SOLUCIONES EJERCICIOS LEYES DE KEPLER-MOMENTO LINEAL

1.- a) Enuncie y deduzca la tercera Ley de Kepler a partir de la Ley de la Gravitación Universal de Newton suponiendo órbitas planetarias circulares.
b) Si el radio de la órbita circular de un planeta A es cuatro veces que la de otro B, ¿en qué relación están sus periodos?.

a) Dos cuerpos cualesquiera del universo se atraen mutuamente con una fuerza que es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que existe entre sus centros.

La expresión de la ley de la gravitación universal en forma vectorial es:

$$\vec{F} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

En el movimiento de los planetas alrededor del Sol no hay más fuerzas que la gravitatoria; por ello, se puede asegurar que esta es la fuerza centrípeta que mantiene a los planetas en sus órbitas:

$$F_c = F_g$$

$$\frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

Simplificando y despejando la velocidad, obtenemos:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} \qquad [1]$$

Teniendo en cuenta que la velocidad es aproximadamente constante, se puede escribir:

$$v = \frac{s}{t} \rightarrow v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} \qquad [2]$$

Igualando las expresiones [1] y [2] y despejando el período, se llega a la tercera ley de Kepler:

$$\frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} \rightarrow \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}{T^2} = \frac{G \cdot M}{r}$$

$$T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot M} \cdot r^3 = \text{cte} \cdot r^3 \rightarrow \frac{T^2}{r^3} = \text{cte}$$

Este resultado permite calcular la masa de cualquier planeta conociendo el período y el radio de sus satélites. Si M es la masa del Sol, el valor de la constante $K = 4 \cdot \pi^2/(G \cdot M)$ coincidirá con el valor que calculó Kepler.

b) Tercera Ley de Keppler: *Los cuadrados de los periodos de revolución de los planetas alrededor del Sol son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de sus órbitas.*

$$\frac{T_A^2}{T_B^2} = \frac{R_A^3}{R_B^3}$$

b) Sustituyendo en la tercera Ley de Keppler: $R_A = 4 \cdot R_B$

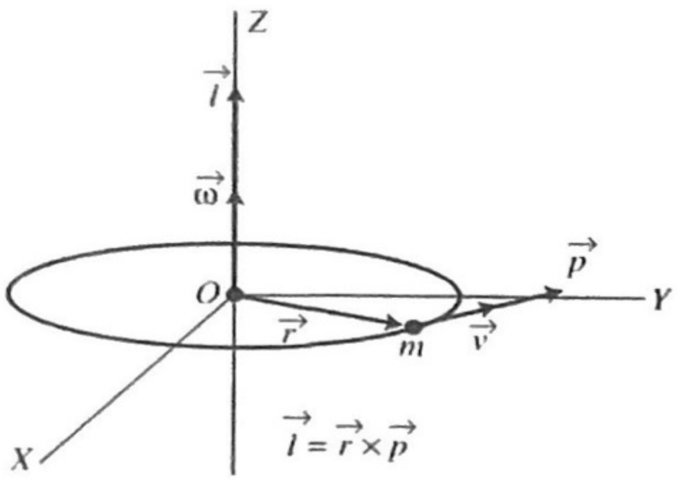
$$\frac{T_A^2}{T_B^2} = \frac{(4 \cdot R_B)^3}{R_B^3} = \frac{64 \cdot R_B^3}{R_B^3} \rightarrow T_A = T_B \cdot \sqrt{64} = 8 \cdot T_B$$

El periodo del planeta A es 8 veces mayor que el del planeta B.

2.- Define el concepto de momento angular y explica el teorema de conservación del mismo.

El momento angular o cinético es una magnitud de gran importancia cuando se estudian movimientos de rotación.

El momento angular respecto a un punto de una partícula puntual, de masa m, que se mueve con velocidad $\vec{v}$, es el momento de su cantidad de movimiento $\vec{p}$ respecto a dicho punto.



Por definición:

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \cdot \vec{v} \qquad [1]$$

El módulo del momento angular es:

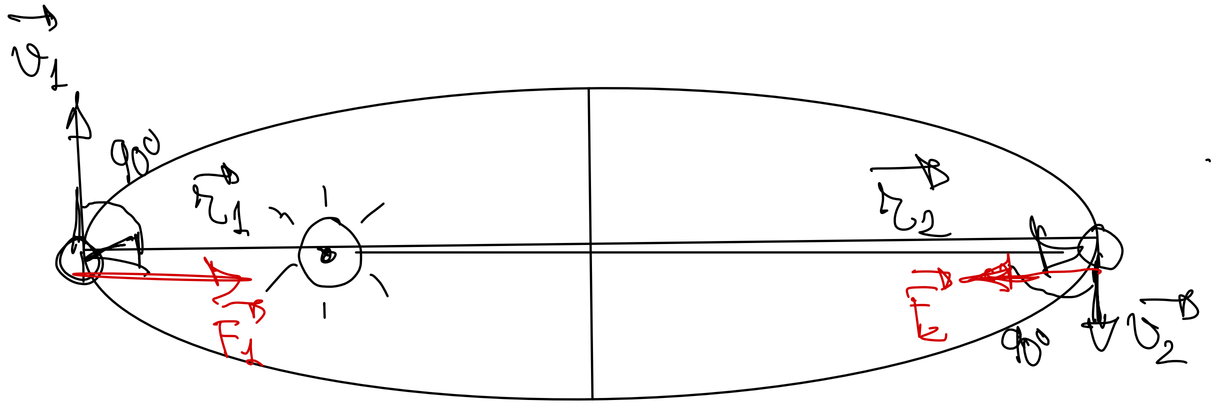
$$l = m \cdot r \cdot v \cdot sen\ \phi$$

La dirección de $\vec{l}$ es perpendicular al plano determinado por los vectores $\vec{r}$ y $\vec{v}$, y su sentido viene dado por la regla del sacacorchos.

— **Si el momento de las fuerzas que actúan sobre una partícula es nulo el momento angular de la partícula permanece constante:**

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = 0 \rightarrow \frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = 0 \rightarrow \vec{l} = \text{cte}$$

3.- Un planeta gira alrededor del sol según una órbita elíptica. Cuando se encuentra más cerca del Sol, a una distancia de $2\cdot10^5$ m, su velocidad es de $3\cdot10^4$ m/s. ¿Cuál será la velocidad del planeta cuando se encuentre en la posición más alejada del Sol, a una distancia de $4\cdot10^5$ m?.



CONSERVACION DEL MOMENTO ANGULAR

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F} \Rightarrow M=r\cdot F\cdot \cancel{\text{sen}\,180°}^{\,0} \Rightarrow \vec{M}=0 \Rightarrow \vec{M}=\frac{d\vec{L}}{dt}=0 \Rightarrow \boxed{\vec{L}=cte}$$

En fuerzas centrales como la gravitatoria

$$\vec{L}_1=\vec{L}_2$$

$$\vec{r}_1\times\vec{p}_1=\vec{r}_2\times\vec{p}_2$$

$$|\vec{r}_1|\cdot|\vec{p}_1|\cdot\text{sen}\,90°=|\vec{r}_2|\cdot|\vec{p}_2|\cdot\text{sen}\,90°$$

$$r_1\cancel{m}\,v_1=r_2\cdot\cancel{m}\cdot v_2 \qquad \boxed{\frac{v_1}{v_2}=\frac{r_2}{r_1}}$$

Va mas deprisa en el perihelio que en el afelio.

$v_1=3\cdot10^4\,\frac{m}{s}$ $\quad$ $v_2=?$

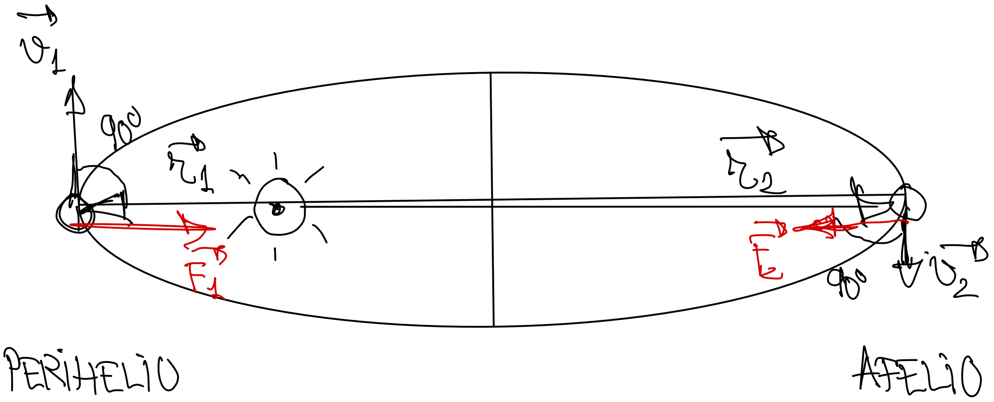
$r_1=2\cdot10^5\,m$ $\quad$ $r_2=4\cdot10^5\,m$

$$\frac{3\cdot10^4\,m/s}{v_2}=\frac{4\cdot10^5\,m}{2\cdot10^5\,m}$$

$$3\cdot10^4\,m/s=2\cdot v_2 \Rightarrow \boxed{v_2=1{,}5\cdot10^4\,\frac{m}{s}}$$

4.- El cometa Halley se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol. En el perihelio (posición más próxima) el cometa está a $8{,}75 \cdot 10^7$ km del Sol y en el afelio (posición más alejada) está a $5{,}26 \cdot 10^9$ km del sol.
a) ¿En cuál de los dos puntos tiene el cometa mayor velocidad?, ¿y mayor aceleración?
b) ¿En qué punto tiene mayor energía potencial? ¿y mayor energía mecánica?.

a)



CONSERVACION DEL MOMENTO ANGULAR

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow M = r \cdot F \cdot \cancel{\operatorname{sen} 180^\circ}^{\,0} \Rightarrow \vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{L} = cte}$$

En fuerzas centrales como la gravitatoria

$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{p}_1 = \vec{r}_2 \times \vec{p}_2$$

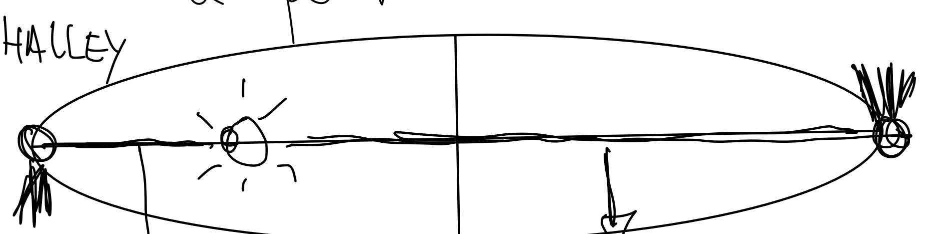
$$|\vec{r}_1| \cdot |\vec{p}_1| \cdot \operatorname{sen} 90^\circ = |\vec{r}_2| \cdot |\vec{p}_2| \cdot \operatorname{sen} 90^\circ$$

$$r_1 \cancel{m}\, v_1 = r_2 \cdot \cancel{m} \cdot v_2 \qquad \boxed{\frac{v_1}{v_2} = \frac{r_2}{r_1}}$$

$$\frac{v_{perihelio}}{v_{afelio}} = \frac{r_{afelio}}{r_{perihelio}} \qquad v_{perihelio} = \frac{5'26 \cdot 10^9 \text{ Km}}{8'75 \cdot 10^7 \text{ Km}} \cdot v_{afelio}$$

$$v_{perihelio} = 60'11\, v_{afelio}$$

Tiene mayor velocidad en el perihelio. $\Rightarrow \boxed{v_{perihelio} > v_{afelio}}$



$$g = G \cdot \frac{M_{sol}}{r^2}$$

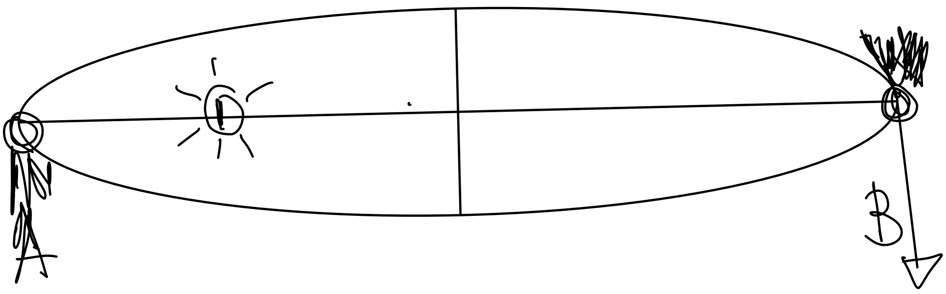
$$r_{perihelio} < r_{afelio} \Rightarrow \boxed{g_{perihelio} > g_{afelio}}$$

posee mayor aceleración en el perihelio.

b) $E_p = -G \cdot \frac{M_{SOL} \cdot m_{COMETA\ HALLEY}}{r} \Rightarrow$ es menos negativa en el afelio, es decir, mayor.

$\boxed{r_{afelio} > r_{perihelio}}$

$E_{p_{afelio}} > E_{p_{perihelio}}$



Bajo la exclusiva actuación de una fuerza conservativa, que en este caso es la fuerza gravitatoria, se conserva la Em, luego

$$E_{m_A} = E_{m_B}$$

(No podemos usar la expresión de la Em que conocemos para un satélite orbitando, ya que sólo es válida para el caso de órbitas circulares $\Rightarrow$ $\cancel{E_m = -G\frac{M\cdot m}{2r}}$)

5.- Un satélite artificial de masa m = 800 kg describe una órbita circular en torno a la Tierra, a una altura h = 400 km sobre su superficie.
a) Calcula el módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra. Si la órbita está en el plano ecuatorial, ¿qué dirección tiene el vector momento angular L? ¿Es L un vector constante? ¿Por qué?.
Datos: $G = 6{,}67\cdot10^{-11}\ N\cdot m^2\cdot kg^{-2}$ $M_T = 5{,}97\cdot10^{24}$ kg $R_T = 6371$ km

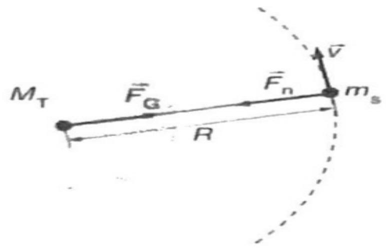
a) Se define el momento angular o momento cinético, $\vec{L}$, de una partícula respecto a un punto P, como el producto vectorial del vector de posición, $\vec{R}$, de la partícula por su momento lineal, $\vec{p}$:

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{p} \quad ; \quad \vec{p} = m \cdot \vec{v} \quad ; \quad \vec{L} = \vec{R} \times m \cdot \vec{v}$$

El módulo del vector será:

$$L = R \cdot m \cdot v \cdot \text{sen}\,(\vec{R}, \vec{v}) \qquad [1]$$

Para determinar el módulo del momento angular del satélite respecto a la Tierra, se debe calcular en primer lugar la velocidad del satélite. Para ello, se deduce la expresión de la velocidad orbital teniendo en cuenta que la Tierra ejerce sobre el satélite una fuerza normal que es la fuerza de atracción gravitatoria. De acuerdo con la segunda ley de Newton se cumple:



$$F_G = F_n$$

$$G\,\frac{M_T \cdot m_s}{R^2} = m_s \cdot a_n = m_s \cdot \frac{v^2}{R}$$

Despejando v en la expresión anterior, obtenemos la fórmula que nos proporciona la velocidad orbital del satélite alrededor de la Tierra:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R}}$$

Sustituyendo valores en la expresión anterior, se obtiene la velocidad orbital:

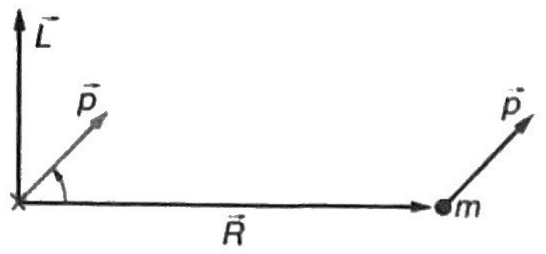
$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}}{(6\,371 + 400) \cdot 10^3}} = 7\,668{,}73 \text{ m/s}$$

Sustituyendo valores en la ecuación [1], se obtiene el valor del módulo del momento angular y será:

$$L = R \cdot m \cdot v \cdot \text{sen}\,(\vec{R}, \vec{v}) = (6371 + 400) \cdot 10^3 \cdot 800 \cdot 7\,668{,}73 \cdot \text{sen}\,90° =$$

$$L = 4{,}15 \cdot 10^{13}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2\text{/s}$$

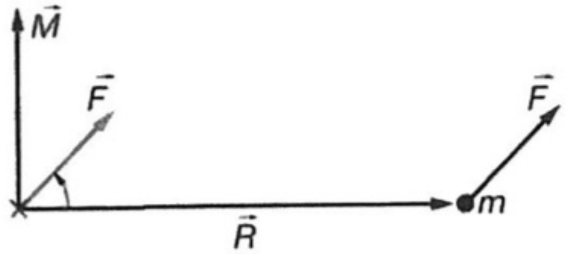
Su dirección y sentido son los propios del producto vectorial. $\vec{L}$ será perpendicular al plano que forman los vectores $\vec{R}$ y $\vec{p}$, y su sentido será el de avance del tornillo cuando va de $\vec{R}$ a $\vec{p}$ por el camino más corto (para verlo, se trasladan $\vec{R}$ o $\vec{p}$ paralelamente a sí mismos para que coincidan sus orígenes):



El vector $\vec{M}$ es el momento de la fuerza, su módulo es:

$$M = R \cdot F \cdot \text{sen}\ (\vec{R}, \vec{F})$$

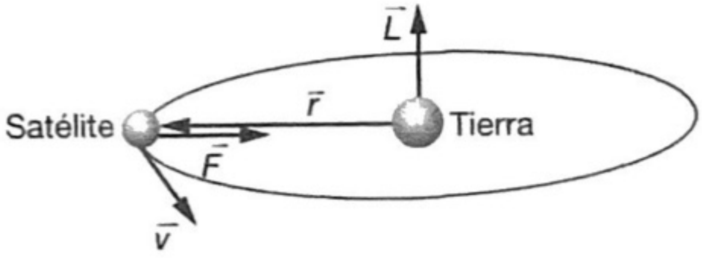
Su dirección será perpendicular al plano que forman $\vec{R}$ y $\vec{F}$ y su sentido, el de avance del tornillo cuando va de $\vec{R}$ a $\vec{F}$ por el camino más corto:



El teorema de conservación del momento angular dice que cuando el momento de la fuerza, $\vec{M}$, que actúa sobre una partícula es cero, el momento angular, $\vec{L}$, es constante:

$$\text{Si } \vec{M} = 0 \;\rightarrow\; \vec{L} = \text{cte}$$

En el enunciado, el satélite gira alrededor de la Tierra y por ello está sometido a la fuerza gravitatoria , que es una fuerza central. Una fuerza central es la que está dirigida siempre al mismo punto, en este caso, al centro de la tierra. En el caso de las fuerzas centrales, el momento de la fuerza, $\vec{M}$, es cero:



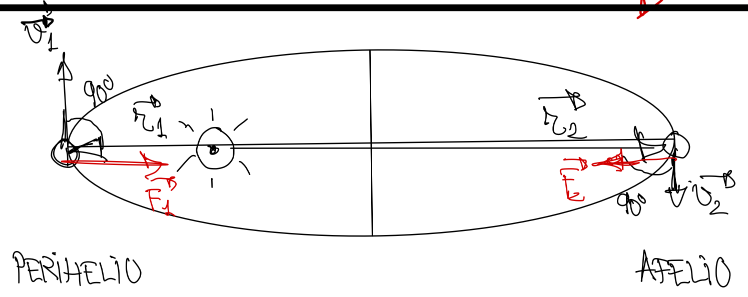
$$M = r \cdot F\ \text{sen}\ (\vec{r}, \vec{F}) =$$
$$= r \cdot F \cdot \text{sen}\ 0° = 0$$

Como $\vec{M}$ es igual a cero, $\vec{L}$ será constante (en módulo, en dirección y en sentido).

6.- Mercurio describe una órbita elíptica alrededor del Sol. En el afelio, su distancia al Sol es de $6{,}99\cdot10^{10}$ m y su velocidad orbital es de $3{,}88\cdot10^{4}$ m/s, siendo su distancia al Sol en el perihelio de $4{,}60\cdot10^{10}$ m.
a) Calcula la velocidad orbital de Mercurio en el perihelio.
b) Calcula el módulo de su momento lineal y de su momento angular en el perihelio.
c) De las magnitudes calculadas en los apartados anteriores, di cuáles son iguales en el afelio.
Masa de Mercurio; $M_M=3{,}18\cdot10^{23}$ kg

No da la constante de gravitación universal G, luego la velocidad orbital la hallaremos por la conservación del momento angular

a)



CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR

$$\vec M = \vec r \times \vec F \Rightarrow M = r\cdot F\cdot \text{sen}\,180° \Rightarrow \vec M = 0 \Rightarrow \vec M = \frac{d\vec L}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec L = cte}$$

En fuerzas centrales como la gravitatoria $\vec L_1 = \vec L_2$

$$\vec r_1 \times \vec p_1 = \vec r_2 \times \vec p_2$$

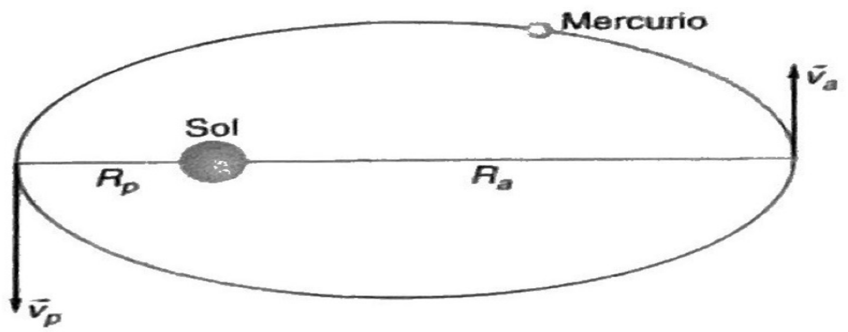
$$|\vec r_1|\cdot|\vec p_1|\cdot \text{sen}\,90° = |\vec r_2|\cdot|\vec p_2|\cdot \text{sen}\,90°$$

$$r_1 \cancel{m}\, v_1 = r_2\cdot \cancel{m}\, v_2 \qquad \boxed{\frac{v_1}{v_2} = \frac{r_2}{r_1}}$$

$$\frac{v_{perihelio}}{v_{afelio}} = \frac{r_{afelio}}{r_{perihelio}} \qquad v_p\cdot r_p = v_a\cdot r_a$$

$$v_a \cdot R_a = v_p \cdot R_p$$

Es decir, la velocidad areolar es constante:



Despejando y sustituyendo valores, se obtiene la velocidad orbital de Mercurio en el perihelio:

$$v_p = \frac{v_a\cdot R_a}{R_p} = \frac{3{,}88\cdot10^4\cdot 6{,}99\cdot10^{10}}{4{,}60\cdot10^{10}} = 5{,}90\cdot10^4 \text{ m/s}$$

b)

El momento lineal se define como:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

El módulo del momento lineal de Mercurio en el perihelio es:

$$p_p = 3{,}18 \cdot 10^{23} \cdot 5{,}90 \cdot 10^{4} = 1{,}88 \cdot 10^{28} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

El momento angular se define como:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m \cdot \vec{v} \rightarrow L = r \cdot m \cdot v \cdot sen\, \alpha$$

Teniendo en cuenta que en el perihelio y en el afelio $\vec{r}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares, el módulo del momento angular de Mercurio en el perihelio, será:

$$L_p = 4{,}60 \cdot 10^{10} \cdot 3{,}18 \cdot 10^{23} \cdot 5{,}90 \cdot 10^{4} = 8{,}63 \cdot 10^{38} \text{ kg} \cdot \text{m}^2\text{/s}$$

c) • La velocidad orbital en el afelio **no** es igual que en el perihelio; es menor.

La energía cinética en el afelio **no** es igual que en el perihelio, ya que no es igual la velocidad; es menor.

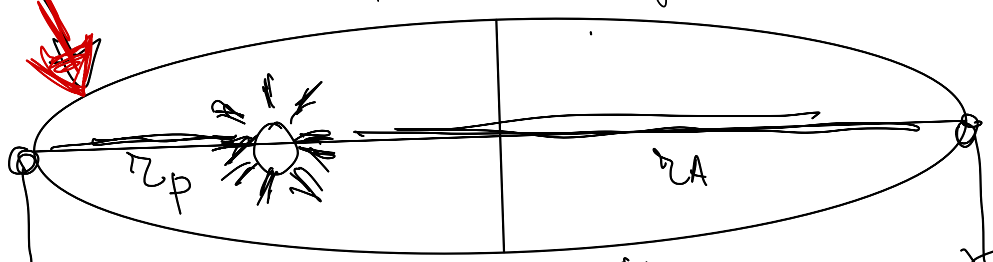
La energía potencial en el afelio **no** es igual que en el perihelio, ya que la distancia al Sol no es la misma; es mayor.

La energía mecánica en el afelio **sí** es la misma que en el perihelio, ya que las fuerzas centrales son conservativas.

El momento lineal en el afelio **no** es igual que en el perihelio, ya que no es igual la velocidad; es menor.

El momento angular en el afelio **sí** es igual que en el perihelio, ya que como el momento, $\vec{M}$, de las fuerzas centrales es cero, el momento angular o cinético, $\vec{L}$, es constante.

$\boxed{E_{m\,perihelio} = E_{m\,afelio}}$ ⇒ Solo actúan fuerzas conservativas



$E_{c\,afelio}$ menor ⇒ $\boxed{v\ menor}$

Perihelio

Afelio

$$E_p = -G\frac{M \cdot m}{r}$$

$$r_p < r_A \Rightarrow E_{p_p} < E_{p_A}$$

$E_{p_P}\downarrow + E_{c_P}\uparrow$ = $E_{p_A}\uparrow + E_{c_A}\downarrow$

7.- La velocidad angular con la que un satélite describe una órbita circular en torno al planeta Venus es $\omega_1 = 1{,}45 \cdot 10^{-4}$ rad/s y su momento angular respecto al centro de la órbita es $L_1 = 2{,}2 \cdot 10^{12}$ kg·m²·s⁻¹. Determina el radio r_1 de la órbita del satélite y su masa. $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻², masa de Venus $M_V = 4{,}87 \cdot 10^{24}$ kg.

- **Si un satélite describe una órbita circular estará sometido a una fuerza centrípeta originada por la atracción gravitatoria:**

$$F_c = F_g$$

$$\frac{m \cdot v^2}{R} = \frac{G \cdot M_V \cdot m}{R^2} \quad \rightarrow \quad v^2 = \frac{G \cdot M_V}{R}$$

donde R es el radio de la órbita, y m, la masa del satélite.

Teniendo en cuenta la relación entre la velocidad lineal y la velocidad angular:

$$v = \omega \cdot R$$

se deduce que el radio de la órbita es:

$$v^2 = \frac{G \cdot M_V}{R} \quad \rightarrow \quad \omega^2 \cdot R^2 = \frac{G \cdot M_V}{R} \quad \rightarrow \quad R^3 = \frac{G \cdot M_V}{\omega^2}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_V}{\omega^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 4{,}87 \cdot 10^{24}}{(1{,}45 \cdot 10^{-4})^2}} = 2{,}49 \cdot 10^7 \text{ m}$$

La masa del satélite se puede calcular a partir de la expresión del momento angular orbital:

$$L_1 = R \cdot m \cdot v = R \cdot m \cdot \omega \cdot R = m \cdot \omega \cdot R^2$$

$$m = \frac{L_1}{\omega \cdot R^2} \quad \rightarrow \quad m = \frac{2{,}2 \cdot 10^{12}}{1{,}45 \cdot 10^{-4} \cdot (2{,}49 \cdot 10^7)^2} = 24{,}5 \text{ kg}$$

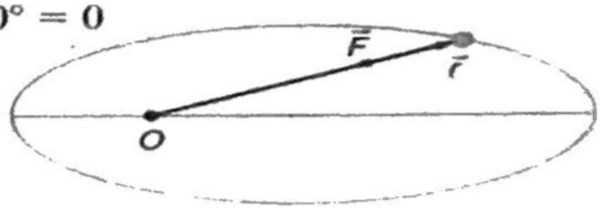
8.- Un satélite gira alrededor de un planeta describiendo una órbita elíptica. In dicha cuál de las magnitudes que se relacionan a continuación permanece constante:
a) Momento angular
b) Momento lineal
c) Energía potencial
d) Energía cinética

a) El momento angular, $\vec{L}$, permanece constante. Al ser la fuerza gravitatoria una fuerza central, su momento, $\vec{M}$, respecto al punto O es nulo:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \rightarrow M = r \cdot F \cdot sen\ 180° = 0$$

Como:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \rightarrow \text{Si } \vec{M} = 0, \vec{L} = \text{cte}$$



b) El momento lineal no permanece constante.

A medida que el satélite describe su órbita alrededor del planeta, su velocidad aumenta cuando va del afelio (posición más alejada del planeta) al perihelio (posición más cercana al planeta) y disminuye cuando va del perihelio al afelio. La velocidad, por tanto, varía; sin embargo, la masa es constante. Por ello, el momento lineal no permanece constante.

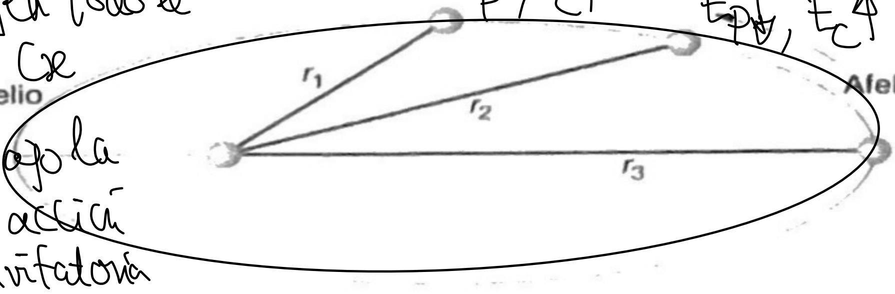
$$p_a = m \cdot v_a \quad ; \quad p_p = m \cdot v_p \quad ; \quad v_p > v_a \rightarrow p_p > p_a$$

c) Recuerda que la expresión de la energía potencial gravitatoria es:

$$E_{p.g} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$$

Donde M y m son las masas del planeta y del satélite y r es la distancia entre las dos masas. A lo largo de la trayectoria elíptica, varía r, como se muestra en la figura; por tanto, la energía potencial no permanece constante.

$\boxed{E_m \text{ cte}}$ en todo el recorrido (se) conserva bajo la exclusiva acción de la F gravitatoria



d) $E_m = cte \Rightarrow$ Solo actúa la fuerza gravitatoria (Conservativa)

$E_m = E_m'$

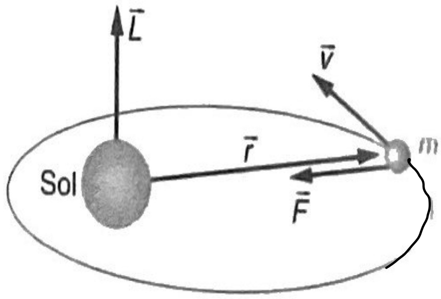
$E_p + E_c = E_p' + E_c'$

Al ser la E_p distinta (apartado c)), la E_c será distinta de manera que la suma de las dos mantenga la igualdad de E_m

9.- Plutón describe una órbita elíptica alrededor del Sol. Indica, para cada una de las siguientes magnitudes, si su valor es mayor, menor o igual en el afelio (punto más alejado del Sol) comparado con el perihelio (punto más próximo al Sol):

a) Momento angular respecto a la posición del Sol.
b) Momento lineal.
c) Energía potencial.
d) Energía mecánica.

a)



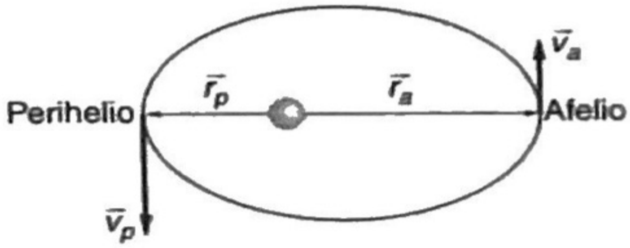
En el caso de fuerzas centrales, $\vec{M}$ es también nulo, ya que el ángulo que forman $\vec{r}$ y $\vec{F}$ es de 180°:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \rightarrow |\vec{M}| = r \cdot F \cdot sen(\vec{r}, \vec{F}) = 0$$

Así que $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$, lo que implica que el momento angular es constante.

Por tanto, $\vec{L}_{afelio} = \vec{L}_{perihelio}$; es decir, cambian la distancia al Sol y la velocidad de Plutón según esté en el afelio o en el perihelio, pero el momento angular se mantiene constante.

b) Cuando el planeta está en el afelio, su velocidad es menor que en el perihelio; recuerda la ley de las áreas basada en el apartado anterior:



$$v_p \cdot r_p = v_a \cdot r_a$$

$$r_p < r_a \rightarrow v_p > v_a$$

Por tanto, el momento lineal en el afelio es menor que en el perihelio:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \rightarrow \vec{p}_a < \vec{p}_p$$

c) La energía potencial del planeta viene dada por:

$$E_p = -\frac{G \cdot M_{Sol} \cdot m}{R}$$

Como $R_a > R_p$, la energía potencial en el afelio es mayor que en el perihelio (aunque en valor absoluto no lo sea, ten en cuenta el signo negativo de la energía potencial):

$$E_{p_a} > E_{p_p}$$

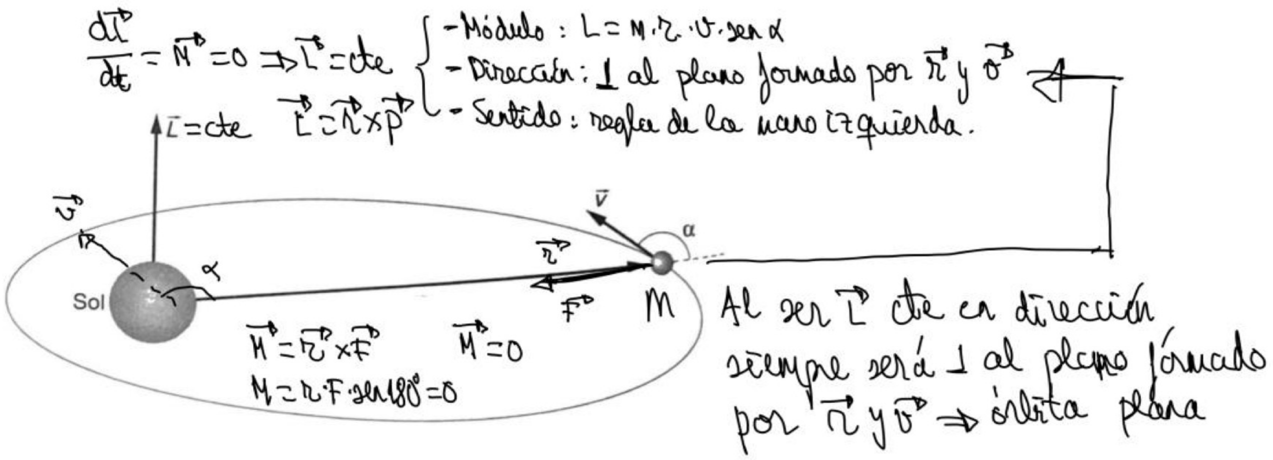
d) La energía mecánica se conserva. En el afelio, la energía cinética del planeta es menor que en el perihelio porque tiene menos velocidad, pero la energía potencial es mayor. Así que:

$$E_{m_a} = E_{m_p}$$

10.- Enunciar la primera Ley de Kepler, explicando su significado geométrico.

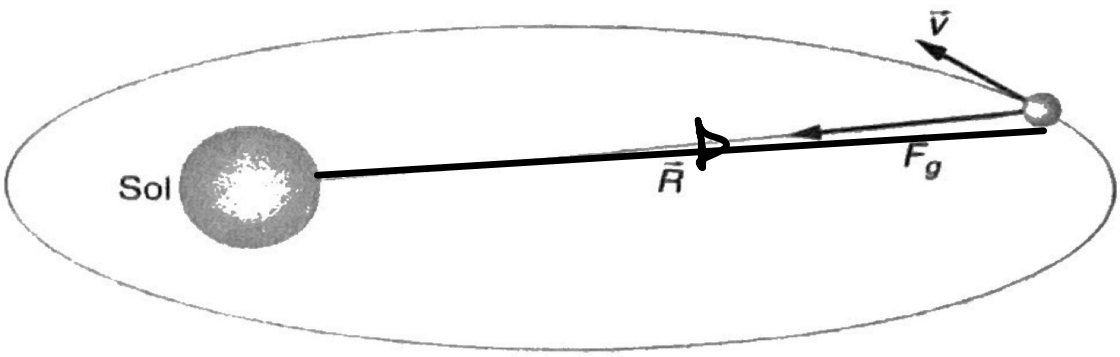
Los planetas giran alrededor del Sol describiendo **órbitas elípticas** en uno de cuyos focos está el Sol.

La fuerza gravitatoria es una fuerza central y en dicho caso su dirección pasa por el centro O (Sol), al ser $\vec{M}$=0, $\vec{L}$=cte, siendo $\vec{L}$=m · $\vec{r}$ x $\vec{v}$ constante en módulo, y al ser constante en dirección, $\vec{r}$ y $\vec{v}$ estarán en el mismo plano, con lo cual la órbita será plana, siendo su sentido el mismo (el marcado por el producto vectorial).



11.- La segunda ley de Kepler dice que los planetas tienen velocidades, areolares constantes, lo que entendemos como consecuencia de la conservación del momento angular de los planetas. ¿Cuál es la característica de la fuerza gravitatoria entre el Sol y los planetas, que implica la conservación del momento angular?.

La fuerza gravitatoria que ejerce el Sol sobre los planetas es una fuerza central, dirigida siempre hacia el mismo punto:



El momento, $\vec{M}$, de esa fuerza, $\vec{F_G}$, respecto al Sol es:

$$\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F_G} \rightarrow M = R \cdot F_G \cdot sen\,180^\circ = 0$$

Esta característica de ser una fuerza central es la que implica que $\vec{M} = 0$ y al ser $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ implicará que $\vec{L}$ sea cte.