REPASO M.A.S - ONDAS VIAJERAS (I)

1

1 a) Demuestre que en un oscilador armónico simple la aceleración es proporcional al desplazamiento pero de sentido contrario.

b) Una partícula realiza un movimiento armónico simple sobre el eje OX y en el instante inicial pasa por la posición de equilibrio. Escriba la ecuación del movimiento y razone cuándo es máxima la aceleración.

a) Un movimiento armónico simple (m.a.s.) es un movimiento oscilatorio periódico, cuya elongación (desplazamiento) respecto a la posición de equilibrio (y) viene dada por una función sinusoidal $y = A \cdot sen(\omega \cdot t + \varphi_0)$, donde A es la amplitud del movimiento, ω la frecuencia angular y φ_0 la fase inicial del movimiento.

La velocidad la obtenemos derivando la posición respecto al tiempo. $$v_y = \frac{dy}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Y la aceleración, derivando la velocidad respecto al tiempo $$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -A \cdot \omega^2 \cdot sen(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Comparando las expresiones de posición y aceleración, comprobamos que se cumple que $a_y = -\omega^2 \cdot y$, es decir, la aceleración es proporcional al desplazamiento, y va en sentido contrario.

b) Como hemos visto en el apartado anterior, la expresión general de un m.a.s. viene dada por $y = A \cdot sen(\omega \cdot t + \varphi_0)$, donde "y" representa el desplazamiento desde la posición de equilibrio, independientemente de la coordenada espacial en que se produzca el m.a.s.

La fase inicial φ_0 depende del estado inicial del movimiento. La cuestión nos dice que para t = 0 s, pasa por la posición de equilibrio, es decir, y = 0. Sustituyendo en la ecuación

$$0 = A \cdot sen(\omega \cdot 0 + \varphi_0) \;\rightarrow\; A \cdot sen\varphi_0 = 0 \;\rightarrow\; sen\varphi_0 = 0 \;\rightarrow\; \varphi_0 = 0$$

La expresión del movimiento será $y = A \cdot sen(\omega \cdot t)$ Aplicando la relación demostrada en el apartado anterior, la aceleración es proporcional al desplazamiento. Así, la aceleración será máxima cuando el desplazamiento sea máximo, es decir, cuando la elongación sea igual a la amplitud (en valor absoluto). (y = ± A).

2

1

a) Movimiento armónico simple; características cinemáticas y dinámicas.
b) Razone si es verdadera o falsa la siguiente afirmación: En un movimiento armónico simple la amplitud y la frecuencia aumentan si aumenta la energía mecánica. para un mismo oscilador armónico.

a) (Esta pregunta corresponde a todo un apartado de un tema (o incluso a un tema completo), en el que normalmente se invierten de dos a tres días de clase en su tratamiento. No sé exactamente qué aspectos considerará más importantes la ponencia de selectividad. Creo que al menos había que hablar sobre:

- Definición de movimiento armónico simple (m.a.s.)
- Ecuación de movimiento $y(t) = A \cdot sen(\omega t + \varphi_0)$
- Magnitudes cinemáticas del m.a.s: Periodo, frecuencia, fase, fase inicial, velocidad de vibración, aceleración de vibración. Definición, fórmula y unidades
- Relación entre elongación y aceleración (ecuación fundamental del m.a.s) $a_y = -\omega^2 \cdot y$
- Magnitudes dinámicas: fuerzas presentes en un m.a.s. (por ejemplo, un muelle horizontal unido a una masa). Relación frecuencia angular – constante elástica – masa.
- Energías presentes en un m.a.s. Energías cinética y potencial elástica. Variaciones de energía durante un periodo. Energía mecánica del m.a.s.

Con todo, me parece larguísimo, para ser un apartado de una pregunta. Y muy poco especificado)

b) *(Esta pregunta es bastante ambigua, sobre todo porque no nos dicen cómo se está aumentando la energía mecánica, ni de qué tipo de m.a.s. se trata.)*

Suponiendo el movimiento armónico simple descrito por una masa unida a un resorte, en el que no variamos ni la masa ni la constante elástica, la frecuencia angular de oscilación es una característica propia del sistema (llamada frecuencia de oscilación natural) y viene dada por $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ $\quad f = \upsilon = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$

Por lo tanto, la frecuencia de oscilación no variará si aumentamos la energía mecánica del sistema.

La energía mecánica del m.a.s. se mantiene constante durante todo el movimiento, ya que sólo actúan fuerzas conservativas. Coincide con la energía potencial máxima

$$E_M = \frac{1}{2} K \cdot A^2$$

Vemos que un aumento de la energía mecánica se traduce en un aumento de la amplitud A del movimiento, ya que la constante elástica no cambiará.

3

a) Explique el significado de las magnitudes que aparecen en la ecuación de un movimiento armónico simple e indique cuáles son sus respectivas unidades en el Sistema Internacional.
b) Demuestre que en un oscilador armónico simple la aceleración es proporcional al desplazamiento de la posición de equilibrio pero de sentido contrario.

a) La posición de un móvil que describe un m.a.s viene dada por una ecuación del tipo

$y = A \cdot sen(\omega \cdot t + \varphi_0)$ o $y = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$ donde:

y — Elongación. Es la posición del móvil respecto al punto de referencia, que se escoge siempre en su posición de equilibrio. Indica el desplazamiento desde dicha posición de equilibrio. Aunque usemos la letra "y", se refiere a cualquier coordenada espacial (x, y, z) en la que se mueva. [y]= m (S.I.)

A — Amplitud del m.a.s. Es el valor máximo de la elongación (en valor absoluto). El m.a.s. alcanzará los valores de A y –A en los extremos de su movimiento. [A] = m (S.I.)

ω — Frecuencia angular. Indica el ritmo de oscilación (algo análogo a la velocidad angular en un movimiento circular). [ω] = rad s^{-1} (S.I.). A partir de ω podemos obtener

T — Periodo de oscilación. Tiempo que tarda el móvil en realizar una oscilación completa. Se calcula como

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$ [T]= s (S.I.)

f — Frecuencia. Número de oscilaciones descritas en la unidad de tiempo. Es la inversa del periodo

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$ [*f*]= ciclos/s = s^{-1} = Hz (Hertzio) (S.I.)

$\varphi = (\omega \cdot t + \varphi_0)$ — Fase. Es un ángulo que nos indica en qué estado de oscilación se encuentra el móvil. Se mide en radianes en el sistema internacional

φ_0 — Fase inicial. Valor de la fase para t = 0, cuando comenzamos a estudiar el movimiento. Nos permite calcular cómo era el movimiento al comenzar a estudiarlo. Por ej. La posición inicial se calculará sustituyendo t = 0 s en la ecuación, y quedará $y_0 = y_{(t=0)} = A \cdot sen(\varphi_0)$

b) A partir de la ecuación de la elongación "y" del m.a.s. $y = A \cdot sen(\omega \cdot t + \varphi_0)$

Podemos obtener la velocidad de vibración derivando la elongación $v_y = \frac{dy}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$

Y la aceleración derivando la velocidad $a_y = \frac{dv_y}{dt} = -A \cdot \omega^2 \cdot sen(\omega \cdot t + \varphi_0)$

Comparando las expresiones de elongación y aceleración, vemos que $a_y = -\omega^2 \cdot y$, con lo que queda demostrado que la aceleración es proporcional al desplazamiento respecto a la posición de equilibrio, pero en sentido contrario. La constante de proporcionalidad es el cuadrado de la frecuencia angular.

4

La energía mecánica de una partícula que realiza un movimiento armónico simple a lo largo del eje X y en torno al origen vale $3 \cdot 10^{-5}$ J y la fuerza máxima que actúa sobre ella es de $1{,}5 \cdot 10^{-3}$ N.
a) Obtenga la amplitud del movimiento.
b) Si el periodo de oscilación es de 2 s y en el instante inicial la partícula se encuentra en la posición x_0 = 2 cm, escriba la ecuación de movimiento.

Nos encontramos ante una partícula que describe un m.a.s. (movimiento armónico simple, movimiento oscilatorio periódico en el que la aceleración es proporcional y de signo contrario a la distancia a la posición de equilibrio, o elongación)

a) La fuerza (o fuerzas) que originan un m.a.s. pueden ser de naturaleza muy variada (un cuerpo unido a un muelle, un péndulo con oscilaciones suficientemente pequeñas, un corcho que flota en el agua, los electrones en una corriente alterna...), pero matemáticamente todos pueden estudiarse como si se tratara de una fuerza elástica que actúa sobre el cuerpo (fuerza proporcional a la elongación y de sentido contrario). De este modo:

La fuerza elástica viene dada por $\vec{F}_{el} = -K \cdot \vec{x}$ en módulo $F_{el} = K \cdot x$, siendo K la constante elástica y x la elongación. *(también podríamos llamar "y" a la elongación, pero hay que especificarlo claramente)*

La fuerza máxima (en valor absoluto) se ejerce cuando la elongación es máxima (x = A, amplitud)
$F_{elMAX} = K \cdot A$

La energía mecánica del m.a.s. puede calcularse como la energía potencial elástica máxima (en ese momento su Ec es nula) cuando alcanza la máxima elongación
$E_M = \frac{1}{2} K A^2$ donde K es la constante elástica y A la amplitud del m.a.s.

Con los datos que nos dan, tenemosun sitema de dos ecuaciones con el que calculamos A y K

$F_{elMAX} = K \cdot A \;\rightarrow\; 1{,}5 \cdot 10^{-3}\,N = K \cdot A$
$E_M = \frac{1}{2} K A^2 \;\rightarrow\; 3 \cdot 10^{-5}\,J = 0{,}5 \cdot K \cdot A^2$ dividimos ambas expresiones (la 2ª entre la 1ª)

$$\frac{3 \cdot 10^{-5}}{1{,}5 \cdot 10^{-3}} = \frac{0{,}5 \cdot K \cdot A^2}{K \cdot A} \;\rightarrow\; 0{,}02 = 0{,}5 \cdot A \;\rightarrow\; A = 0{,}04\,m = 4\,cm$$

b) La ecuación de movimiento de un m.a.s. que oscila a lo largo del eje x, viene dada por
$x(t) = A \cdot sen(\omega \cdot t + \varphi_0)$ donde
x(t) es la elongación (distancia a la posición de equilibrio, tomada como punto de referencia) en cualquier instante.
A es la elongación máxima en valor absoluto.
ω es la frecuencia angular de oscilación. $\omega = \frac{2\pi}{T}$
y φ_0 es la fase inicial, que indica el estado del movimiento para t = 0 s. $x(0) = A \cdot sen\varphi_0$

La amplitud está calculada en el apartado anterior. A = 0,04 m
A partir del periodo, calculamos la frecuencia angular $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi\,rad}{2\,s} = 3{,}14\,rad\,s^{-1}$
Y la fase inicial a partir de la posición inicial de la partícula

$$x(0) = A \cdot sen\varphi_0 \;\rightarrow\; \varphi_0 = arsen\left(\frac{x(0)}{A}\right) = arsen\left(\frac{0{,}02\,m}{0{,}04\,m}\right) = arsen(0{,}5) = 0{,}5236 rad = \pi / 6 rad$$

Así, la ecuación de movimiento queda $x(t) = 0{,}04 \cdot sen(3{,}14 \cdot t + \frac{\pi}{6})\;m$

5

a) Explique las características cinemáticas del movimiento armónico simple.
b) Dos bloques, de masas M y m, están unidos al extremo libre de sendos resortes idénticos, fijos por el otro extremo a una pared, y descansan sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Los bloques se separan de su posición de equilibrio una misma distancia A y se sueltan. Razone qué relación existe entre las energías potenciales cuando ambos bloques se encuentran a la misma distancia de sus puntos de equilibrio.

a) En esta cuestión (a mi juicio bastante larga para ser sólo un apartado) pueden tratarse muchos aspectos. Creo que al menos habría que hablar sobre:

- Definición de movimiento armónico simple (m.a.s.)
- Ecuación de movimiento $y(t) = A \cdot sen(\omega t + \varphi_0)$
- Magnitudes cinemáticas del m.a.s: Periodo, frecuencia, fase, fase inicial, velocidad de vibración, aceleración de vibración. Definición, fórmula y unidades
- Relación entre elongación y aceleración (ecuación fundamental del m.a.s) $a_y = -\omega^2 \cdot y$
- Dibujar algunas gráficas.

b) En la situación que nos dice el enunciado (masa unida a un resorte horizontal sin rozamiento), la única fuerza que interviene en el movimiento es la fuerza elástica del resorte, ya que la fuerza gravitatoria y la normal se anulan mutuamente.

Al ser todo el movimiento en horizontal, podemos obviar la energía potencial gravitatoria, eligiendo el nivel cero de potencial gravitatorio a la altura a la que se encuentran los bloques y los resortes.

La energía potencial será entonces energía potencial elástica, dada por $Ep_{el} = \frac{1}{2} K y^2$ donde

K es la constante elástica del resorte (e independiente de la masa)

y es la elongación, la distancia a la posición de equilibrio.

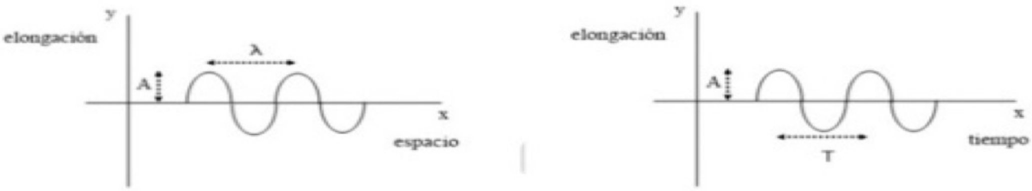
Teniendo en cuenta esto, si ambos resortes son idénticos y las masas están a la misma distancia de sus respectivas posiciones de equilibrio, la energía potencial es independiente de la masa de la partícula, por lo que tendrán idéntica energía potencial.

6

c = 3 10 m s

(17-R) a) Explique la doble periodicidad de las ondas armónicas e indique las magnitudes que las describen.
b) En una cuerda tensa se genera una onda viajera de 10 cm de amplitud mediante un oscilador de 20 Hz. La onda se propaga a 2 m s^{-1}. Escriba la ecuación de la onda suponiendo que se propaga en el sentido negativo del eje X y que en el instante inicial la elongación en el foco es nula. Calcule la velocidad de un punto de la cuerda situado a 1 m del foco en el instante t = 3 s.

a) Una característica intrínseca a las ondas es la doble periodicidad espacio-tiempo. La periodicidad espacial se puede observar cuando se elije un tiempo concreto y se ve que la perturbación se va repitiendo a lo largo del espacio.
La periodicidad temporal se puede observar cuando se elije un punto concreto del medio y se estudia como oscila. Se mueve con movimiento armónico simple.



La ecuación de una onda incluye las dos variables, espacio y tiempo.

$$y(x,t) = A\ \text{sen}\ (\omega t - k x)$$

- Para $t = t_0 \Rightarrow y(x,t_0) = A\ \text{sen}(\omega t_0 - k x)$ ecuación senoidal a lo largo del espacio, con repetición cada λ metros.
- Para $x = x_0 \Rightarrow y(x_0,t) = A\ \text{sen}(\omega t - k x_0)$ ecuación senoidal a lo largo del tiempo, con repetición cada T segundos.

Las magnitudes que intervienen son:

$A =$ Amplitud (m) : es la máxima elongación

$T =$ Periodo : es el tiempo en dar una oscilación completa ó el tiempo que tarda en avanzar λ metros

$\lambda =$ longitud de onda : es la distancia mínima entre dos puntos que vibran en fase

$f =$ frecuencia : es el número de ciclos por segundo $f = \dfrac{1}{T}$

$k =$ número de onda : es el número de ciclos por metro $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

---

b) $y(x,t) = A\ \text{sen}\ (\omega t + k x + \delta)$

$$y\begin{pmatrix} x = 0 \\ t = 0 \end{pmatrix} = 0 = A\ \text{sen}\ (0 - 0 + \delta) \Rightarrow \text{sen}\,\delta = 0 \Rightarrow \delta = 0, \pi, \ldots\ldots \text{elegimos } \delta = 0$$

$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 20 = 40\pi$ rad/s

$k = \dfrac{\omega}{v} = \dfrac{40\pi}{2} = 20\pi$

Luego: $y(x,t) = 0'1\ \text{sen}\ (40\pi t + 20\pi x)$

$$v_{\text{vibración}} = \frac{dy}{dt} = 0'1 \cdot 40\pi \cos\ (40\pi t + 20\pi x)$$

$$v_{\text{vibración}}\begin{pmatrix} t = 3 \\ x = -1 \end{pmatrix} = 0'1 \cdot 40\pi \cos(120\pi - 20\pi) = \boxed{4\pi = 12'56\ \text{m/s}}$$

$\cos(100\pi) = \cos 0° = 1$

7

(17-R) a) Escriba la ecuación de una onda armónica que se propaga en el sentido negativo del eje X. ¿Qué se entiende por periodo y por longitud de onda? ¿Qué relación hay entre esas dos magnitudes?
b) Una onda armónica se propaga por una cuerda en el sentido positivo del eje X con una velocidad de 10 m s^{-1}. La frecuencia del foco emisor es 2 s^{-1} y la amplitud de la onda es 0,4 m.
Escriba la ecuación de la onda considerando que en el instante inicial la elongación en el origen es cero. Calcule la velocidad de una partícula de la cuerda situada en x = 2 m, en el instante t = 1 s.

R E S O L U C I Ó N

a) La ecuación de onda es: $y(x,t) = A\,\text{sen}(\omega t + k x)$. El signo positivo indica que se propaga en sentido negativo del eje X.

- Periodo (T) es el tiempo que transcurre entre dos pulsos sucesivos.

- Longitud de onda (λ) es la distancia que existe entre dos pulsos sucesivos o bien la distancia mínima entre dos puntos que oscilan de la misma forma.

- La relación que existe es que en un periodo la onda avanza una longitud de onda

$$v = \frac{\lambda}{T} \text{ siendo v la velocidad de avance de la onda}$$

b) $y(x,t) = A\,\text{sen}(\omega t - k x + \delta)$

$$y\begin{pmatrix} x=0 \\ t=0 \end{pmatrix} = 0 = A\,\text{sen}(0-0+\delta) \Rightarrow 0 = \text{sen}\,\delta \Rightarrow \delta = 0^{\circ}$$

$$\omega = 2\pi \cdot f = 4\pi \text{ rad/s} \quad ; \quad v = \frac{\omega}{k} \Rightarrow 10 = \frac{4\pi}{k} \Rightarrow k = \frac{2}{5}\pi \text{ rad/m}$$

Luego: $y(x,t) = 0'4\,\text{sen}\left(4\pi t - \frac{2}{5}\pi x\right)$ (SI)

$$v = \frac{dy}{dt} = 0'4 \cdot 4\pi \cos\left(4\pi t - \frac{2}{5}\pi x\right)$$

$$v\begin{pmatrix} x=2 \\ t=1 \end{pmatrix} = 0'4 \cdot 4\pi \cos\left(4\pi - \frac{2}{5}\pi \cdot 2\right) = -4'07 \text{ m/s}$$

8

(17-R) a) Considere la siguiente ecuación de las ondas que se propagan en una cuerda:

$$y(x,t)=A\ \text{sen}(Bt \pm Cx)$$

¿Qué representan los coeficientes A, B y C? ¿Cuáles son sus unidades en el Sistema Internacional? ¿Que indica el signo " ± " que aparece dentro del paréntesis?

b) Obtenga la ecuación de una onda transversal de periodo 0,2 s que se propaga por una cuerda, en el sentido positivo del eje X, con una velocidad de 40 cm s^{-1}. La velocidad máxima de los puntos de la cuerda es 0,5 π m s^{-1} y, en el instante inicial, la elongación en el origen (x = 0) es máxima. ¿Cuánto vale la velocidad de un punto situado a 10 cm del origen cuando han transcurrido 15 s desde que se generó la onda?

RESOLUCION

$$v = 40\ \frac{\cancel{cm}}{s} \cdot \frac{1\ m}{100\ \cancel{cm}} = 0'4\ m/s$$

a)

A = Amplitud (m)

B = frecuencia angular (ω) (rad/s)

C = el número de onda (k) (rad/m)

El signo − indica que la onda viaja en el sentido positivo del eje X

El signo + indica que la onda viaja en el sentido negativo del eje X

$v = 0'4\ m/s$

b) $y(x,t) = A\,\text{sen}(\omega t - kx + \delta)$

$$y\begin{pmatrix} x=0 \\ t=0 \end{pmatrix} = A = A\,\text{sen}(0-0+\delta) \Rightarrow \text{sen}\,\delta = 1 \Rightarrow \delta = \frac{\pi}{2}\ \text{rad}$$

$v = \frac{\lambda}{T}$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0'2} = 10\pi\ \ \text{rad/s}$$

$\lambda = v \cdot T$

$$\cancel{k = \frac{\omega}{v} = \frac{8\pi}{0'4} = 20\pi\ \text{rad/m}}$$

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0'08} = 25\pi\ \frac{rad}{m}$$

$\lambda = 0'4 \cdot 0'2$

Luego: $y(x,t) = A\,\text{sen}\left(10\pi t - 25\pi x + \frac{\pi}{2}\right)$

$\lambda = 0'08\ m$

$$v_{\text{vibración}} = \frac{dy}{dt} = A \cdot 10\pi \cos\left(10\pi t - 25\pi x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v_{max} \text{ cuando coseno} = 1 \Rightarrow 0'5\pi = A \cdot 10\pi \Rightarrow A = \frac{0'5}{10} = 0'05\ m$$

Luego, la ecuación de onda es: $y(x,t) = 0'05\ \text{sen}\left(10\pi t - 25\pi x + \frac{\pi}{2}\right)$ (SI)

$$v\begin{pmatrix} x=0'1 \\ t=15 \end{pmatrix} = 0'05 \cdot 10\pi \cos\left(10\pi \cdot 15 - 25\pi \cdot 0'1 + \frac{\pi}{2}\right) = 0'5\pi \cos\left(\cancel{\frac{297\pi}{2}}\ 148\pi\right) = 0'5\pi \cos 0 = \cancel{0\ m/s}$$

$\cos(148\pi) = \cos 0° = 1$

$0'5\pi\ m/s$

"74 vueltas de 2π rad"

$1'57\ m/s$

9

(17-R) a) Escriba la ecuación de una onda armónica transversal que se propaga a lo largo del sentido positivo del eje X e indique el significado de las magnitudes que aparecen en ella.
b) En el centro de la superficie de una piscina circular de 10 m de radio se genera una onda armónica transversal de 4 cm de amplitud y una frecuencia de 5 Hz que tarda 5 s en llegar al borde de la piscina. Escriba la ecuación de la onda y calcule la elongación de un punto situado a 6 m del foco emisor al cabo de 12 s.

R E S O L U C I O N

a) $y(x,t) = A\,\mathrm{sen}\,(\omega t - kx + \delta)$

$y =$ Elongación (m)

$A =$ Amplitud (m)

$\omega =$ frecuencia angular (rad/s)

$t =$ tiempo (s)

El signo $-$ indica que la onda viaja en el sentido positivo del eje X

$k =$ número de onda (rad/m)

$x =$ variable x (m)

$\delta =$ fase inicial (rad)

b) Al no dar datos para el cálculo, elegimos que $\delta = 0$

$$y(x,t) = A\,\mathrm{sen}\,(\omega t - kx + \delta)$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 5 = 10\pi$$

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{10\pi}{\frac{e}{t}} = \frac{10\pi}{\frac{10}{5}} = 5\pi$$

Luego: $y(x,t) = 0'04\,\mathrm{sen}\,(10\pi t - 5\pi x)$

$$y\begin{pmatrix} x=6 \\ t=12 \end{pmatrix} = 0'04\ \mathrm{sen}\,(10\pi \cdot 12 - 5\pi \cdot 6) = 0'04\ \mathrm{sen}\,(90\pi) = 0'04\ \mathrm{sen}\,0^{\circ} = 0$$

10

(18-E) a) ¿Qué significa que dos puntos de la dirección de propagación de una onda armónica estén en fase o en oposición de fase? ¿Qué distancia les separaría en cada caso?

b) Una onda armónica de amplitud 0,3 m se propaga hacia la derecha por una cuerda con una velocidad de 2 m s^{-1} y un periodo de 0,125 s. Determine la ecuación de la onda correspondiente sabiendo que el punto x = 0 m

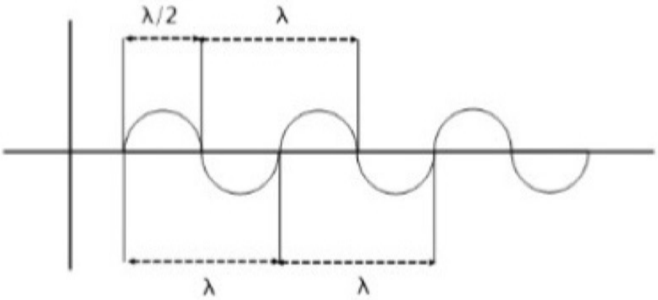
RESOLUCION

a) Dos puntos están en fase cuando tienen, a la vez, la misma posición, velocidad y aceleración. Es decir, oscilan de la misma forma.

Dos puntos están en oposición de fase cuando tienen valores opuestos de posición, velocidad y aceleración.

La distancia entre dos puntos en fase es un número entero de longitudes de onda.

La distancia entre dos puntos en oposición de fase es un número impar de medias longitudes de onda.



b) La ecuación de la onda viajera es $y(x,t) = A\,\text{sen}(\omega t - kx + \varphi)$, es una onda transversal ya que viaja en el eje X y los puntos del medio vibran en el eje Y.

Al tener velocidad hacia la derecha, el signo delante del término kx es negativo.

Para el instante inicial y el foco: Sabemos que :

$$\left.\begin{matrix} x=0 \\ t=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y = A = 0'3 \Rightarrow 0'3 = 0'3 \cdot \text{sen}(0-0+\varphi) \Rightarrow \text{sen}\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0'125} = 16\pi \ \text{rad}\,s^{-1}$$

$$\lambda = v \cdot T = 2 \cdot 0'125 = 0'25 \text{ m} \quad ; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0'25} = 8\pi \ \text{rad}\,m^{-1}.$$

Luego, sustituyendo, tenemos que:

$$y = A\,\text{sen}(\omega t - kx + \varphi) = 0'3 \ \text{sen}\left(16\pi t - 8\pi x + \frac{\pi}{2}\right) \ (S.I)$$

también podría escribirse $y = 0'3 \cdot \cos(16\pi t - 8\pi x)$ (S.I)

11

respuestas.

18-E) a) ¿Es lo mismo velocidad de vibración que velocidad de propagación de una onda? Justifique su respuesta en base a sus expresiones matemáticas correspondientes.
b) Dada la onda de ecuación:

$$y(x,t) = 4\ \mathrm{sen}(10\pi\ t - 0{,}1\pi\ x)\ \text{(SI)}$$

Determine razonadamente: (i) La velocidad y el sentido de propagación de la onda; (ii) el instante en el que un punto que dista 5 cm del origen alcanza su velocidad de máxima vibración.

R E S O L U C I Ó N

a) No es lo mismo. La velocidad de vibración se refiere a la velocidad de oscilación de un punto del medio, mientras que la velocidad de propagación se refiere a la velocidad de avance de la energía a través de un medio.

Para una onda transversal $y(x,t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t - kx)$, la velocidad de propagación, v, es constante y vale $v = \dfrac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f$

La velocidad de vibración es $v = \dfrac{dy}{dt} = A\omega\cos(\omega t - kx)$, es una velocidad variable que depende del tiempo.

b) $y(x,t) = 4\,\mathrm{sen}(10\pi t - 0'1\pi x)$ (SI)

(i) La onda se propaga en el sentido positivo del eje X porque hay un signo negativo delante del término "x"

Identificando coeficientes, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \omega = 10\pi = 2\pi f \Rightarrow f = 5\text{ Hz} \\ k = 0'1\pi = \dfrac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 20\text{ m} \end{array}\right\} \Rightarrow v = 20\cdot 5 = 100\text{ m/s}\ \text{velocidad de propagación}$$

(ii) v_{max} de vibración : $v = \dfrac{dy}{dt} = 4\cdot 10\pi\cos(10\pi t - 0'1\pi x)$

$$v(x = 0'05) = 40\pi\cdot\cos(10\pi t - 0'005\pi)$$

La velocidad es máxima cuando:

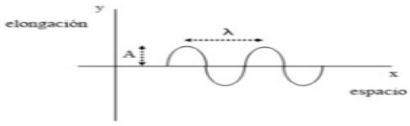
$$\cos(10\pi t - 0'005\pi) = 1 \Rightarrow 10\pi t - 0'005\pi = 0 \Rightarrow t = \frac{0'005\pi}{10\pi} = 5\cdot 10^{-4}\text{ s}$$

12

(18-R) a) Explique, ayudándose de esquemas en cada caso, la doble periodicidad espacial y temporal de las ondas, definiendo las magnitudes que las describen e indicando, si existe, la relación entre ellas.
b) Determine la ecuación de una onda armónica que se propaga en sentido positivo del eje X con velocidad de 600 m s^{-1}, frecuencia 200 Hz y amplitud 0,03 m, sabiendo que en el instante inicial la elongación del punto x = 0 m es y = 0 m. Calcule la velocidad de vibración de dicho punto en el instante t = 0 s.

R E S O L U C I O N

a) Toda onda posee doble periodicidad espacial y temporal.
La periodicidad espacial se pone de manifiesto cuando se congela el tiempo, tomando un valor concreto de la variable $t = t_0$ se observa la elongación de todos los puntos del medio



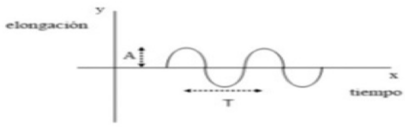
$y(x,t) = A\,\text{sen}(\omega t_0 - k x)$ es una función senoidal

$A =$ Amplitud

$k = \text{número de onda} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

$\omega = \text{frecuencia angular} = \dfrac{2\pi}{T}$

La periodicidad temporal se pone de manifiesto cuando se congela el espacio, es decir, se toma un punto concreto del medio, la variable $x = x_0$ y se observa el movimiento a lo largo del tiempo.



$y(x,t) = A\,\text{sen}(\omega t - k x_0)$

- Amplitud (A) = es la máxima elongación
- Periodo (T) = es el tiempo en dar una oscilación completa, o también el tiempo que tarda en avanzar λ metros.

- Longitud de onda (λ) = es la distancia mínima entre dos puntos que vibran en fase
- Frecuencia (f) = es el número de ciclos por segundo $f = \dfrac{1}{T}$
- Número de onda (k) = es el número de ciclos por metro $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

b) $y(x,t) = A\,\text{sen}(\omega t - k x + \delta)$

$$y\begin{pmatrix} x=0 \\ t=0 \end{pmatrix} = 0 = A\,\text{sen}(0 - 0 + \delta) \Rightarrow \text{sen}\,\delta = 0 \Rightarrow \delta = 0^{o}, \pi, ...$$

$$\omega = 2\pi \cdot f = 400\pi \ \text{rad/s}$$

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{400\pi}{600} = \frac{2\pi}{3} \ \text{rad/m}$$

Luego: $y(x,t) = 0'03\,\text{sen}(400\pi t - \dfrac{2\pi}{3}x)$ (SI)

$$v_{\text{vibración}} = \frac{dy}{dt} = 0'03 \cdot 400\pi \cos(400\pi t - \frac{2\pi}{3}x)$$

$$v_{\text{vibración}}\begin{pmatrix} t=0 \\ x=0 \end{pmatrix} = 0'03 \cdot 400\pi\cos 0^{o} = 12\pi = 37'70 \ \text{m/s}$$

13

2) (19-R) a) Una onda transversal se propaga por una cuerda tensa con una velocidad v, una amplitud A_0 y oscila con una frecuencia f_0. Si se aumenta al doble la longitud de onda, manteniendo constante la velocidad de propagación, conteste razonadamente en qué proporción cambiarían la velocidad máxima y la aceleración máxima de oscilación de las partículas del medio.
b) Si la ecuación de la onda que se propaga por la cuerda es:

$$y(x,t) = 0{,}02 \text{ sen } (100\pi\, t - 40\pi\, x) \text{ (SI)}$$

Calcule la longitud de onda, el periodo y la velocidad de propagación. Determine las ecuaciones de la velocidad de vibración y de la aceleración de vibración.

R E S O L U C I O N

a) $\left.\begin{array}{l}\lambda^* = 2\lambda \\ v^* = v\end{array}\right\} \Rightarrow \lambda^* \cdot f^* = \lambda \cdot f_0 \Rightarrow 2\lambda \cdot f^* = \lambda \cdot f_0 \Rightarrow f^* = \dfrac{f_0}{2}$

La ecuación de onda: $y(x,t) = A_0 \,\text{sen}(\omega t - k x) = A_0 \,\text{sen}\left(2\pi f_0 t - k x\right)$

$$v = \frac{dy}{dt} = A_0 \cdot 2\pi f_0 \cos\left(2\pi f_0 t - k x\right) \Rightarrow v_{max} = A_0 \cdot 2\pi f_0$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A_0 \cdot (2\pi f_0)^2 \,\text{sen}\left(2\pi f_0 t - k x\right) \Rightarrow a_{max} = A_0 \cdot (2\pi f_0)^2$$

$v^*_{max} = A_0 \cdot 2\pi f^* = A_0 \cdot 2\pi \dfrac{f_0}{2} = \dfrac{v_{max}}{2}$ La nueva velocidad máxima de vibración es la mitad de la anterior.

$a^*_{max} = A_0 \cdot (2\pi f^*)^2 = A_0 \cdot \left(2\pi \dfrac{f_0}{2}\right)^2 = \dfrac{A_0 \cdot \left(2\pi f_0\right)^2}{4} = \dfrac{a_{max}}{4}$ La nueva aceleración máxima es la cuarta parte de la anterior.

b) Identificando coeficientes de la ecuación de onda: $y(x,t) = 0'02 \,\text{sen}\left(100\pi t - 40\pi x\right)$, tenemos:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 100\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{100\pi} = 0'02 \text{ segundos}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 40\pi \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{40\pi} = 0'05 \text{ m}$$

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{0'05}{0'02} = 2'5 \text{ m/s}$$

Velocidad de vibración: $v = \dfrac{dy}{dt} = 0'02 \cdot 100\pi \cos\left(100\pi t - 40\pi x\right) = 2\pi \cos\left(100\pi t - 40\pi x\right)$ m/s

Aceleración de vibración: $a = \dfrac{dv}{dt} = -2\pi \cdot 100\pi \,\text{sen}\left(100\pi t - 40\pi x\right) = -200\pi^2 \,\text{sen}\left(100\pi t - 40\pi x\right)$ m/s^2