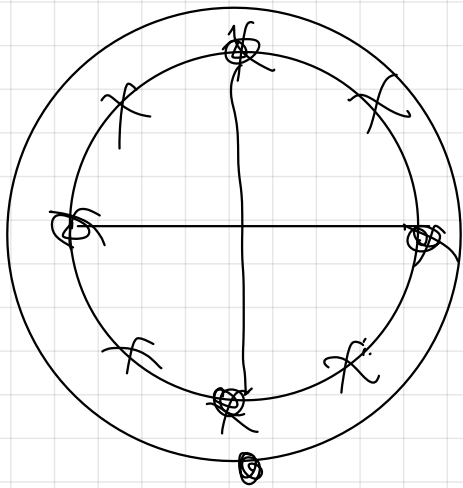


M. A. S.

libre

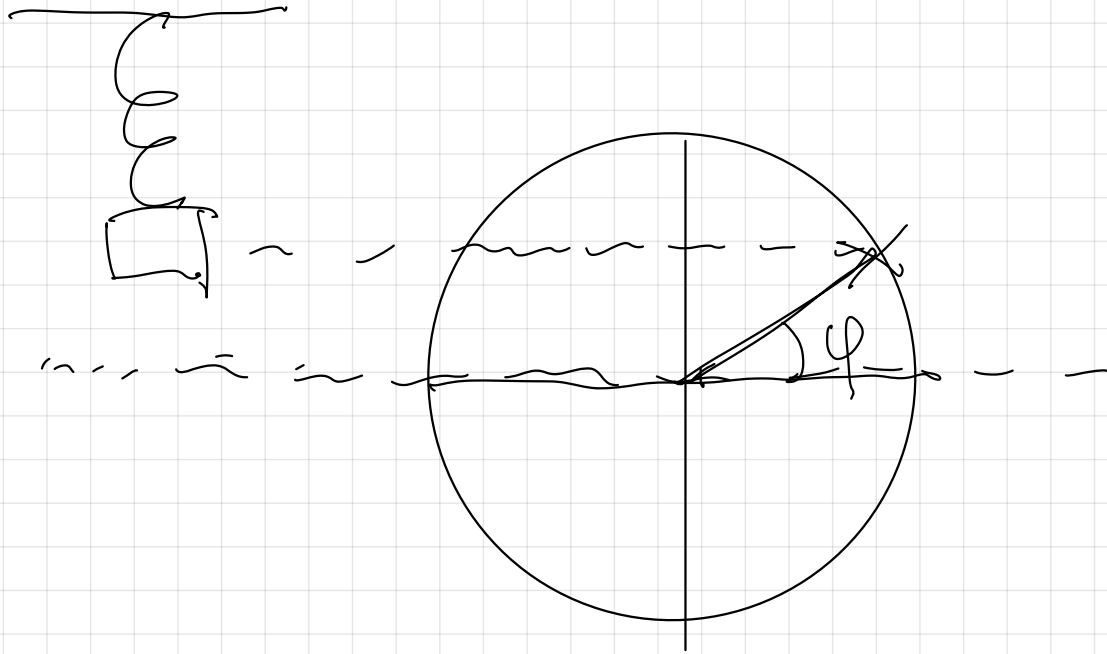
a) Ciclo u oscilación completa.



$$\omega = \frac{\varphi}{t} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi \text{ (rad)}}{T \text{ (s)}}$$

b) Velocidad angular  $\omega$ , pulsación  $\omega$   
frecuencia angular (rad/s)

c) Ángulo de fase  $\varphi$  (rad)

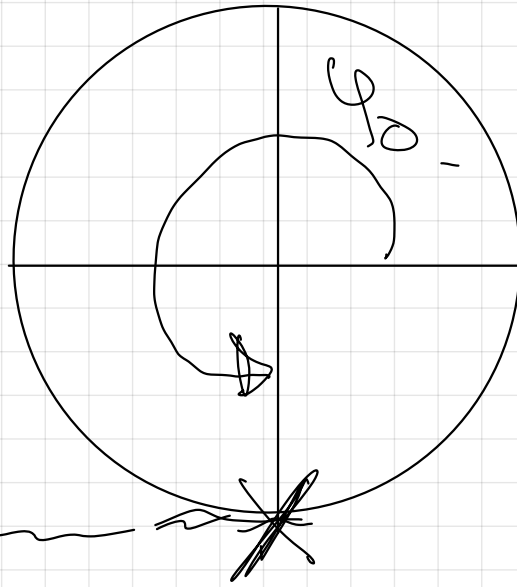
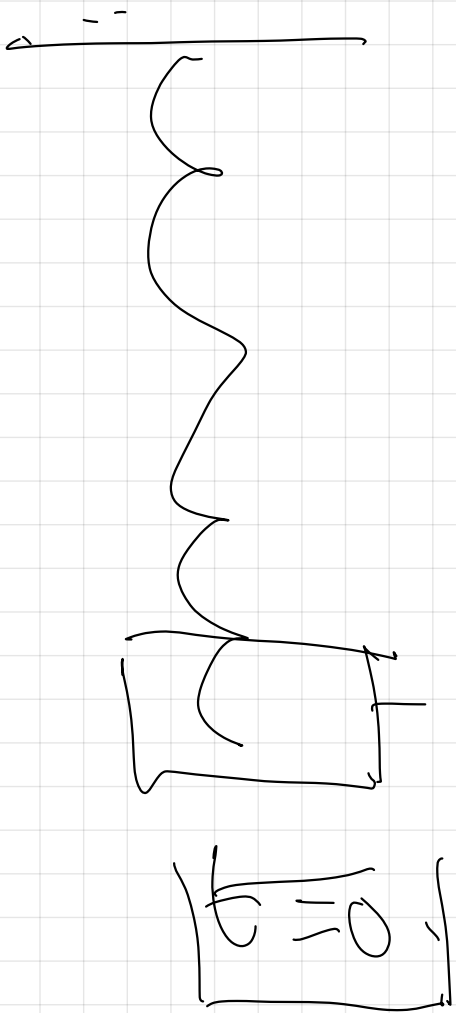


$\varphi \Rightarrow$  rad.

En un instante  $t$  determinado.

d) Ángulo de fase inicial  $\varphi_0$ .

En el instante inicial.



$$\phi_0 = 270^\circ$$

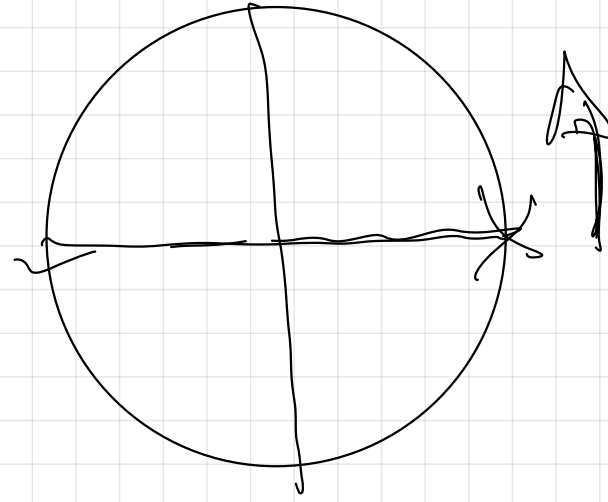
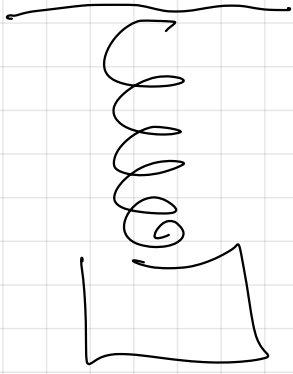
$$\phi_0 = \frac{3}{2} \pi \text{ rad.}$$

$$360^\circ \sim 2\pi$$

$$270^\circ \sim x$$

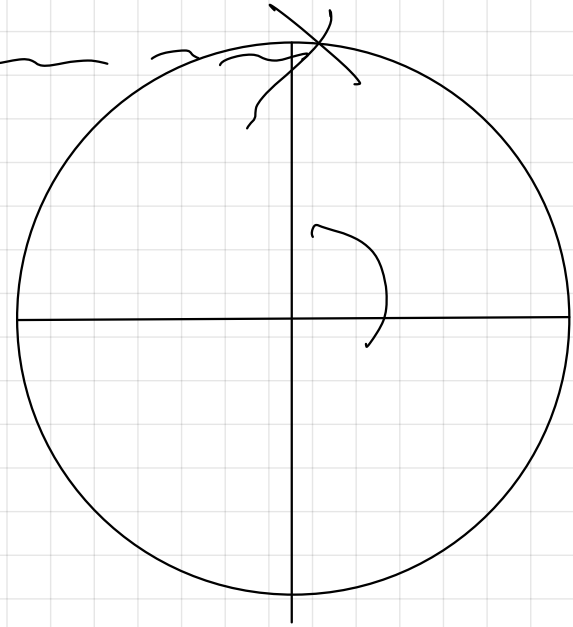
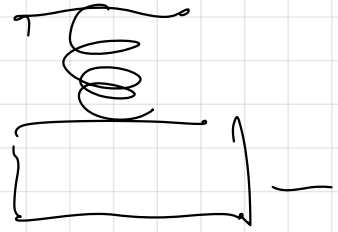
$$x = \frac{3}{2} \pi \text{ rad.}$$

$t = 0$

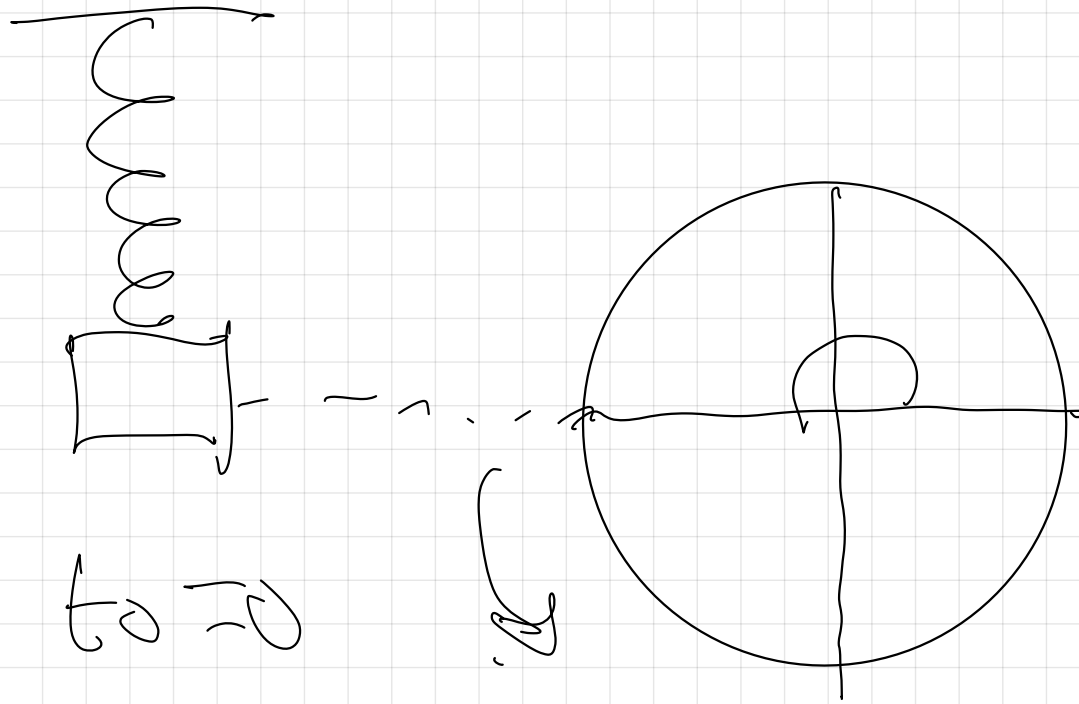


$\frac{d}{dt} = 0$

$t = 0$



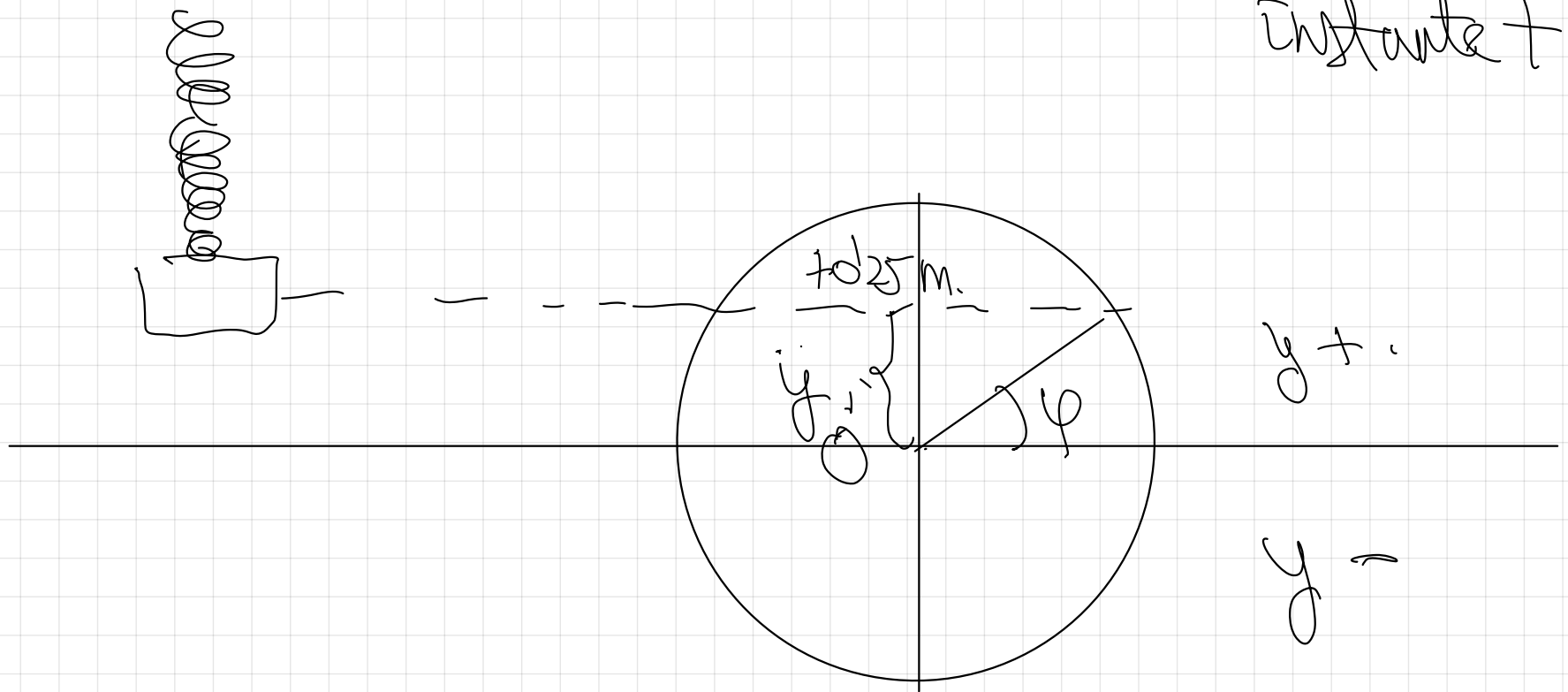
$\frac{d}{dt} = \text{rad}$



$$\theta = \pi \text{ rad}$$

e) Elongación  $y$  (m en S.I.)

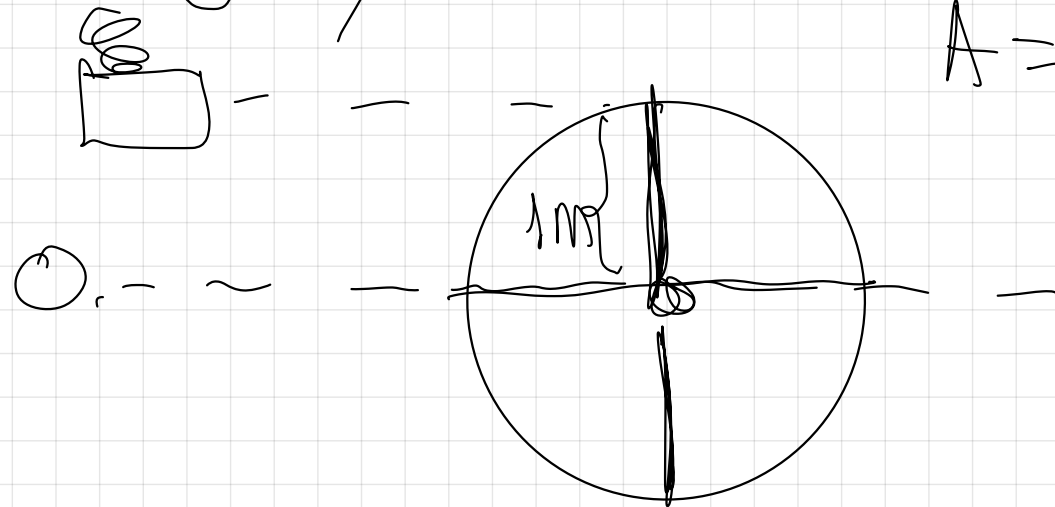
instante  $t$ .

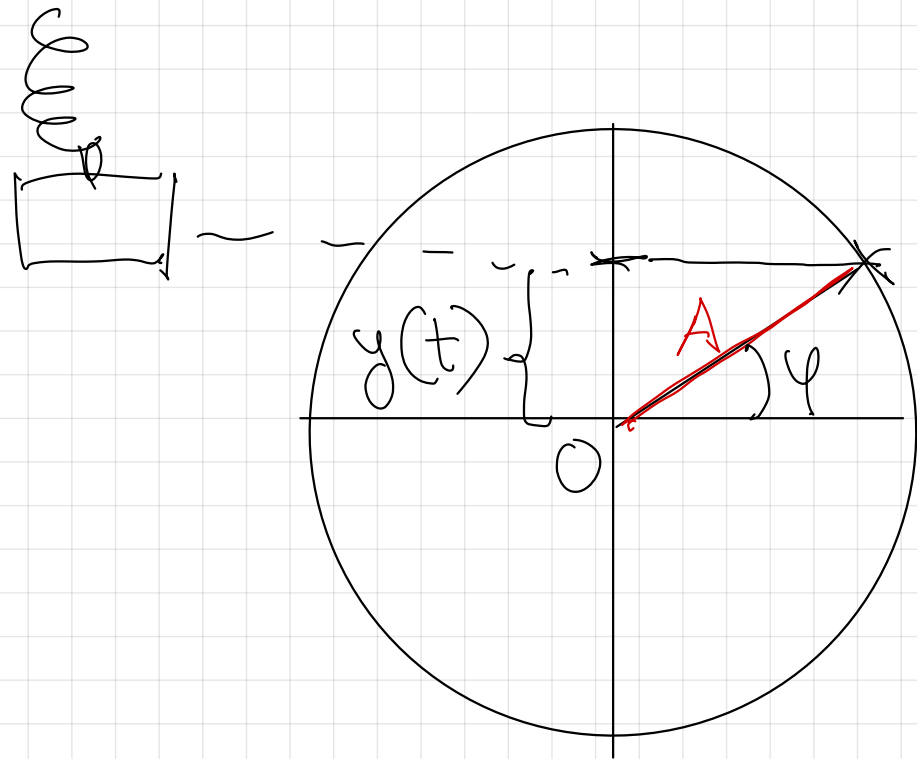
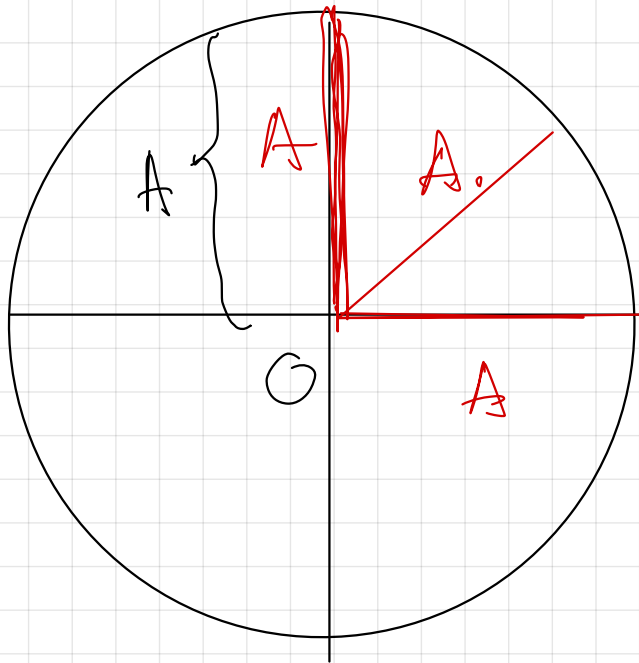


2) Amplitud ( $A$ )

$$A = 1 \text{ m}$$

$$y_{\text{max}} = A$$





Sea  $\varphi = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$ .

Sea  $\varphi = \frac{y}{A}$ .

$$v = \frac{s}{t}$$

$$s = v \cdot t$$

$$s = s_0 + v \cdot t$$

$$y = A \cdot \text{sen } \varphi$$

$$\omega = \frac{\varphi}{t}$$

$$\varphi = \omega \cdot t$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t$$

$$y = A \cdot \sin(\varphi)$$

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Equación de un M.A.S.

g) T (s. en S.I.)

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

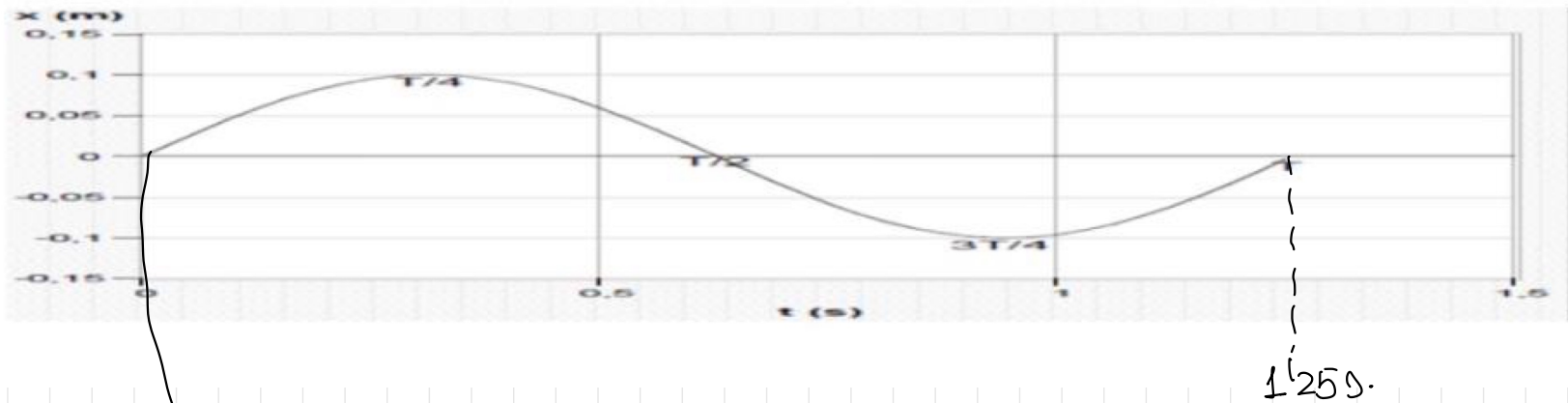
$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

b)  $f$  (s<sup>-1</sup>, oscilaciones/s, ciclos/s)  $\Rightarrow$   $f$  (Hz)

$f = \frac{\text{n}^{\circ} \text{ oscilaciones}}{t}$

Viene en la página web.

1.- En la gráfica se muestra la posición en función del tiempo para una partícula que describe un m.a.s. Determina la ecuación de dicho movimiento.



$$y(t) = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0) \quad (\text{S.I.})$$

$$y(t) = 0.1 \cdot \text{sen}\left(\frac{1}{6} \pi t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{S.I.})$$

$$\omega = \frac{\varphi}{t} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{t} = \frac{2\pi}{1.25} = \frac{8}{5} \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega = 1.6 \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$y(t) = 0.1 \cdot \cos(1.6\pi t) \quad (\text{S.I.})$$

Para calcular matemáticamente el ángulo de fase inicial.

1º Escribimos genéricamente la ecuación del m.a.s.

2º

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

Substituímos

cuando  $t = 0$ .



Cuando  $t = 0$   
y vale 0.

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi)$$

$$0 = A \cdot \text{sen} \varphi_0$$

$$\text{sen} \varphi_0 = \frac{0}{A}$$

$$\text{sen} \varphi_0 = 0$$

$$\varphi_0 = \arcsen 0$$

$$0^\circ \text{ (asciende)}$$

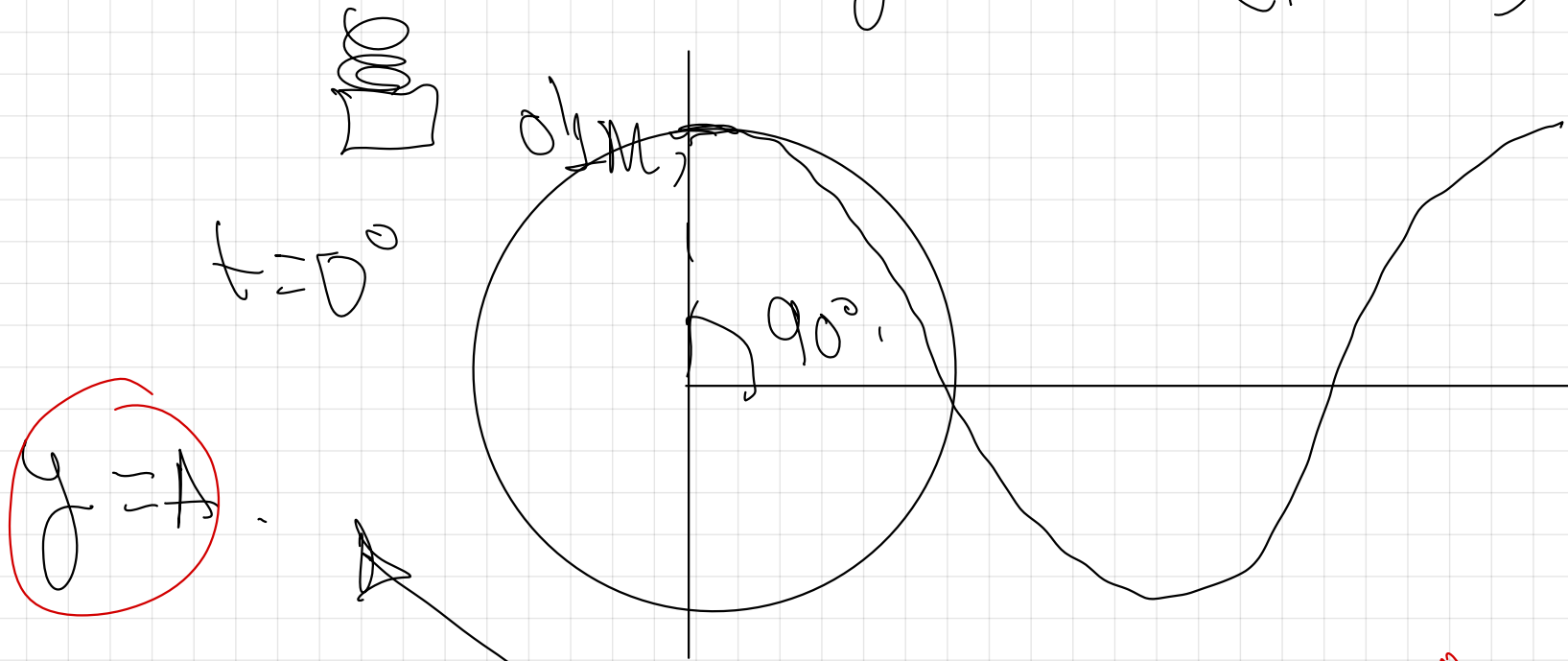
$$180^\circ \text{ (}\pi \text{ rad)}$$

→ "gráfica"

desciende.

)<sub>1</sub>

$$y = 0.1 \cos(1/6 \pi t) \quad (5.7)$$



Calculo  $\varphi_0$

$$t = 0.$$

Cuando  $t = 0$ ,

$$\cancel{y} = A \cdot \cancel{\sin}(\cancel{\omega t} + \varphi_0)$$

$$A = A \cdot \sin(\varphi_0)$$

$$\frac{A}{A} = \sin \varphi_0$$

$$1 = \sin \varphi_0$$

$$\varphi_0 = \arcsin 1 = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

$$y(t) = 0.1 \sin(16\pi t) \text{ (}$$

$$y = 0.1 \sin\left(16\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S. 7)}$$

$$y = 0.1 \cos(16\pi t) \text{ (S. 7)}$$

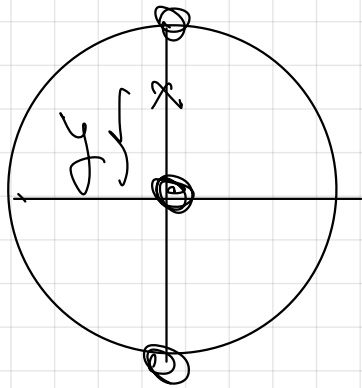
### 3.- MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE : CARACTERÍSTICAS CINEMÁTICAS

Ecuación del M.A.S.,

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = \frac{dy}{dt} = A \cdot [\cos(\omega t + \varphi_0)] \cdot \omega$$

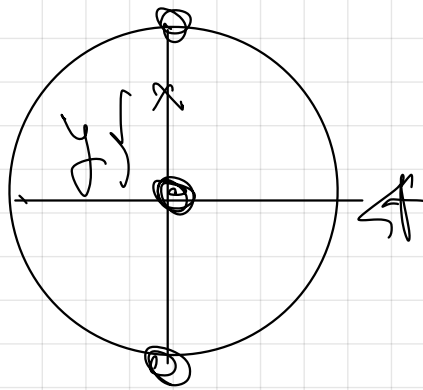
$$v = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$



~~$v = A \cdot \omega \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$~~

$v$  en función del tiempo  $t$ :

$$v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$



$$v_{\max} = A \cdot \omega \cdot \left( \cos(\omega t + \varphi_0) \right) \left. \begin{array}{l} +1 \\ -1 \end{array} \right\}$$

$$v_{\max} = \pm A \cdot \omega$$

Busca ahora la velocidad en función de la posición  $y$ .

$$v = A \cdot \omega \cdot \left[ \cos(\omega t + \varphi_0) \right]$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$v = A \cdot \omega \cdot \sqrt{1 - \sin^2(\omega t + \varphi_0)}$$

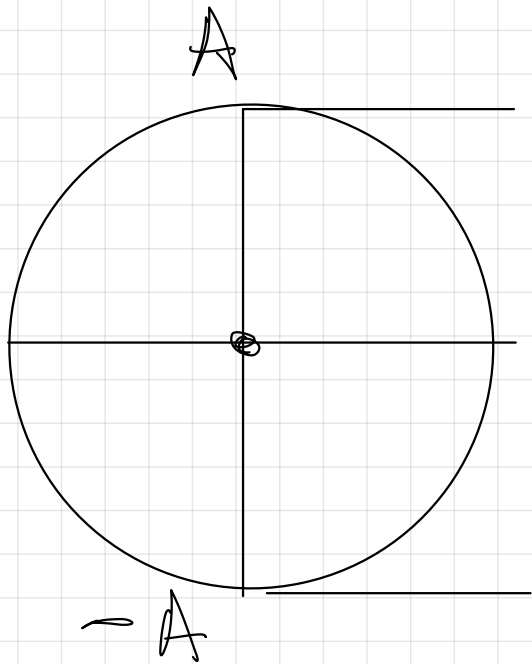
$$v = \omega \cdot \sqrt{A^2 (1 - \sin^2(\omega t + \varphi_0))}$$

$$v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - A^2 \cdot \sin^2(\omega t + \varphi_0)}$$

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - y^2}$$

$$v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - y^2}$$



$$y = A \Rightarrow v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - A^2} = 0,$$

$$y = 0 \Rightarrow v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - 0^2} \Rightarrow v = A \cdot \omega$$

max

$$y = -A \Rightarrow v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - (-A)^2} = 0.$$

aceleración del M.A.S.)

$$y(t) = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = \frac{dy}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

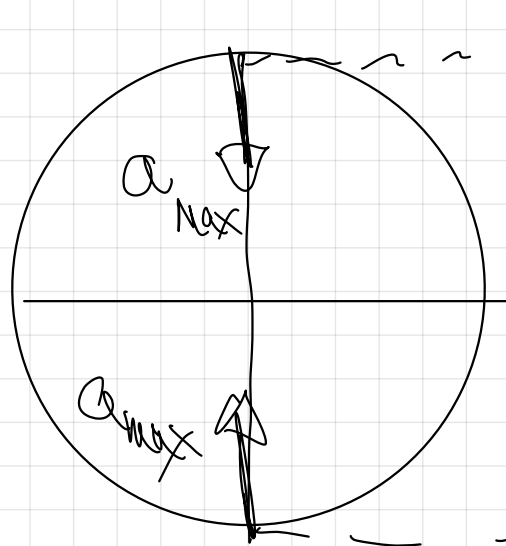
$$a = \frac{dv}{dt} = A \cdot \omega \cdot [-\text{sen}(\omega t + \varphi_0)] \cdot \omega.$$

$$a(t) = -[A \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0)].$$

$$a_{\max} = \pm \omega^2 \cdot A$$

$$\begin{matrix} \downarrow \\ \boxed{y} \\ \downarrow \end{matrix} = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$a = -\omega^2 \cdot y$$



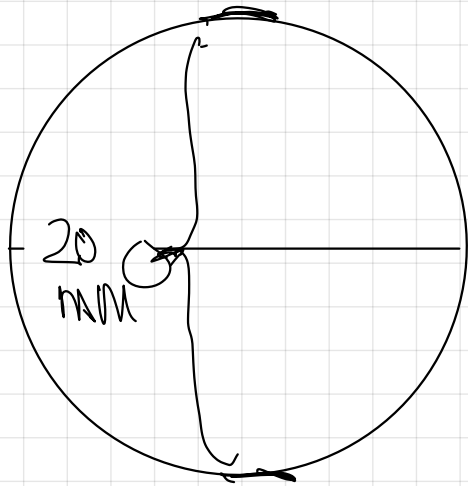
$$y = A \Rightarrow a = \ominus \omega^2 \cdot A_{\max}$$

$$y = 0 \Rightarrow a = -\omega^2 \cdot 0 = 0$$

$$-y = -A \Rightarrow a_{\max} = -\omega^2 \cdot (-A) = +\omega^2 \cdot A$$

$y \uparrow$   
 $a \ominus$   
 $y \downarrow$   
 $a \oplus$

2.- La aguja de una máquina de coser oscila entre dos puntos separados por una distancia vertical de 20 mm. Suponiendo que describe un m.a.s de frecuencia 30 Hz, ¿Cuál será su velocidad y aceleración máximas en unidades del Sistema Internacional?



¡OJO!

$$A = 10 \text{ mm}$$

$$A = 10 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

$$A = 10^{-2} \text{ mm}$$

$$f = 30 \text{ Hz}$$

Si no especifican nada del instante inicial, por defecto se toma  $\phi_0 = 0$ .

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \phi_0)$$

$$y = A \cdot \sin(\omega t)$$

$$v = \frac{dy}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)$$

$$v_{\max} = A \cdot \omega = 10^{-2} \cdot 60\pi$$

$v_{\max}$

$$f = 30 \text{ Hz}$$

$$A = 10^{-2} \text{ m}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega = 2\pi \frac{1}{f}$$

$$\omega = 2\pi f$$

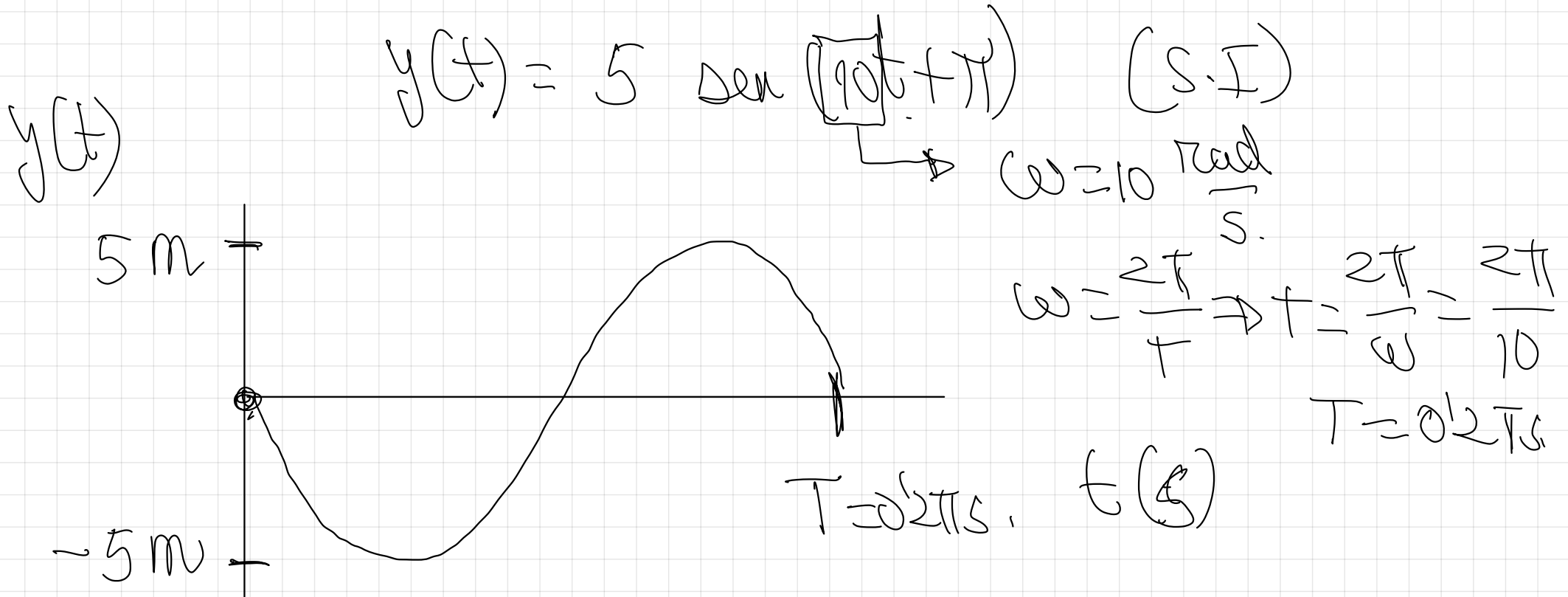
$$\omega = 2\pi \cdot 30$$

$$\omega = 60\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

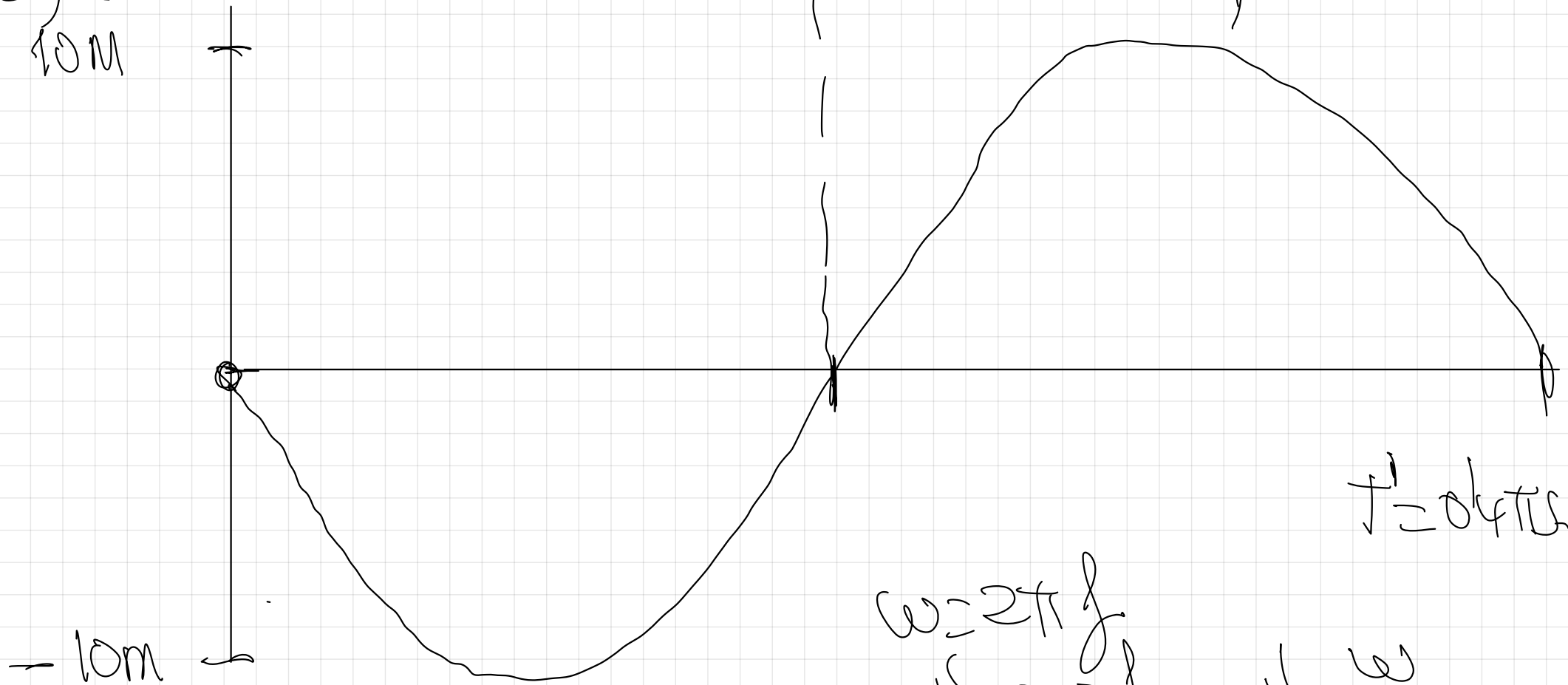
Página web.

3.- a) Represente gráficamente el movimiento armónico simple de una partícula dado por la ecuación  $y(t) = 5 \cdot \text{sen}(10t + \pi)$  (S.I). Represente también otro movimiento armónico simple que tenga una amplitud doble y una frecuencia mitad que la anterior.

b) Represente gráficamente la velocidad y la aceleración del movimiento armónico simple dado por la ecuación  $y(t) = 5 \cdot \text{sen}(10t + \pi)$  (S.I)



$y(t)$   
10m



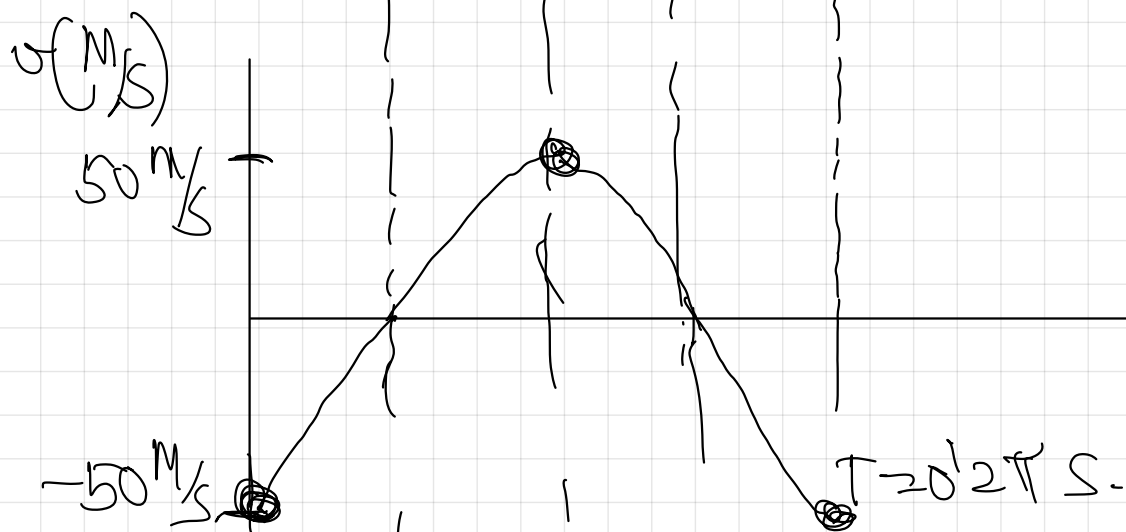
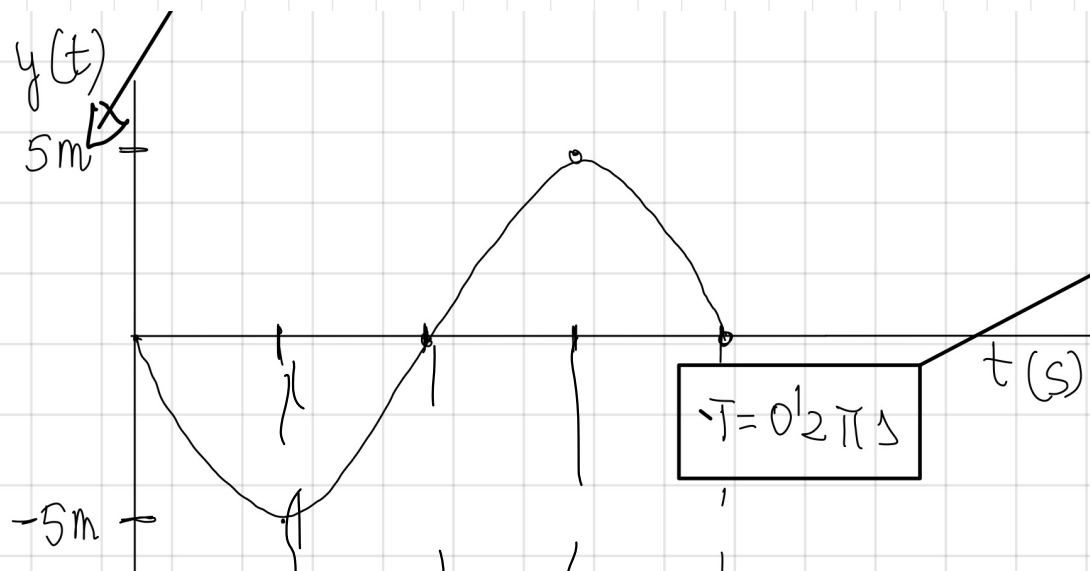
$T = 0.4\pi s$

$$\omega = 2\pi f$$
$$\omega' = 2\pi \frac{f}{2}$$
$$\omega' = \frac{\omega}{2}$$

$$y(t) = 10 - \sin(5t + \pi)$$

b) Represente gráficamente la velocidad y la aceleración del movimiento armónico simple dado por la ecuación  $y(t) = 5 \cdot \text{sen}(10t + \pi)$  (S.I)

PÁGINA WEB

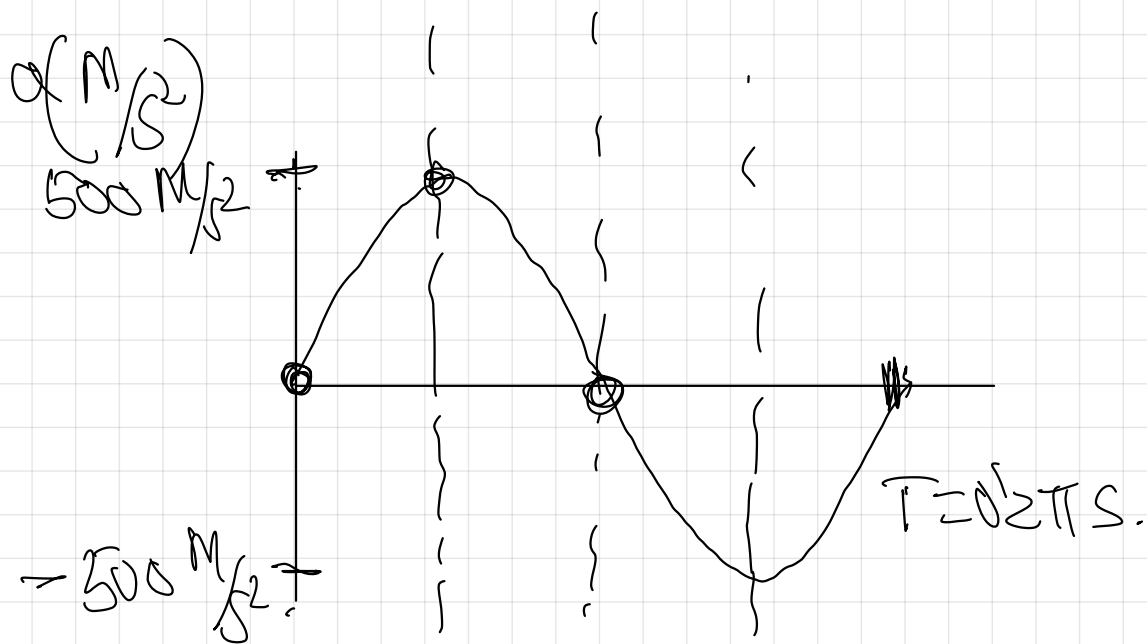


$$v = \frac{dy}{dt} = 5 \cdot \cos(10t + \pi) \cdot 10$$

$$v(t) = 50 \cdot \cos(10t + \pi) \text{ (S.I.)}$$

$$v_{\text{max}} = \pm 50 \text{ m/s}$$

$$v(t) = 50 \cdot \cos(10t + \pi)$$



$$a = \frac{dv}{dt} = 500 \cdot [-\cos(10t + \pi)] \cdot 10$$

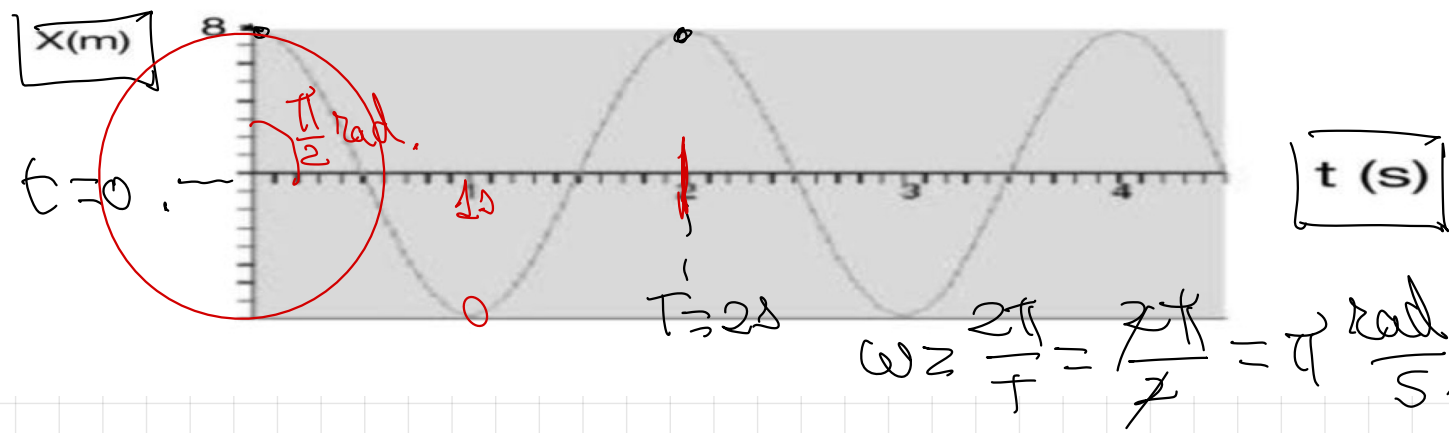
$$a(t) = -5000 \cdot \cos(10t + \pi) \quad (\text{S.I.})$$

$$a_{\max} = \pm 5000 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

4.- En la gráfica se muestra la posición en función del tiempo para una partícula que describe un m.a.s.

a) Escribir la ecuación del m.a.s en unidades S.I.

b) Calcular su posición, su velocidad y su aceleración en el instante  $t=1\text{s}$ , comentando los resultados.



a)

$$y(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$x(t) = 8 \cdot \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{S.I.})$$

$$x(t) = 8 \cdot \cos(\pi t) \quad (\text{S.I.})$$

Cálculo de  $\varphi_0$ .

$t=0$

$x=8\text{m}$

$$8\text{m} \rightarrow x(t) = 8 \cdot \sin(\pi t + \varphi_0)$$

$$8 = 8 \cdot \sin \varphi_0$$

$$\frac{8}{8} = \sin \varphi_0 \quad \cos \varphi_0 = 1$$

$$\varphi_0 = \arcsin 1$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

posición en  $t=1\text{s}$ .

$$x(t) = 8 \cdot \cos(\pi t) \quad (\text{S.I.})$$

$$x(t=1\text{s}) = 8 \cdot \cos(\pi \cdot 1)$$

$$x(t=1\text{s}) = -8\text{m}$$

Ha transcurrido  $\frac{T}{2}$  s, el móvil está en el extremo opuesto (describió medio ciclo)

$$x(t) = 8 \cdot \cos(\pi t) \text{ (S.I.)}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 8 \cdot [-\sin(\pi t)] \cdot \pi$$

$$v(t) = -8\pi \cdot \sin(\pi t)$$

$$\boxed{t=1\text{s.}}$$
$$v(t=1\text{s}) = -8\pi \cdot \sin(\pi)$$

$$v(t=1\text{s}) = 0$$

En el extremo de la trayectoria está en reposo.

$$v(t) = -8\pi \sin(\pi t)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -8\pi [\cos(\pi t)] \cdot \pi$$

$$a(t) = -8\pi^2 \cos(\pi t) \quad (\text{SI})$$

$$t=1s$$

$$a(t=1s) = -8\pi^2 \cos(\pi)$$

$$a(t=1s) = +8\pi^2 \text{ m/s}^2$$

$$a_{\max} = A\omega^2$$

$$a_{\max} = 8\pi^2 \text{ m/s}^2$$

→ En el extremo de la trayectoria adquiere su  $a_{\max}$ .

5.- La ecuación de un m.a.s viene dada por la expresión

$$x(t) = 0,5 \cdot \cos(\pi t) \text{ (S.I.)}$$

a) Calcular su amplitud, su ángulo de fase inicial, su periodo, su frecuencia y su posición al cabo de 0,5 segundos.

b) Calcular la velocidad y la aceleración máximas que podría alcanzar en su movimiento.

$$a) A = 0,5 \text{ m}$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

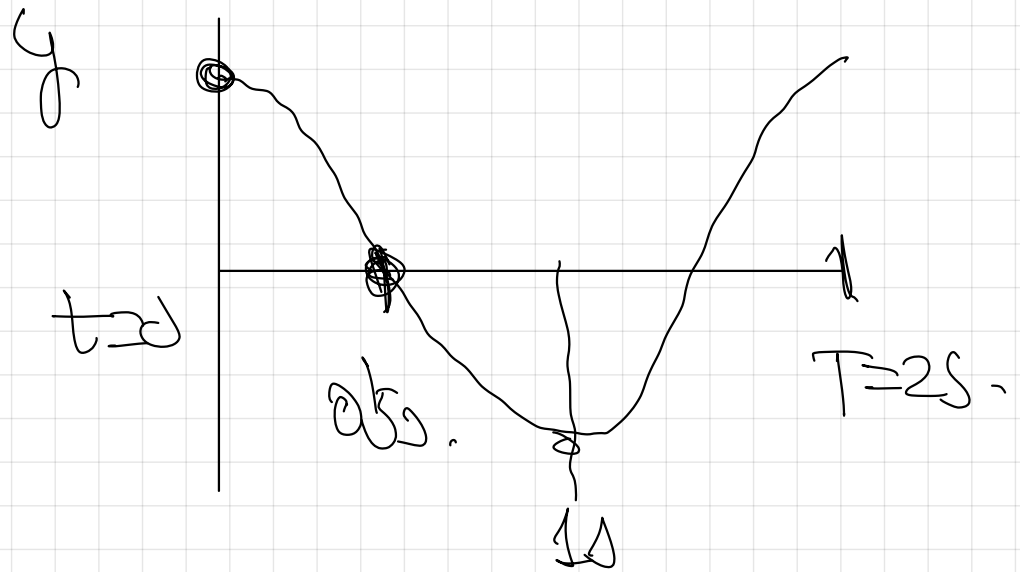
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \text{ s}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ Hz}$$

$$x(t) = 0,5 \cdot \cos(\pi t) \text{ (S.I.)}$$

$$x(t) = 0,5 \cdot \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$



$$x(t) = 0.5 \cdot \cos(\pi t) \quad (\text{S.I.})$$

$$t = 0.5 \text{ s} \quad x(t = 0.5 \text{ s}) = 0.5 \cdot \cos(\pi \cdot 0.5) \quad (\text{S.I.})$$

$$x(t = 0.5 \text{ s}) = 0 \text{ m}$$

---

b)

$$x(t) = 0.5 \cdot \cos(\pi t) \quad (\text{S.I.})$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 0.5 \cdot [-\sin(\pi t)] \cdot \pi,$$

$$v(t) = -0.5 \pi \cdot \sin(\pi t) \quad (\text{S.I.})$$

$$v_{\max} = \pm 0.5 \pi \text{ m/s}.$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -0.5\pi \cdot (\cos \pi t) \cdot \pi$$

$$a = -0.5\pi^2 \cdot \cos(\pi t)$$

$$a_{\max} = \pm 0.5\pi^2 \text{ m/s}^2$$

6.- La ecuación de un cuerpo que describe un m.a.s es  $x(t) = 10 \cdot \sin(\pi t + 3\pi/2)$  (S.I.).

a) ¿Cuánto valen la amplitud, el periodo y la frecuencia del movimiento?

b) Representar gráficamente la posición en función del tiempo

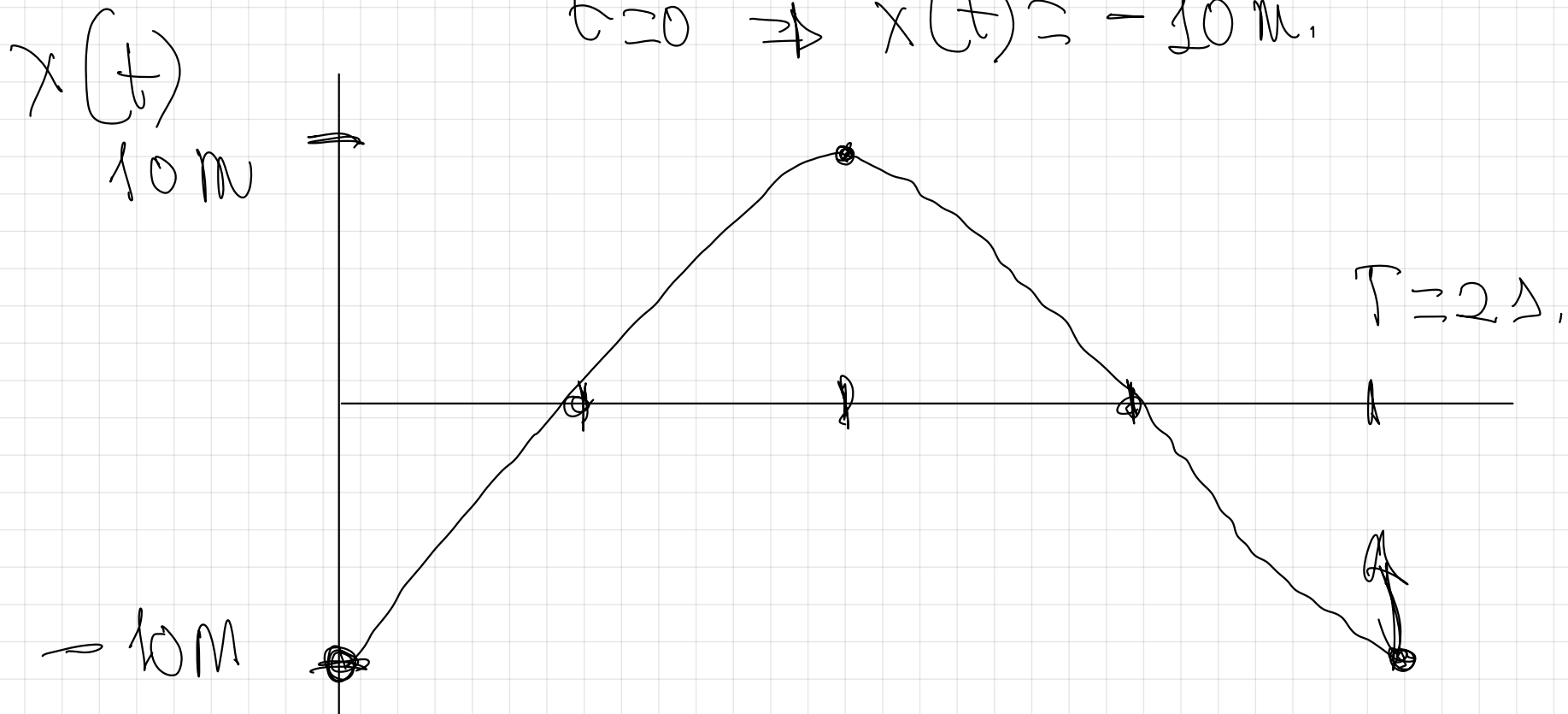
c) ¿Cuánto valen la velocidad y la aceleración del cuerpo para  $t = 2\text{s}$ ?

a)  $A = 10 \text{ m}$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \text{ s}, \quad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ Hz}$$

$$x(t) = 10 \cdot \sin\left(\pi t + \frac{3}{2}\pi\right) \quad (\text{SI}),$$

$$t=0 \Rightarrow x(t) = -10 \text{ m}$$



$$x(t) = 10 \cdot \sin\left(\pi t + \frac{3}{2}\pi\right)$$

$$t = 2s$$

$$x(t=2s) = 10 \cdot \sin\left(2\pi + \frac{3}{2}\pi\right)$$

$$x(t=2s) = 10 \cdot \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)$$

$$x(t=2s) = -10 \text{ m}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 10 \cdot \left[ \cos\left(\pi t + \frac{3}{2}\pi\right) \right] \cdot \pi$$

$$v = 10\pi \cdot \cos\left(\pi t + \frac{3}{2}\pi\right) \quad (\text{SI})$$

$$t = 2s$$

$$v(t=2s) = 10\pi \cdot \cos\left(2\pi + \frac{3}{2}\pi\right) \quad (\text{SI})$$

$$v(t=2s) = 10\pi \cdot \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right)$$

$$v(t=2s) = 0.$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -10\pi \cdot \left[ -\sin\left(\pi t + \frac{3}{2}\pi\right) \right] \cdot \pi.$$

$$a(t) = 10\pi^2 \cdot \sin\left(\pi t + \frac{3}{2}\pi\right)$$

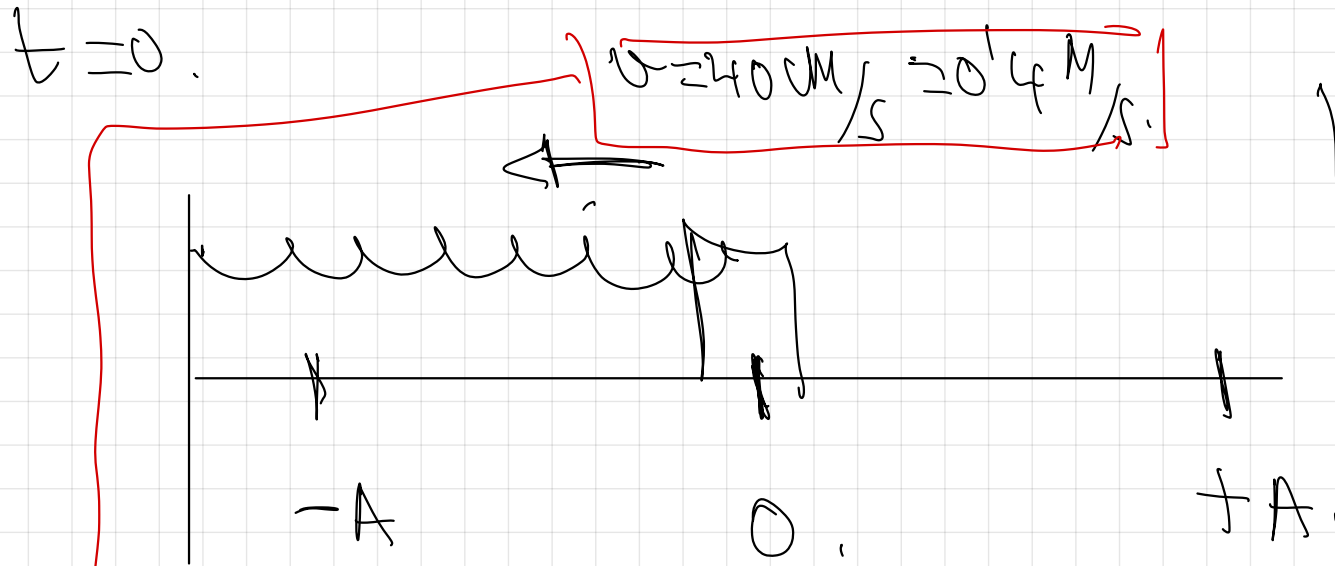
$t=2s$

$$a(t=2s) = -10\pi^2 \cdot \sin\left(2\pi + \frac{3}{2}\pi\right)$$

$$a(t=2s) = 10\pi^2 \text{ m/s}^2$$

7.- Un punto material está animado con un movimiento armónico simple en el eje X, alrededor de su posición de equilibrio en  $x=0$ . En el instante  $t=0$ , el punto material está situado en  $x=0$  y se desplaza en el sentido negativo del eje X con una velocidad de  $40 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ . La frecuencia del movimiento es de  $5 \text{ Hz}$ . Determinar:

- La posición en función del tiempo o ecuación del movimiento armónico simple
- La posición y la velocidad en el instante  $t=5 \text{ s}$



$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$v_{\max} = A \cdot \omega$$

$$v_{\max} = A \cdot \omega$$

$$A = \frac{v_{\max}}{\omega} = \frac{0.4 \text{ m/s}}{10 \pi \text{ rad/s}} = 0.013 \text{ m}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 5 = 10\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$x(t) = 0.01 \text{ g} \cdot \sin(10\pi t + \pi)$$

$$t=0$$

$$x=0, \quad 0 = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$0 = \sin \varphi_0$$

$$\varphi_0 = \arcsin 0 = 0^\circ \quad \boxed{180^\circ = \pi \text{ rad}}$$

ya que se mueve  
en el sentido  
negativo



b) Posición y velocidad en  $t=5s$

$$x(t) = 0.013 - 2m(10\pi t + \pi) \quad (S.I.)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10\pi} = 0.2s.$$

$$x(t) = 0.013 \cdot \sin(10\pi t + \pi) \quad (\text{S.I.})$$

$$t = 5 \text{ s.} \quad x(t=5) = 0.013 \cdot \sin(10\pi \cdot 5 + \pi) \quad (\text{S.I.})$$

$$x(t=5) = 0.013 \cdot \sin(50\pi + \pi) \quad (\text{S.I.})$$

$$x(t=5) = 0$$

---

$$v = \frac{dx}{dt} = 0.013 \cdot \left[ \cos(10\pi t + \pi) \right] \cdot 10\pi$$

$$v = 0.13 \cdot 10\pi \cdot \cos(10\pi t + \pi)$$

$$v(t) = 0.4 \cdot \cos(10\pi t + \pi) \quad (5.7)$$

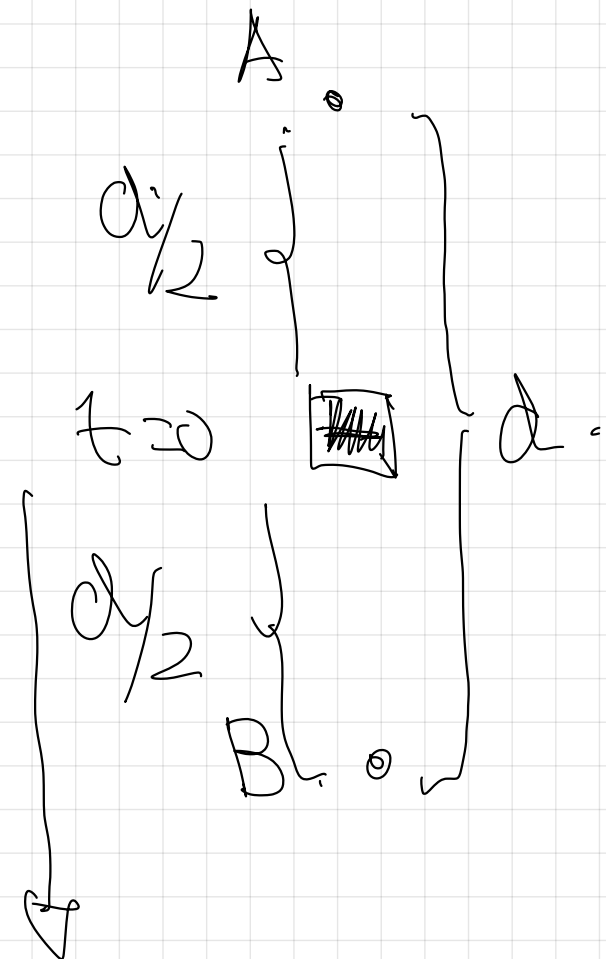
$$v(t=5) = 0.4 \cdot \cos(50\pi + \pi)$$

$$v(t=5) \stackrel{||}{=} 0.4 \text{ m/s.}$$

8.-Una partícula describe un movimiento armónico simple entre dos puntos A y B que distan una distancia vertical  $d$ , con un periodo  $T$ .

a) Escriba la ecuación de dicho movimiento armónico simple sabiendo que para  $t=0$  la partícula se encuentra en el punto medio del segmento AB. Realizar una gráfica cualitativa de la elongación en función del tiempo.

b) Repita el apartado a) suponiendo que el periodo hubiese sido la mitad.



$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$y(t) = \frac{d}{2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

$$t = 0$$

$$y = 0$$

$$y = \frac{d}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi_0\right)$$

$$\text{se } \varphi_0 = 0$$

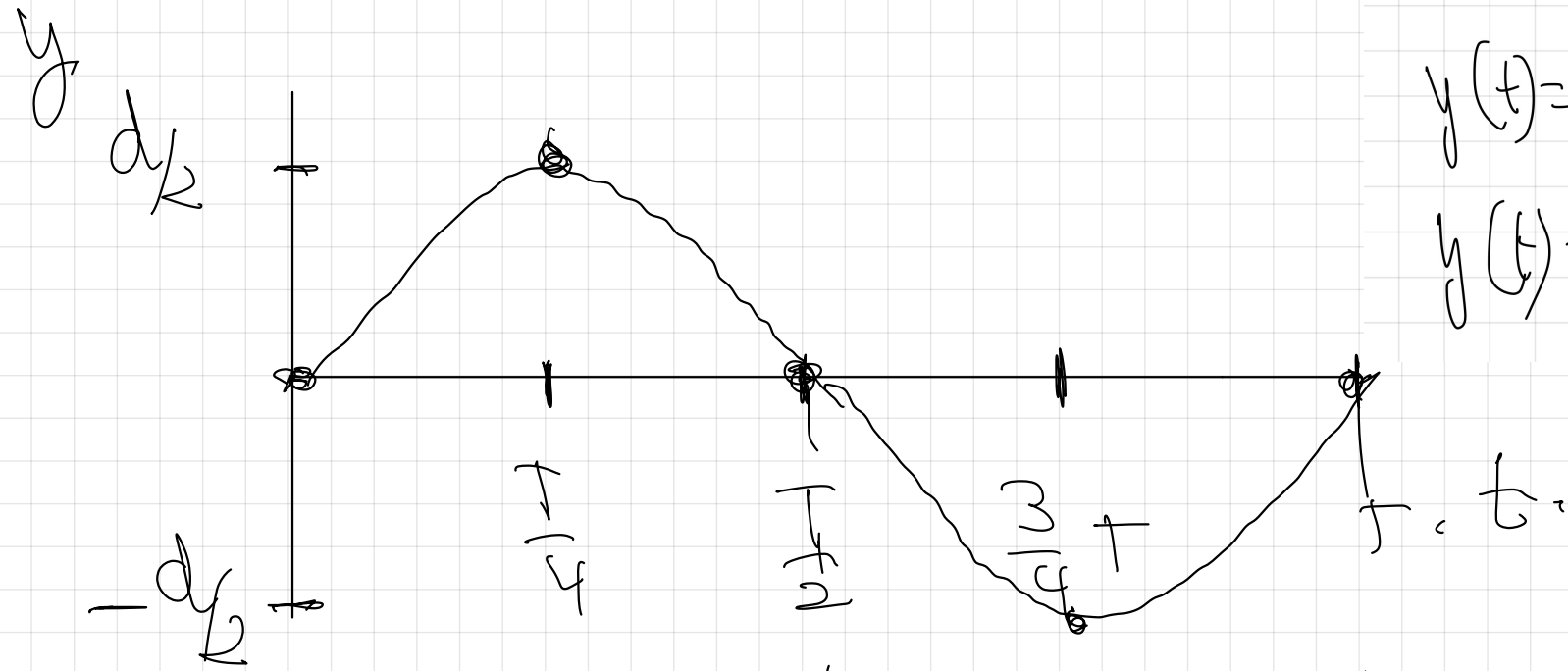
$$\varphi_0 = \text{algún } 0^\circ$$



$\Rightarrow \varphi_0 = 0$  al no especificar  
 $\pi$  or  $t = 0$  sube o  
baja.

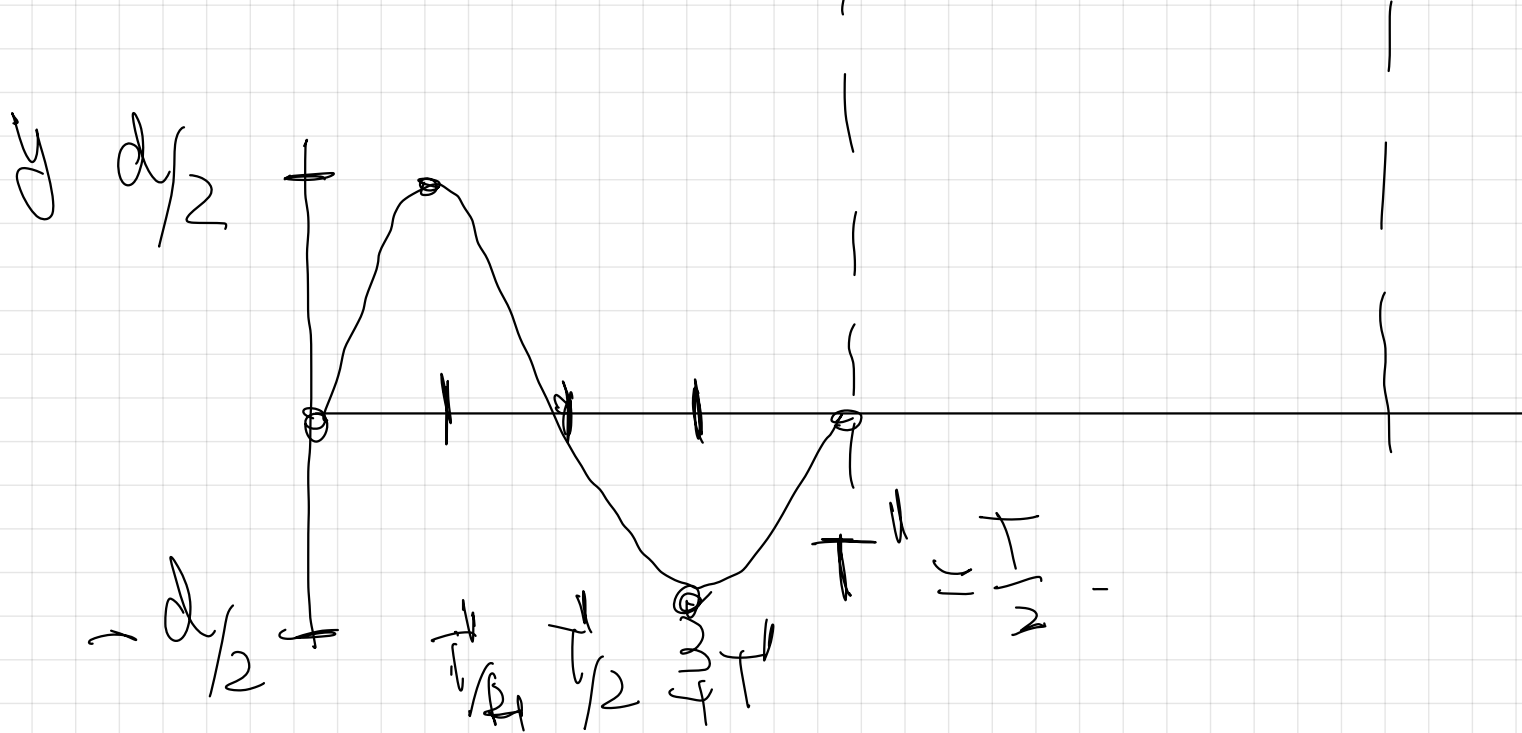
$$y = \frac{d}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$$

$$y = \frac{d}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$$



$$y(t) = \frac{d}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$$

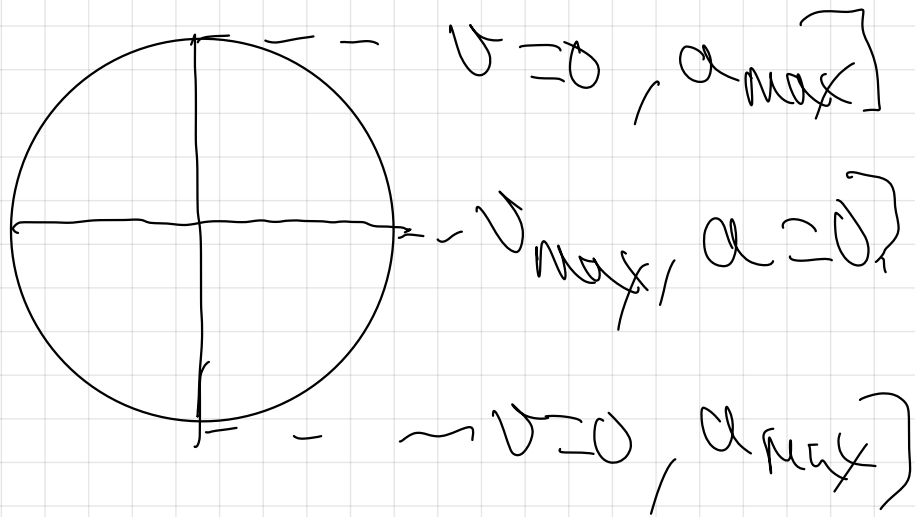
$$y(t) = \frac{d}{2} \sin(\omega t)$$



$$- y(t) = \frac{d}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{T/2} t\right)$$

$$y(t) = \frac{d}{2} \sin(2\omega t)$$

9.- ¿Pueden anularse simultáneamente la velocidad y la aceleración de un movimiento armónico simple?



$$y(t) = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = \frac{dy}{dt} = A \cdot \omega \cdot \text{cos}(\omega t + \varphi_0)$$

~~$$v = A \cdot \omega \cdot (\text{cos}(\omega t + \varphi_0))$$~~  
 porque la  $v$  es función de  
 la posición.

$$a = \frac{dv}{dt} = A \cdot \omega^2 \cdot [-\text{sen}(\omega t + \varphi_0)]$$

$$a = -A \omega^2 \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

$$\sin^2(\omega t + \varphi_0) + \cos^2(\omega t + \varphi_0) = 1$$

$$a = -\omega^2 \cdot y$$

y  
aceleración  
en función  
de la  
posición.

$$|\cos(\omega t + \varphi_0)| = \sqrt{1 - \sin^2(\omega t + \varphi_0)} \quad y = 0 \Rightarrow a = 0.$$

$$v = A \cdot \omega \cdot \sqrt{1 - \sin^2(\omega t + \varphi_0)}$$

$$y = \pm A \Rightarrow a_{\max} = \pm \omega^2 \cdot A$$

$$v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - A^2 \cdot \sin^2(\omega t + \varphi_0)}$$

$y^2$

$$v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - y^2}$$

aceleración  
en función  
de la  
posición.

$$a = -\omega^2 \cdot y$$

aceleración  
en función  
de la  
posición

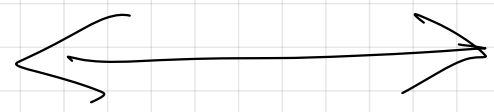
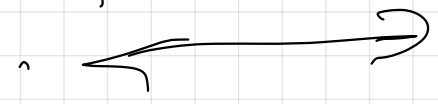


$$y = 0 \Rightarrow v_{\max} = A \cdot \omega$$

$$y = 0 \Rightarrow a = 0$$

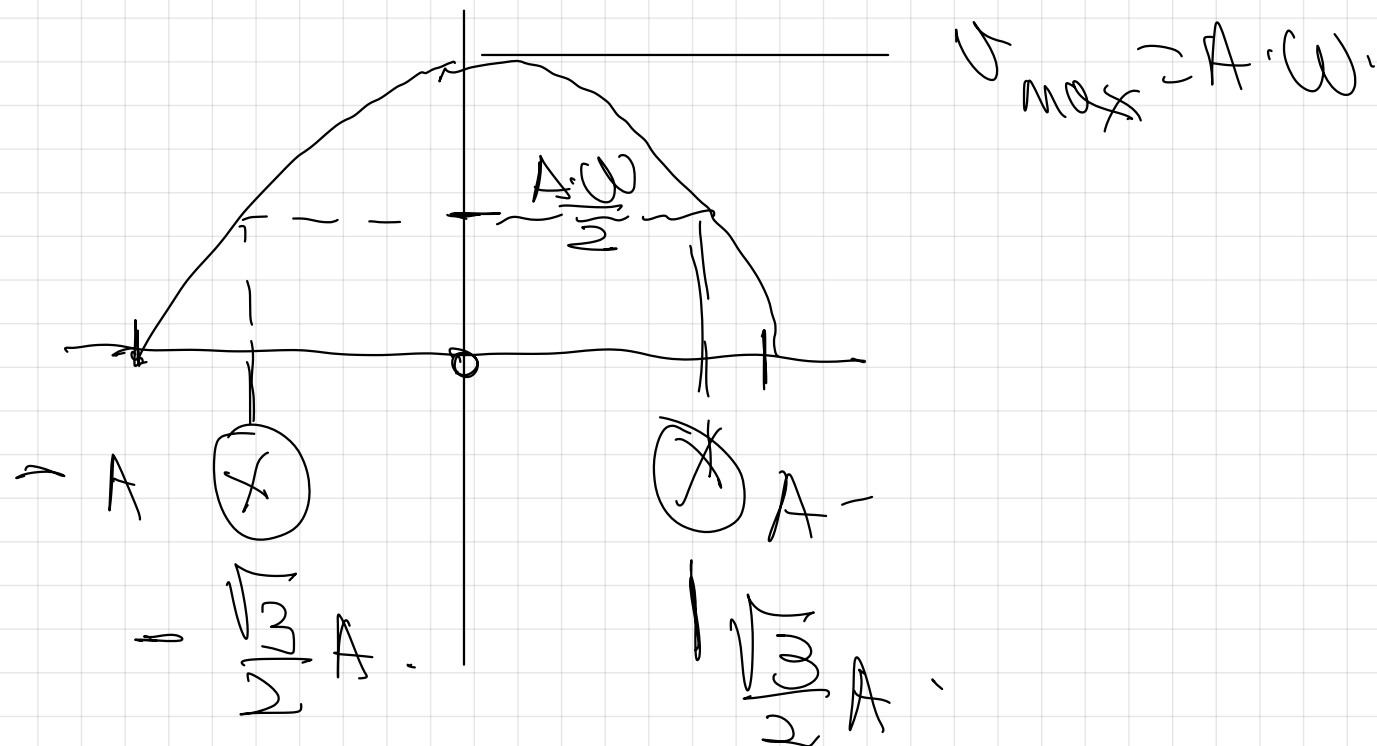
$$y = \pm A \Rightarrow v = 0$$

$$y = \pm A \Rightarrow a_{\max} = \pm \omega^2 \cdot A$$



10.- ¿En qué posición del movimiento armónico simple la velocidad es igual a la mitad de su valor máximo?

$$v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - x^2} \quad , \quad v_{\max} = A \cdot \omega$$



$v_{\max}$

$$2. \quad A \cdot \left[ \frac{v}{2} \right] = \omega \cdot \sqrt{A^2 - \cancel{x^2}} ?$$

$$\frac{A \cdot \cancel{v}}{2} = \cancel{\omega} \cdot \sqrt{A^2 - x^2} \quad \hookrightarrow \text{despej}$$

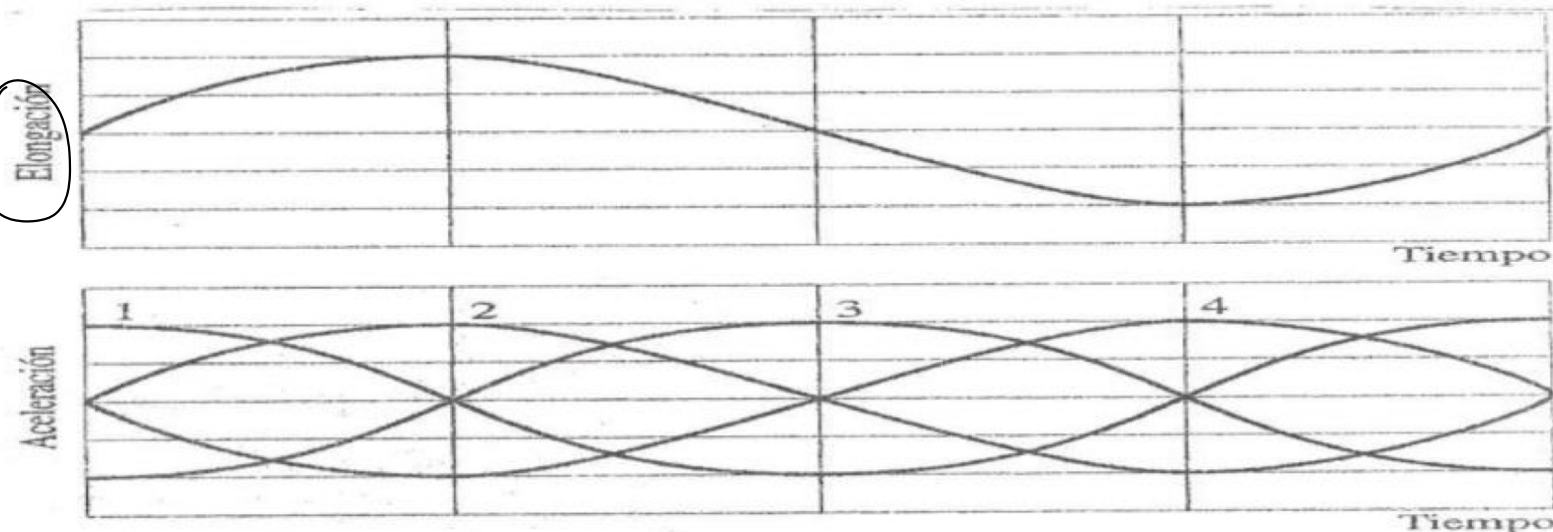
$$\left( \frac{A}{2} \right)^2 = \left( \sqrt{A^2 - x^2} \right)^2$$

$$\frac{A^2}{4} = A^2 - \cancel{x^2} \quad \rightarrow \quad x^2 = A^2 - \frac{A^2}{4}$$

$$x^2 = \frac{3}{4} A^2$$

$$\boxed{x = \frac{\sqrt{3}}{2} A}$$

11.- En la primera de las dos gráficas que se muestran, se representa la variación con el tiempo del desplazamiento (elongación) que experimenta una partícula que se mueve con un m.a.s. ¿cuál de las curvas numeradas en la segunda gráfica puede representar la variación de la aceleración con el tiempo del citado m.a.s?



$$y = A \cdot \text{sen}(\omega t)$$

$$v = \frac{dy}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}(\omega t)$$

$$a = \underbrace{A \cdot \omega^2}_{\text{sen}(\omega t + \varphi_0)}$$

$$a = \omega^2 \cdot y''$$

$y''$	$a \ominus$
$y'$	$a \oplus$

12.-Suponiendo la gravedad constante y que no existen pérdidas energéticas, ¿es periódico el movimiento que efectúa una bola elástica al rebotar sobre una mesa?, ¿es oscilatorio?, ¿es armónico simple?

Responder nuevamente a las tres cuestiones anteriores, suponiendo la gravedad constante y que si existen pérdidas energéticas.

-  $\sqrt{g}$

## 4.- MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE : CARACTERÍSTICAS DINÁMICAS

Conociendo la ecuación de la aceleración del M.A.S. podemos calcular la fuerza que debe

2ª ley  
de Newton

$$F = m \cdot a.$$

$$a = -\omega^2 \cdot y$$

a del M.A.S.

$$F = m \cdot (-\omega^2 \cdot y)$$

$$F = - \underbrace{m \cdot \omega^2}_{k} y$$

$$F \rightarrow K \cdot y$$

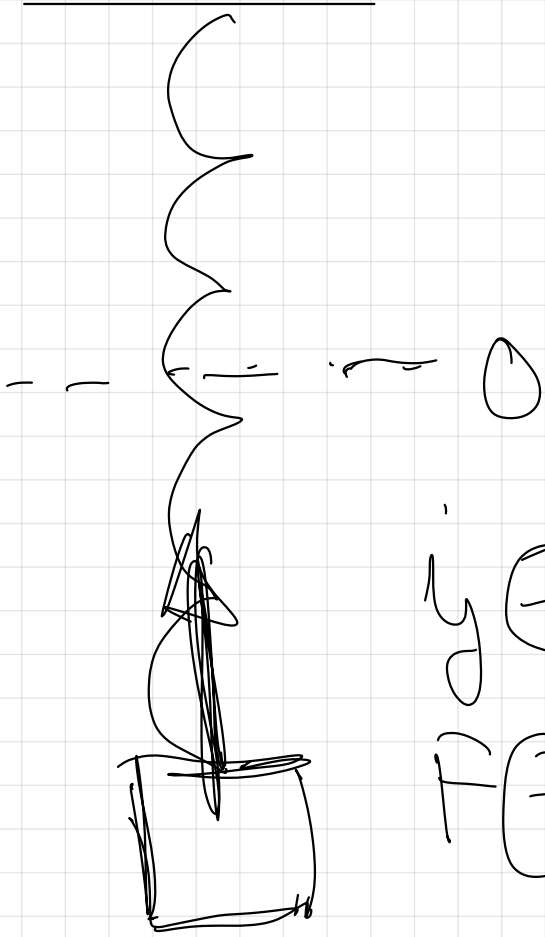
$$K = m \cdot \omega^2$$

$$K \rightarrow K \cdot g \cdot \text{rad/s}^2$$

$$\left[ \frac{K}{s^2} \right]$$

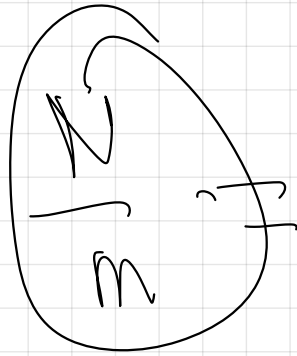
$$\left[ \frac{N}{m} \right]$$

$$\frac{K \cdot g}{s^2}$$



$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

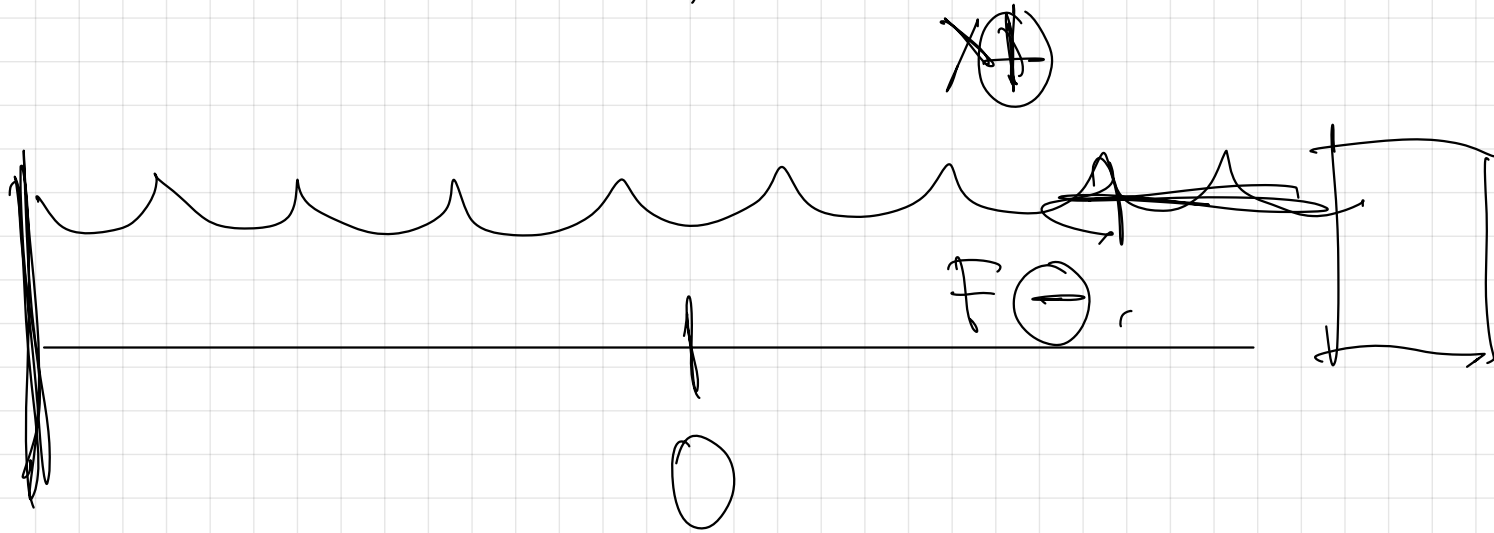
$$\frac{m}{k} \rightarrow \frac{N}{N/m} = s^2$$



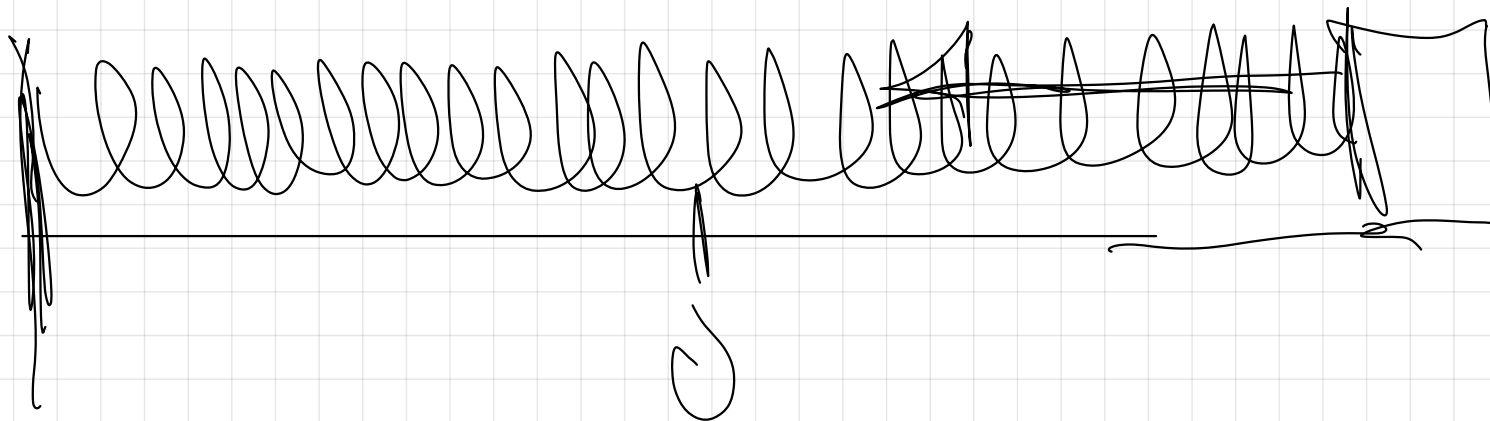
$$\frac{Kg \cdot \cancel{M} / s^2}{\cancel{M}} = \frac{Kg}{s^2}$$

$$\frac{Kg}{s^2}$$

Es la misma para el mismo muelle



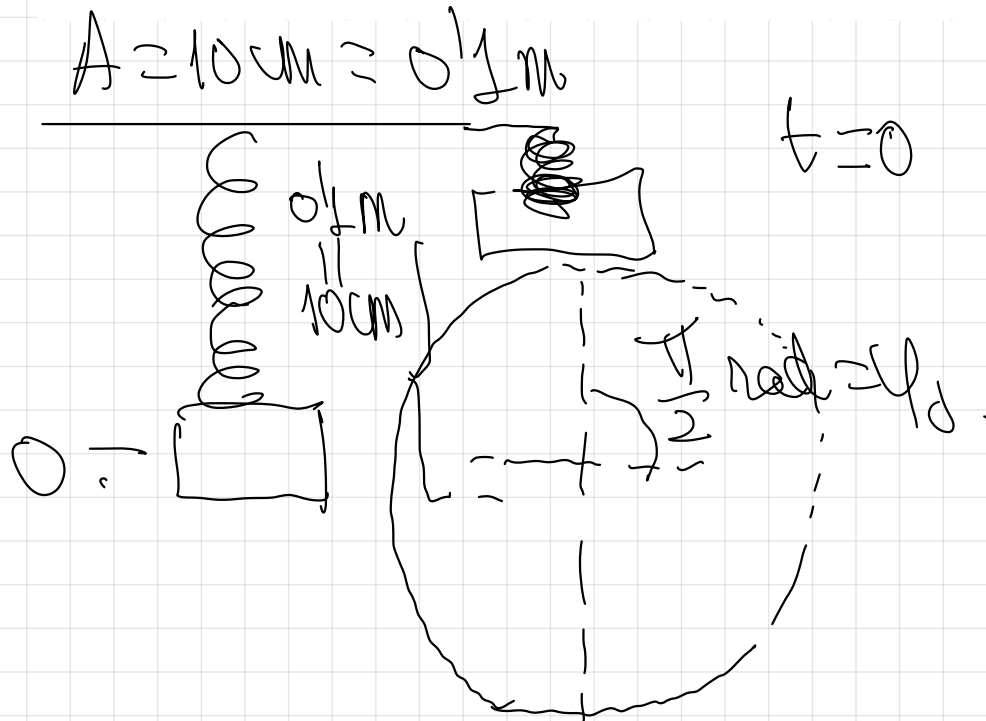
$$K = 10 \frac{N}{m}$$



$$K = 1000 \frac{N}{m}$$

14.- Una masa de 2 Kg cuelga de un resorte cuya constante elástica es  $K=200 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$  y puede oscilar libremente sin rozamiento. Desplazamos la masa 10 cm por encima de su posición de equilibrio y la soltamos para que empiece a oscilar.

- Calcula la ecuación del movimiento de la masa
- Representa gráficamente la posición de la masa en función del instante  $t$
- Representa gráficamente la velocidad de la masa en función del instante  $t$
- Representa gráficamente la aceleración de la masa en función del instante  $t$
- Calcula su velocidad máxima y su aceleración máxima
- Calcula la fuerza recuperadora y la aceleración cuando la masa se encuentra 5 cm por encima de la posición de equilibrio
- Repetir el apartado f) para el caso en el que la masa se encuentre 7 cm por debajo de la posición de equilibrio.



$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$y = 0.1 \cdot \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (SI)}$$

$$y = 0.1 \cdot \cos(10t) \text{ (SI)}$$

$t=0$

$y=A$

$$K = m \cdot \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{200}{2}} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\sin \varphi_0 = \frac{A}{A} = 1 \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

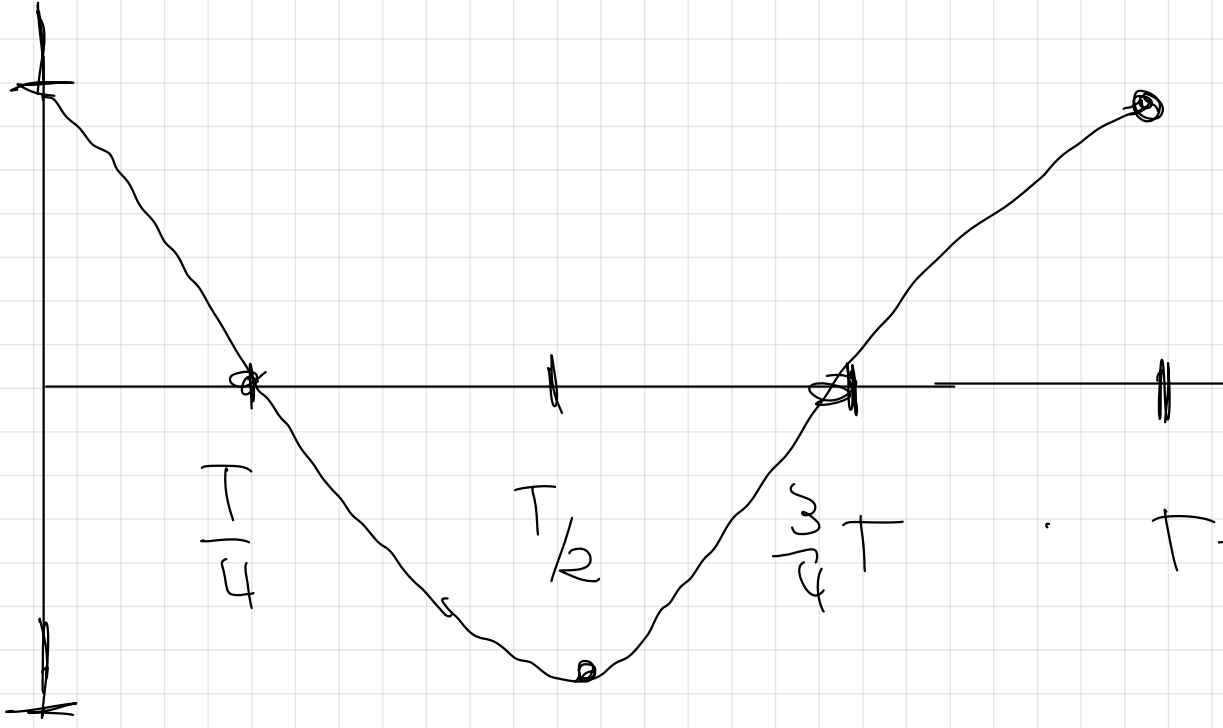
$$y = 0.1 \cdot \cos(10t) \quad (\text{s:7})$$

$$\omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$y(\text{cm})$

$0.1 \text{ m}$

$-0.1 \text{ m}$



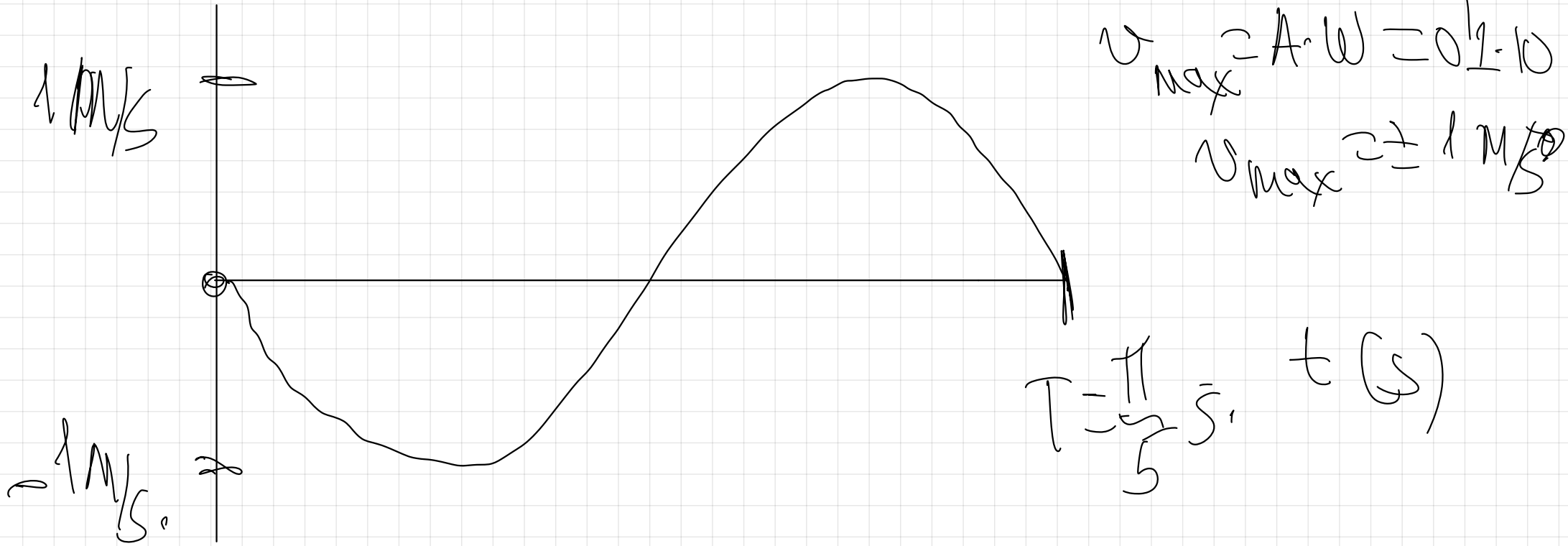
$$\omega = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5} \text{ s}$$

$$T = \frac{\pi}{5} \text{ s}$$

$$v = \frac{dy}{dt} = 0.1 \cdot [-\sin(10t)] \cdot 10$$

$$v = 1 \cdot \sin(\omega t) \quad [5 \pm]$$

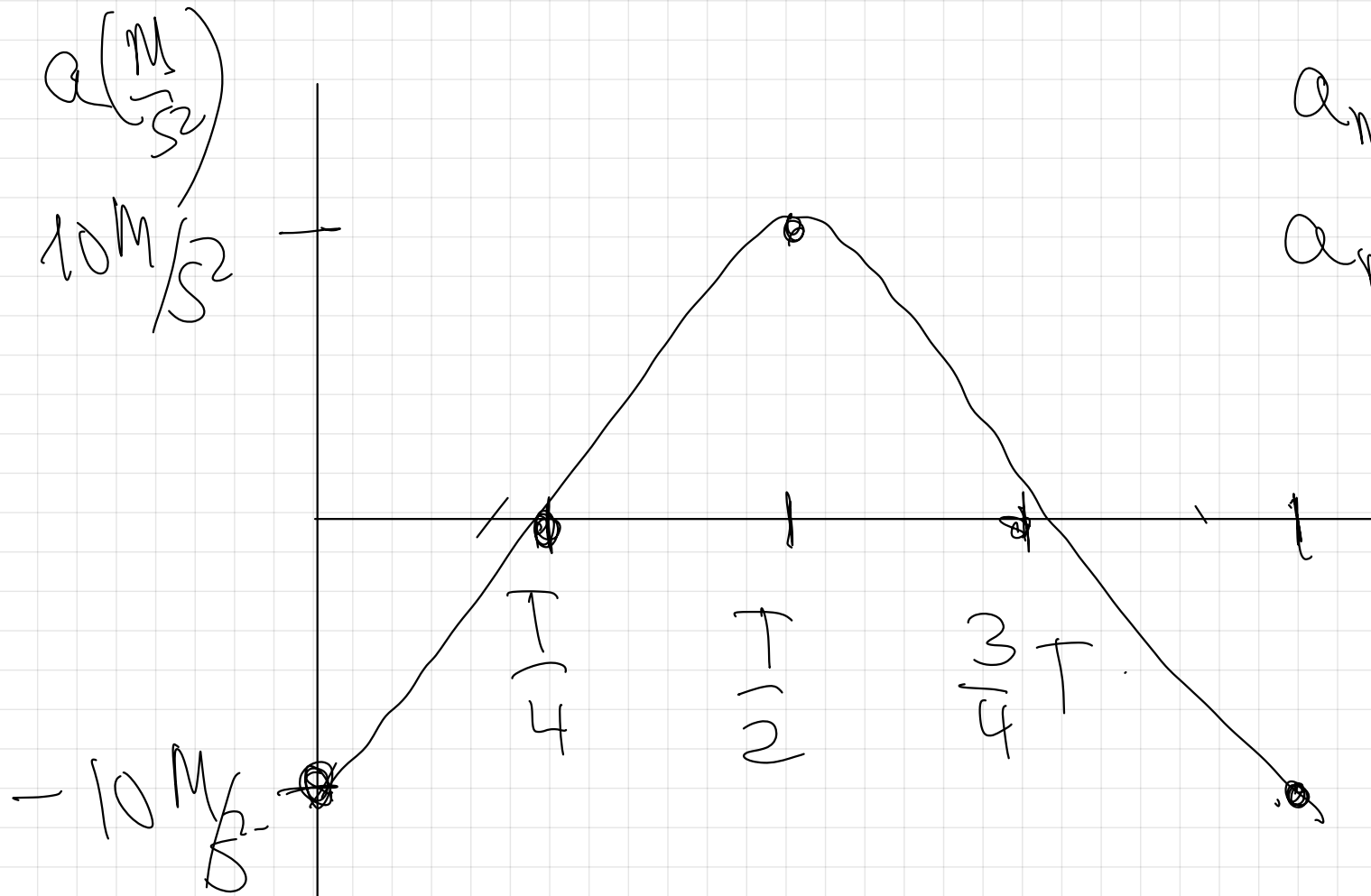


$$a = \frac{dv}{dt} = -1 \cdot (\cos(\omega t)) \cdot 10$$

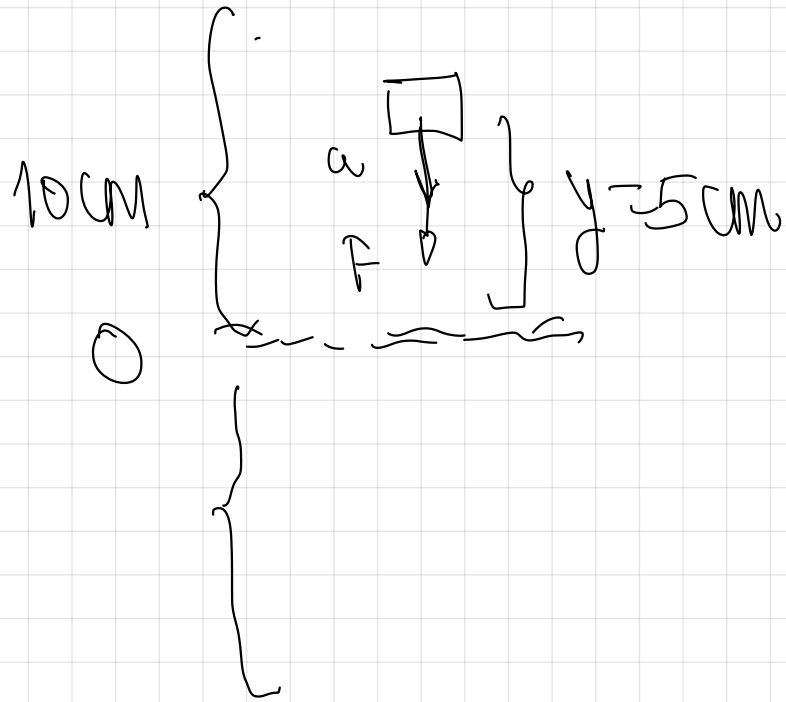
$$a = -10 \cdot \cos(\pi t) \quad (\text{CSI})$$

$$a_{\max} = A \cdot \omega^2$$

$$a_{\max} = 0.1 \cdot 10^2 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



$t \text{ (s)}$



$$y \oplus$$

$$a \ominus$$

$$F \ominus$$

$$y = +5 \text{ cm} = 0.05 \text{ m}$$

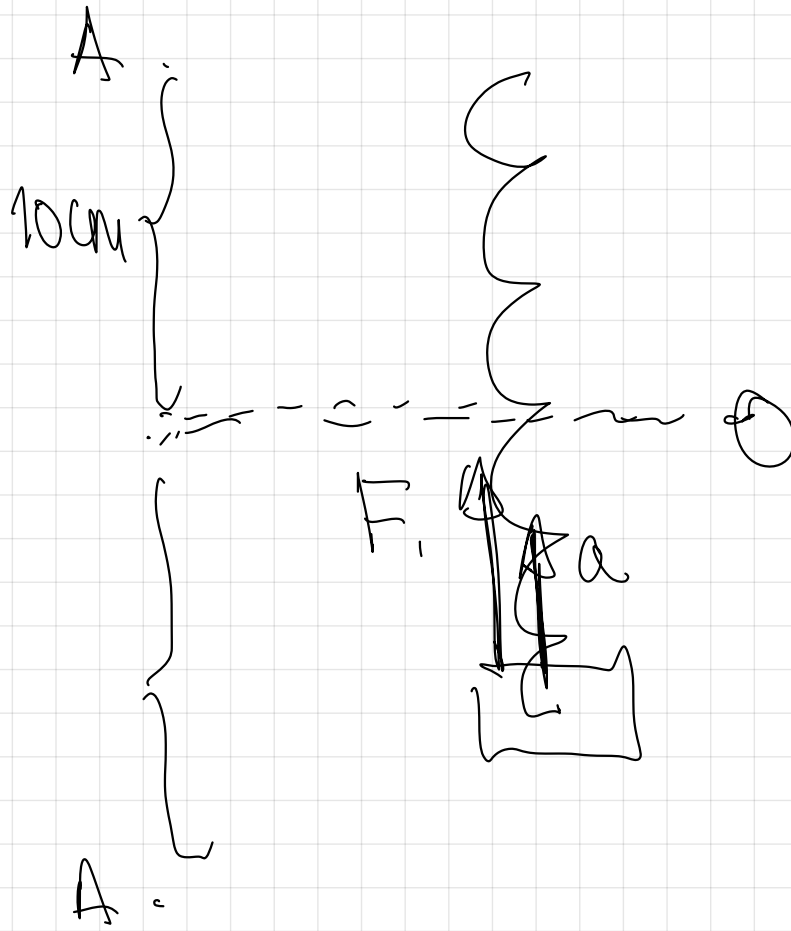
$$a = -\omega^2 y = -10^2 \cdot 0.05$$

$$a = -5 \text{ m/s}^2$$

$$F = -ky$$

$$F = -200 \cdot 0.05$$

$$F = -10 \text{ N}$$



$$y = -7 \text{ cm} = -0.07 \text{ m}$$

$$F = k \cdot y$$

$$F = 200 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (-0.07 \text{ m}) = -14 \text{ N}$$

$$a = -\omega^2 \cdot y$$

$$a = -10^2 \cdot (-0.07) = 7 \text{ m/s}^2$$

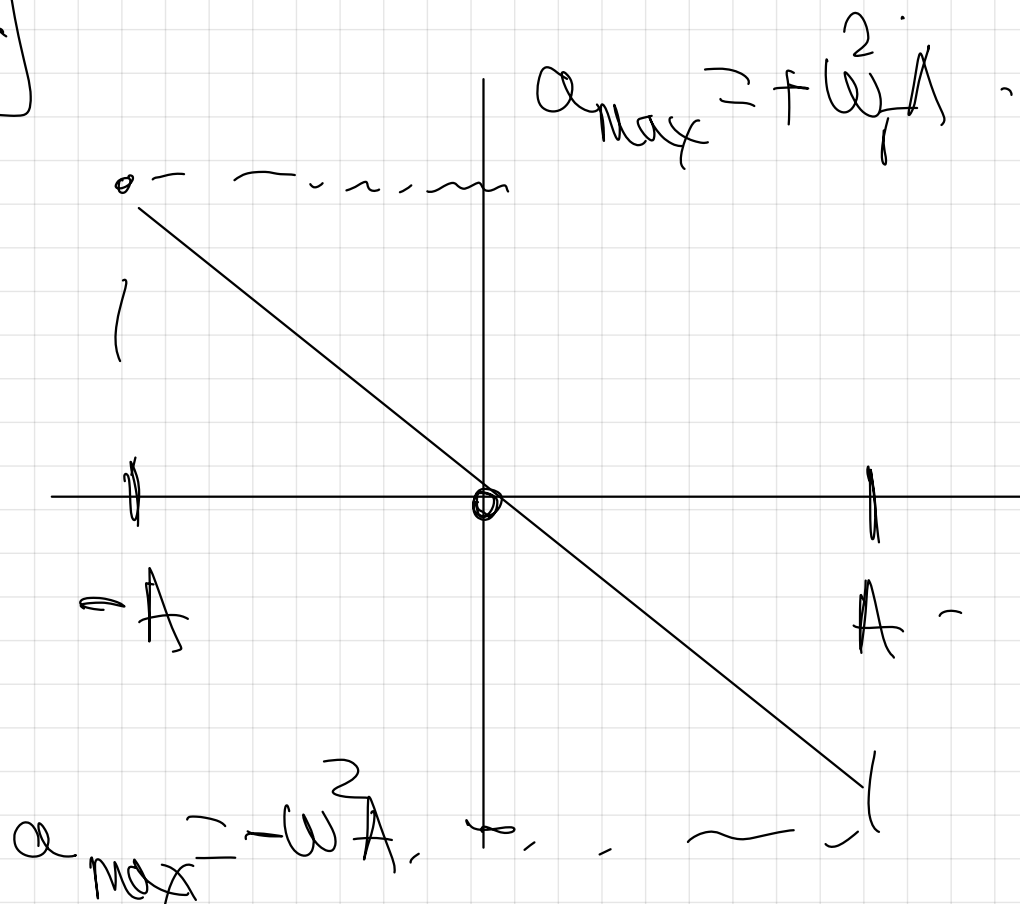
13.- a) Representar gráficamente la aceleración de un movimiento armónico simple en función de la posición.

b) Representar gráficamente la fuerza recuperadora de un movimiento armónico simple en función de la posición.

c) Representar gráficamente la fuerza recuperadora de un movimiento armónico simple en función del instante  $t$  suponiendo que el ángulo de fase inicial es cero.

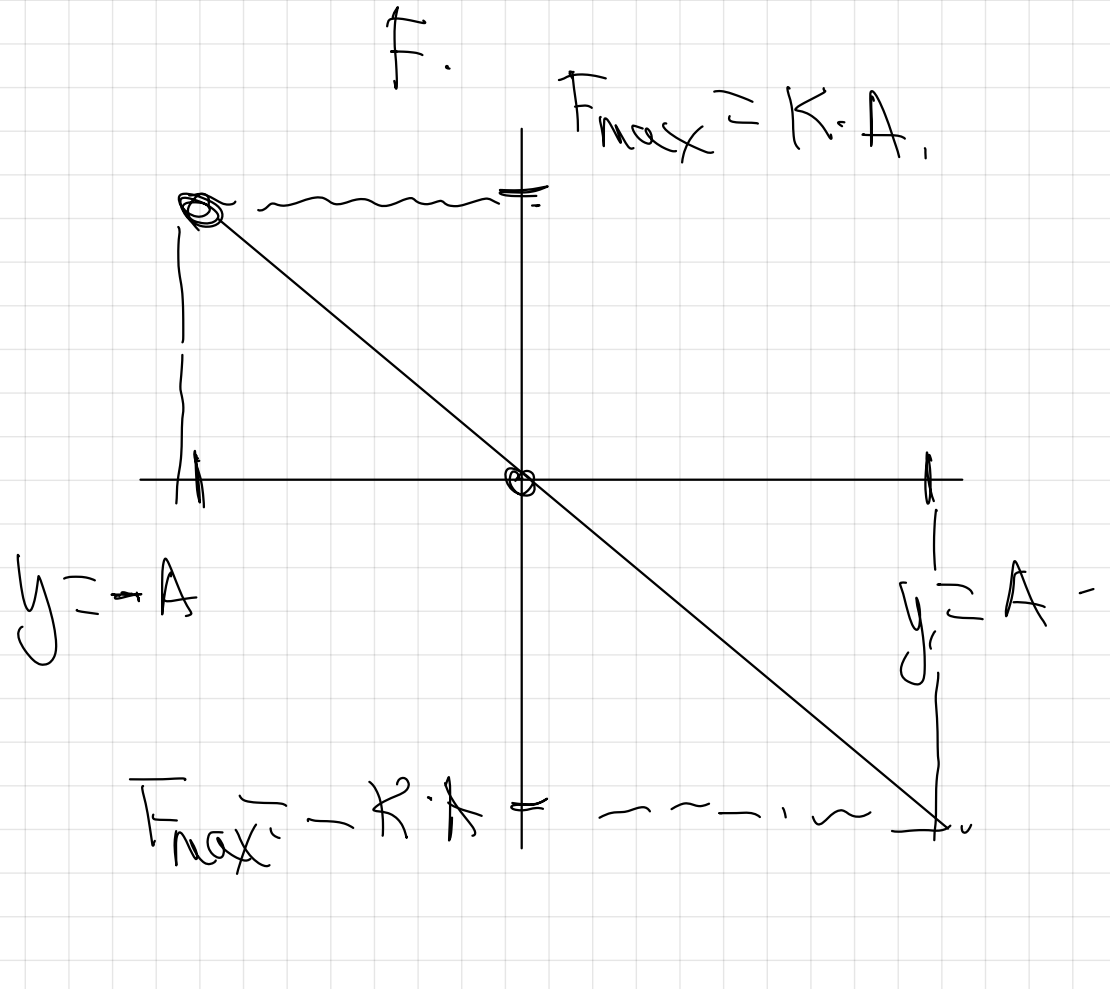
a)

$$a = -\omega^2 x$$



b)

$$F = -K \cdot y$$

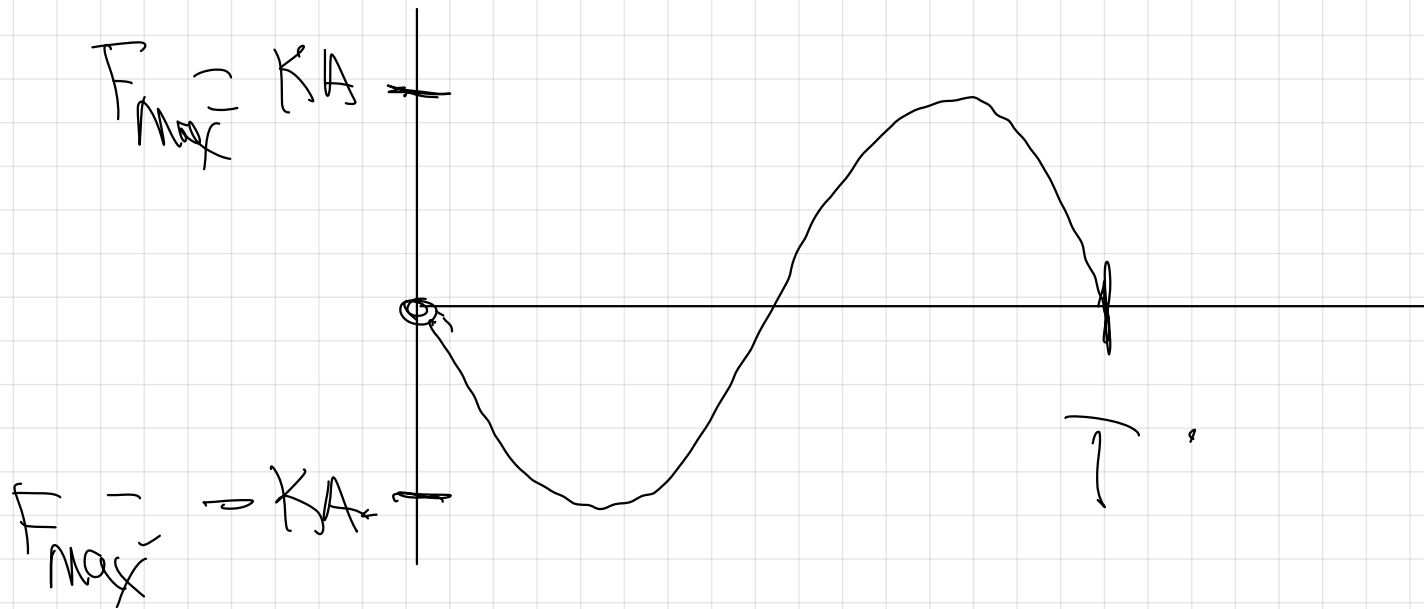


c)

$$F = -K \cdot A \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$F \approx K \cdot A \cdot \sin(\omega t)$$

F



14.- Una masa de 2 Kg cuelga de un resorte cuya constante elástica es  $K=200 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$  y puede oscilar libremente sin rozamiento. Desplazamos la masa 10 cm por encima de su posición de equilibrio y la soltamos para que empiece a oscilar.

- Calcula la ecuación del movimiento de la masa
- Representa gráficamente la posición de la masa en función del instante  $t$
- Representa gráficamente la velocidad de la masa en función del instante  $t$
- Representa gráficamente la aceleración de la masa en función del instante  $t$
- Calcula su velocidad máxima y su aceleración máxima
- Calcula la fuerza recuperadora y la aceleración cuando la masa se encuentra 5 cm por encima de la posición de equilibrio
- Repetir el apartado f) para el caso en el que la masa se encuentre 7 cm por debajo de la posición de equilibrio.

$K=200 \text{ N/m}$   
 $m$   
 $0$   
 $0.1 \text{ m}$   
 $10 \text{ cm}$   
 $t=0$   
 $y=2A$   
 $y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$   
 $y(t) = 0.1 \cdot \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (SI)}$   
 $y(t) = 0.1 \cdot \cos(10t) \text{ (SI)}$   
 $10 \text{ cm}$

$$K = m \cdot \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{200}{2}} = \sqrt{100} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Calculate  $\varphi_0$ ,

$$\left. \begin{array}{l} t=0 \\ y=+A \end{array} \right\}$$

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$A = A \cdot \sin(\varphi_0)$$

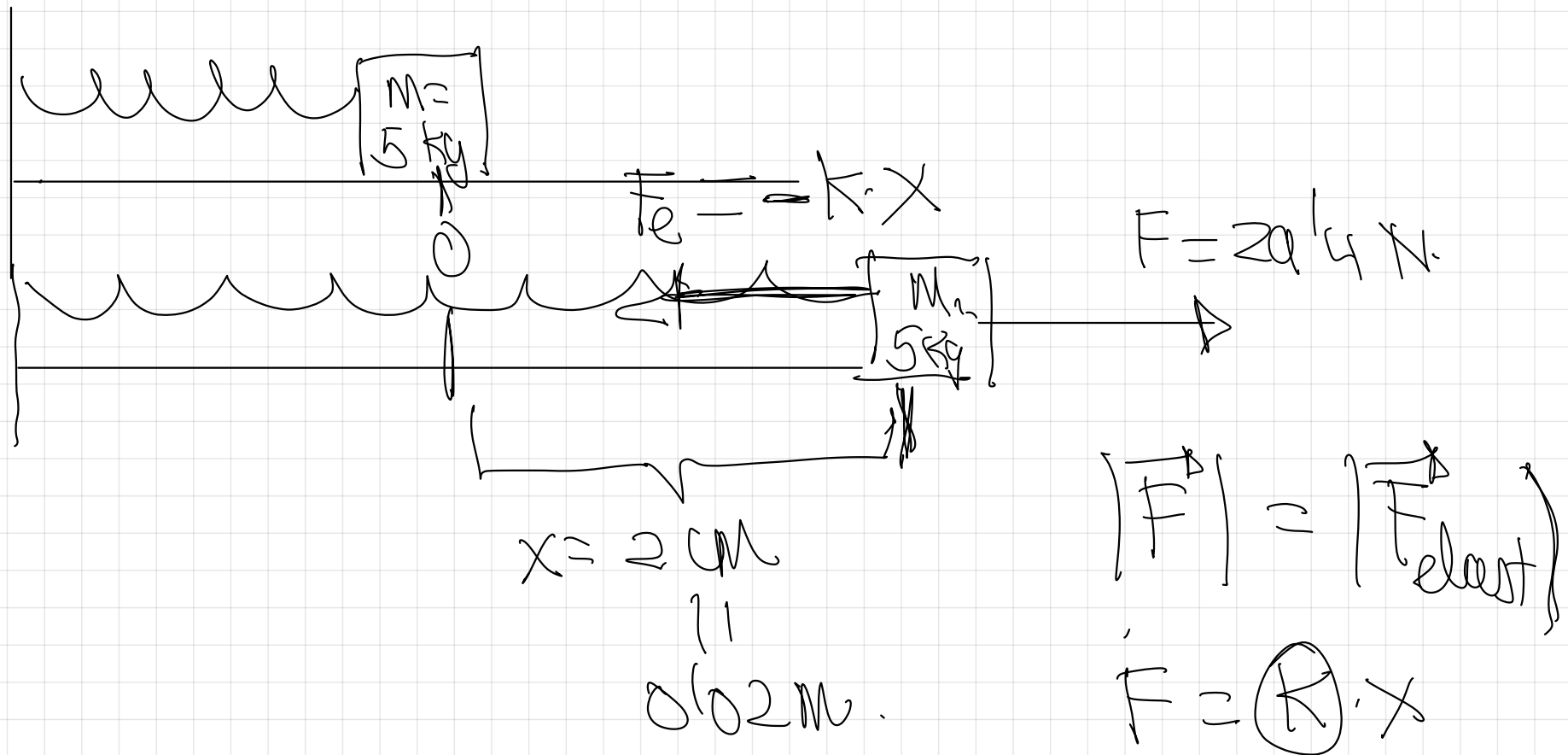
$$\sin \varphi_0 = 1 \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Ya needed

15.- Un muelle colocado horizontalmente sobre una mesa sin rozamiento, lleva en su extremo una masa de 5kg. Se sabe que una fuerza horizontal de 29,4 N alarga el muelle en 2 cm.

a) Calcular la frecuencia del movimiento

b) ¿Cómo se vería afectado el valor de la frecuencia calculada si sobre el mismo muelle con idéntica masa se hubiese ejercido inicialmente una fuerza horizontal mayor?



Subiréndola, calcula  $\textcircled{K}$   $\textcircled{K} = \frac{F}{x} = \frac{2914}{0.02} = 1470 \frac{\text{N}}{\text{m}}$

$$K = m \cdot \omega^2$$

$$\omega = \frac{2\pi f}{T} \Rightarrow \textcircled{\omega = 2\pi f}$$

$$K = m (2\pi f)^2$$

$$K = m 4\pi^2 f^2$$

$$f = \sqrt{\frac{K}{m \cdot 4\pi^2}} = \sqrt{\frac{1470 \text{ N/m}}{5 \text{ kg} \cdot 4\pi^2}} = 273 \text{ Hz}$$

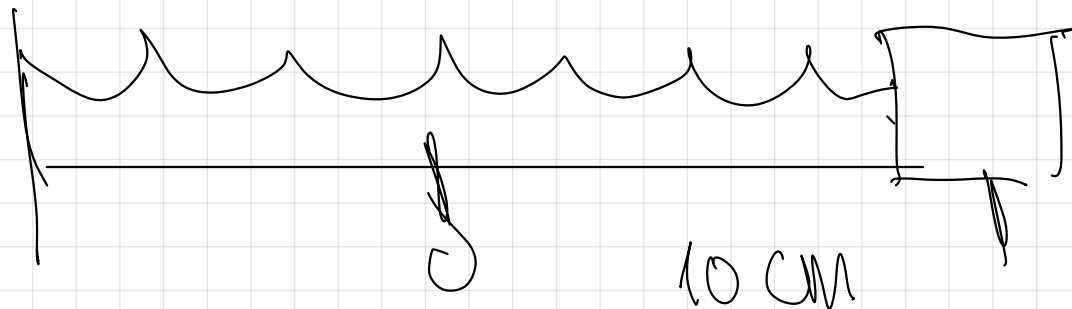
b)  $f = \sqrt{\frac{\textcircled{K}}{\textcircled{m} 4\pi^2}}$  misma muelle, misma K  
misma masa, oscilante

¿ no varia.

- 16.- Sobre una superficie horizontal se dispone de un cuerpo de 0,5 kg, unido a uno de los extremos de un muelle que está fijo por el otro. Cuando se tira del cuerpo hasta alargar el muelle 10 cm y se sueltan el instante inicial, comienza a oscilar con un periodo de 2 s.
- Escriba la ecuación del m.a.s y represente la posición del cuerpo en función del tiempo
  - Si se hubiese alargado el mismo muelle 10 cm pero con una masa cuatro veces mayor para soltarse en el instante inicial, escribir la nueva ecuación del m.a.s y razonar como cambiaría la representación gráfica del apartado a)
  - ¿Cómo cambiaría la ecuación y la representación del apartado a) si se hubiese comprimido inicialmente el muelle 10 cm en vez de alargarse?



$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$



$$x(t) = 0,1 \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (SI)}$$

$$x(t) = 0,1 \cdot \cos(\pi t) \text{ (SI)}$$

$$A = 0'1 m$$

Calculo  $\varphi_0$   $\left. \begin{array}{l} t=0 \\ x=A \end{array} \right\}$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$A = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\frac{A}{A} = \sin \varphi_0$$

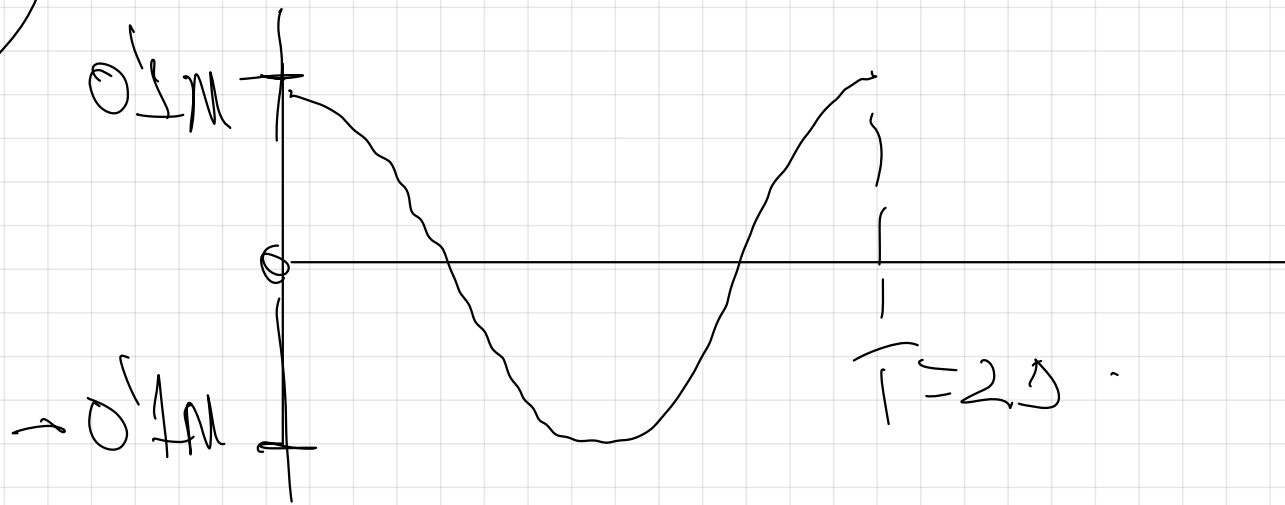
$$\sin \varphi_0 = 1$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$x(t) = 0'1 \text{ m} \cdot \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x(t) = 0'1 \text{ m} \cdot \cos(\pi t) \quad (S.I.)$$

$x(t)$



t

$$x(t) = 0,1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x(t) = 0,1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \quad (5T)$$

$$K = m \cdot \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

↗ *misma muelle*

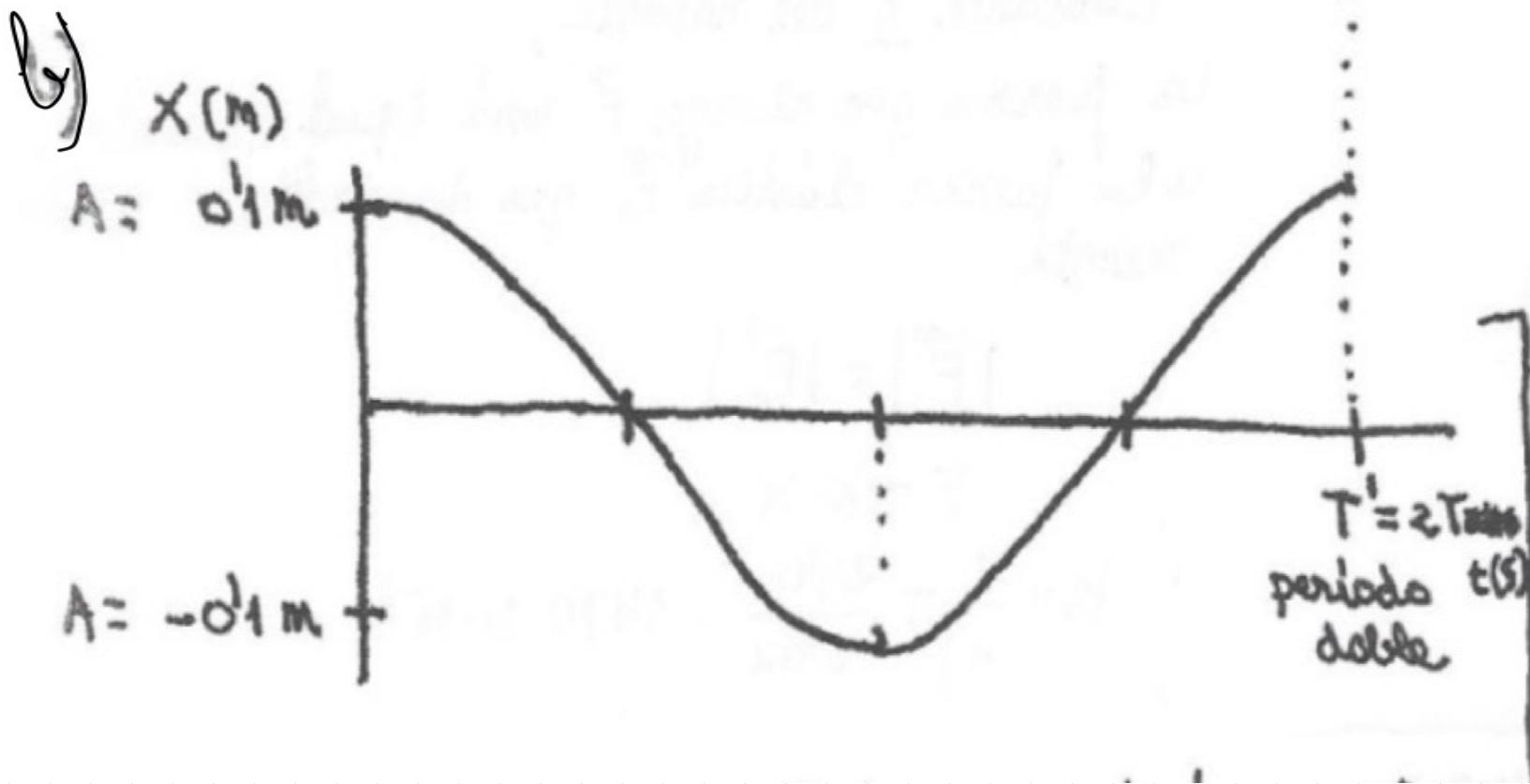
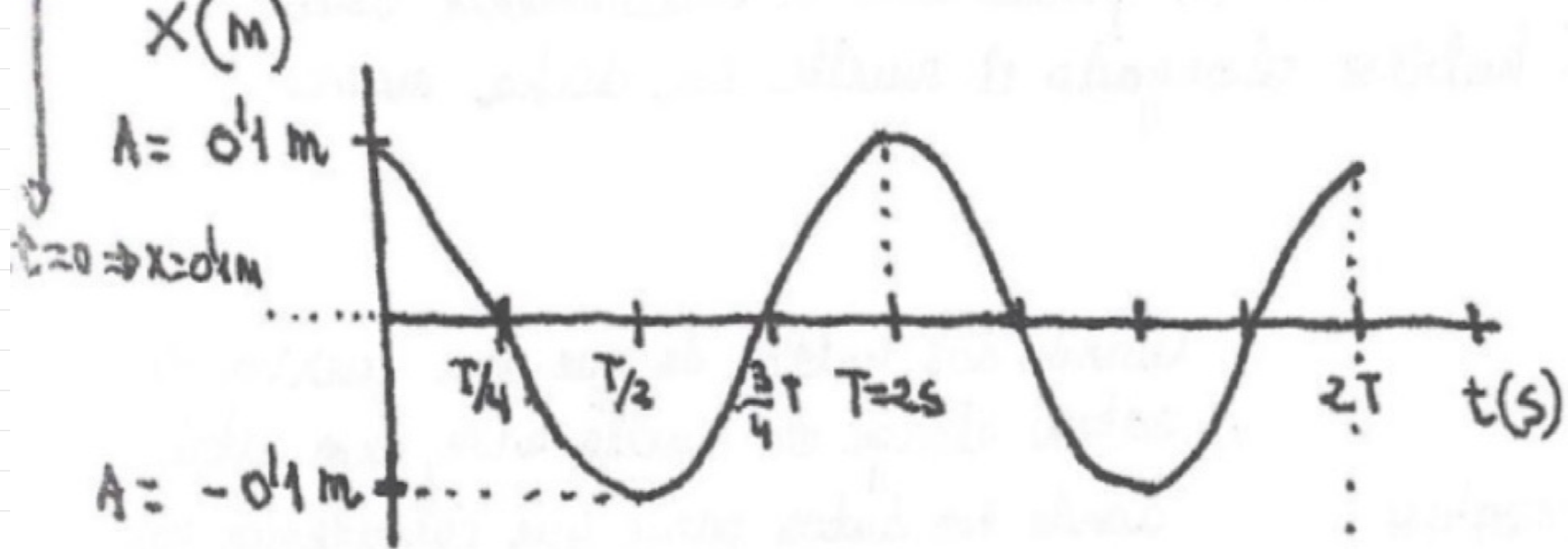
$$\omega' = \sqrt{\frac{K}{4m}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{K}{m}} \Rightarrow \omega' = \frac{\omega}{2}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega' = \frac{2\pi}{T'}$$

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{T'}$$

↓  
Periodo  
doble



pag 119

# ENERGIA de un M.A.S.

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \rightarrow v \text{ de un M.A.S.}$$

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = \frac{dy}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$E_c = \frac{1}{2} m (A \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0))^2$$

$$E_C = \frac{1}{2} \underbrace{[M \cdot A^2 \omega^2]}_K \cdot \cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$E_C = \frac{1}{2} K A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$   
 $\sin^2(\omega t + \varphi_0) + \cos^2(\omega t + \varphi_0) = 1$

$$E_C = \frac{1}{2} K A^2 (1 - \sin^2(\omega t + \varphi_0))$$

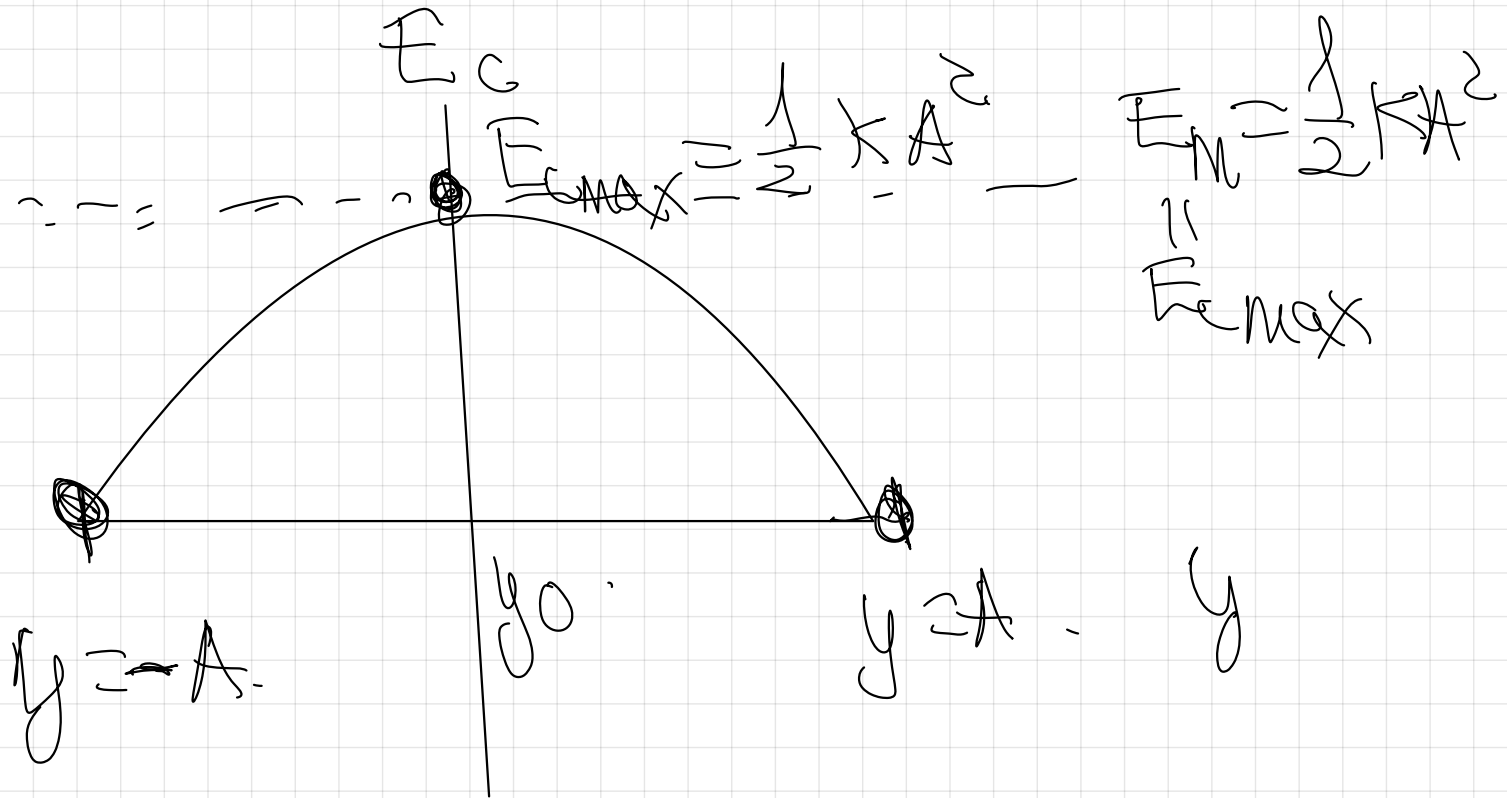
$\cos^2(\omega t + \varphi_0) = 1 - \sin^2(\omega t + \varphi_0)$

$$E_C = \frac{1}{2} K (A^2 - A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0))$$

↕

$$L y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$E_C = \frac{1}{2} K (A^2 - y^2)$$



$$E_M = E_p + E_c,$$

$$\textcircled{E_M} = \cancel{E_p} + \textcircled{E_{Max}}$$

$E_{\text{max}}$

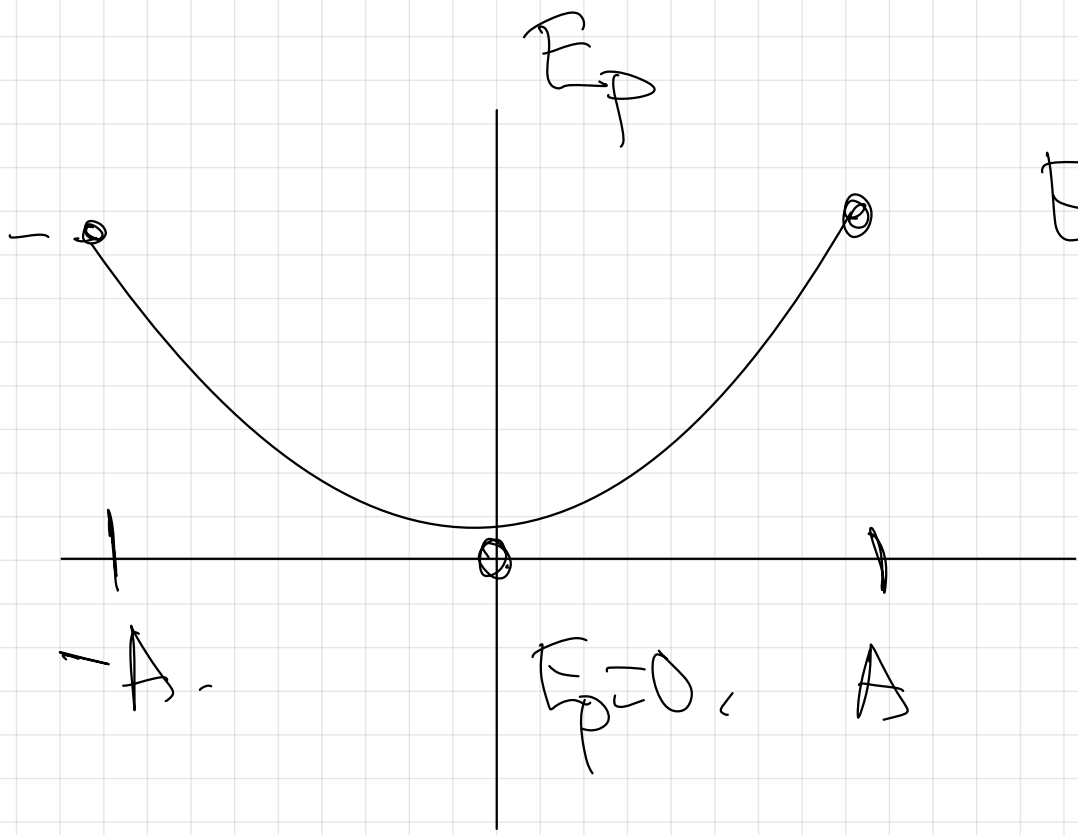
$$E_m = E_p + E_c.$$

$$\frac{1}{2} K A^2 = \left( \frac{1}{2} K A^2 + \frac{1}{2} K (A^2 - y^2) \right)$$

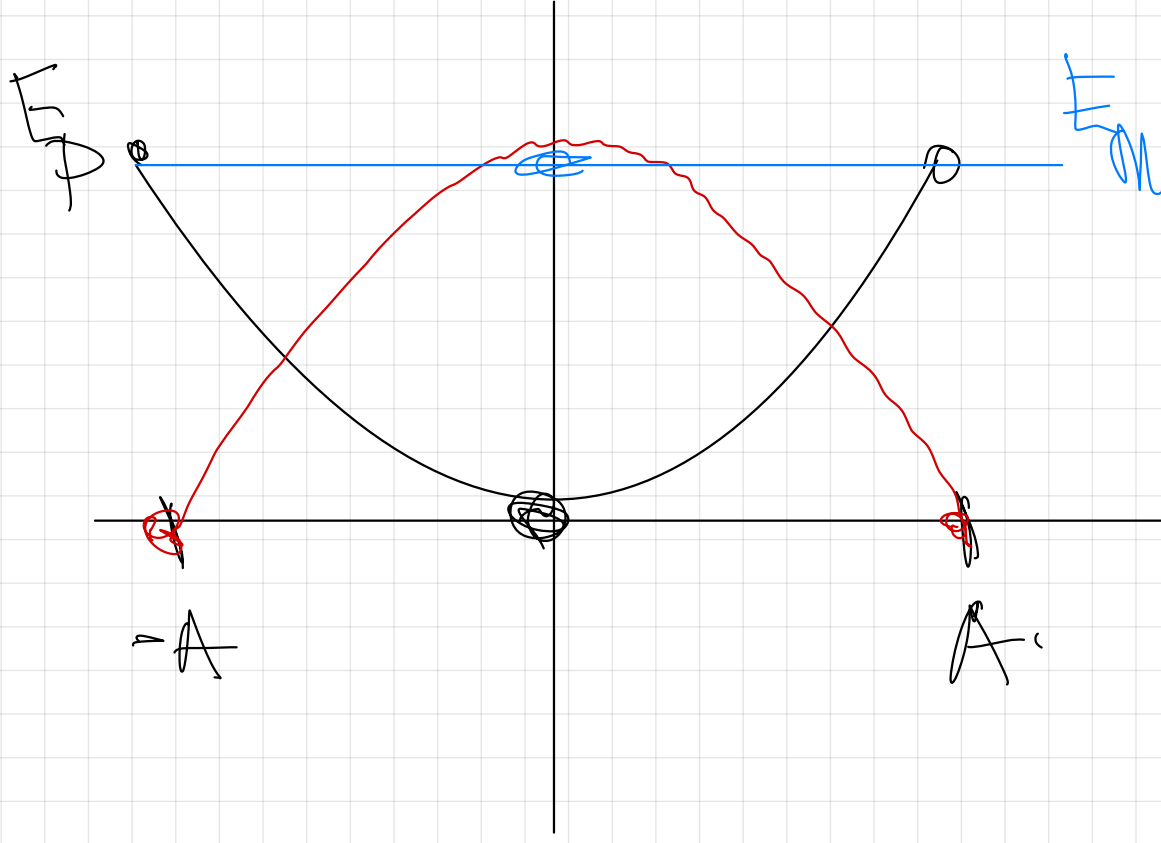
~~$$\frac{1}{2} K A^2 = \frac{1}{2} K A^2 - \frac{1}{2} K A^2 + \frac{1}{2} K y^2$$~~

$$E_p = \frac{1}{2} K y^2.$$

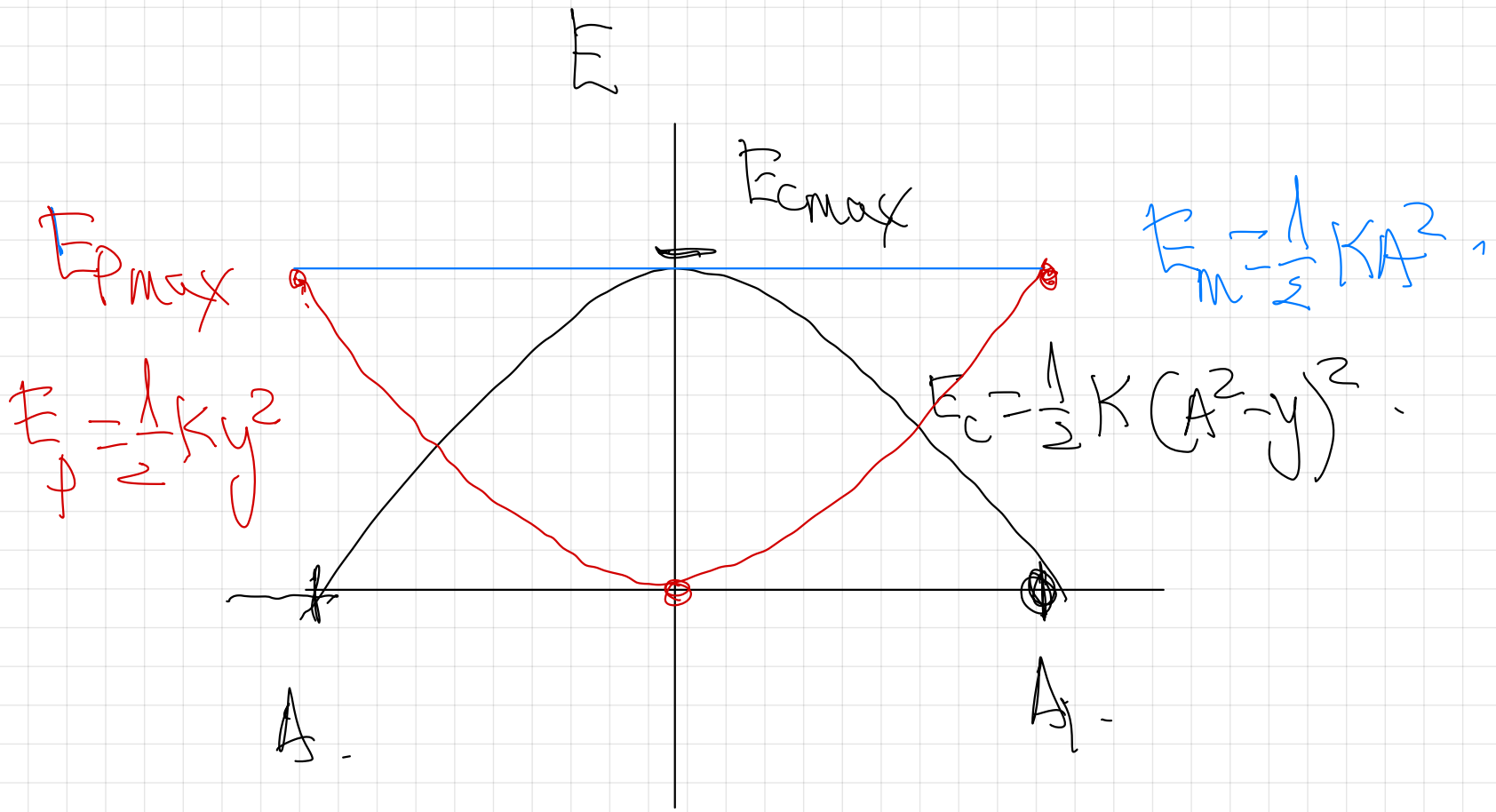
$$F_{p \max} = \frac{1}{2} K A^2.$$



$$F_{p \max} = \frac{1}{2} K A^2.$$



$\int_{A'}^A f(x) dx = -\int_A^{A'} f(x) dx$   
 $\int_{A'}^A f(x) dx = \int_A^{A'} -f(x) dx$



$E$

$E_{cmax}$

$E_{pmax}$

$$E_m = \frac{1}{2}KA^2$$

$$E_p = \frac{1}{2}Ky^2$$

$$E_c = \frac{1}{2}K(A^2 - y)^2$$

$A$

$A$

17.- Un cuerpo de 800 g de masa describe un m.a.s con una elongación máxima de 30 cm y un periodo de 2 s. Calcula su máxima energía cinética.

$$y_{\max} = A$$

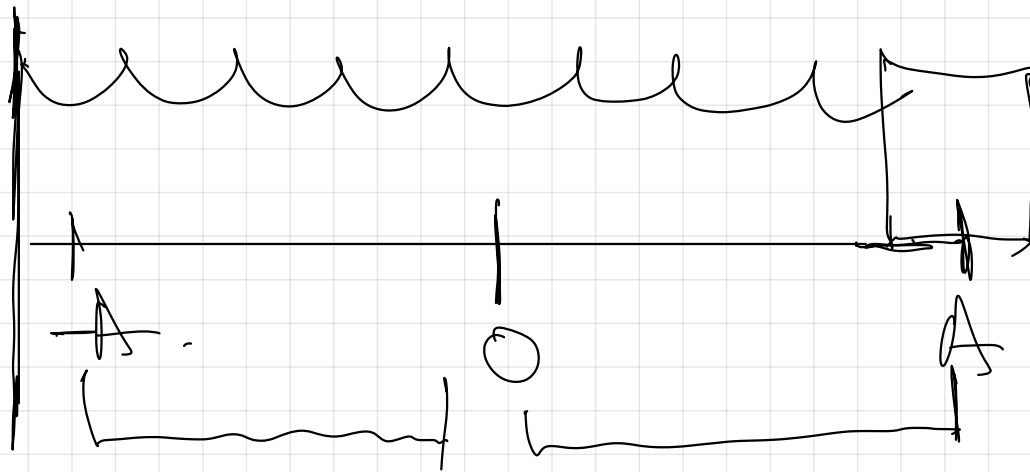
$$E_{\max} = E_m = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} \cdot 7189 \cdot (0.3)^2 = 0.35 \text{ J}$$

$$k = m \cdot \omega^2 = 0.8 \text{ kg} \cdot \left( \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 = 7189 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ rad/s}$$

18.- Una masa de 20g realiza un movimiento vibratorio armónico en el extremo de un resorte que da dos oscilaciones por segundo a lo largo del eje X, siendo la amplitud de 5 cm.

- Calcula la velocidad máxima de la masa que oscila
- Calcula la aceleración de la masa en el extremo de su movimiento
- Calcula la constante K del resorte
- Realiza un análisis de las variaciones energéticas
- Calcula su energía mecánica, su energía cinética y su energía potencial cuando se encuentra en la posición  $x=4$  cm



$$f = \frac{n \text{ osc}}{t} = 2 \frac{\text{osc}}{\text{s}} = 2 \text{ Hz.}$$

$$5 \text{ cm} = 0.05 \text{ m.}$$

$$E_{\text{max}} = \frac{1}{2} K A^2.$$

$$\frac{1}{2} m v_{\text{max}}^2 = \frac{1}{2} K A^2.$$

$$\frac{1}{2} m v_{\text{max}}^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2.$$

$$v_{\text{max}}^2 = \omega^2 A^2.$$

$$v_{\text{max}} = A \cdot \omega$$

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = \frac{dy}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$v_{\max} = A \omega$$

$$v_{\max} = A \cdot 2\pi f$$

$$v_{\max} = 0,05 \cdot 2\pi \cdot 2$$

$$v_{\max} = 0,63 \text{ m/s}$$

$$v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

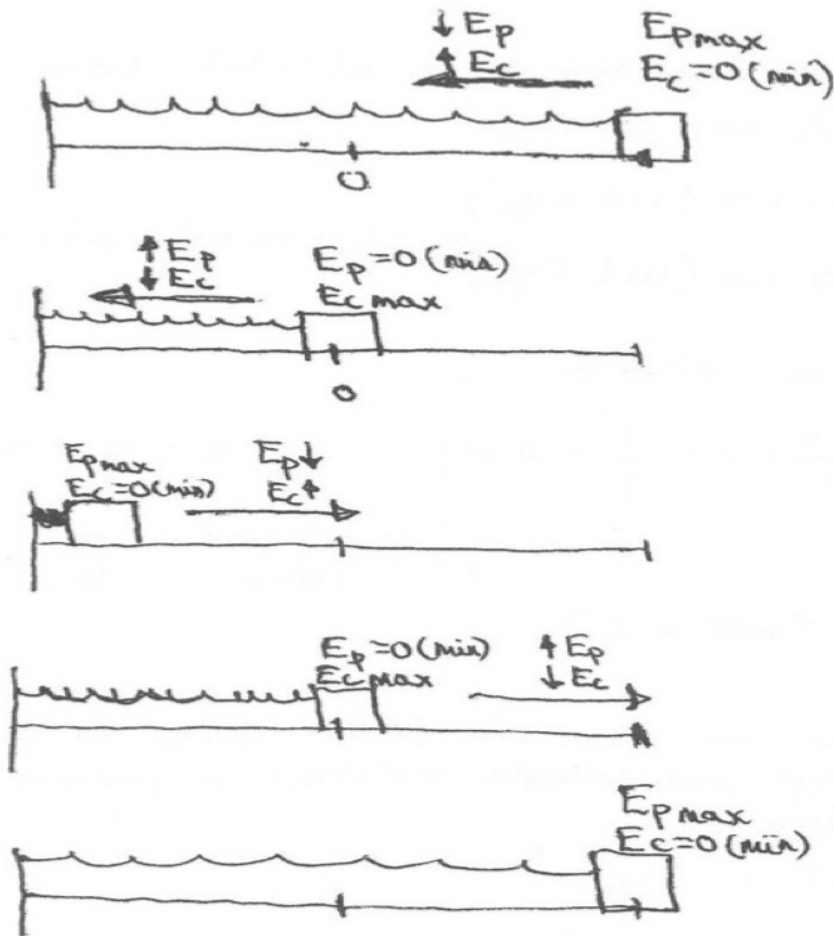
$$a = \frac{dv}{dt} = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\text{En el extremo} \Rightarrow |a_{\max}| = A \cdot \omega^2 = 0.05 \cdot 4\pi^2 = 7.19 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$K = m \cdot \omega^2 = m (2\pi f)^2 = m 4\pi^2 f^2 =$$
$$= 20 \cdot 10^{-3} \cdot 4\pi^2 \cdot 2^2 = 3.16 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$m = 20 \text{ g} = 20 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$$

d)



$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} k (A^2 - x^2)$$

$$E_m = \frac{1}{2} k A^2$$

Si suponemos que actúa una única fuerza conservativa ( $F$  elástica), tendremos que la energía mecánica se conserva, es decir, la  $E_m$  (suma de  $E_p$  y  $E_c$ ) se mantiene constante durante todo el trayecto ya que las disminuciones de  $E_p$  coinciden con los aumentos de  $E_c$  (y viceversa). En las expresiones de  $E_p$  y  $E_c$  se comprueban sus valores máximos y mínimos en las posiciones correspondientes y en la expresión de la  $E_m$  se comprueba que ésta es independiente de la posición en la que está el móvil a lo largo de todo el trayecto.

$$d) \quad x = 4 \text{ cm} \quad E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} 3'16 \cdot (0'04)^2 = 25 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

$$x = 0'04 \text{ m} \quad E_c = \frac{1}{2} k (A^2 - x^2) = \frac{1}{2} 3'16 \cdot ((0'05)^2 - (0'04)^2) = 14 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

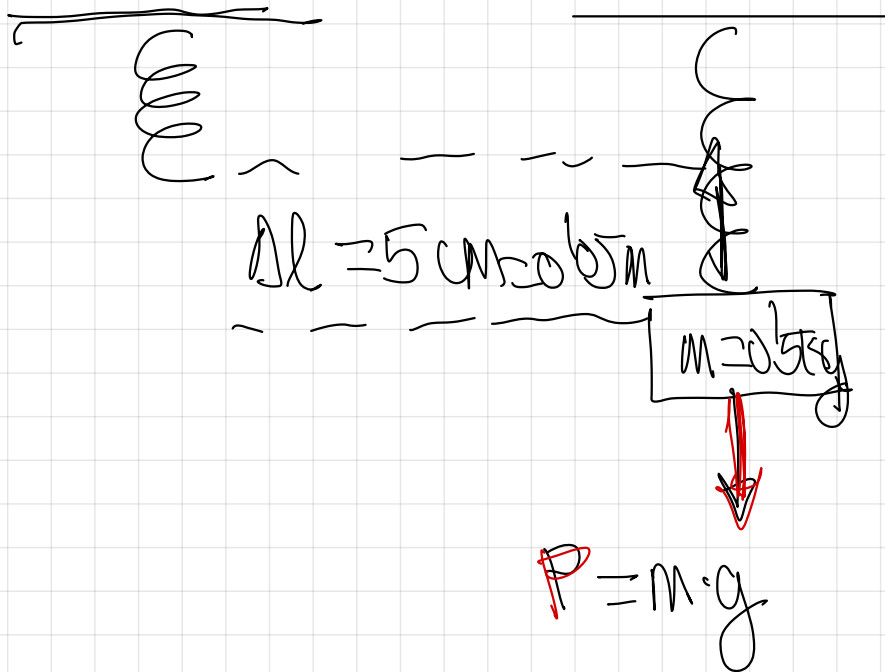
$$E_m = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} 3'16 \cdot (0'05)^2 = 39 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

19.- Al suspender un cuerpo de 0,5 kg del extremo libre de un muelle que cuelga verticalmente, se observa un alargamiento de 5 cm. Si a continuación se tira hacia abajo del cuerpo hasta largar el muelle 2 cm más y se suelta, comienza oscilar. Sabiendo que  $g=10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ , contestar a los siguientes apartados:

a) Escriba la ecuación del movimiento de la masa

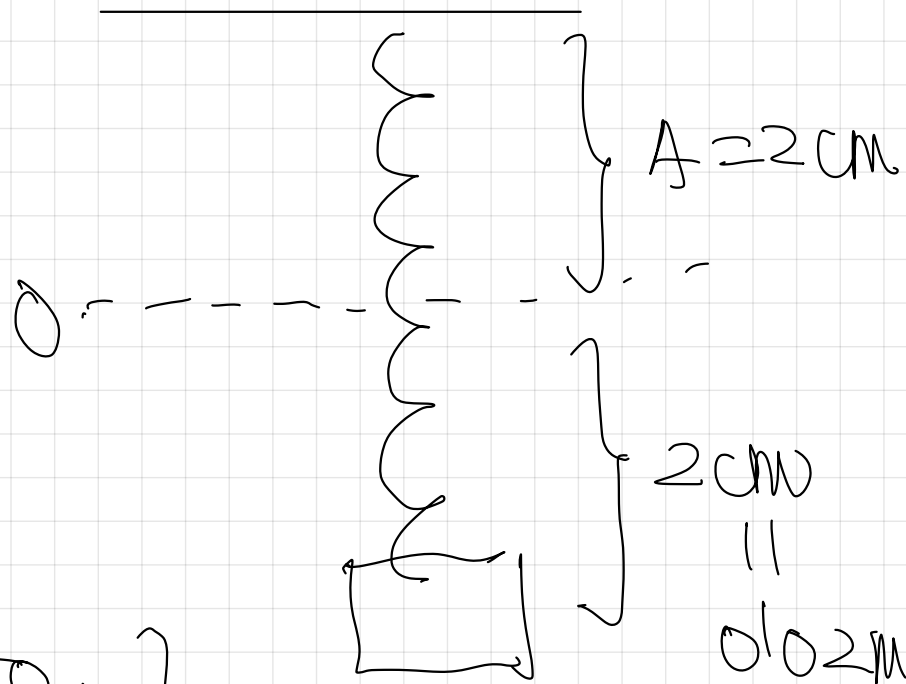
b) Represente, cualitativamente las energías cinética, potencial, y total de ese m.a.s a lo largo de un periodo completo de oscilación

c) Si en lugar de estirar ese muelle 2 cm, se estira 3 cm, ¿cómo se modificaría la ecuación del movimiento del cuerpo?.



$m \cdot g = k \cdot \Delta l.$

$$k = \frac{m \cdot g}{\Delta l} = \frac{0.5 \cdot 10}{0.05} = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$



$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$y(t) = 0.02 \cdot \sin(\sqrt{200}t + \frac{3}{2}\pi)$$

$$y = -A$$

$$\rightarrow -A = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

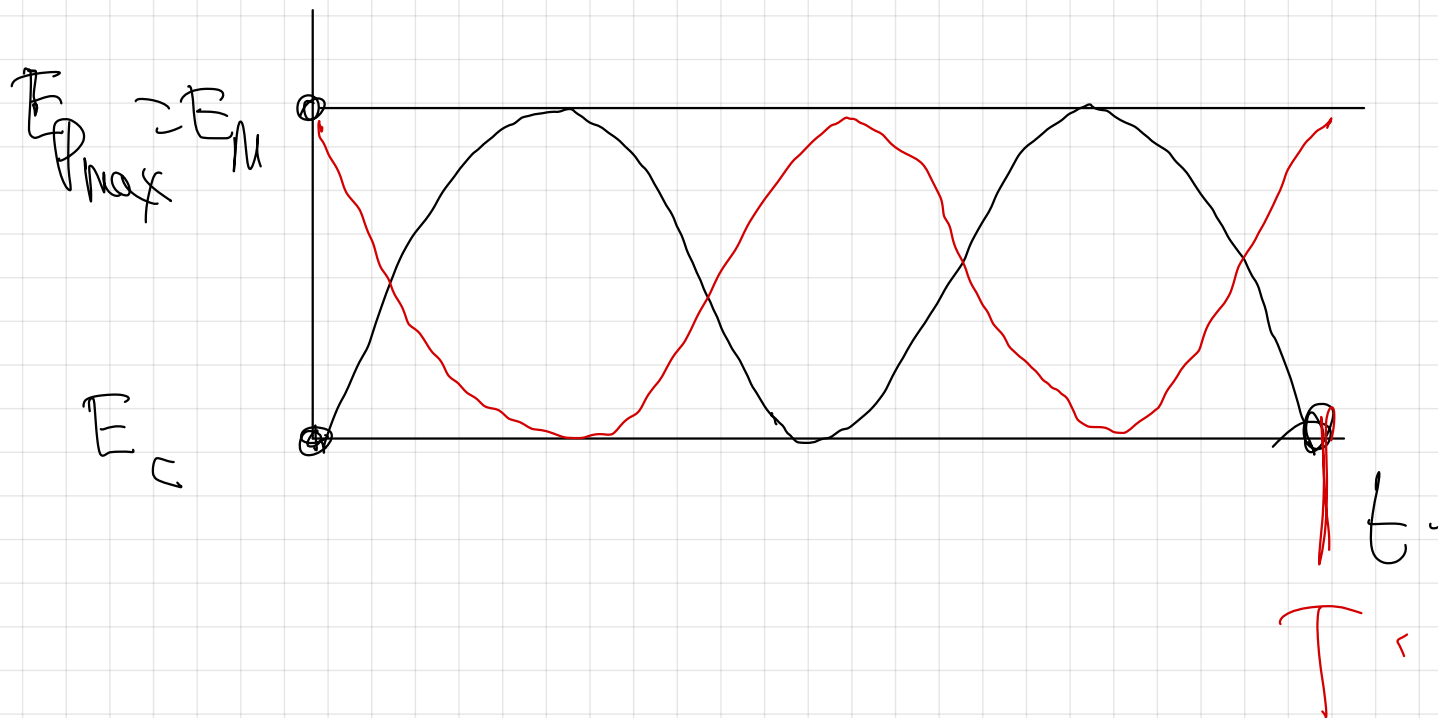
$$\sin \varphi_0 = -1 \rightarrow \varphi_0 = \arcsin(-1) = \frac{3\pi}{2} \text{ rad.}$$

$$K = m \cdot \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{100}{0.5}} = \sqrt{200} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

b) E.

$$E_m = \frac{1}{2} K A^2$$



c)  
2 cm

$$y(t) = 0.02 \cdot \sin\left(\sqrt{200}t + \frac{3}{2}\pi\right) \quad \left(\frac{\text{SI}}{\text{I}}\right)$$

3 cm

$$y(t) = 0.03 \cdot \sin\left(\sqrt{200}t + \frac{3}{2}\pi\right)$$

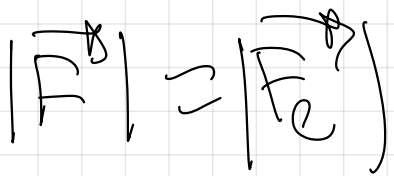
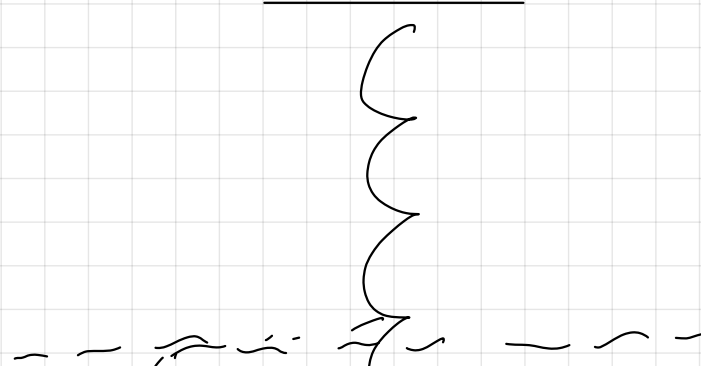
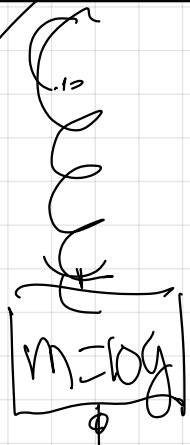
$$F = m \cdot \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{F}{m}} \rightarrow \text{mismo muelle}$$
$$M \rightarrow \text{misma masa}$$

20.- Un muelle de masa despreciables se encuentra en equilibrio cuando de él depende un objeto de 10 g. Calcular:

- La fuerza con la que debe tirarse del muelle para que al soltarlo realice 20 oscilaciones en cinco segundos con una amplitud de 2 cm
- La energía total del sistema cuando el objeto esté 0,5 cm por encima de su posición de equilibrio.

20 oscilaciones en  $\frac{1}{2}$   
 con una amplitud de  
 2cm.



$K = m \cdot \omega^2$



$$K = m \cdot (2\pi f)^2$$

$$K = m \cdot 4\pi^2 f^2$$

$$K = 0.01 \cdot 4\pi^2 \cdot 4^2 = 6.32 \text{ N/m}$$

$$f = \frac{v = 20 \text{ cm}}{t = 5 \text{ s}} = 4 \text{ Hz}$$

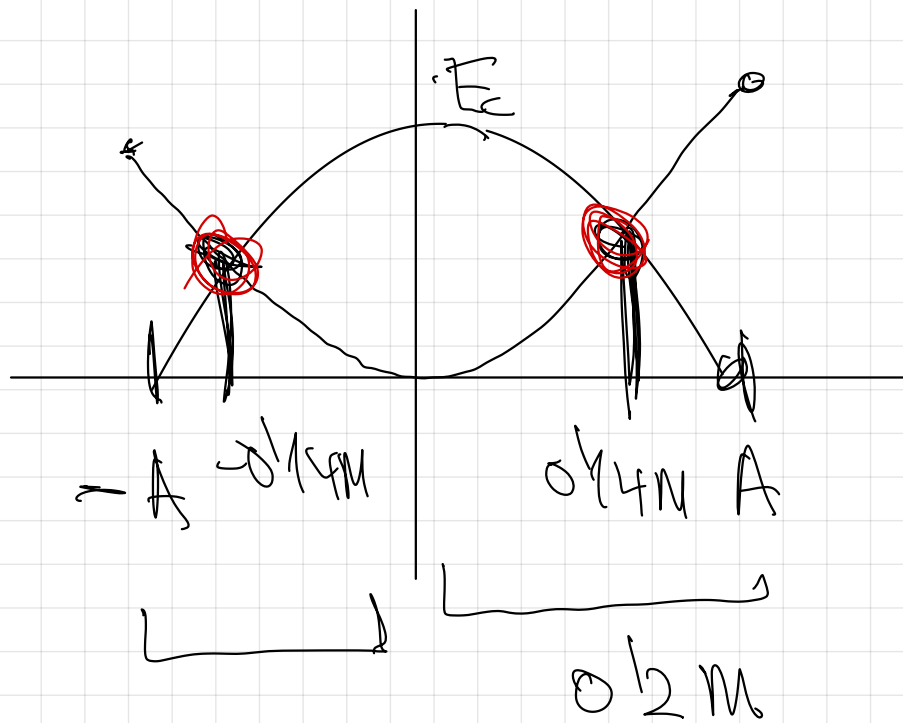
$$F = K y$$

$$F = 6.32 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0.02 \text{ m} = 0.13 \text{ N}$$

$$b) E_m = \frac{1}{2} K A^2 = \frac{1}{2} 6.32 \cdot (0.02)^2 = 1.26 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

21.- Una partícula describe un movimiento armónico simple, cuya amplitud de 0,2 m.  
 ¿Cuál será el desplazamiento en el instante en el que las energías cinética y potencial son iguales?.

↓ elongación  
 $E$



$x$ ?

$$E_c = E_p$$

~~$$\frac{1}{2}k(A^2 - x^2) = \frac{1}{2}kx^2$$~~

$$A^2 - x^2 = x^2$$

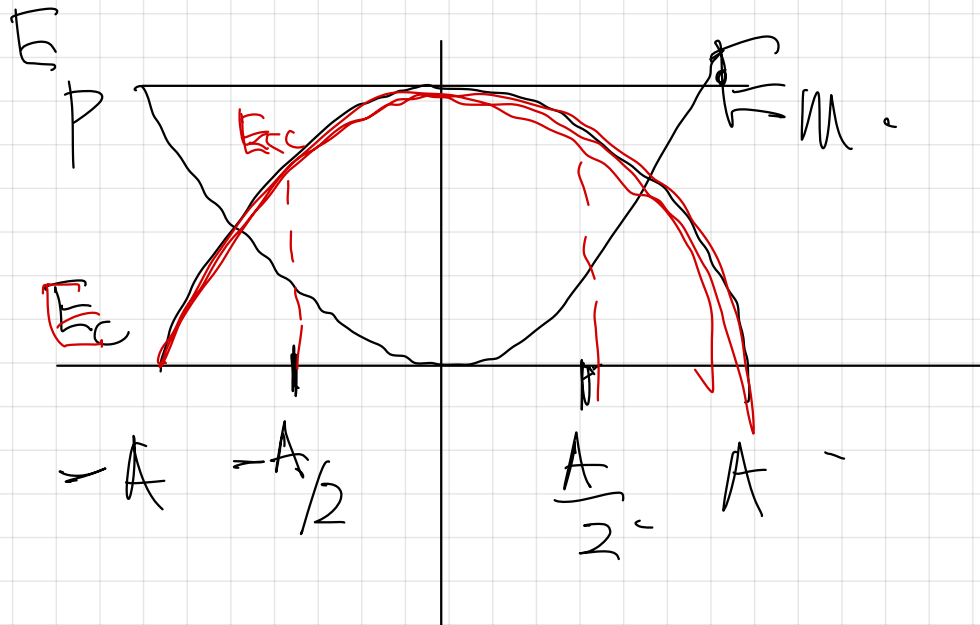
$$A^2 = 2x^2$$

$$x^2 = \frac{A^2}{2}$$

$$x = \sqrt{\frac{A^2}{2}}$$

$$x = \frac{A}{\sqrt{2}} = \frac{0,2}{\sqrt{2}} = \pm 0,1414 \text{ m}$$

22.- Un oscilador armónico se encuentra en un instante en la posición  $x=A/2$ . ¿Qué relación existe entre sus energías cinética y potencial?



$$E_p = \frac{1}{2} k y^2 = \frac{1}{2} k \left( \frac{A}{2} \right)^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} k \frac{A^2}{4}$$

$$E_c = \frac{1}{2} k (A^2 - y^2)$$

$$E_C = \frac{1}{2} K A^2$$

$$E_P = \frac{1}{2} K A^2$$

$$E_C = 3 E_P$$

$$E_C = \frac{1}{2} K \left( A^2 - \left( \frac{A}{2} \right)^2 \right)$$

$$E_C = \frac{1}{2} K \cdot \frac{3}{4} A^2$$

- 23.- Explica cómo varía la energía de un oscilador cuando
- Se duplica la amplitud
  - Se duplica la frecuencia
  - Se duplica la amplitud y se reduce la frecuencia a la mitad

$$a) E_M = \frac{1}{2} K \cdot A^2$$

$$E_n' = \frac{1}{2} k (2A)^2 = \frac{1}{2} k 4A^2.$$

$$\frac{E_n'}{E_n} = \frac{\frac{1}{2} k 4A^2}{\frac{1}{2} k A^2}$$

$$E_n' = 4E_n$$

La  $E_n$  se multiplica

2)

$$E_n = \frac{1}{2} k \cdot A^2 \rightarrow$$

Debo conseguir que  
figure  $f$  en esta  
expresión.

$$E_n = \frac{1}{2} m \omega^2 \cdot A^2.$$

$$E_n = \frac{1}{2} m (2\pi f)^2 \cdot A^2.$$

$$E_n = \frac{1}{2} m 4\pi^2 f^2 A^2$$

$$E_n' = \frac{1}{2} m 4\pi^2 (2f)^2 A^2$$

$$E_n' = 4E_n$$

$$E_n = \frac{1}{2} m 4\pi^2 f^2 A^2$$

$$E_n' = \frac{1}{2} m 4\pi^2 \left(\frac{f}{2}\right)^2 (2A)^2$$

$$E_n' = E_n \quad \text{permanese equal.}$$

24.- Si se duplica la energía mecánica manteniendo un mismo oscilador armónico, explica qué efecto tiene:

- a) En la amplitud y en la frecuencia de las oscilaciones
- b) En la velocidad y en el periodo de oscilación

a) Para ver el efecto en la amplitud, dejaremos una expresión de  $A$  en función de la  $E_m$ .

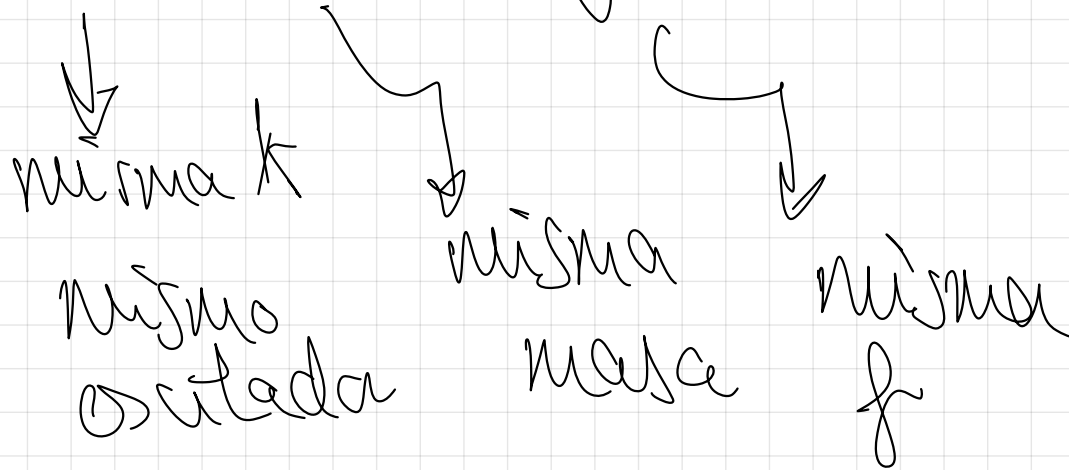
$$E_m = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2 E_m}{k}}$$
$$A' = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 E_m}{k}}$$
$$\frac{A'}{A} = \frac{\sqrt{\frac{2 \cdot 2 E_m}{k}}}{\sqrt{\frac{2 E_m}{k}}}$$
$$A' = \sqrt{2} A$$

mesmo oscilador  $\Rightarrow$  mesma  $k$ .

$$k = m \cdot \omega^2.$$

$$k = m \left( 2\pi f \right)^2.$$

$$k = m \cdot 4\pi^2 f^2.$$



ex)  $f = \frac{1}{T} \Rightarrow T = \frac{1}{f} \Rightarrow$  Se  $f$  no cambia,  $T$

no cambio.

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

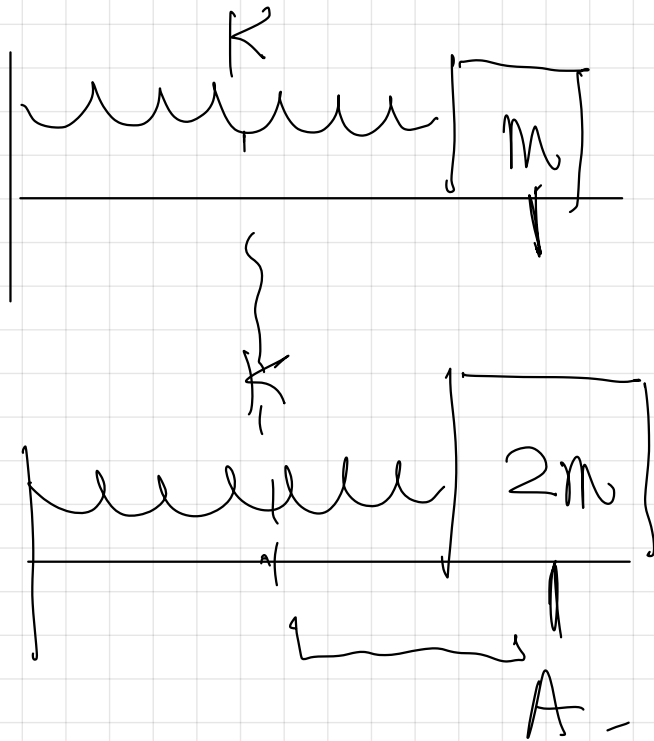
$$v = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$v^0 = \sqrt{2} A \omega \cos(\omega t + \varphi_0)$$

↑ *misma*  
↑ *amplitud*

$$v^0 = \sqrt{2} v$$

- C2. a)** Dos partículas, una de masa  $m$  y otra de masa  $2m$ , unidas a resortes horizontales de igual constante elástica  $k$ , describen movimientos armónicos simples de igual amplitud. Determine razonadamente la relación que existe entre: **i)** la energía mecánica de ambas partículas; **ii)** la velocidad máxima de oscilación de ambas partículas.
- b)** Una masa de 3 kg está unida a un muelle de constante elástica de  $12 \text{ N m}^{-1}$  sobre una superficie horizontal sin rozamiento. El muelle se alarga 4 cm y se suelta en el instante inicial  $t = 0 \text{ s}$ . Determine: **i)** el periodo de oscilación; **ii)** la expresión de la posición de la masa en función del tiempo; **iii)** la velocidad y la aceleración para  $t = 3,5 \text{ s}$ .



$$E_m = \frac{1}{2} k A^2$$

$$E_m = \frac{1}{2} k A^2$$

$$E_M = E_m$$

$$v_{\max} = [A] \cdot \omega$$

$$v_{\max} = A \cdot \frac{\omega}{\sqrt{2}}$$

$$v_{\max} = \frac{v_{\max}}{\sqrt{2}}$$

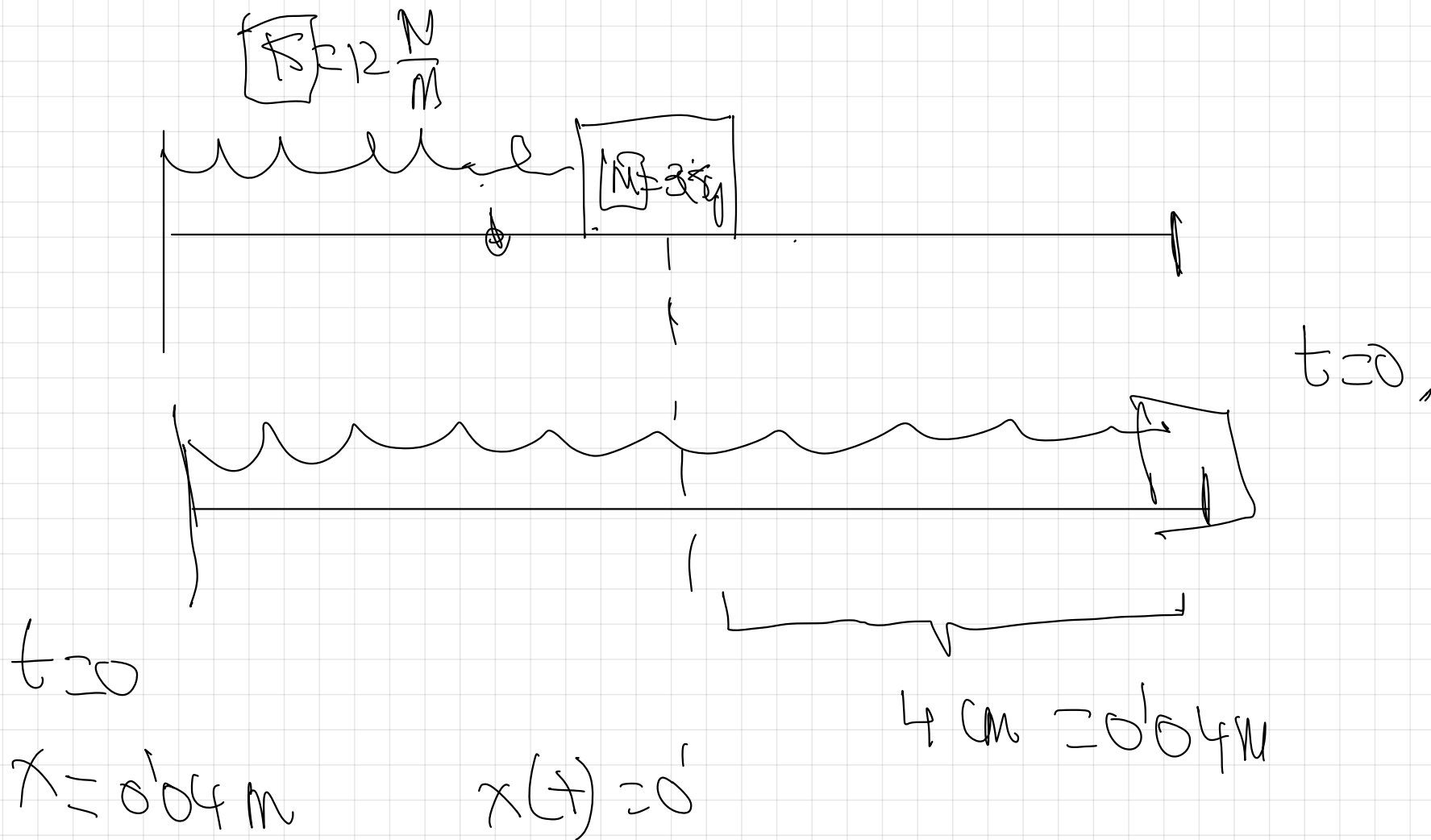
$$K = m \cdot \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{2m}}$$

$$\omega = \frac{\omega}{\sqrt{2}}$$

- C2. a)** Dos partículas, una de masa  $m$  y otra de masa  $2m$ , unidas a resortes horizontales de igual constante elástica  $k$ , describen movimientos armónicos simples de igual amplitud. Determine razonadamente la relación que existe entre: **i)** la energía mecánica de ambas partículas; **ii)** la velocidad máxima de oscilación de ambas partículas.
- b)** Una masa de 3 kg está unida a un muelle de constante elástica de  $12 \text{ N m}^{-1}$  sobre una superficie horizontal sin rozamiento. El muelle se alarga 4 cm y se suelta en el instante inicial  $t = 0 \text{ s}$ . Determine: **i)** el periodo de oscilación; **ii)** la expresión de la posición de la masa en función del tiempo; **iii)** la velocidad y la aceleración para  $t = 3,5 \text{ s}$ .



$$K = m \cdot \omega^2$$

$$K = m \cdot \left( \frac{2\pi f}{T} \right)^2$$

$$K = m \cdot \frac{4\pi^2 f^2}{T^2}$$

$$T = \sqrt{\frac{m \cdot 4\pi^2}{K}} = 2\pi \text{ s.}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s.}}$$

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$x(t) = 0.04 \cdot \sin(2t + \varphi)$$

$$x(t) = 0.04 \cdot \sin(2t + \varphi_0)$$

$$t=0$$

$$x(t) = 0.04 \text{ m}$$

$$0.04 = 0.04 \cdot \sin(2 \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$\frac{0.04}{0.04} = \sin \varphi_0$$

$$\varphi_0 = \arcsin 1$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

29.- Un cuerpo realiza un movimiento vibratorio armónico simple.

a) Escriba la ecuación del movimiento si la aceleración máxima es de  $5\pi^2 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-2}$ , el periodo de las oscilaciones 2s y la elongación del cuerpo al iniciarse el movimiento 2,5 cm.

b) Represente gráficamente la elongación y la velocidad en función del tiempo y comente la gráfica.

a)

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -A \cdot \omega \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$a_{\max} = \pm A \cdot \omega^2$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_{\max} = A \cdot \omega^2$$

$$\left| \frac{5 \pi^2 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} = 1 \text{ m}}{100 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}} \right|$$

$$\omega = \frac{2\pi}{2} = \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$A = \frac{a_{\max}}{\omega^2} = \frac{0.05 \pi^2}{\pi^2}$$

$$= 0.05 \text{ m}$$

$$A = 0.05 \text{ m}$$

$$t = 0$$

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$x = 25 \text{ cm} = 0.25 \text{ m}$$

$$x(t) = 0.05 \cdot \sin(\pi t + \varphi_0)$$

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

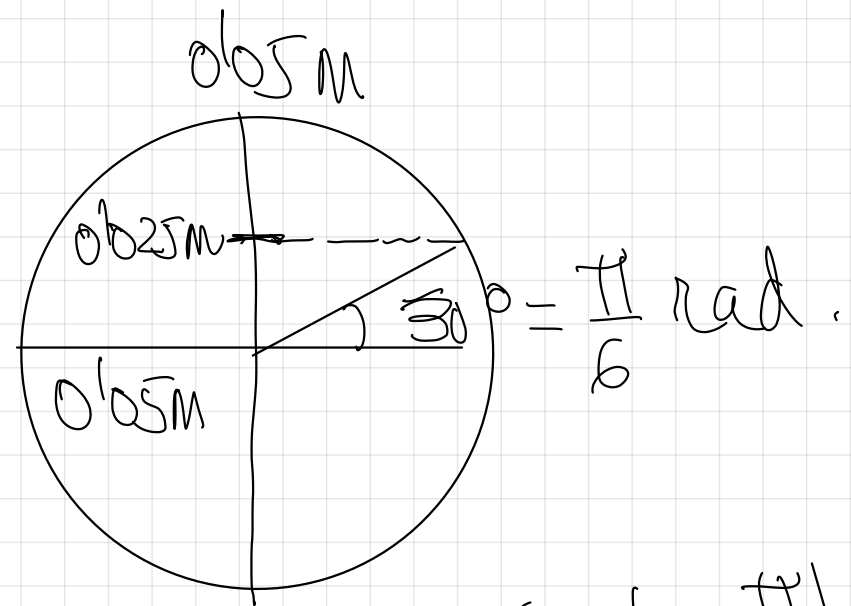
$$0.25 = 0.05 \cdot \sin(\pi \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$\frac{0.025}{0.05} = \sin \varphi_0$$

$$\frac{1}{2} \sin \varphi_0$$

$$\varphi_0 = \arcsin \frac{1}{2}$$

$$\varphi_0 = 30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$



$$x(t) = 0.05 \cdot \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

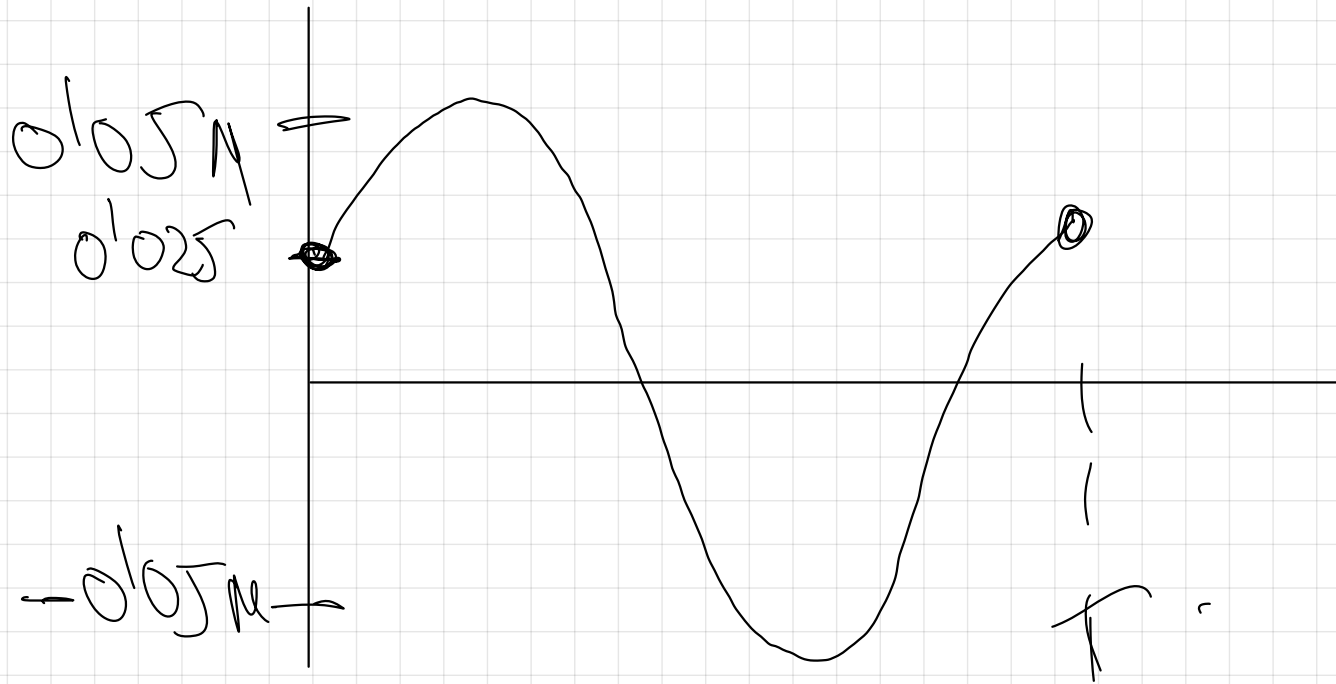
$$360^\circ \rightarrow 2\pi \text{ rad}$$

$$30^\circ \rightarrow x$$

$$x = \frac{2\pi \cdot 30}{360} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

$$x(t) = 0.05 \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$x(t)$



$t\text{ (s)}$

25.- Una partícula de 0,5 kg describe un movimiento armónico simple de frecuencia 5 Hz y tiene inicialmente una energía cinética de 0,2 J y una energía potencial de 0,8 J.

a) Calcular la posición y la velocidad iniciales, así como la amplitud de la oscilación y la velocidad máxima.

b) ¿Podríamos saber con exactitud la posición de la partícula inicialmente?

$$E_m = E_p + E_c = 1 \text{ J.}$$

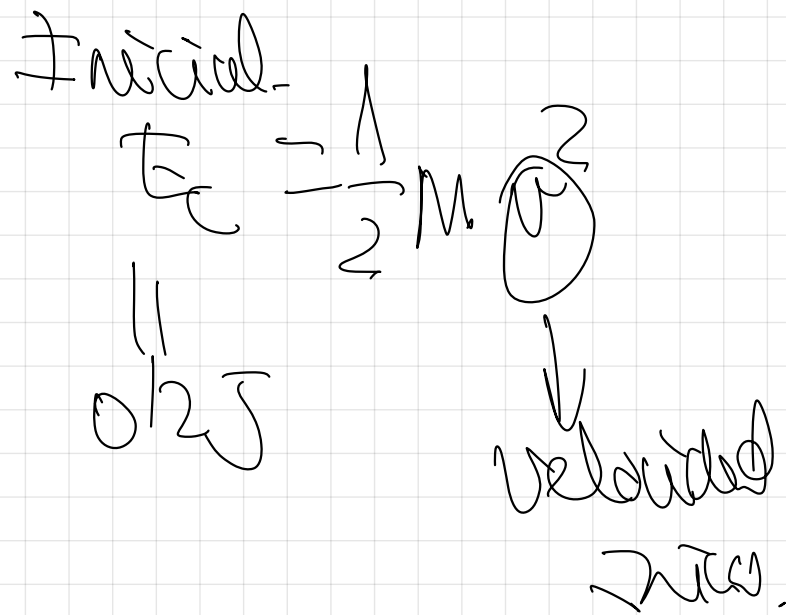
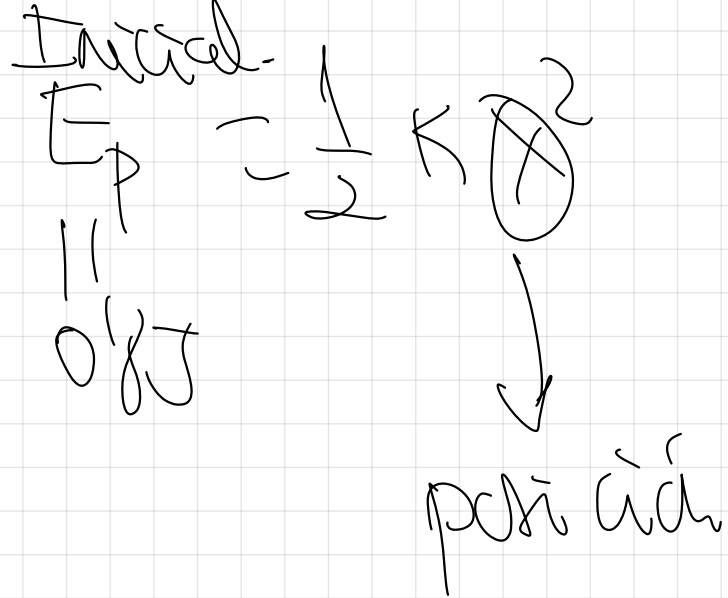
$$E_m = \frac{1}{2} k A^2.$$

$$A = \sqrt{\frac{2E_m}{k}}$$

$$k = m \omega^2.$$

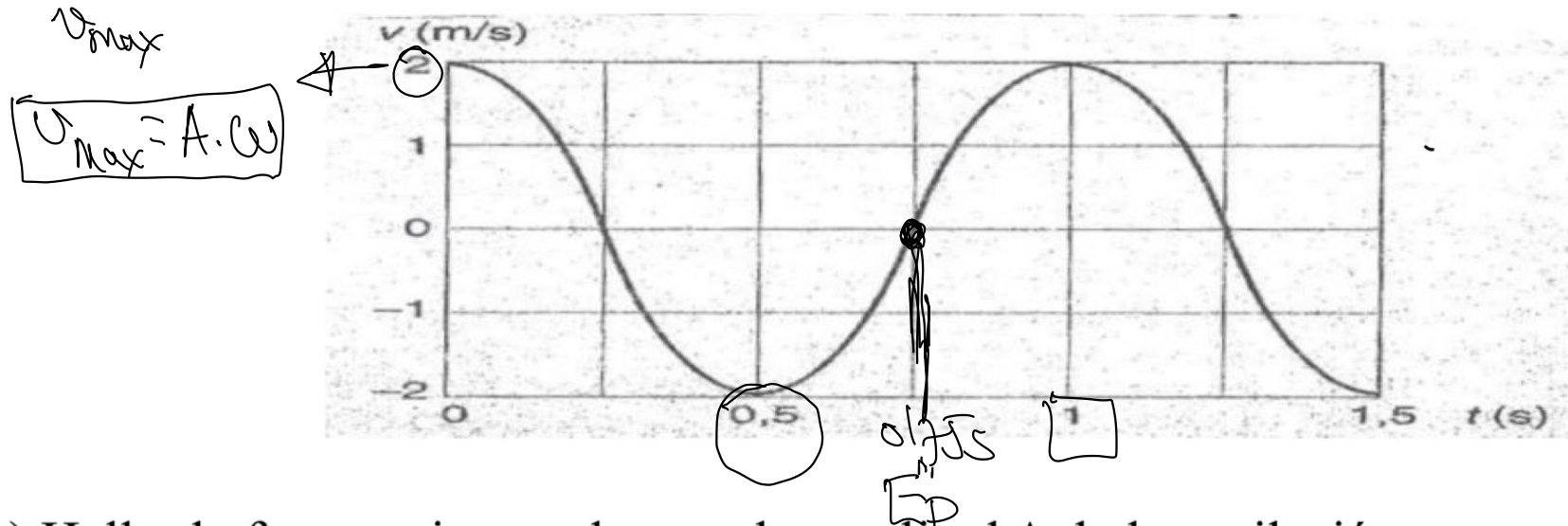
$$k = m (2\pi f)^2.$$

$$k = m \cdot 4\pi^2 f^2.$$



$\rightarrow m = 10 \cdot 10^{-3} = 10^{-2} \text{ kg}$

26.- Una partícula de 10 g oscila armónicamente según la expresión  $x=A \cdot \text{sen}(\omega t)$ . En la figura se representa la velocidad de esta partícula en función del tiempo.



- Hallar la frecuencia angular  $\omega$  y la amplitud  $A$  de la oscilación.
- Calcular la energía cinética de la partícula en el instante  $t_1=0,5$  s y la energía potencial en  $t_2=0,75$  s
- ¿Qué valores tienen las dos energías anteriores? . Razónese.

a)

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \text{ rad/s}$$

$$v_{\text{max}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{\text{max}} = A \cdot \omega$$

$$A = \frac{v_{\max}}{\omega} = \frac{2}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \text{ m}$$

b)

$$t = 0.5 \text{ s} \Rightarrow E_{C \max} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} \cdot 2^2 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

$$t = 0.75 \text{ s} \Rightarrow v = 0 \Rightarrow E_C = 0 \Rightarrow E_{P \max} = E_{C \max} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

c)

$$E_{C \max} = E_{P \max} = E_m = 2 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

$$E_m = \frac{1}{2} k \cdot A^2$$

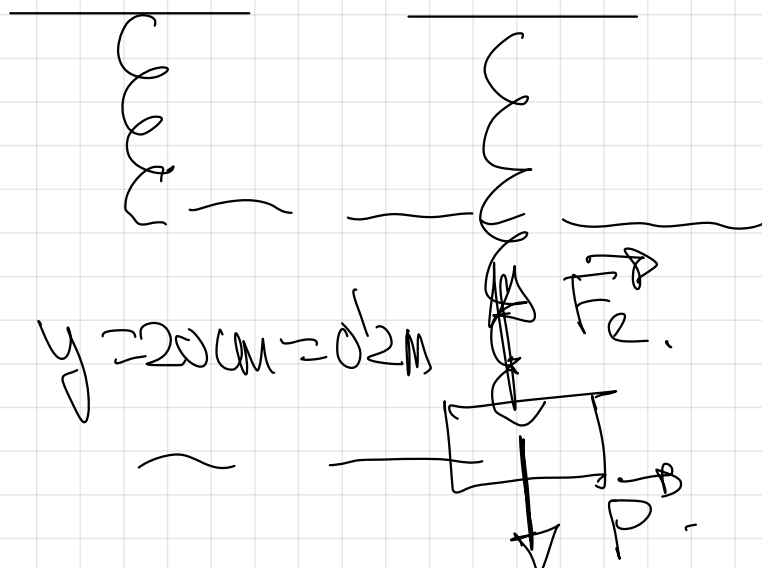
$$E_m = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \cdot A^2$$

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} \cdot (2\pi)^2 \cdot \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2$$

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} \cdot 4\pi^2 \cdot \frac{1}{4\pi^2} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

27.- Cierta muelle que se deforma 20 cm cuando se le cuelga en vertical una masa de 1 kg, <sup>después</sup> se coloca sin deformación, unido a la misma masa sobre una superficie horizontal sin rozamiento. En esta posición, se tira de la masa hasta que el muelle se alarga 2 cm, y posteriormente se suelta.  $g=9,8 \text{ m/s}^2$

- Hallar la ecuación del movimiento armónico simple resultante y representarla gráficamente.
- Representar gráficamente la fuerza, recuperadora, en función de la posición, hallando sus valores máximos y calculando su valor cuando  $x=1 \text{ cm}$ .
- Hallar las energías cinética, potencial elástica y mecánica cuando ha transcurrido un tiempo  $t=3T/4$
- Representar los valores de la energía potencial elástica, energía cinética, y energía mecánica en función del tiempo durante un periodo  $T$ . Indicar en la gráfica los valores de estas energías cuando  $t=0$ .



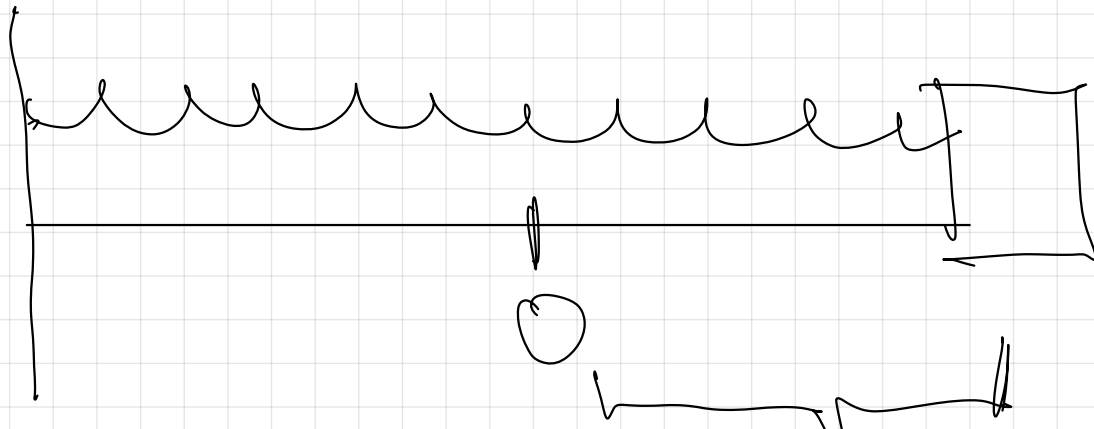
$$|P| = |F_e|$$

$$m \cdot g = k \cdot y$$

$$k = \frac{m \cdot g}{y} = \frac{1 \cdot 9,8 \cdot \text{N}}{0,2 \text{ m}} = 49 \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$$

mismo muelle, misma k.

$t=0$



$$K = m \cdot \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{49}{1}} = 7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

2 cm  
1  
0.02 m

$t=0$   
 $x=0.02$

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$x(t) = 0.02 \cdot \sin\left(7t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (SI)}$$

$$x(t) = 0.02 \cdot \cos(7t) \text{ (SI)}$$

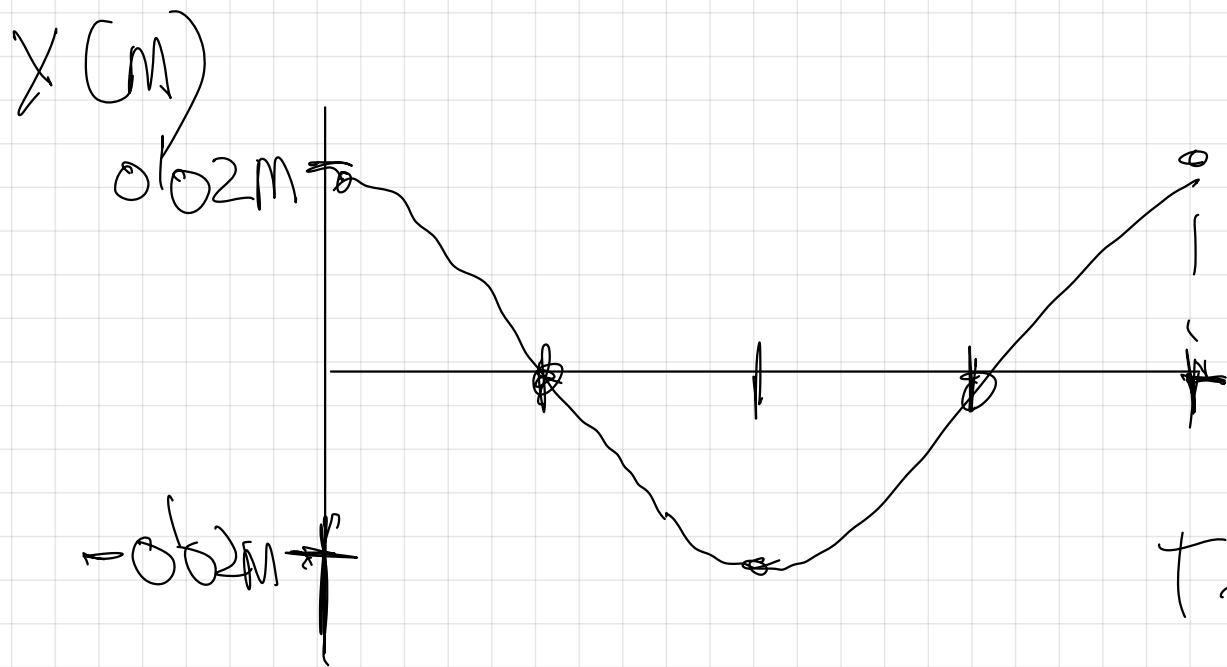
$$x(t) = 0.02 \cdot \sin(7t + \varphi_0)$$

$$0.02 = 0.02 \cdot \sin \varphi_0$$

$$\sin \varphi_0 = 1$$

$$\varphi_0 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

a)  $x(t) = 0.02 \cdot \cos(7t)$  (S.I.)



$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{7} \text{ s}$$

$$T = \frac{2}{7} \pi \text{ s.}$$

b) Fuerza recuperadora en función de la posición.

$$F = -K \cdot x$$

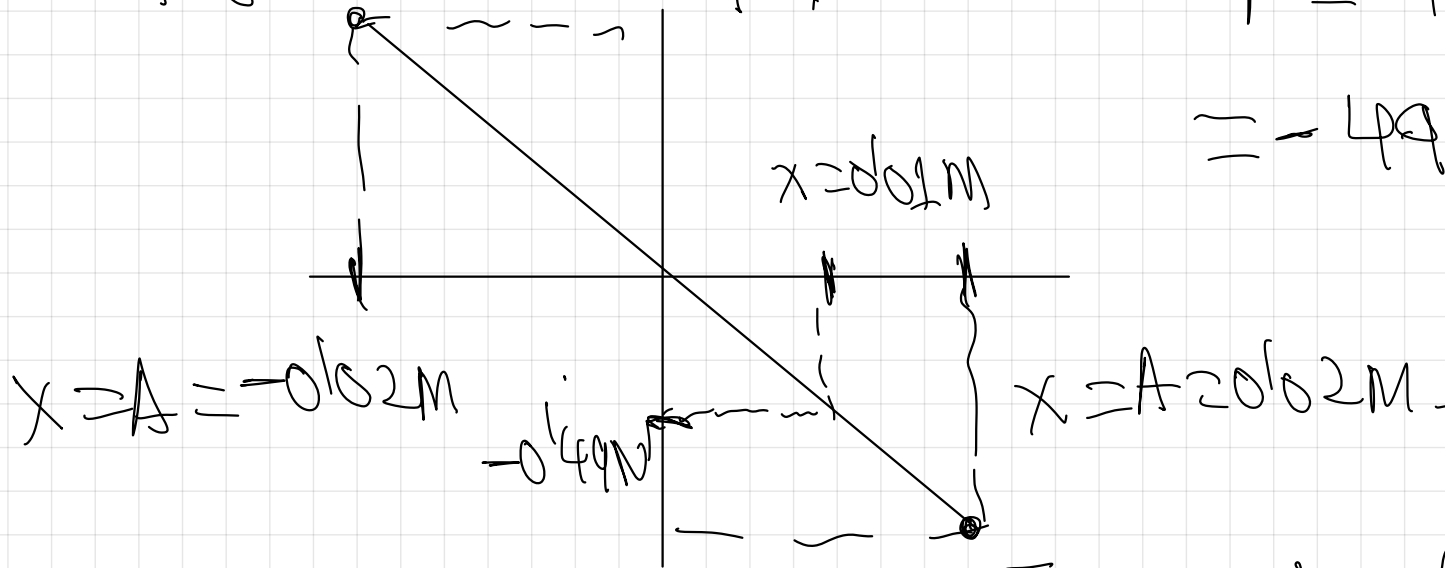
$$F = -49x$$

$$x = 1 \text{ cm} = 0.01 \text{ m.}$$

$$F_{\text{max}} = -49 \cdot (-0.02) = 0.98 \text{ N}$$

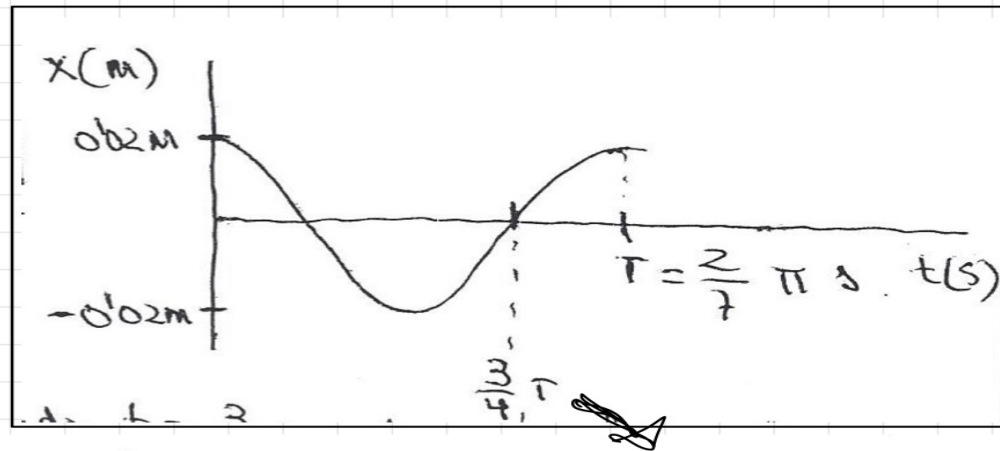
$$F = -49x =$$

$$= -49 \cdot 0.01 = \boxed{-0.49 \text{ N}}$$



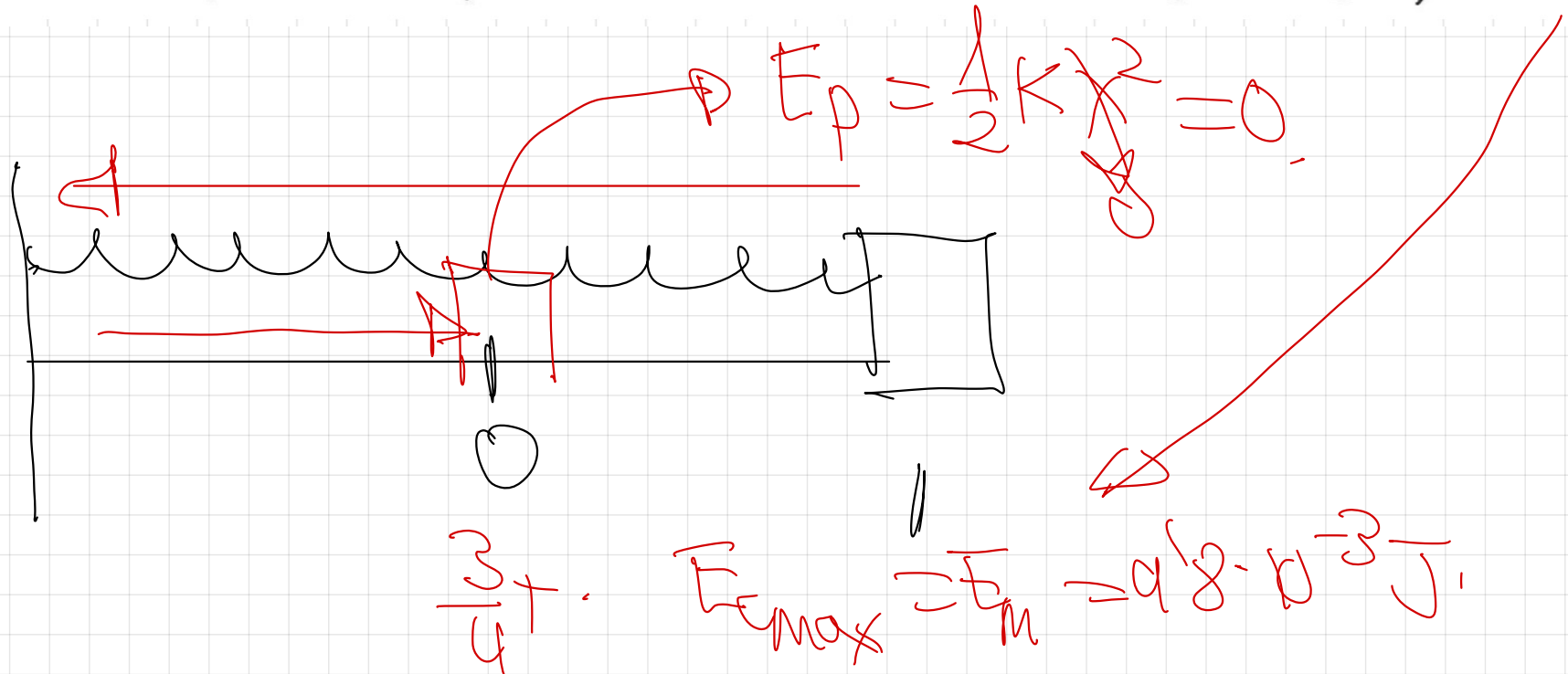
$$F_{\text{max}} = -49 \cdot (0.02) = -0.98 \text{ N}$$

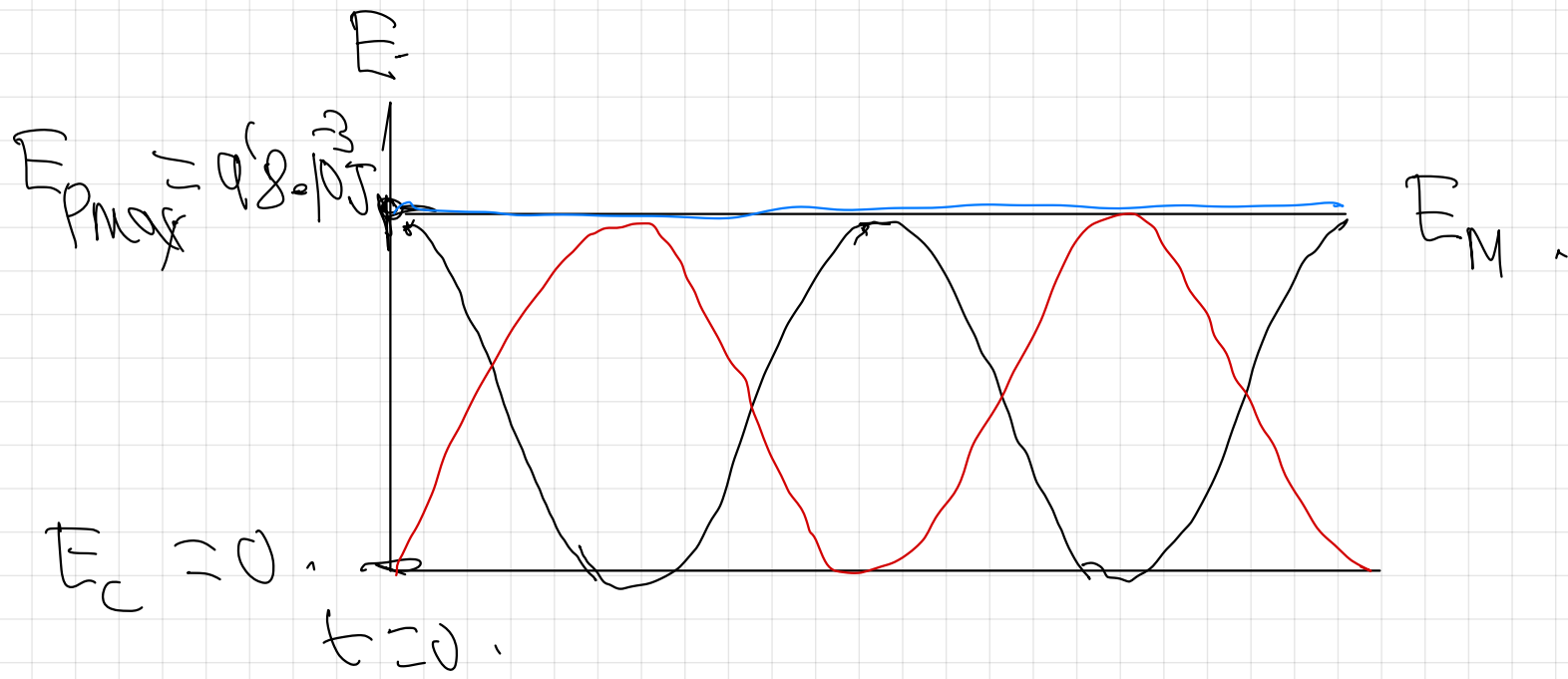
c)



En la gráfica se observa que cuando  $t = \frac{3}{4}T$ , entonces la elongación  $x = 0$ ,  
 y por ello  $E_p = \frac{1}{2}kx^2 = 0$ , tomando entonces la  $E_c$  su valor máximo,  
 es decir:

$$E_c = E_{cmax} = E_m = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 \cdot A^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 7^2 \cdot (0.02)^2 = 9.8 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$





28.- Una masa  $m=10^{-3}$  kg que describe un m.a.s tarda 1s en desplazarse desde un extremo de la trayectoria al otro extremo. La distancia entre ambos extremos es de 5 cm. Determina

- El periodo del movimiento
- La energía cinética de la partícula en  $t=2,75$  s, sabiendo que en  $t=0$  su elongación era nula.
- El primer instante en el que las energías cinética y potencial del sistema coinciden.

a)  $T = 2\pi$

b)  $E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$

$E_c = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \cdot \cos^2(\omega t) \rightarrow$  Se sustituye

$\downarrow$  En función de  $t$ .

$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$

$v = \frac{dx}{dt} = A \omega \cos(\omega t + \varphi_0)$

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 \cdot A^2 \cdot \sin^2(\omega t)$$

↓ En funcție de t.

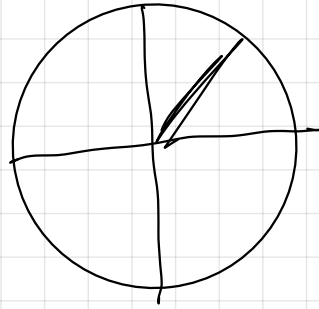
$$E_p = E_c$$

$$\frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t) = \frac{1}{2} m \cdot A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t)$$

$$\sin^2(\omega t) = \cos^2(\omega t)$$

$$\sin(\omega t) = \cos(\omega t)$$

$$\omega \cdot \text{Ⓢ} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$



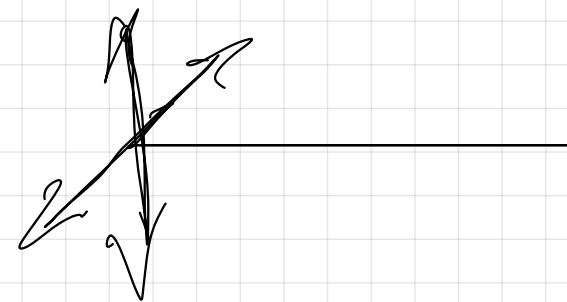
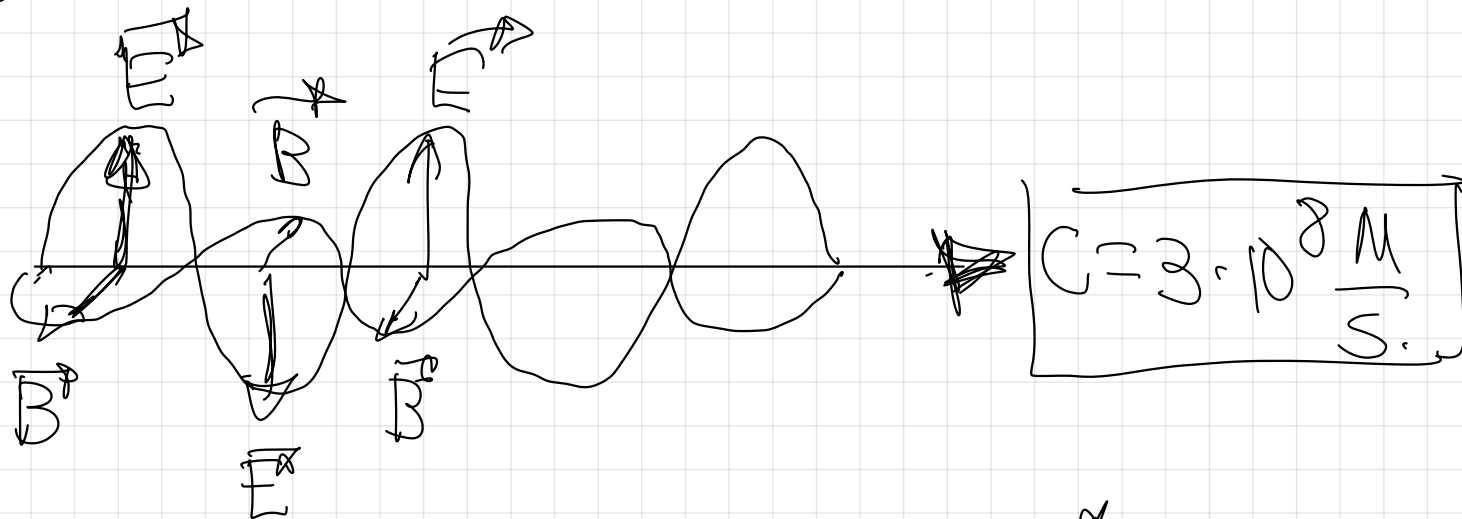
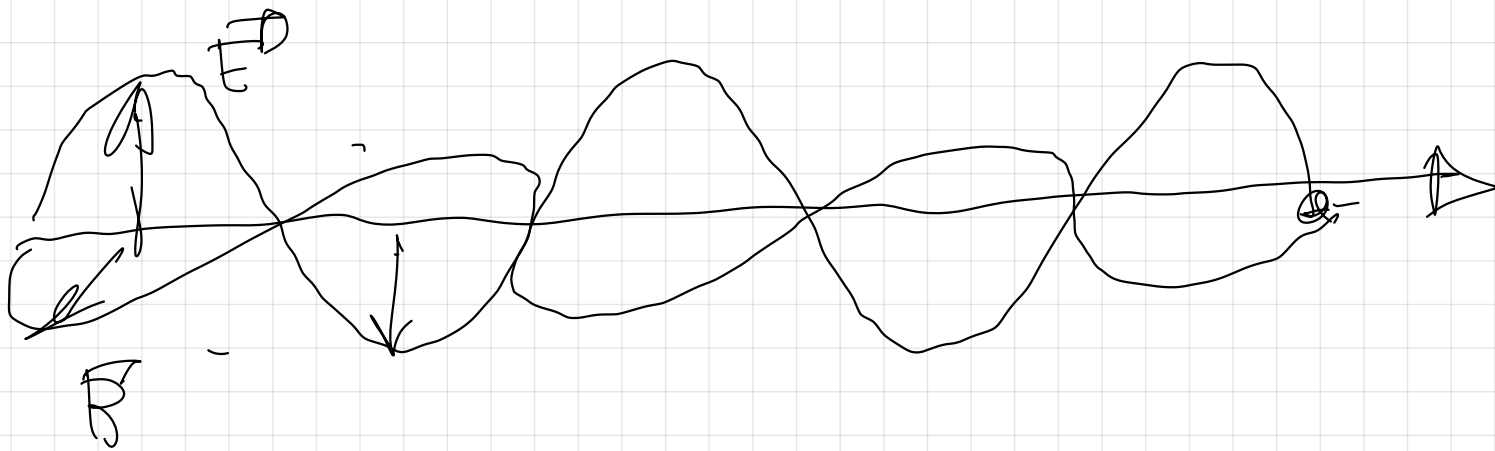
# Teoría Ondas

pag 123

## Clasificación de las ondas

1<sup>er</sup> Criterio: medio en el que se propagan.

- Ondas mecánicas o materiales. → necesitan del medio material
- Ondas electromagnéticas. → no necesitan del medio material.



2º criterio

condiciones de contorno y propagación

- dirección de oscilación ↓ dirección propagación.  
direcc oscilac



direcc propagac

Ondas transversales → cuerda, ondas  
electromagnéticas.

- dirección de oscilación es la misma que  
la dirección de propagación.



direcc osc.



direcc propagac.

Ondas longitudinales  $\rightarrow$  somido

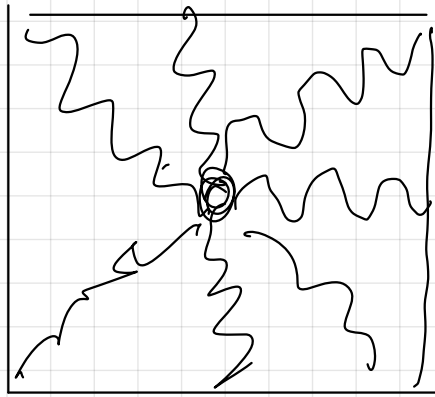
3<sup>o</sup> meio

$\rightarrow$  N<sup>o</sup> dimensões

• Unidimensionais



• Bidimensionais



Onda en el  
estanque

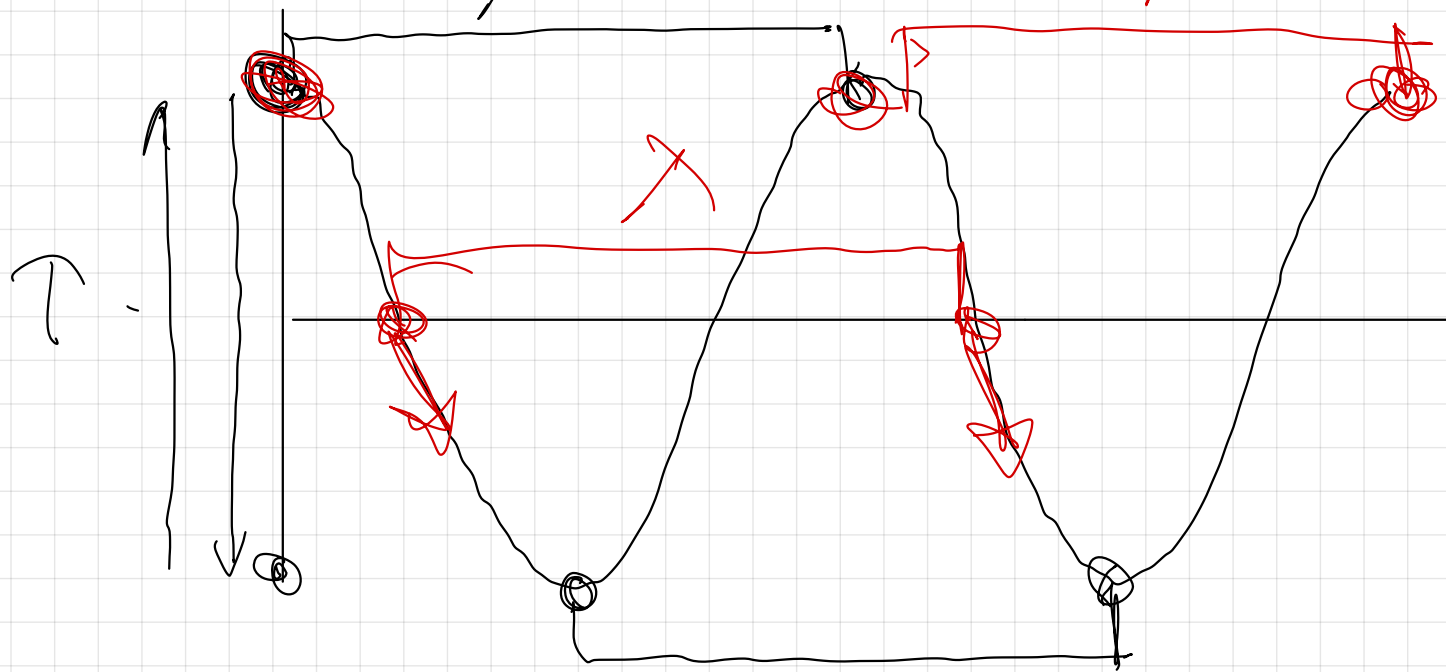
~ Tridimensionales -

Sonido

longitud de onda  $\lambda$

$\lambda \Rightarrow$

$\boxed{\text{m en S.I.}}$



$(m)$

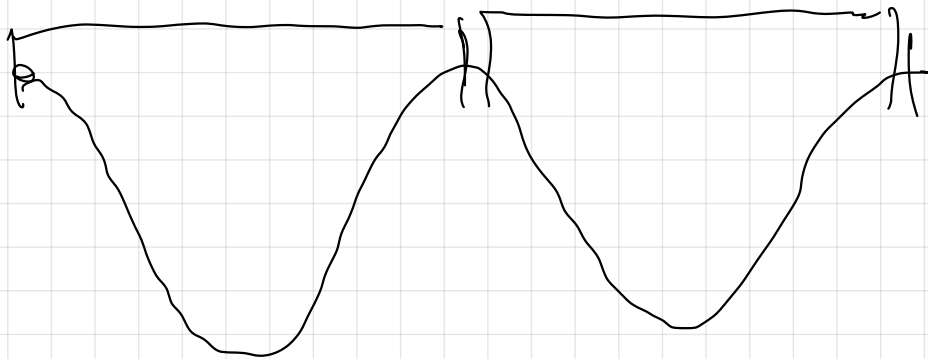
periodo  $T$

$T \Rightarrow$  s en S.I.

frecuencia  $f$

$f \Rightarrow$  Hz en S.I.

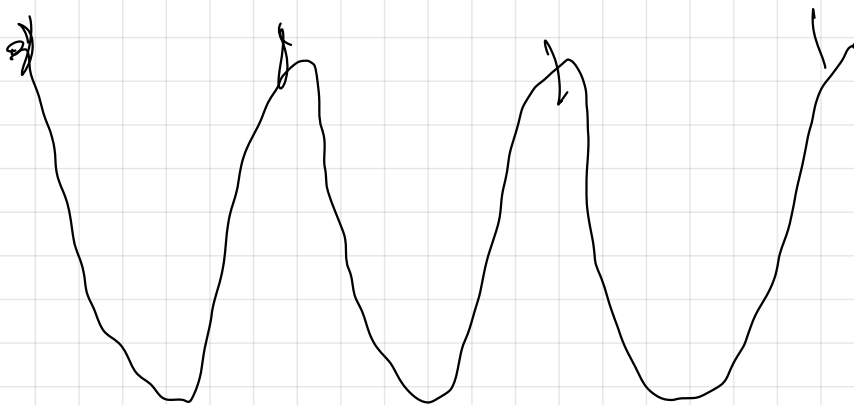
$$f = \frac{v_{osc}}{l}$$



1s

$$f = 2 \frac{v}{l}$$

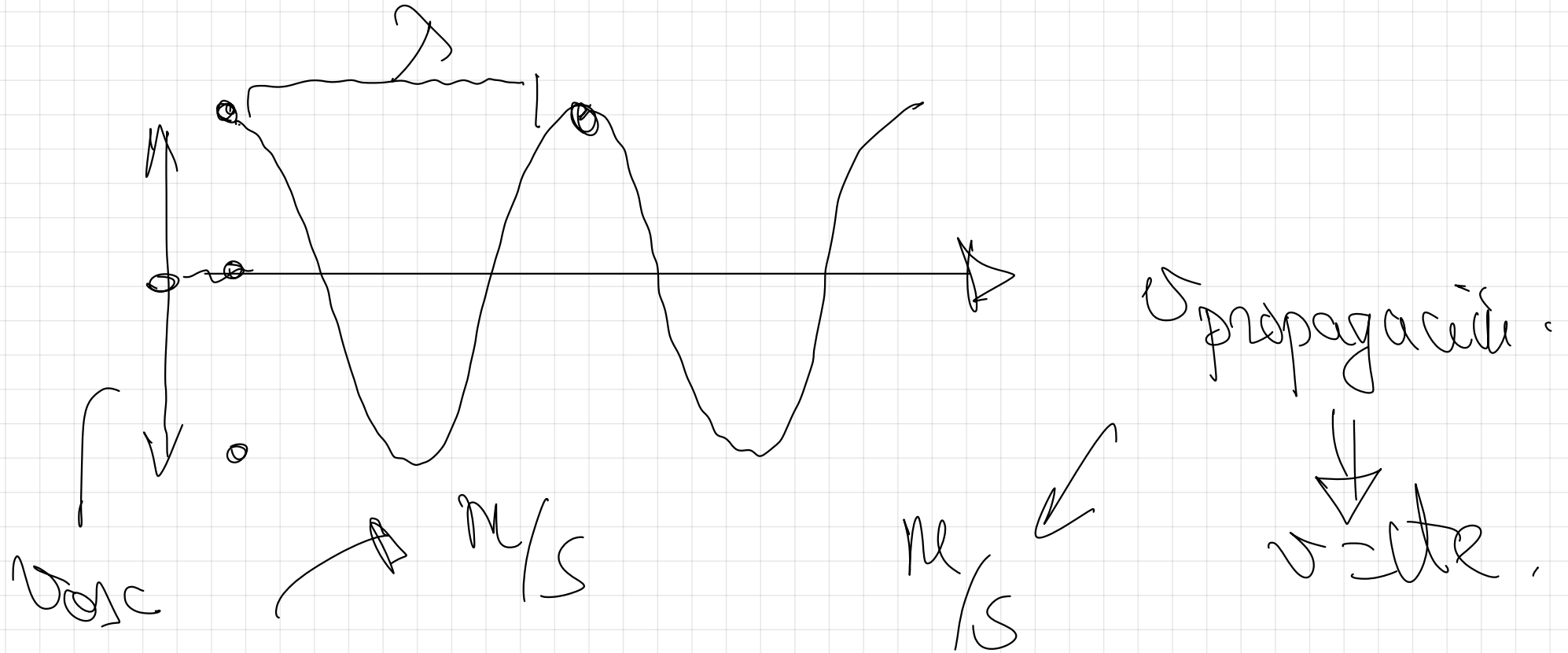
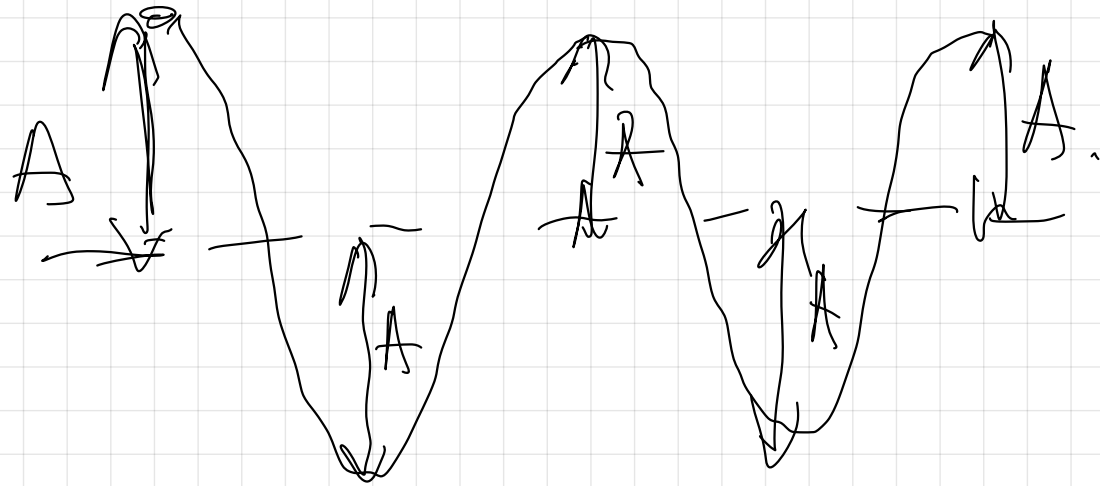
$$f = \frac{v_{osc}}{l}$$



1s

$$f = 3 \frac{v}{l}$$

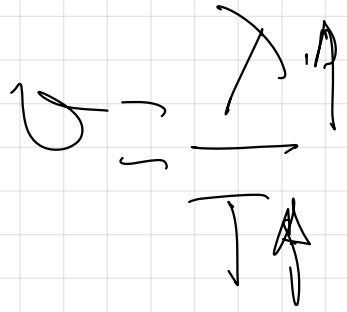
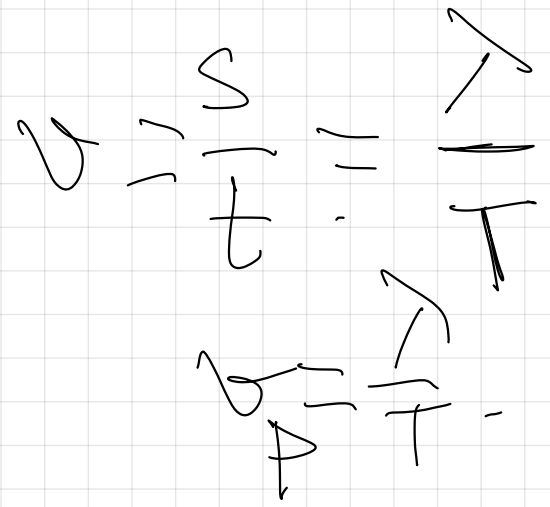
Amplitud  $A$  m ou St



del R.A.S.



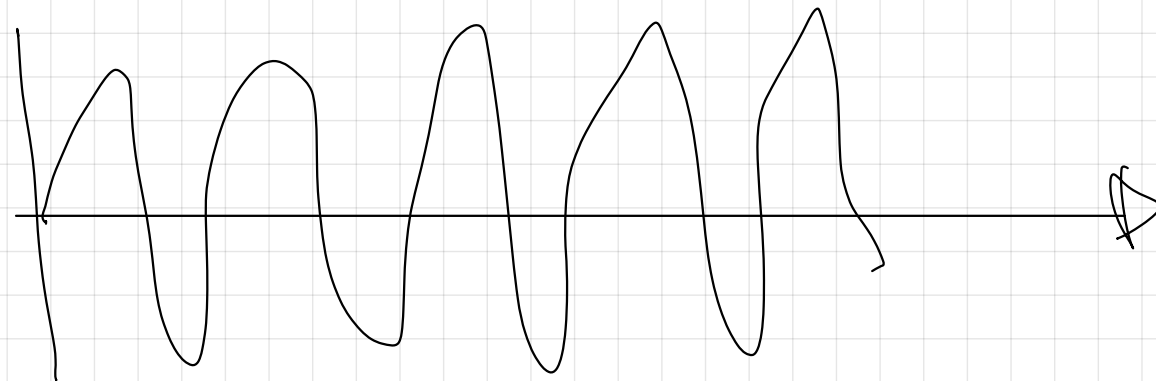
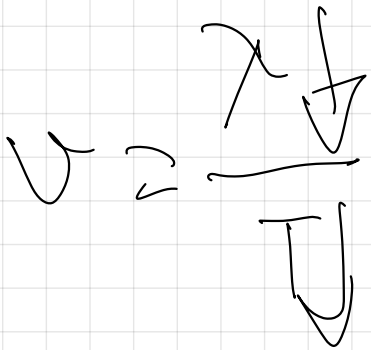
no es de.



de



$3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$



$3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$

$k \Rightarrow$  número de onda

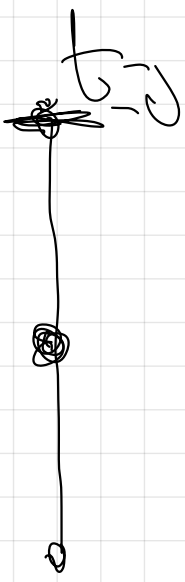
$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

$\omega \Rightarrow$   $\omega$  del M.A.S.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

M.A.S.  $t=0$   $t=0$

$y_0$   
 $t=0$



$$y(x) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

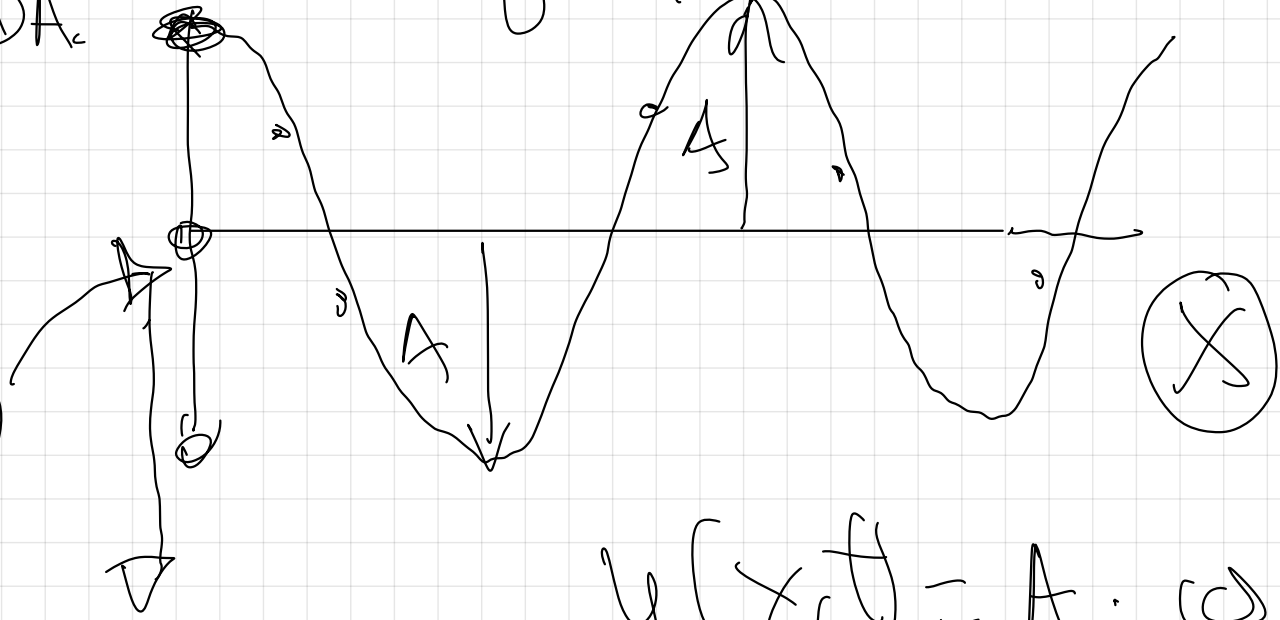
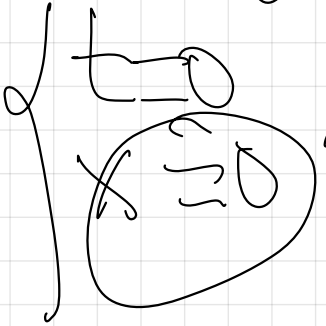
$$y(t) = A \cdot \cos(\omega t)$$

$$y(x,t) = A \cdot \sin(\omega t - kx + \varphi_0)$$

$$y(x,t) = A \cdot \sin(\omega t - kx + \frac{\pi}{2})$$

ONDA

y



$$y(x,t) = A \cdot \cos(\omega t - kx)$$