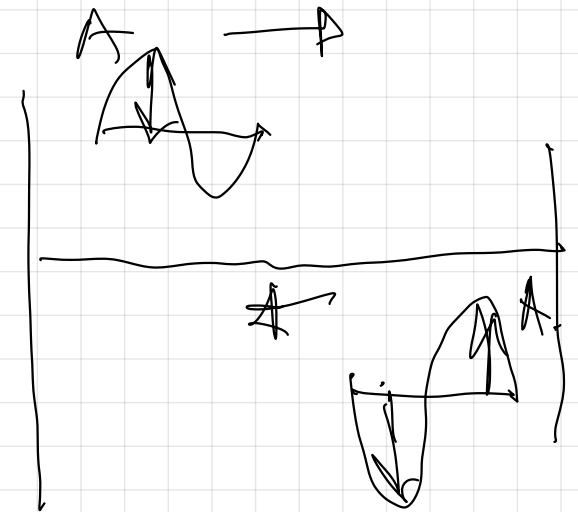
→ Centra.

pag 140 - 151 ⇒ No entra.

Se sustituye por ondas estacionarias
(página web)

Ondas estacionarias.

$$y(x,t) = 2A \cdot \text{sen}(kx) \cdot \cos(\omega t)$$

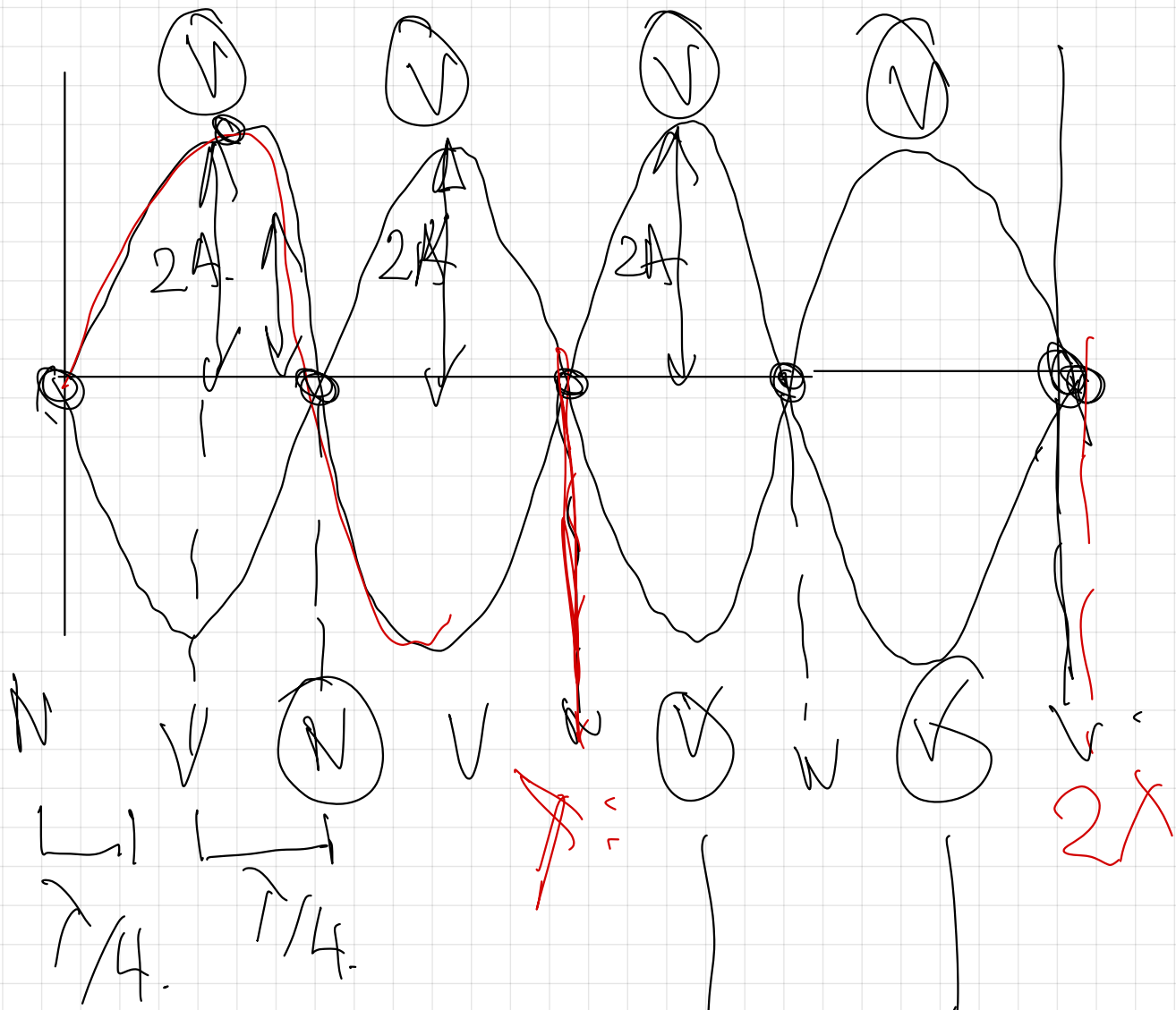


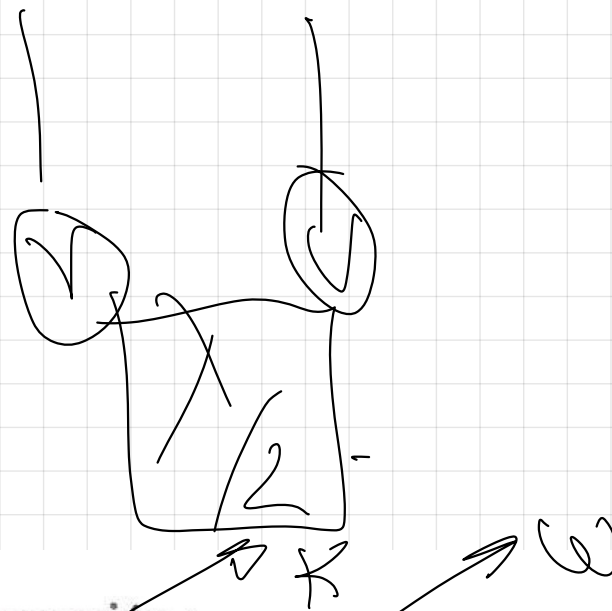
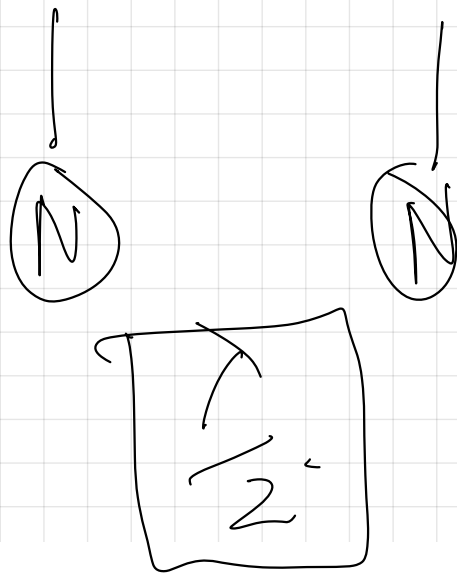
$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$y(x,t) = 2A \cdot \text{sen}(kx) \cdot \cos(\omega t)$$

Onda Estacionária





5.- Una cuerda vibra de acuerdo con la ecuación :

$$y(x,t) = 5 \cdot \text{sen}(\pi/3 \cdot x) \cdot \text{cos}(40\pi t) \text{ (S.I.)}$$

- Calcule la amplitud y la velocidad de propagación de las ondas cuya superposición pueda dar lugar a esta vibración
- Calcule la distancia entre nodos consecutivos, la distancia entre vientres consecutivos, así como la distancia nodo-vientre consecutivos
- Calcule la velocidad de una partícula de la cuerda situada en $x = 1.5 \text{ m}$ cuando $t = 1.25 \text{ s}$. Explique el resultado

a)

$$2A = 5 \text{ m}$$

$$A = \frac{5 \text{ m}}{2} = 2.5 \text{ m}$$

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi / T}{2\pi / \lambda} = \frac{\omega}{k}$$

b)

$$K = \frac{2f}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{2f}{K} = \frac{2 \cdot 10^4}{\frac{1}{3}} = 6 \text{ m}$$

$$v_{\phi} = \frac{40 \text{ m/s}}{\frac{1}{3}} = 120 \text{ m/s}$$

$$N-N = \frac{\lambda}{2} = \frac{6 \text{ m}}{2} = 3 \text{ m}$$

$$V-V = \frac{\lambda}{2} = \frac{6 \text{ m}}{2} = 3 \text{ m}$$

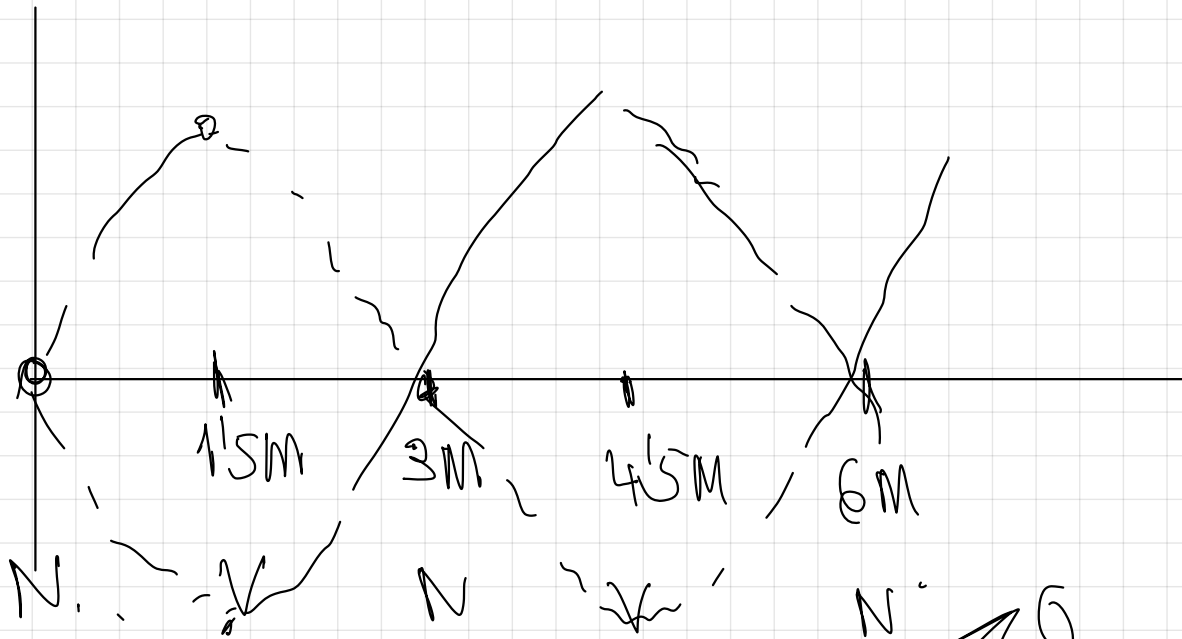
$$\begin{matrix} N-V \\ V-N \end{matrix} \int \frac{\lambda}{4} = \frac{6 \text{ m}}{4} = 1.5 \text{ m}$$

a de acuerdo con la ecuación .

$$y(x,t) = 5 \cdot \boxed{\text{sen}(\pi/3 \cdot x)} \cdot \cos(40\pi t) \text{ (S.I.)}$$

Comienza por un nodo.

$$\lambda = 1.5 \text{ m.}$$



$$x=0 \Rightarrow y(x,t) = 5 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{3} \cdot 0\right) \cdot \cos(40\pi t)$$

$$x=3 \Rightarrow y(x,t) = 5 \cdot \cancel{\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} \cdot 3\right)} \cdot \cos(40\pi t)$$

0.

$y=0$ en cualquier instante t , luego
es un NODO

c)

de acuerdo con la ecuación .

$$y(x,t) = 5 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{3} \cdot x\right) \cdot \cos(40\pi t) \text{ (S.I.)}$$

... velocidad de propagación de las ondas ...

cte

$$v = \left(\frac{dy}{dt}\right)_{x=cte} = 5 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{3} x\right) \cdot [-\sin(40\pi t)] \cdot 40\pi$$

$$U = -200\pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) \cdot \sin(40\pi t)$$

$$x = 1.5\text{m}$$

$$U = -200\pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot 1.5\right) \cdot \sin(40\pi \cdot 1.25)$$

$$U = -200\pi \cdot \sin 90^\circ \cdot \sin(50\pi) = 0$$

Se trata de un viento situado en el eje

instante t en el extremo ($x=0$)
/ pero no era un nodo porque en
dos instantes t podría moverse.

$$y(x, t) = 5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) \cdot \cos(40\pi t)$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 1.5 \text{ m} \\ t = 1.25 \text{ s} \end{array} \right\} y(1.5 \text{ m}, 1.25 \text{ s}) = 5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(50\pi)$$
$$y(1.5 \text{ m}, 1.25 \text{ s}) = 5 \text{ m}$$

4.- La ecuación de una onda en una cuerda es :

$$y(x,t) = 10 \cdot \cos(\pi/3 \cdot x) \cdot \sin(2\pi t) \text{ (S.I.)}$$

a) Explique las características de la onda y calcule el período, la longitud de onda, la amplitud y la velocidad de propagación de las ondas cuya superposición da lugar a esta vibración.

b) Calcule la distancia nodo-nodo, nodo-vientre y vientre-vientre consecutivos

c) Determine la velocidad de una partícula situada en el punto $x = 1.5 \text{ m}$ en el instante $t = 0.25 \text{ s}$. Explique el resultado

$$y(x,t) = 2A \cdot \cos(kx) \cdot \sin(\omega t)$$

Onda estacionaria (ver teoría) comienza por un vientre.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \text{ s.}$$

$$2A = 10 \text{ m}$$

$$A = 5 \text{ m}$$

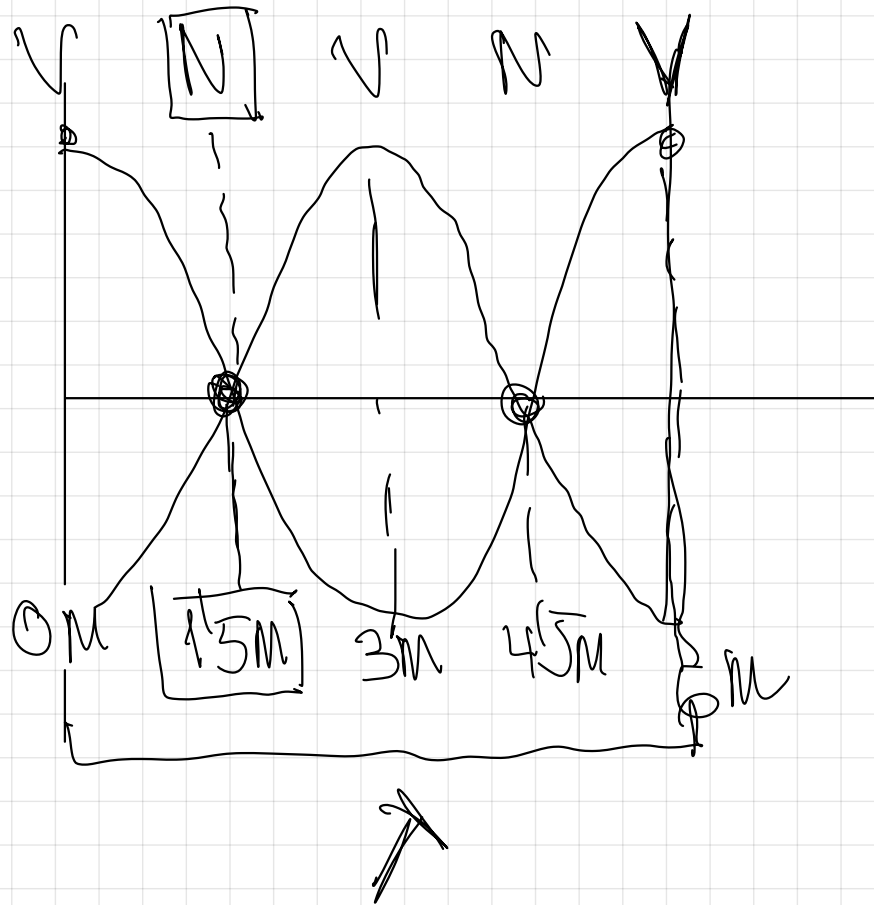
$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\pi/3} = 6 \text{ m}$$

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{6 \text{ m}}{1 \text{ s}} = 6 \text{ m/s}$$

la onda en una cuerda es .

$$y(x,t) = 10 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot x\right) \cdot \sin(2\pi t) \text{ (S.I.)}$$

$$\lambda = 6 \text{ m}$$



$$N \rightarrow N = \frac{\lambda}{2} = 3 \text{ m}$$

$$A \rightarrow A = \frac{\lambda}{2} = 3 \text{ m}$$

$$\begin{array}{l} N \rightarrow A \\ A \rightarrow N \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} N \rightarrow A \\ A \rightarrow N \end{array}} \right\} \frac{\lambda}{4} = 1.5 \text{ m}$$

4.- La ecuación de una onda en una cuerda es :

$$y(x,t) = 10 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot x\right) \cdot \sin(2\pi t) \text{ (S.I.)}$$

a) Explique las características de la onda y calcule el período, la longitud de onda, la amplitud y la velocidad de propagación de las ondas cuya superposición da lugar a esta vibración.

b) Calcule la distancia nodo-nodo, nodo-vientre y vientre-vientre consecutivos

c) Determine la velocidad de una partícula situada en el punto $x = 1,5 \text{ m}$ en el instante $t = 0,25 \text{ s}$. Explique el resultado

$$v = \left(\frac{dy}{dt}\right)_{x=\text{cte}} = 10 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} x\right) \cdot \left[\cos(2\pi t)\right] 2\pi,$$

$$v(x,t) = 20\pi \cos\left(\frac{\pi}{3} x\right) \cdot \cos(2\pi t).$$

$$v(x=1,5 \text{ m}, t=0,25 \text{ s}) = 20\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} 1,5\right) \cdot \cos(2\pi \cdot 0,25)$$

$$v = 20\pi \cdot (\omega) \cdot \frac{1}{2}$$

$$\omega = 2\pi f$$

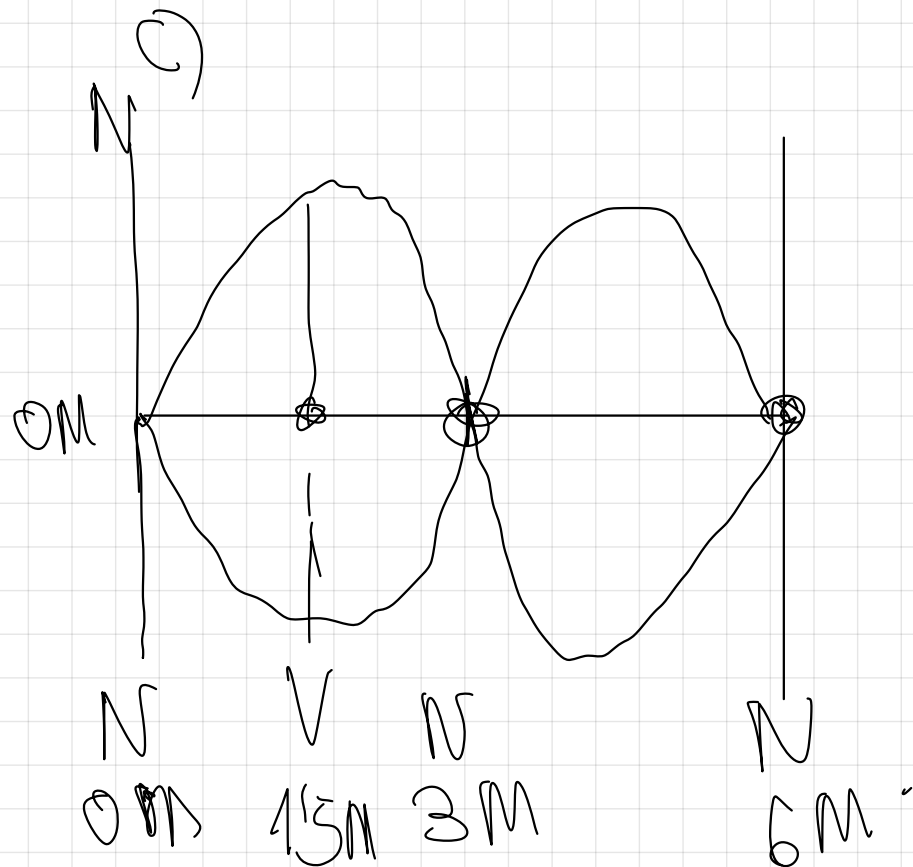


Sea v es pulso en cualquier instante
de tiempo t , luego se trata de
un ruido

> 5.- Una cuerda vibra de acuerdo con la ecuación :

$$y(x,t) = 5 \cdot \text{sen}(\pi/3 \cdot x) \cdot \cos(40\pi t) \text{ (S.I.)}$$

- Calcule la amplitud y la velocidad de propagación de las ondas cuya superposición pueda dar lugar a esta vibración
- Calcule la distancia entre nodos consecutivos, la distancia entre vientres consecutivos, así como la distancia nodo-vientre consecutivos
- Calcule la velocidad de una partícula de la cuerda situada en $x = 1.5 \text{ m}$ cuando $t = 1.25 \text{ s}$. Explique el resultado



$$v = \left(\frac{dy}{dt} \right)_{x=1.5} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\frac{6}{3}} = 6 \text{ m/s}$$

> 5.- Una cuerda vibra de acuerdo con la ecuación :

$$y(x,t) = 5 \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{3} \cdot x \right) \cdot \cos(40\pi t) \text{ (S.I.)}$$

a) Calcule la amplitud y la velocidad de propagación de las ondas cuya superposición pueda dar lugar a esta vibración

b) Calcule la distancia entre nodos consecutivos, la distancia entre vientres consecutivos, así como la distancia nodo-vientre consecutivos

c) Calcule la velocidad de una partícula de la cuerda situada en $x = 1.5$ m cuando $t = 1.25$ s. Explique el resultado

$$v = \left(\frac{dy}{dt} \right)_{x=1.5} = 5 \text{ m} \left(\frac{\pi}{3} \cdot x \right) \cdot \left[-\text{sen}(40\pi t) \right] \cdot 40\pi$$

$$v = -200\pi \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{3} x \right) \cdot \text{sen}(40\pi t)$$

$$v(x=1.5 \text{ m}, t=1.25) = -200 \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} \right) \cdot \text{sen}(50\pi) = 0$$

sería un vector que ~~no~~
se constante para $v \rightarrow 0$
ya acabarse a el
extremo de la
trayectoria.

6.- La cuerda de una guitarra vibra de acuerdo con la ecuación :

$$y(x, t) = 0'01 \cdot \text{sen}(10\pi x) \cdot \cos(200\pi t) \text{ (S.I.)}$$

a) Indique de qué tipo de onda se trata y calcule la amplitud y la velocidad de propagación de las ondas cuya superposición da lugar a dicha onda.

b) ¿Cuál es la energía de una partícula situada en $x = 10 \text{ cm}$? Razónese

Onda estacionaria (ver teoría) que comienza en un extremo fijo.

$$2A = 0'01 \quad \boxed{A = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}}$$

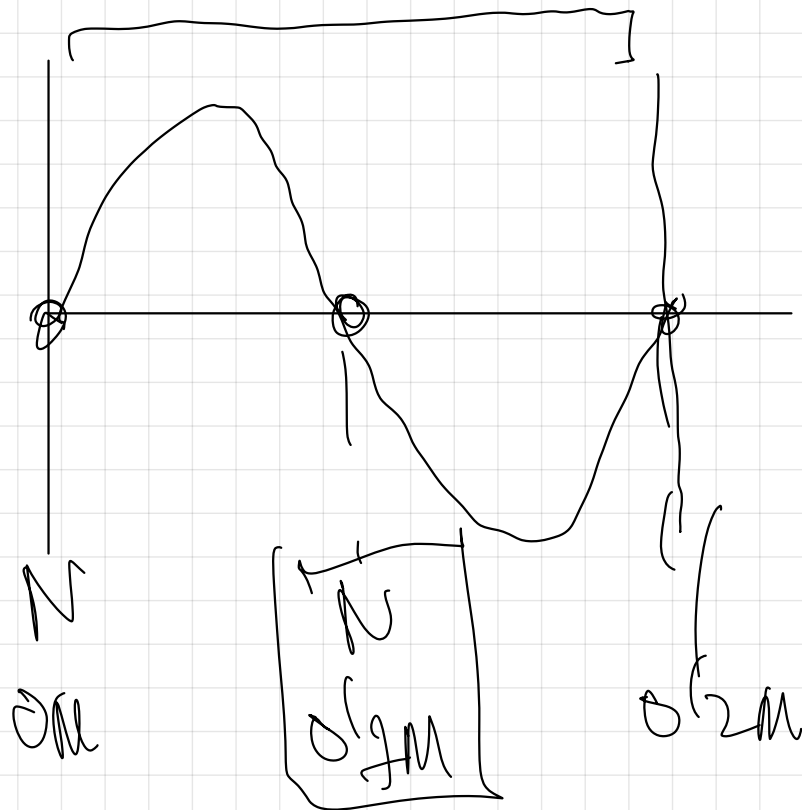
$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{10\pi} = 0'2 \text{ m} \quad \lambda = 0'2 \text{ m}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow f = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{200\pi} = 0'01$$

$$v_p = \frac{\lambda}{T} = \frac{0.2 \text{ m}}{0.01 \text{ s}} = 20 \text{ m/s}$$

$$\lambda = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}$$

$$\lambda = 0.2 \text{ m}$$



$$y(x, t) = 0,01 \cdot \text{sen}(10\pi x) \cdot \cos(200\pi t) \text{ (S.I.)}$$

$$x = 0,1 \text{ m}$$

$$y(0,1 \text{ m}, t) = 0,01 \cdot \text{sen}(10\pi \cdot 0,1) \cdot \cos(200\pi t)$$

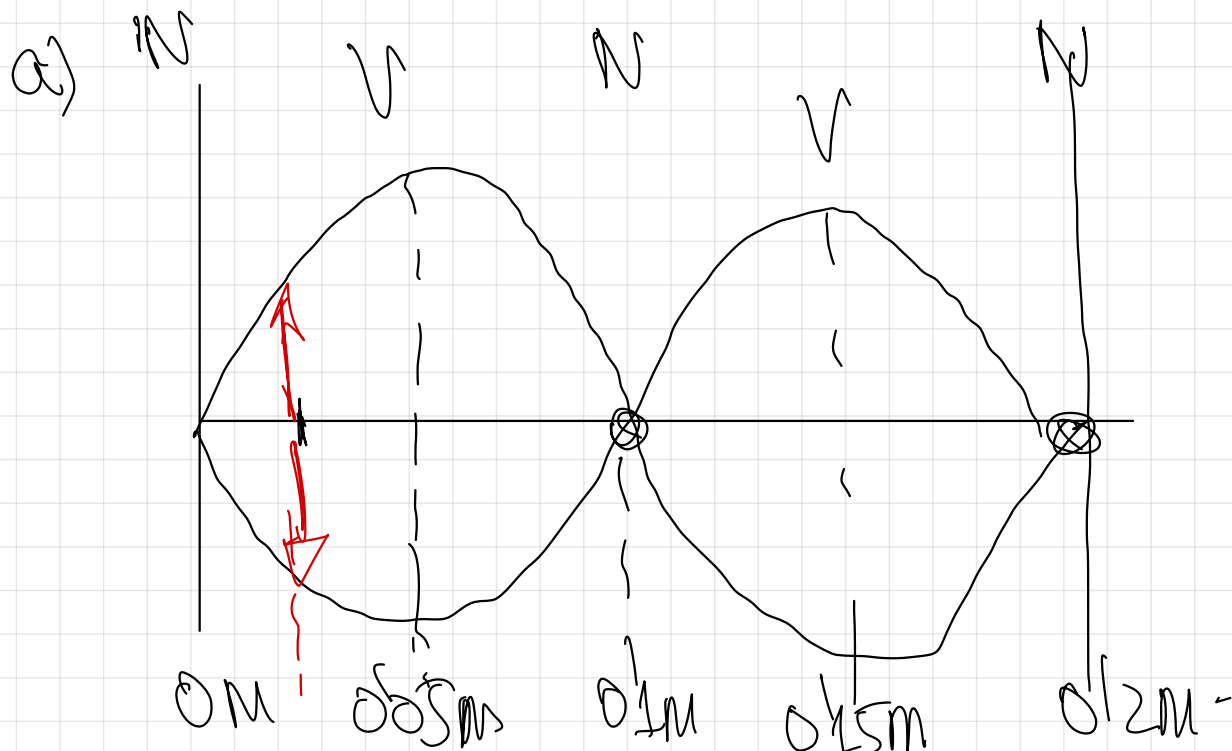
$$y(0,1 \text{ m}, t) = 0,01 \cdot \text{sen}(\pi) \cdot \cos(200\pi t)$$

Senia va node, su energia valdica nula.

8.- La cuerda de una guitarra vibra de acuerdo con la ecuación

$$y(x,t) = 0.01 \cdot \sin(10\pi x) \cdot \cos(200\pi t) \text{ (S.I.)}$$

- ¿Cuál sería la amplitud del movimiento armónico simple descrito por la partícula en $x = 0.025 \text{ m}$?
- Representa gráficamente la posición de la partícula $x = 0.025 \text{ m}$ en función del tiempo
- Representa gráficamente la velocidad de la partícula $x = 0.025 \text{ m}$ en función del tiempo
- ¿Son iguales los valores máximos de elongación y de velocidad en otro punto cualquiera?



$$k = 10\pi \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$
$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$
$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{10\pi}$$
$$\lambda = 0.2 \text{ m}$$

!

$$0.025 \text{ m}$$

Amplitud del
pto x
concreto.

$$\frac{N-V}{V-N} \int \frac{1}{4} = \frac{0.12}{4} = 0.03 \text{ m}$$

$$y(x,t) = 0.01 \cdot \text{sen}(10\pi x) \cdot \cos(200\pi t) \text{ (S.I.)}$$

$$x = 0.025 \text{ m} \Rightarrow$$

$$y(0.025 \text{ m}, t) = 0.01 \cdot \text{sen}(10\pi \cdot 0.025) \cdot \cos(200\pi t)$$

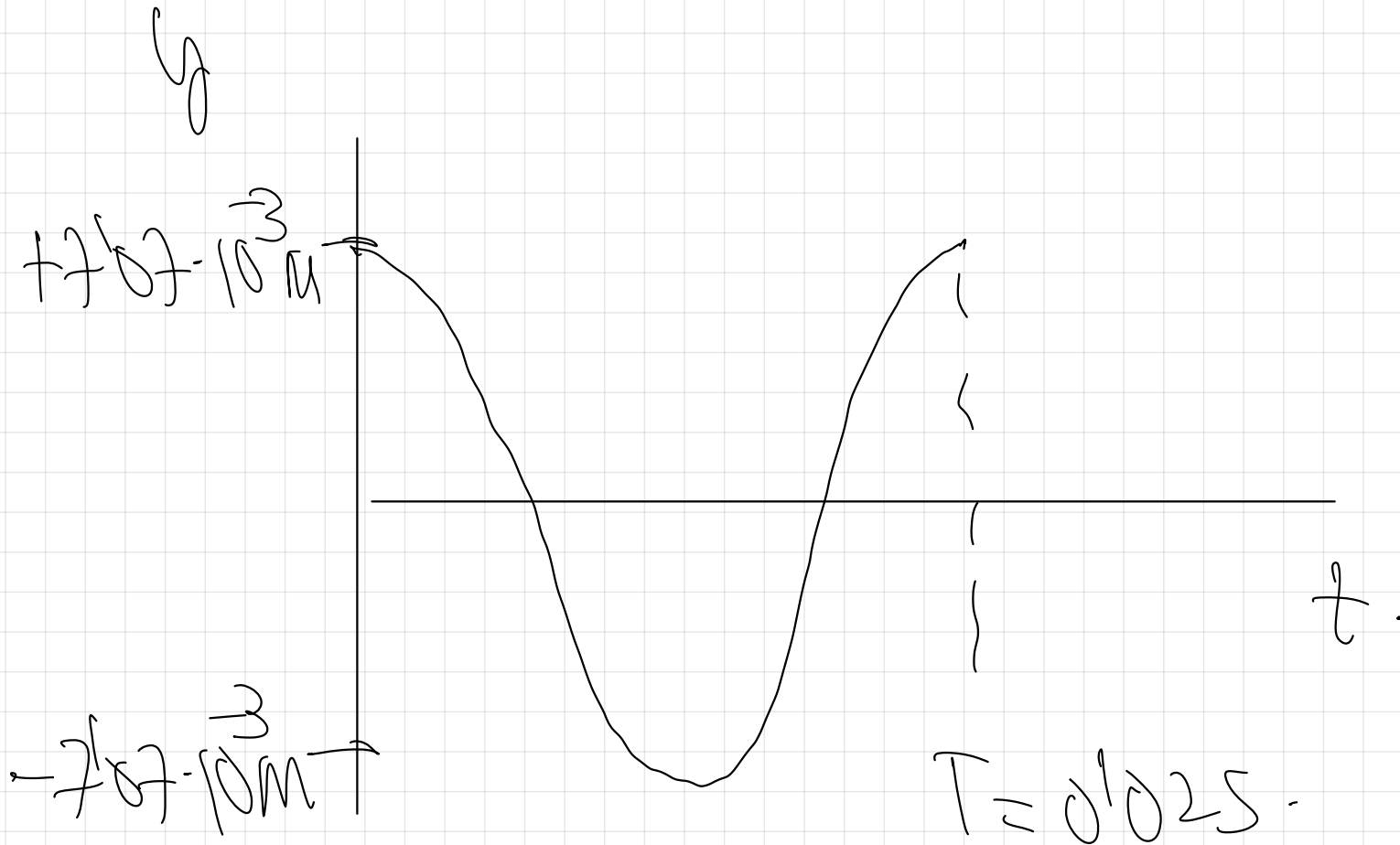
Amplitud del pto x.

$$y(0.025 \text{ m}, t) = 0.01 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos(200\pi t)$$

$$y(0.025 \text{ m}, t) = 7.07 \cdot 10^{-3} \cos(100\pi t)$$

Amplitud de $x = 0,025 \text{ m}$ seria $7,07 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.

$$y(t) = 7,07 \cdot 10^{-3} \cdot \cos(100\pi t) \text{ (SI)}$$



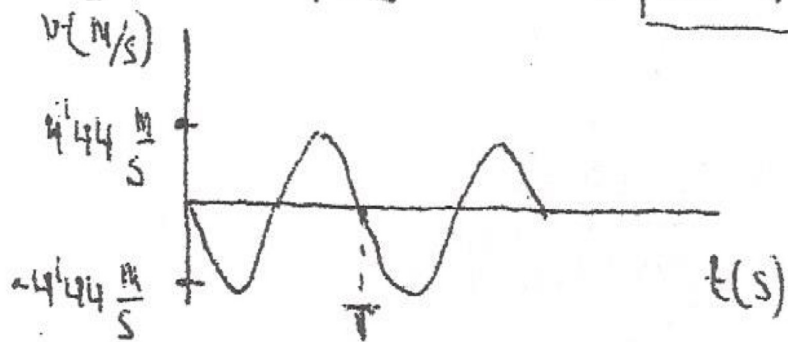
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$T = \frac{2\pi}{100\pi}$$

$$T = 0,025$$

c) $v = \frac{dy}{dt} = 7'07 \cdot 10^{-3} \cdot [-\text{Sen}(200\pi t)] \cdot 200\pi \Rightarrow \boxed{v = -4'44 \cdot \text{Sen}(200\pi t) \text{ (S.I.)}}$ Función que deberías representar.




$$y = \boxed{2A - 2a \text{ Sen}(Kx)} \cdot \cos(\omega t)$$

En la onda estacionaria la amplitud viene determinada por el pto X
 no en toda es la misma, cada uno

los nodos no la poseen

$$y = A \cdot \text{len}(\text{col} - \text{row})$$

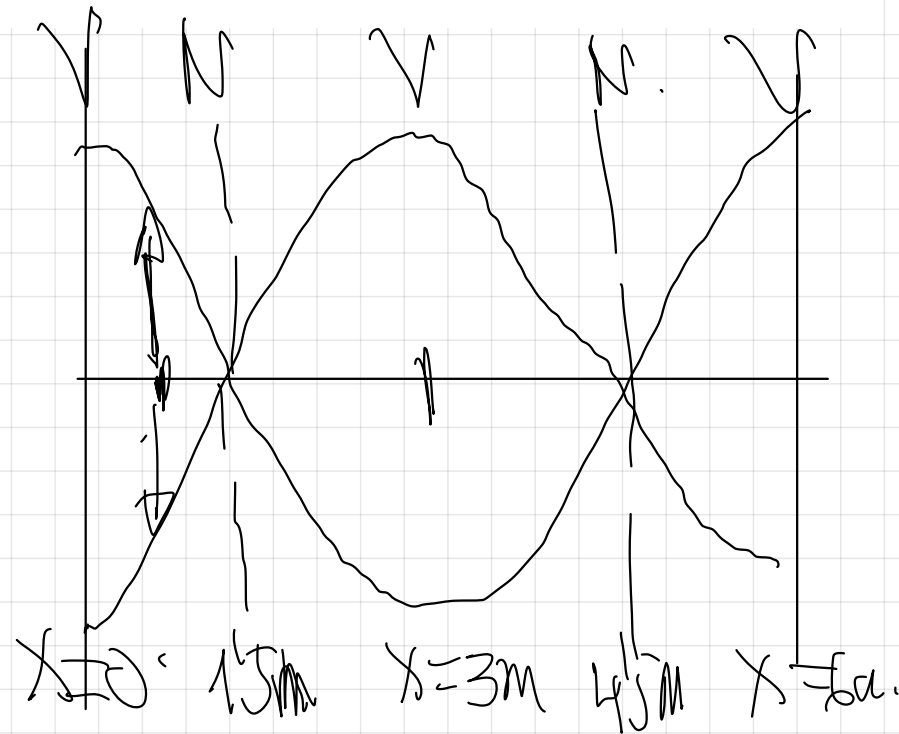
Con la viajes A se alcanza
por todos los plots.

9.- La ecuación de una onda en una cuerda es:

$$y(x,t) = 10 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot x\right) \cdot \text{sen}(2\pi t) \text{ (S.I.)}$$

- a) ¿Cuál sería la amplitud resultante del movimiento armónico simple descrito por la partícula en $x=1\text{m}$?
- b) ¿Cuál sería la amplitud máxima que podría presentarse en dicha onda?
- c) ¿Porqué hablamos de amplitud máxima en este caso y únicamente de amplitud en el caso de las ondas viajeras?

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = 6\text{m.}$$



$$y(1\text{m}, t) = 10 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \text{sen}(2\pi t)$$

$$20 \cdot \cos 60^\circ$$

$$5 \text{ m.}$$

$$A = 5 \text{ m} \Rightarrow$$

$$A_{\text{resultant}} = 10 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$A_{\text{max}} = 10 \text{ m} \quad (2A)$$

10.- La ecuación de una onda en una cuerda es :

$$y = 0'2 \cdot \cos(0'5\pi x) \cdot \sin(30\pi t) \text{ (S.I.)}$$

a) Determina en qué instantes será máxima la elongación y la velocidad del punto $x=0'5\text{m}$

b) Realiza una representación gráfica aproximada de la forma que adopta la cuerda en el instante $t=1/60\text{ s}$

b)

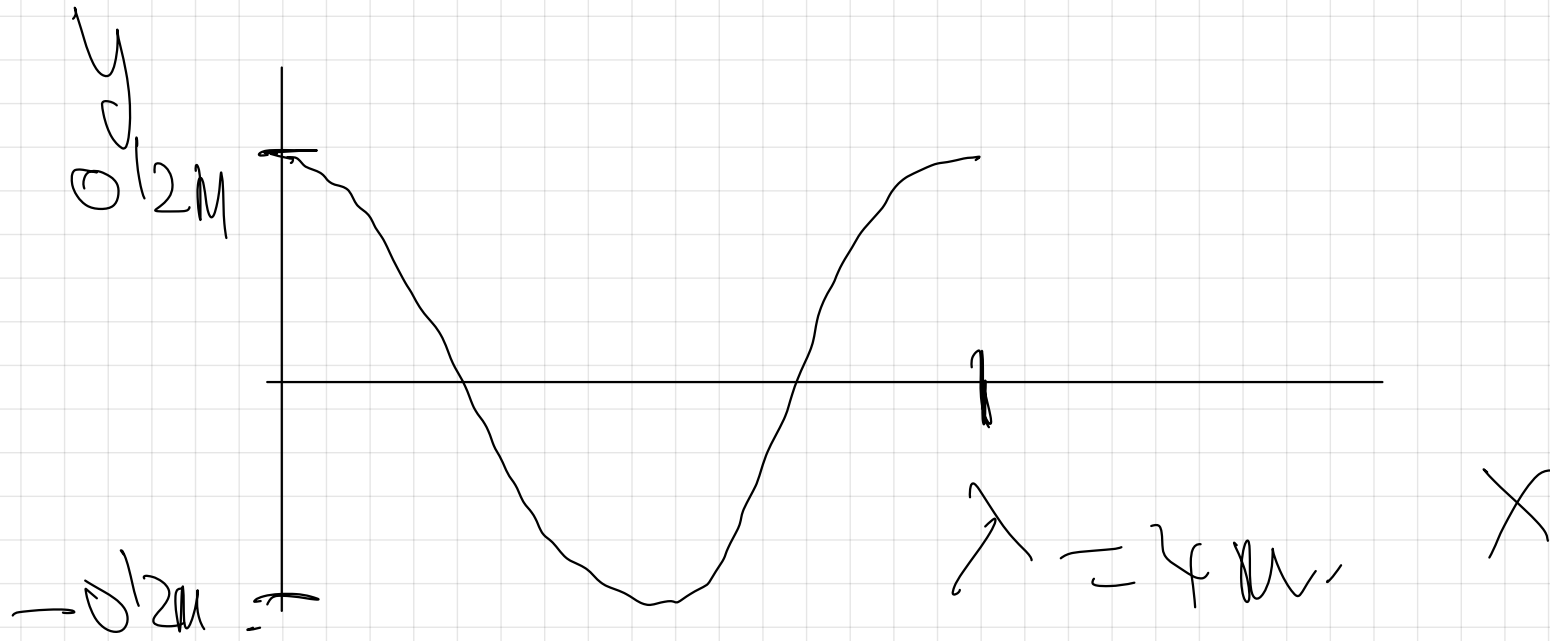
$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{30\pi} = \frac{1}{15} \text{ s}$$

$$t = 1/60$$

$$y(x) = 0'2 \cdot \cos(0'5\pi x) \cdot \sin\left(30\pi \frac{1}{60}\right)$$

$$y(x) = 0'2 \cdot \cos(0'5\pi x) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$t = 1/60 \text{ s}$$



$$K = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{K} = \frac{2\pi}{0.5\pi} = 4m$$

$$y = 0'2 \cdot \cos(0'5\pi x) \cdot \text{sen}(30\pi t) \text{ (S.I.)}$$

$$x = 0'5 \text{ m} \rightarrow y = 0'2 \cdot \cos(0'25\pi) \cdot \text{sen}(30\pi t)$$

$$y = 0'2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \text{sen}(30\pi t)$$

$$y_{\text{max}} \longrightarrow \text{sen}(30\pi t) = \pm 1,$$

primer instante \leftarrow

$$\left. \begin{array}{l} (30\pi t) = \frac{\pi}{2} \\ t = \frac{1}{60} \text{ s.} \end{array} \right\} (90^\circ)$$

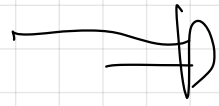
$$\left(\begin{array}{l} (30\pi t) = \frac{3\pi}{2} \quad (270^\circ) \\ t = \frac{3}{60} \quad \omega = \frac{1}{20} \end{array} \right)$$

$$y = 0.2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin(30\pi t)$$

$$v = \frac{dy}{dt} = 0.2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \left[\cos(30\pi t) \right] \cdot 30\pi$$

$$v = 6\pi \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos(30\pi t)$$

v_{\max}



$$\cos(30\pi t) = \pm 1.$$

$$\left. \begin{array}{l} (30\pi t) = 0, \\ t = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} (30\pi t) = \pi \quad (180^\circ) \\ t = \frac{1}{30} \text{ s.} \end{array} \right\}$$

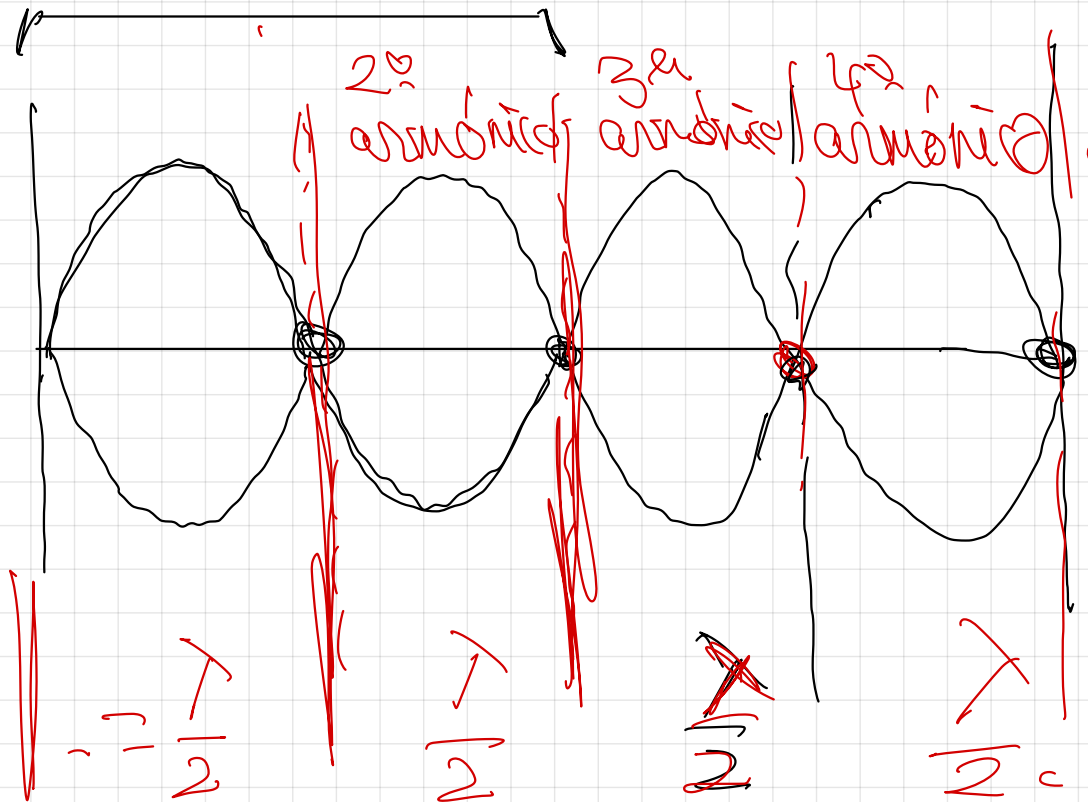
$$\left. \begin{array}{l} (30\pi t) = 2\pi \end{array} \right\}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 30 & 15 & & \end{array} \right|$$

Ondas estacionarias en una cuerda
con sus dos extremos fijos



NO DO EN AMBOS
EXTREMOS.



longitud de
la cuerda

$$L = n \frac{\lambda}{2}$$

$$n=1$$

↓
modo fundamental
0 primer armónico

$$L = \frac{\lambda}{2}$$

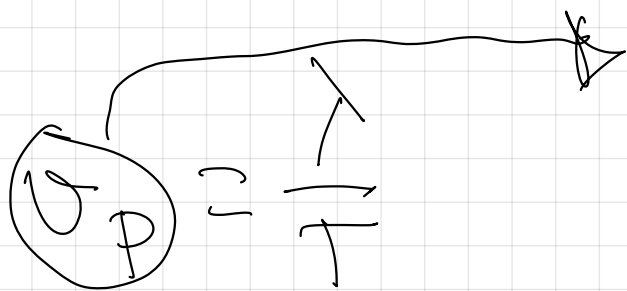
2= armónico

$$L = 2 \cdot \frac{\lambda}{2}$$

$$L = 3 \cdot \frac{\lambda}{2}$$

$$L = 4 \cdot \frac{\lambda}{2}$$

$$n=1, 2, 3, 4, 5,$$



obtengo la expresión de
la u_p en función de

La frecuencia.

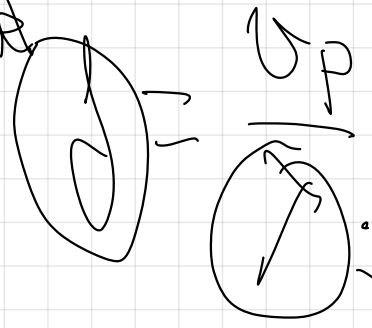
$$v_p = \lambda \cdot \frac{1}{T}$$

Substituyo λ .

$$v_p = \lambda \cdot \frac{1}{T}$$

$$L = n \cdot \frac{2L}{2}$$

Sabé si es agudo o grave



$$\lambda = \frac{2L}{n}$$

$$f = \frac{v_p}{2L/n}$$

mas agudo \uparrow f

$=$

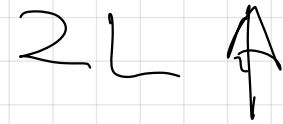


de en el mismo medio.

cuerda mas corta.

mas grave \downarrow f

$=$



de en el mismo medio.

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$f = \frac{v}{2L}$$

$T \Rightarrow$ tensión de la cuerda (N)

$\mu \Rightarrow$ densidad lineal

$$\mu = \frac{m}{L} \quad \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}} \right)$$

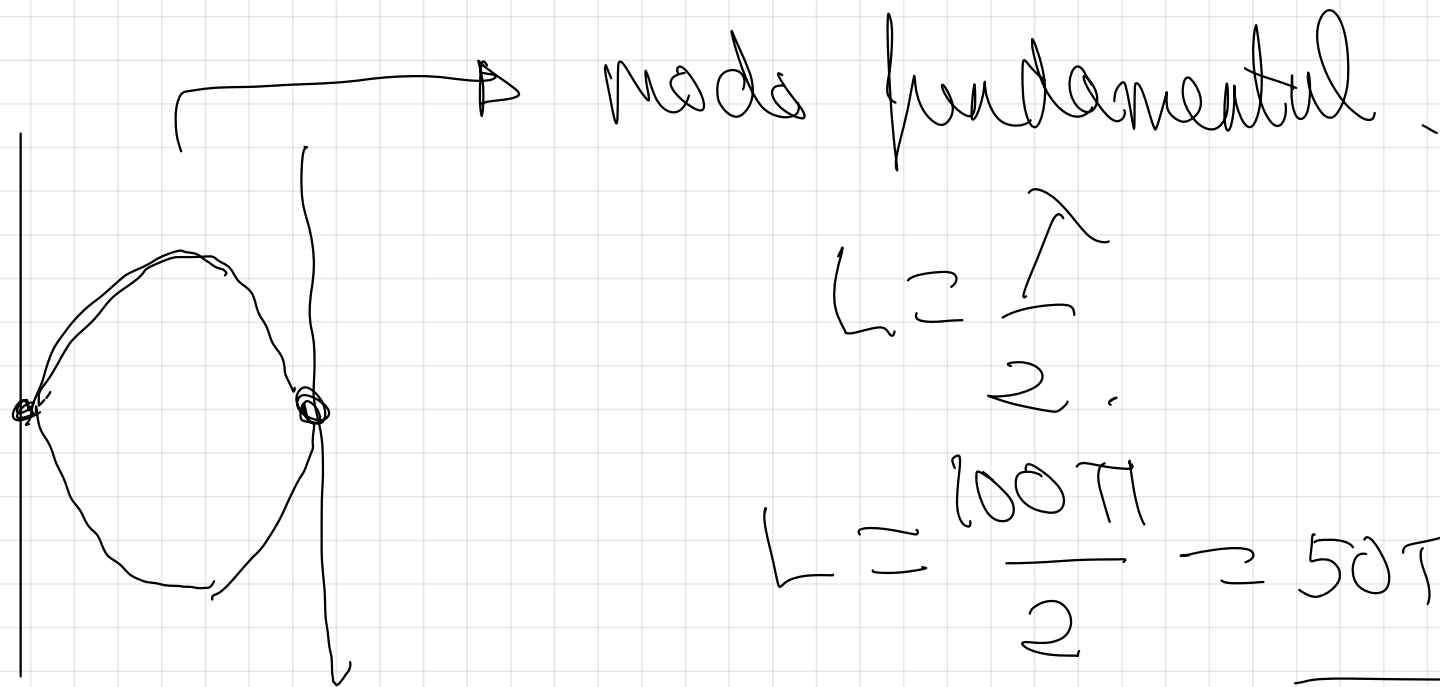
1.- La función de onda correspondiente a una onda estacionaria en una cuerda fija en ambos extremos de longitud L es $y = 0,5 \sin(0,02x) \cos(30t)$ en donde x e y se miden en centímetros y t en segundos. ¿Cuál es la longitud de onda?, ¿y la frecuencia? ¿Cuál es la velocidad de las ondas transversales en esta cuerda? Si la ecuación anterior corresponde a la onda fundamental, ¿Cuál es la longitud de la cuerda?

Empieza en un nodo.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{0,02} = 100\pi \text{ cm}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{30}{2\pi} = \frac{15}{\pi} \text{ Hz.}$$

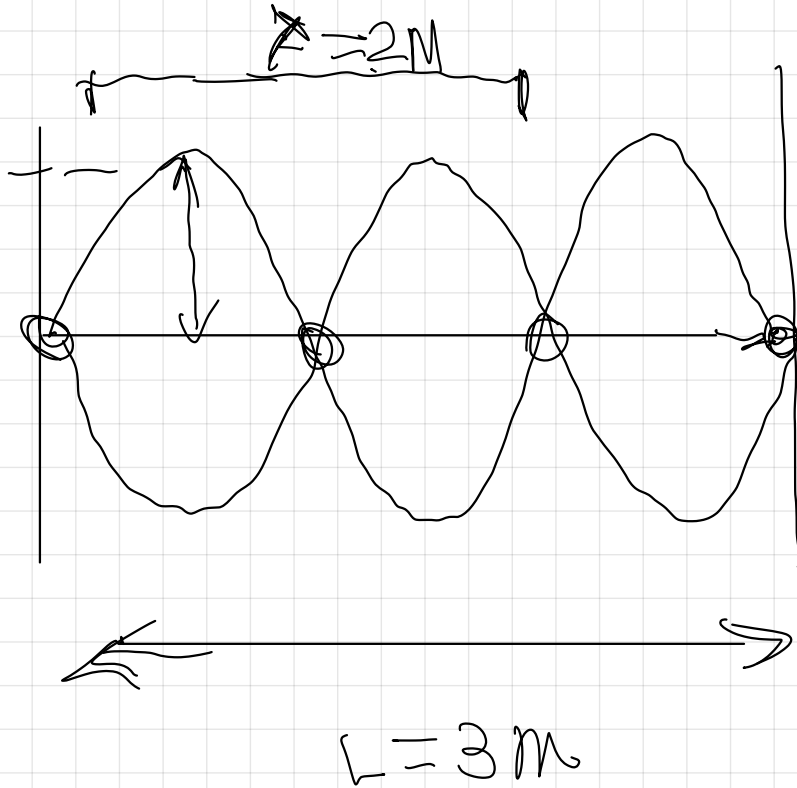
$$v_p = \lambda \cdot f = 100\pi \text{ cm} \cdot \frac{15}{\pi} \text{ Hz} = 1500 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$



$$L = \frac{\lambda}{2}$$
$$L = \frac{100\pi}{2} = \underline{\underline{50\pi \text{ cm}}}$$

2.- Una cuerda de 3 metros de largo y fija por sus dos extremos está vibrando en su tercer armónico. El desplazamiento máximo de los puntos de la cuerda es de 4 mm. La velocidad de las ondas transversales en ella es de 50 m/s. a) ¿Cuáles son la longitud de onda y la frecuencia de esta onda?. b) Escribir la ecuación de la onda correspondiente a este caso.

$$2A = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$



3^{er} armónico.

$$L = n \frac{\lambda}{2} ?$$

$$L = 3 \frac{\lambda}{2}$$

$$v = \lambda \cdot f$$

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{50 \text{ m/s}}{2 \text{ m}} = 25 \text{ s}^{-1} = 25 \text{ Hz}$$

$$\lambda = \frac{2L}{3} = \frac{2 \cdot 3}{3} = 2 \text{ m}$$

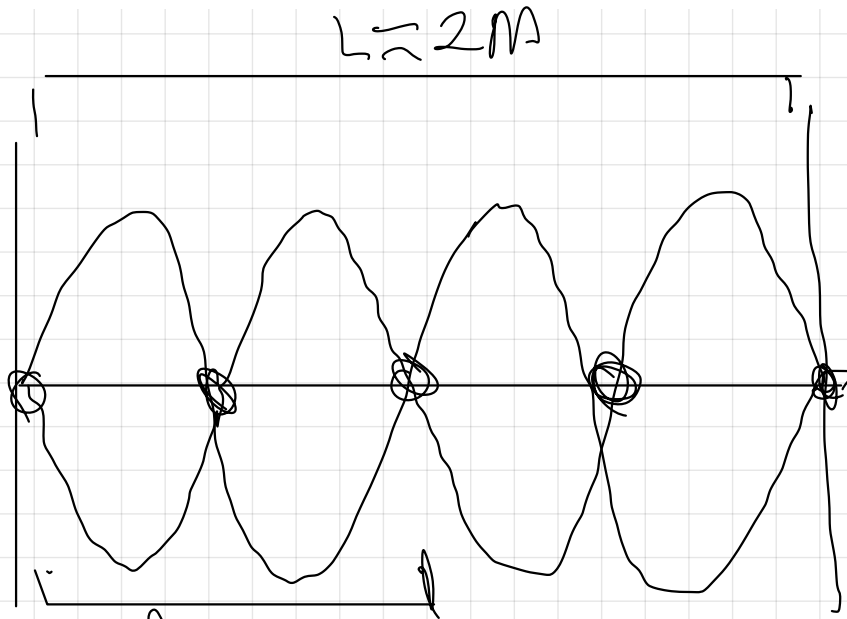
$$y = 2A \cdot \sin(kx) \cdot \cos(\omega t)$$

$$y = 4 \cdot 10^{-3} \cdot \sin(\pi x) \cdot \cos(50\pi t) \quad (\text{SI})$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \frac{2\pi}{2} = \pi \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 2\pi f = 50\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

3.- Una cuerda de 2 m de largo está accionada sujeta por ambos extremos posee una frecuencia de 240 Hz y forma un patrón de onda estacionaria en cuatro segmentos (cuarto armónico). ¿Cuál es la rapidez de dicha onda?



$$\lambda = 1\text{m}$$

$$L = n \cdot \frac{\lambda}{2}$$

$$2 = 4 \cdot \frac{\lambda}{2}$$

$$\lambda = \frac{2L}{4}$$

$$\lambda = \frac{2 \cdot 2}{4} = 1\text{m}$$

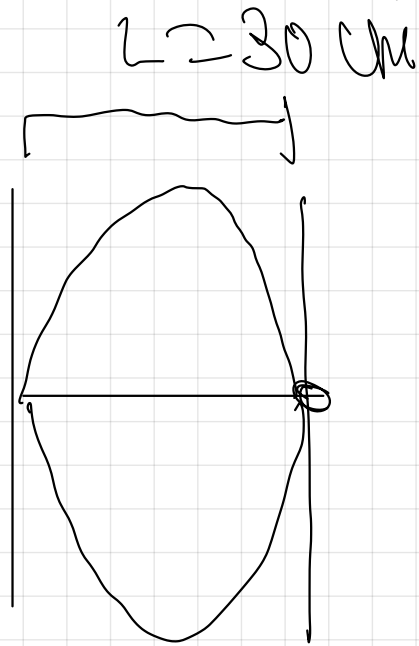
$$v_p = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f$$

$$v_p = \lambda \cdot f$$

$$v_p = 1\text{m} \cdot 240\text{Hz}$$

$$v_p = 240 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

11.- Una cuerda de banjo de 30 cm de largo oscila en forma de onda estacionaria. Resuena en su modo fundamental a 256 Hz. ¿Cuál es la tensión de la cuerda si ~~80~~ cm de ésta tienen una masa de 0.75 Kg?



$0.75 = 10^{-3} \text{ Kg}$

0.15 m

modo fundamental.

$L = \frac{\lambda}{2}$

$\lambda = 2L = 2 \cdot 30 \text{ cm} = 60 \text{ cm}$

$\lambda = 0.6 \text{ m}$

Para aparecer la T.

$v_p = \lambda \cdot f \Rightarrow$

$\sqrt{\frac{T}{\mu}} = \lambda \cdot f$

$$\left(\frac{T}{\mu}\right)^2 = (\lambda \cdot f)^2$$

$$\frac{T}{\mu} = \lambda^2 \cdot f^2$$

$$T = \lambda^2 \cdot f^2 \cdot \mu = (0,6)^2 \cdot (256)^2 \cdot 9,375 \cdot 10^{-4}$$

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{0,75 \cdot 10^{-3}}{0,8} = 9,375 \cdot 10^{-4} \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

$$\boxed{T = 22,12 \text{ N}}$$

12.- Una cuerda sujeta por ambos extremos se tensa con 88,2 N. Su longitud es de 50 cm y su masa 0,5 g.

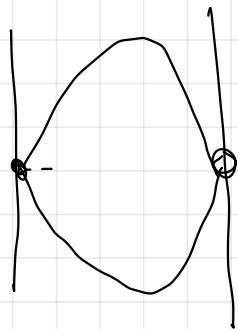
- a) Calcule la velocidad de propagación
b) Determine la frecuencia fundamental

a)

$$v_p = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{88,2 \text{ N}}{10^{-3}}} = 296,98 \text{ m/s.}$$

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{0,5 \cdot 10^{-3} \text{ Kg}}{0,5 \text{ m}} = 10^{-3} \frac{\text{Kg}}{\text{m}}$$

b)



$$L = n \cdot \frac{\lambda}{2}$$

↓
fundamental
 $n=1$

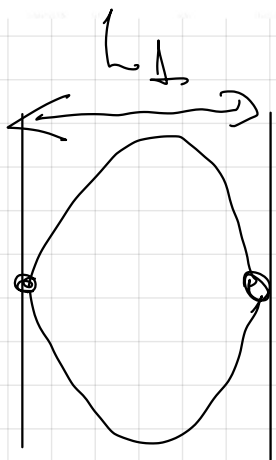
$$L = \frac{\lambda}{2}$$

$$\lambda = 2L$$

$$v_p = \lambda \cdot f$$

$$v_p = 2L \cdot f \Rightarrow f = \frac{v_p}{2L} = \frac{296.98}{2 \cdot 0.5} = 296.98 \text{ Hz}$$

13.- Una cuerda de violín resuena con su frecuencia fundamental de 196 Hz. ¿Dónde debe colocar su dedo a lo largo de la cuerda para que la frecuencia fundamental sea 440 Hz?



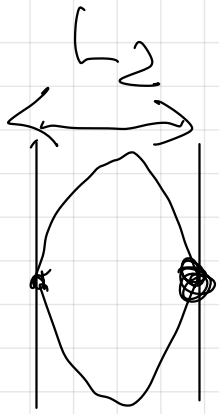
$$f_1 = 196 \text{ Hz}$$

v_p es la misma.

$$v_p = \frac{\lambda}{T} \quad \lambda = \frac{L}{2}$$

$$v_p = \lambda \cdot f$$

$$v_p = 2L \cdot f$$



$$f_2 = 440 \text{ Hz.}$$

v_p es la misma.

$$\begin{aligned} v_p &= 2 \cdot L_1 \cdot f_1 \\ v_p &= 2 \cdot L_2 \cdot f_2 \end{aligned}$$

$$2L_1 \cdot f_1 = 2L_2 \cdot f_2$$

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{f_1}{f_2}$$

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{196}{440}$$

$$L_2 = 0.45 L_1$$

Expresiones de la ecuación de onda.

$$y = A \cdot \sin\left(\omega t - kx + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \boxed{y = A \cdot \cos(\omega t - kx)}$$

$$y = A \cdot \sin(\omega t - kx + \pi) \Rightarrow \boxed{y = A \cdot \sin(kx - \omega t)}$$