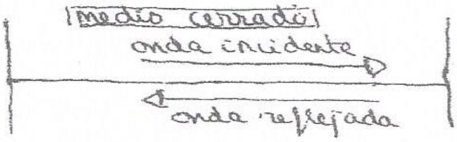
ONDAS ESTACIONARIAS

Hasta ahora hemos supuesto que las ondas se propagaban por medios abiertos o ilimitados. Un medio se considera abierto cuando la propagación no encuentra ningún obstáculo que la refleje (o dicho vulgarmente, "haga rebotar") las ondas hacia la fuente emisora.
Sin embargo, si una onda viaja en un medio cerrado al llegar al obstáculo se reflejará dando lugar a otra onda de la misma amplitud, longitud de onda y frecuencia (mismas características) que se propaga en la misma dirección pero en sentido contrario, y a la que llamamos onda reflejada.

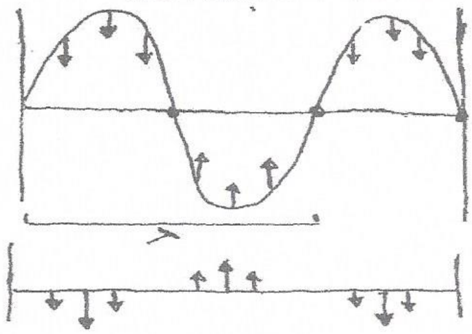


Onda incidente: $y_1 = A \cdot sen(\omega t - kx)$
Onda reflejada: $y_2 = A \cdot sen(\omega t + kx)$

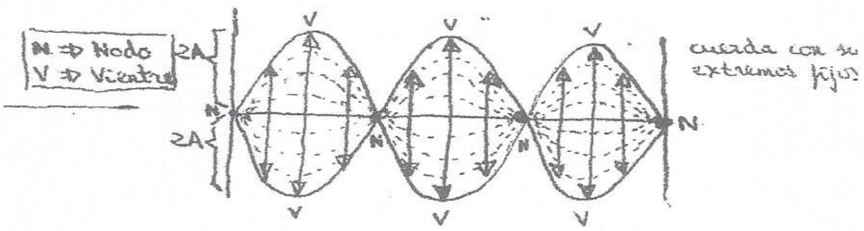
Resultante de la interferencia entre ambas según el principio de superposición
$y = y_1 + y_2$

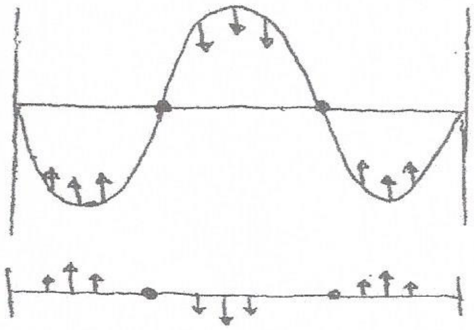
Al resultado de la interferencia de esas dos ondas se le denomina onda estacionaria. Un ejemplo de este tipo de ondas sería el de la onda producida al hacer vibrar la cuerda de una guitarra.
Por tanto, al hablar de una onda estacionaria estamos hablando de una superposición de ondas con iguales características, que se propagan en la misma dirección pero en sentido contrario.
Las ondas estacionarias tienen unas características peculiares que ahora veremos.
La deducción de la ecuación de onda que las define no se exige en este curso, por lo que pasaremos a describir su función de onda para los siguientes casos:

a) Onda estacionaria propagada por una cuerda con sus extremos fijos
La evolución de la onda en un ciclo completo es la siguiente:



Podemos representar la evolución de la onda estacionaria con el tiempo dibujándola también de la siguiente manera:





La ecuación de la onda estacionaria para este caso de sus extremos fijos es:

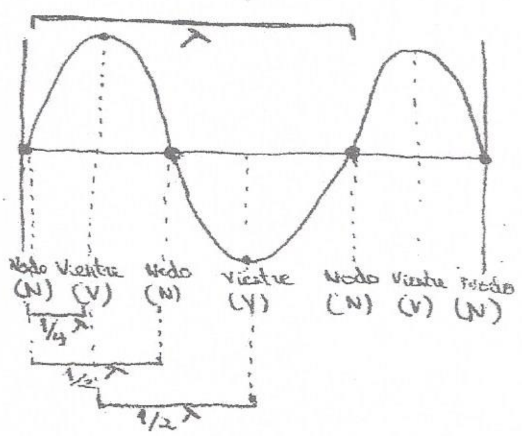
$y(x,t) = 2A \cdot sen(kx) \cdot cos(\omega t)$

y: elongación de un punto x en un instante t

A: amplitud de las ondas que por superposición dan esta onda estacionaria

k: número de onda de las ondas que por superposición dan esta onda estacionaria

ω: pulsación o frecuencia angular de las ondas que por superposición dan esta onda estacionaria



En la figura de la página anterior donde se representa la evolución de la onda estacionaria con el tiempo se ve que los puntos del medio vibran con un movimiento armónico simple (poseen la energía de dicho m.a.s), cada uno de ellos con una determinada amplitud de acuerdo con su posición, a excepción de los nodos (N), que son puntos de amplitud nula , y que, como se ve en la figura, no vibrarán en ningún instante, permaneciendo constantemente en reposo. De esta forma no se desplaza el perfil de la onda($\not\longrightarrow$), sino que permanece estacionario.
Por otro lado se ve que aparecen otros puntos llamados vientres (V), que oscilarán con amplitud máxima, que es igual a 2A.
En la figura de la página anterior, si observamos abajo del todo, aparecen las siguientes distancias entre nodos y vientres:

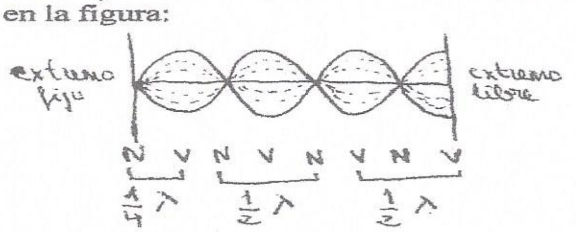
Distancia nodo-vientre consecutivos $= \dfrac{1}{4}\lambda$

Distancia nodo-nodo consecutivos $= \dfrac{1}{2}\lambda$

Distancia vientre-vientre consecutivos $= \dfrac{1}{2}\lambda$

b) Onda estacionaria propagada por una cuerda que empieza por un extremo fijo y acaba en un extremo libre.

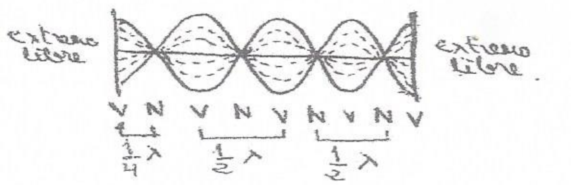
La ecuación de la onda es la misma que para el caso anterior, y las distancias entre nodos y vientres también son las mismas que para el caso anterior según podemos ver en la figura:



$$y = 2A \cdot \text{sen}(kx) \cdot \cos(\omega t)$$

c) Onda estacionaria propagada por una cuerda que empieza por un extremo libre

Las distancias entre nodos y vientres son las mismas que para los dos casos anteriores.
Sin embargo, la ecuación de la onda estacionaria es distinta a los dos casos anteriores



$$y = 2A \cdot \cos(kx) \cdot \text{sen}(\omega t)$$

Existen una serie de diferencias entre las ondas estacionarias vistas en esta pregunta y las ondas viajeras vistas en apartados anteriores.
La primera de ellas es que en estas ondas estacionarias se observa la presencia de una serie de nodos estacionarios, es decir, puntos que están permanentemente fijos en cualquier instante, y por ello al no vibrar en ningún instante, la energía no se transmite en esos puntos, por lo que hablando en sentido estricto una onda estacionaria no es un movimiento ondulatorio al no haber transporte neto de energía de unos puntos a otros.
Otra diferencia respecto a las ondas viajeras es que debido a la presencia de dichos nodos que no transmiten la vibración, el perfil de la onda no se desplaza, permaneciendo estacionario, y así, los puntos del medio (excepto los nodos) vibran como si se tratase de un conjunto de osciladores armónicos, cada uno con una amplitud determinada (sin embargo, en las ondas viajeras el perfil de la onda se desplaza con el tiempo)

Un ejemplo de ondas estacionarias son las propagadas por una cuerda tensa, de esta forma cuando aumentamos la tensión de la cuerda, aumenta la frecuencia del movimiento de la cuerda, y por ello al tensar las cuerdas de una guitarra escucharemos sonidos con una frecuencia mayor (que son los que nos suenan en un tono más agudo).

El estudio de las ondas estacionarias tiene, como se ve, muchas aplicaciones, y así las ondas estacionarias en cuerdas tienen gran importancia en música.
Las ondas generadas en tubos sonoros de algunos instrumentos también son estacionarias.
Otras aplicaciones de este tipo de ondas son en el estudio de resortes o bien para el estudio del grado de resistencia de ciertos materiales.

ONDAS ESTACIONARIAS EN TUBOS Y CUERDAS

Cuerda fija en sus dos extremos

Las ondas estacionarias no son ondas de propagación sino los distintos modos de vibración de una cuerda, una membrana, etc. Cuando dos trenes de onda de la misma frecuencia, velocidad y amplitud, viajan en sentidos opuestos, la superposición de ellos da lugar a ondas estacionarias. Una de las características más importantes de estas ondas es el hecho de que la amplitud de la oscilación no es la misma para diferentes puntos, sino que varía con la posición de ellos.
Hay puntos que no oscilan, es decir, tienen amplitud cero; dichas posiciones se llaman *nodos*. También hay puntos que oscilan con amplitud máxima; esas posiciones se llaman *antinodos*.

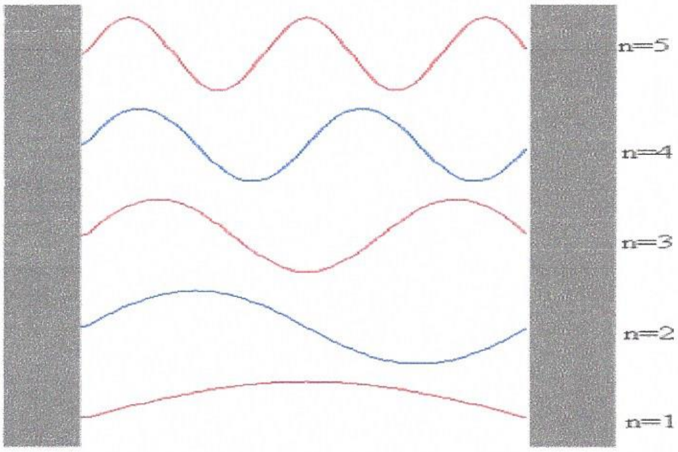


Figura 1: Ondas Estacionarias con su respectivo número de armónicos (n). En una cuerda fija en ambos extremos, se pueden formar ondas estacionarias de modo que siempre los puntos extremos son nodos. La cuerda puede oscilar con distintas formas denominadas modos de vibración, con nodos entre sus extremos, de tal manera que las longitudes de onda λcorrespondientes a las ondas estacionarias cumplen con la relación:

$$n\frac{\lambda}{2} = L \qquad (1)$$

donde Les el largo de la cuerda y $n = 1, 2, 3, \ldots$son los armónicos.

Sabemos que la velocidad de propagación de una onda en un medio homogéneo, esta dado por:

$$V = \lambda \cdot f \qquad (2)$$

Siendo $f$la frecuencia de la vibración. Por otra parte, la velocidad de propagación de una onda transversal en una cuerda, está dada por:

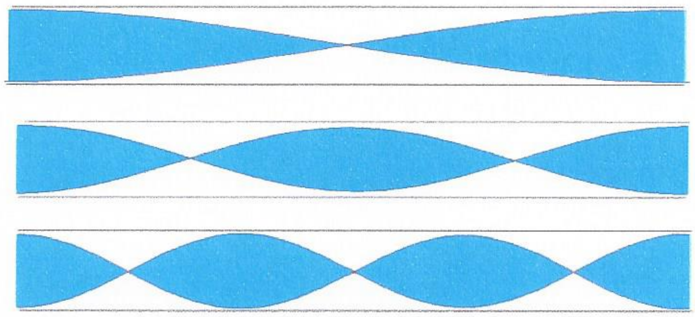
$$V = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad (3)$$

Donde Tes la tensión de la cuerda y μsu densidad lineal. De las expresiones (1), (2) y (3) Ud. puede deducir que:

$$f_n = \frac{nV}{2L} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad (4)$$

Esta expresión da todas las frecuencias naturales de oscilación de la cuerda, o dicho de otra forma, las frecuencias correspondientes a los distintos modos de vibración de la cuerda.
Para $n = 1$, se obtiene $f_1 = V/2L$, siendo el primer armónico o frecuencia fundamental de la cuerda. Y para $n = 2, 3, \ldots$se obtienen $f_2, f_3, , \ldots\ldots$,llamados armónicos.

Tubo abierto en sus dos extremos



Si un tubo es abierto, el aire vibra con su máxima amplitud en los extremos. En la figura, se representan los tres primeros modos de vibración

Como la distancia entre dos nodos o entre dos vientres es media longitud de onda. Si la longitud del tubo es L, tenemos que

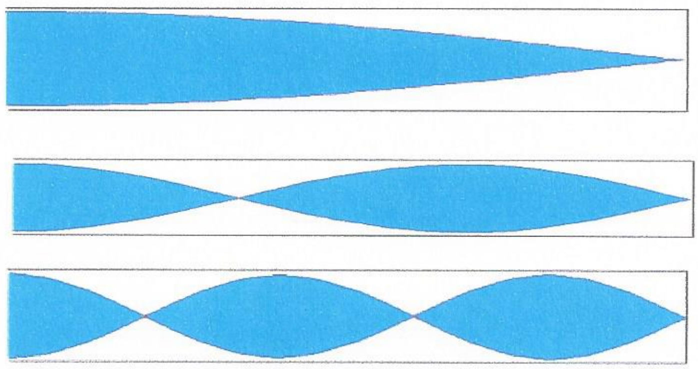
$L=l/2$, $L=l$, $L=3l/2$, ... en general $L=nl/2$, n=1, 2, 3... es un número entero

Considerando que $l=v_s/f$ (velocidad del sonido dividido la frecuencia)

Las frecuencias de los distintos modos de vibración responden a la fórmula

$$f=\frac{n}{2}\frac{v_s}{L} \qquad n=1,2,3...$$

Tubo abierto en un extremo y cerrado por el otro



Si el tubo es cerrado se origina un vientre en el extremo por donde penetra el aire y un nodo en el extremo cerrado. Como la distancia entre un vientre y un nodo consecutivo es $l/4$. La longitud L del tubo es en las figuras representadas es L=l /4, $L=3l/4$, $L=5l/4$...

En general $L=(2n+1)\,l/4$; con n=0, 1, 2, 3, ...

Las frecuencias de los distintos modos de vibración responden a la fórmula

$$f=\frac{2n+1}{4}\frac{v_s}{L} \qquad n=0,1,2,3...$$

Cuerda libre en un extremo y fija por el otro

En este caso las deducciones y las expresiones son las mismas que en el caso anterior del tubo abierto por un extremo y cerrado por el otro

$$f=\frac{2n+1}{4}\frac{v_s}{L} \qquad n=0,1,2,3...$$

EJERCICIOS ONDAS ESTACIONARIAS

1.- La función de onda correspondiente a una onda estacionaria en una cuerda fija en ambos extremos de longitud L es $y = 0,5 \text{ sen } (0,02x) \cos (30t)$ en donde x e y se miden en centímetros y t en segundos. ¿Cuál es la longitud de onda?, ¿y la frecuencia?.¿Cuál es la velocidad de las ondas transversales en esta cuerda?. Si la ecuación anterior corresponde a la onda fundamental, ¿Cuál es la longitud de la cuerda?.

2.- Una cuerda de 3 metros de largo y fija por sus dos extremos está vibrando en su tercer armónico. El desplazamiento máximo de los puntos de la cuerda es de 4 mm. La velocidad de las ondas transversales en ella es de 50 m/s. a) ¿Cuáles son la longitud de onda y la frecuencia de esta onda?. b) Escribir la ecuación de la onda correspondiente a este caso.

3.- Una cuerda de 2 m de largo está accionada sujeta por ambos extremos posee una frecuencia de 240 Hz y forma un patrón de onda estacionaria en cuatro segmentos (cuarto armónico). ¿Cuál es la rapidez de dicha onda?

4.- La ecuación de una onda en una cuerda es :

$$y\,(x,t) = 10 \cdot \cos\,(\pi/3 \cdot x) \cdot \text{sen}\,(2\pi t)\ \text{(S.I.)}$$

a) Explique las características de la onda y calcule el período, la longitud de onda, la amplitud y la velocidad de propagación de las ondas cuya superposición da lugar a esta vibración.

b) Calcule la disancia nodo-nodo, nodo-vientre y vientre-vientre consecutivos

c) Determine la velocidad de una partícula situada en el punto x = 1'5 m en el instante t= 0'25 s. Explique el resultado

5.- Una cuerda vibra de acuerdo con la ecuación :

$$y\,(x,t) = 5 \cdot \text{sen}\,(\pi/3 \cdot x) \cdot \cos\,(40\pi t)\ \text{(S.I.)}$$

a) Calcule la amplitud y la velocidad de propagación de las ondas cuya superposición pueda dar lugar a esta vibración

b) Calcule la distancia entre nodos consecutivos, la distancia entre vientres consecutivos, asi como la distancia nodo-vientre consecutivos

c) Calcule la velocidad de una partícula de la cuerda situada en x = 1'5 m cuando t=1'25s. Explique el resultado

6.- La cuerda de una guitarra vibra de acuerdo con la ecuación :

$$y(x, t) = 0'01 \cdot \text{sen}\,(10\, \pi\, x) \cdot \cos\,(200\, \pi t)\ (\text{S.I})$$

a) Indique de qué tipo de onda se trata y calcule la amplitud y la velocidad de propagación de las ondas cuya superposición da lugar a dicha onda.

b) ¿Cuál es la energía de una partícula situada en x = 10 cm?. Razónese

7.- Dos ondas de igual amplitud y longitud de onda (λ=20 cm) se propagan en sentidos opuestos por una cuerda tensa de 40 cm de longitud con sus dos extremos fijos. Establece los nodos de la onda estacionaria que se produce.

8.- La cuerda de una guitarra vibra de acuerdo con la ecuación

$$y\,(x,t) = 0'01 \cdot \text{sen}\,(10\pi x) \cdot \cos\,(200\pi t)\ \text{(S.I.)}$$

a) ¿ Cuál sería la amplitud del movimiento armónico simple descrito por la partícula en x= 0'025 m?

b) Representa gráficamente la posición de la partícula x =0'025 m en función del tiempo

c) Representa gráficamente la velocidad de la partícula x =0'025 m en función del tiempo

d) ¿Son iguales los valores máximos de elongación y de velocidad en otro punto cualquiera?

9.- La ecuación de una onda en una cuerda es:

$$y(x,t) = 10 \cdot \cos\,(\pi/3 \cdot x) \cdot \text{sen}\,(2\pi t)\ \text{(S.I.)}$$

a) ¿Cuál sería la ampitud resultante del movimiento armónico simple descrito por la partícula en x=1m?

b) ¿Cuál sería la amplitud máxima que podría presentarse en dicha onda?

c) ¿Porqué hablamos de amplitud máxima en este caso y únicamente de amplitud en el caso de las ondas viajeras?

10.- La ecuación de una onda en una cuerda es :

$$y = 0'2 \cdot \cos\,(0'5\pi x) \cdot \text{sen}\,(30\pi t)\ \text{(S.I.)}$$

a) Determina en qué instantes será máxima la elongación y la velocidad del punto x=0'5m

b) Realiza una representación gráfica aproximada de la forma que adopta la cuerda en el instante t =1/60 s

11.- Una cuerda de banjo de 30 cm de largo oscila en forma de onda estacionaria. Resuena en su modo fundamental a 256 Hz. ¿Cuál es la tensión de la cuerda si 80 cm de ésta tienen una masa de 0.75 Kg?

12.- Una cuerda sujeta por ambos extremos se tensa con 88,2 N. Su longitud es de 50 cm y su masa 0,5 g.

a) Calcule la velocidad de propagación

b) Determine la frecuencia fundamental

13.- Una cuerda de violín resuena con su frecuencia fundamental de 196 Hz. ¿Dónde debe colocar su dedo a lo largo de la cuerda para que la frecuencia fundamental sea 440 Hz?

14.- Determine la menor longitud de un tubo cerrado en uno de sus extremos a la que resonará el aire cuando se active con una fuente sonora de 160 Hz de frecuencia. La velocidad de propagación del sonido en el aire es de 340 m/s. Repita el cálculo para un tubo abierto en ambos extremos.

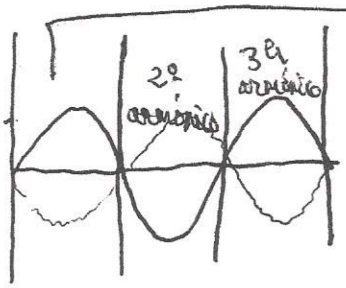
ONDAS ESTACIONARIAS

①

$$y = 0'5 \cdot \text{sen}(0'02x) \cdot \cos(30t) \quad (x \text{ e } y \text{ cm}, t \text{ en s})$$

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{0'02} = 100\pi \text{ cm} \qquad \omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{30}{2\pi} = \frac{15}{\pi} \text{ Hz.}$$

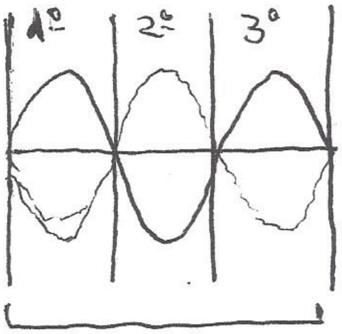
$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f = 100\pi \cdot \frac{15}{\pi} = 1500 \text{ cm/s}$$



→ 1er armónico o fundamental.

$$L = \frac{1}{2}\lambda = \frac{100\pi}{2} = 50\pi \text{ cm.}$$

②



3m

→ 3er armónico

$$L = 3 \cdot \frac{1}{2}\lambda \Rightarrow 3 = 3 \cdot \frac{1}{2}\lambda \Rightarrow \lambda = 2 \text{ m}$$

$$v = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v = \lambda f \Rightarrow f = \frac{v}{\lambda} = \frac{50}{2} = 25 \text{ Hz.}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 25 = 50\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$A = 0'004 \text{ m} \qquad K = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{2} = \pi \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

$$\boxed{y = 0'004 \cdot \text{sen}(\pi x) \cdot \cos(50\pi t) \ (\text{S.I})}$$

③

Primero se determina la longitud de onda de la onda a partir del inciso *d*) de la figura 22-2. Ya que cada segmento tiene una longitud de $\lambda/2$, se tiene

$$4\left(\frac{\lambda}{2}\right) = L \qquad \text{o} \qquad \lambda = \frac{L}{2} = \frac{2.0 \text{ m}}{2} = 1.0 \text{ m}$$

Entonces, al usar $\lambda = vT = v/f$, se tiene

$$v = f\lambda = (240 \text{ s}^{-1})(1.0 \text{ m/s}) = 0.24 \text{ km/s}$$

4 ⓐ Se trata de una onda estacionaria, producida por la interferencia en un medio cerrado de dos ondas (la incidente y la reflejada) de iguales características pero de sentido contrario. En este tipo de ondas, además de la materia, tampoco se propaga la energía debido a la existencia de nodos, que son puntos de la cuerda que no oscilan en ningún instante. (Ver teoría).

$$y(x,t) = 10 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) \cdot \mathrm{sen}\,(2\pi t) \quad (S.I)$$

La ecuación obedece a la forma: $y(x,t) = 2A \cdot \cos(Kx) \cdot \mathrm{sen}\,(\omega t)$
(Ver teoría)

$K = \frac{\pi}{3}\ rad\ m^{-1}$ $\qquad \omega = 2\pi\ rad \cdot s^{-1}$

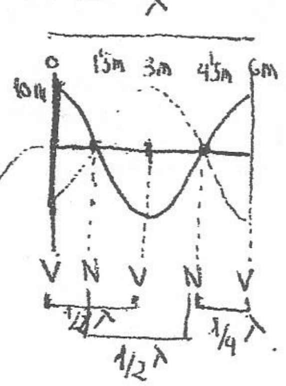
$2A = 10\,m \Rightarrow$ 10 m es la amplitud máxima que podría darse en esa onda

$A = \frac{10}{2} = 5\,m \Rightarrow$ 5 m es la amplitud de las dos ondas (incidente y reflejada) que por superposición dan lugar a la onda estacionaria.

$$\left.\begin{array}{l} K = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{K} = \frac{2\pi}{\pi/3} = 6\,m \\ \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1\,s \end{array}\right\} \quad v = \frac{\lambda}{T} = \frac{6}{1} = 6\,\frac{m}{s}$$

ⓑ

$$\text{Ver Teoría} \left\{ \begin{array}{l} N-N \Rightarrow \frac{1}{2}\lambda = \frac{1}{2}6 = 3\,m \\ N-V \Rightarrow \frac{1}{4}\lambda = \frac{1}{4}6 = 1'5\,m \\ V-V \Rightarrow \frac{1}{2}\lambda = \frac{1}{2}6 = 3\,m \end{array} \right.$$



La onda comienza con un vientre en x = 0

ya que si $y = 10 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\overset{0}{x}\right) \cdot \mathrm{sen}\,(2\pi t)$, 1

si x=0, al ser cos 0° = 1, habrá ciertos instantes en los que ese punto alcance la amplitud máxima (10 m), se trata de un vientre, a diferencia de otros puntos que no podrán alcanzar la amplitud máxima

ⓒ

$$v = \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{x=cte} = 10 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) \cdot \cos(2\pi t) \cdot 2\pi$$

$v = 20\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) \cdot \cos(2\pi t)$ (S.I) → Hemos obtenido una expresión general de la velocidad, y a continuación sustituimos los datos concretos.

$$\left.\begin{array}{l} x = 1'5\,m \\ t = 1'25\,s \end{array}\right\} \Rightarrow v = 20\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot 1'5\right) \cdot \cos(2\pi \cdot 0'25) \quad (S.I)$$

$$v = 20\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(2\pi \cdot 0'25)$$

0

Cuando x = 1'5 m,
la v = 0 sea cual sea el valor del instante t, por lo que se tratará de un nodo, o punto que está siempre en reposo, no transmitiendo la energía de un punto a otro de la cuerda.

⑤ a) $y = \boxed{5} \cdot \operatorname{sen}\left(\boxed{\frac{\pi}{3}} x\right) \cdot \cos\left(\boxed{40\pi} t\right)$ (S.I)

$y = \boxed{2A} \cdot \operatorname{sen}\left(\boxed{K} x\right) \cdot \cos\left(\boxed{\omega} t\right)$ ⇒ La ecuación obedece a la de una onda estacionaria en cuyo extremo existe un nodo (Ver Tª)

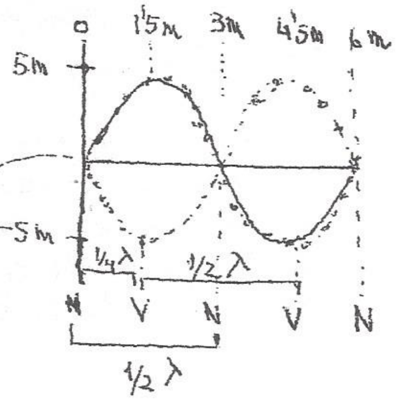
$2A = 5\,m$ $\quad k = \frac{\pi}{3}\ rad \cdot m^{-1}$ $\quad \omega = 40\pi\ rad \cdot s^{-1}$

$A = \frac{5}{2} = 2'5\,m$ ⇒ es la amplitud de cada una de las ondas (incidente y reflejada) que por superposición dan lugar a la onda estacionaria.

$$\left.\begin{array}{l} k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\pi/3} = 6\,m \\ \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{40\pi} = \frac{1}{20}\,s = 0'05\,s \end{array}\right\} \quad v = \frac{\lambda}{T} = \frac{6\,m}{0'05\,s} = 120\,\frac{m}{s}$$

b)

Ver Teoría
$$\left\{\begin{array}{l} N-N \Rightarrow \frac{1}{2}\lambda = \frac{1}{2}6 = 3\,m \\ N-V \Rightarrow \frac{1}{4}\lambda = \frac{1}{4}6 = 1'5\,m \\ V-V \Rightarrow \frac{1}{2}\lambda = \frac{1}{2}6 = 3\,m \end{array}\right.$$



A diferencia con el ejercicio ④ (ver pag anterior), la onda comienza con un nodo en $x = 0$, ya que

si $x = 0 \rightarrow y = 5 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} \cdot 0\right) \cdot \cos(40\pi t)$

$\downarrow$ 0

Si $x = 0$, al ser $\operatorname{sen} 0° = 0$, sea cual sea el valor del instante t, la elongación y será siempre cero, con lo cual en el extremo $x = 0$ existirá un nodo.

c)

$$v = \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{x = cte} = 5 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} \cdot x\right) \cdot \left[-\operatorname{sen}(40\pi t)\right] \cdot 40\pi$$

$$v = -5 \cdot 40\pi \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{3}\right) \cdot \operatorname{sen}(40\pi t)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 1'5\,m \\ t = 1'25\,s \end{array}\right\} \quad v = -5 \cdot 40\pi \cdot \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} \cdot 1'5\right)}_{\operatorname{sen} 90° \,\rightarrow\, 1} \cdot \underbrace{\operatorname{sen}(40\pi \cdot 1'25)}_{\operatorname{sen} 9000° = \operatorname{sen} 360° \,\rightarrow\, 0} = 0$$

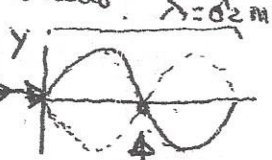
La velocidad sería nula en ese instante t, pero para otros valores distintos de t la velocidad no tiene porqué ser nula, por lo que no se trataría de un nodo, sino de un punto que en un instante determinado t poseería velocidad nula por encontrarse en uno de los extremos de su trayectoria.

⑥ a) $y = \overbrace{0'01}^{\times A} \cdot \operatorname{sen}(\overbrace{10\pi x}^{K}) \cdot \cos(\overbrace{200\pi t}^{\omega})$ (S.I)

. Se trata de una onda estacionaria en cuyo origen ($x=0$) existe un nodo

$y = 0'01 \cdot \underbrace{\operatorname{sen}(10\pi \cdot 0)}_{0} \cdot \cos(200\pi t)$

En $x=0$, $y=0$ sea cual sea el instante t
(La cuerda empieza en un nodo)



$2A = 0'01 \Rightarrow A = \dfrac{0'01}{2} = 5 \cdot 10^{-3}$ m

$K = \dfrac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \dfrac{2\pi}{K} = \dfrac{2\cancel{\pi}}{10\cancel{\pi}} = 0'2$ m

$\omega = \dfrac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\cancel{\pi}}{200\cancel{\pi}} = 0'01$ s

$v = \dfrac{\lambda}{T} = \dfrac{0'2}{0'01} = 20\ \dfrac{m}{s}$

b) $x = 10$ cm $= 0'1$ m $\Rightarrow$ ¡ojo!, hemos de pasar a unidades S.I para poder sustituir en la ecuación

$y = 0'01 \cdot \underbrace{\operatorname{sen}(10\pi \cdot 0'1)}_{\operatorname{sen}\pi \,=\, 0} \cdot \cos(200\pi t) = 0$

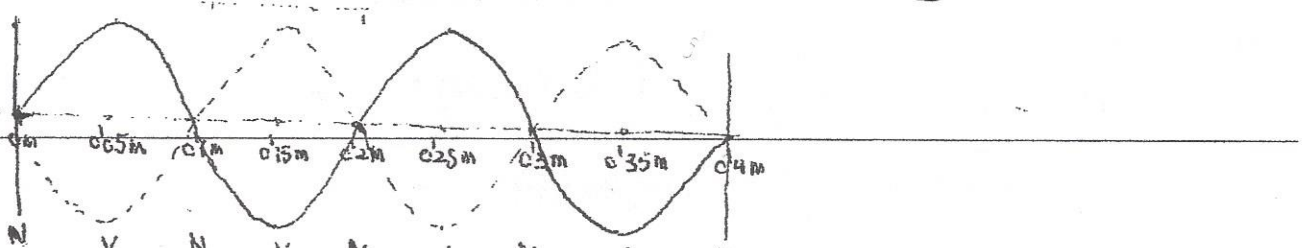
La elongación y será nula cuando $x = 0'1$ m, sea cual sea el valor del instante t, por lo que se trata de un nodo cuya energía valdrá cero, puesto que siempre se mantendrá en su misma posición $y=0$. (no posee ni E_c ni E_p)

Si $x = 0'1$ m aparece un nodo

⑦ $\lambda = 20$ cm $= 0'2$ m

Distancia N–V consecutivo $\Rightarrow$ N–V $= \frac{1}{4}\lambda = \frac{1}{4}\, 0'2 = 0'05$ m
Distancia N–N consecutivo $\Rightarrow$ N–N $= \frac{1}{2}\lambda = \frac{1}{2}\, 0'2 = 0'1$ m
Distancia V–V consecutivo $\Rightarrow$ V–V $= \frac{1}{2}\lambda = \frac{1}{2}\, 0'2 = 0'1$ m

La cuerda comienza en un nodo ya que nos dice que sus extremos están fijos.



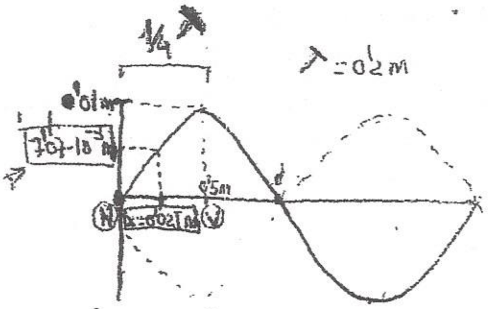
⑧ a) $y(x,t) = 0'01 \cdot \operatorname{sen}(10\pi x) \cdot \cos(200\pi t)$ (S.I.)

$x = 0'025$ m $\Rightarrow y = 0'01 \cdot \operatorname{sen}(10\pi \cdot 0'025) \cdot \cos(200\pi t)$
$y = 0'01 \cdot \operatorname{sen}(0'25\pi) \cdot \cos(200\pi t)$
$y = \underbrace{0'01 \cdot \operatorname{sen} 45^\circ}$ $\cdot \cos(200\pi t)$

Máxima elongación ó amplitud que podría alcanzar el punto $x = 0'025$ m. No llegaría al valor de la amplitud máxima (0'01 m)

Ecuación del M.A.S pto $x = 0'025$ m ← $y = \overbrace{7'07 \cdot 10^{-3}} \cdot \cos(200\pi t)$

$A = y_{max} = 7'07 \cdot 10^{-3} \cdot \overset{1}{\cancel{\cos(200\pi t)}} = 7'07 \cdot 10^{-3}$ m

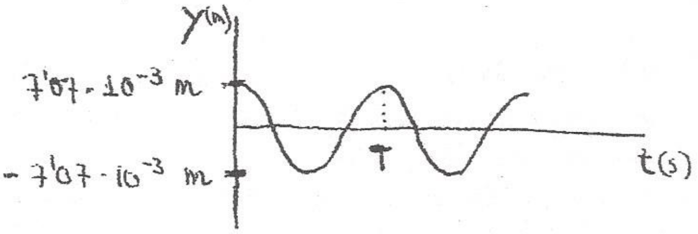


En una onda no todos los ptos describen la misma amplitud.

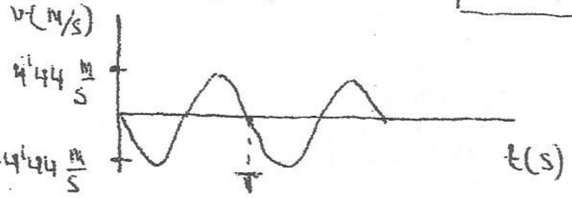
⑧ b) (Continuación) $y(x,t) = 0'01 \cdot \text{sen}(10\pi x) \cdot \cos(200\pi t)$ (S.I)

$x = 0'025\ m \Rightarrow \underline{y = 0'01 \cdot \text{sen}(10\pi \cdot 0'025) \cdot \cos(200\pi t)}$ (S.I)

Función que tenemos que representar $\boxed{y(t) = 7'07 \cdot 10^{-3} \cdot \cos(200\pi t)}$



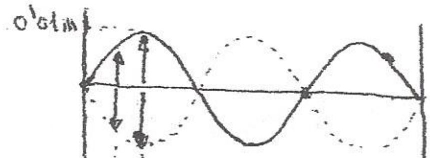
c) $v = \frac{dy}{dt} = 7'07 \cdot 10^{-3} \cdot [-\text{sen}(200\pi t)] \cdot 200\pi \Rightarrow \boxed{v = -4'44 \cdot \text{sen}(200\pi t)\ (S.I)}$ Función que debemos representar



d) Ecuación de la onda $y = \underbrace{0'01 \cdot \text{sen}(10\pi x)}_{\text{amplitud del pto } x} \cdot \cos(200\pi t) \rightarrow 1$ (Valor máximo que puede alcanzar)

En este caso, el valor máximo de la elongación o amplitud del M.A.S descrito por el punto sí irá determinado por su posición x, por lo que no tiene porqué darse la misma amplitud en unos puntos x y en otros distintos.

En una onda estacionaria



No todos los puntos x oscilan con la misma amplitud, unos llegan a la amplitud máxima (0'01 m) y otros no → Incluso hay puntos sin amplitud (nodos)

$v = \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{x = cte} = 0'01 \cdot \text{sen}(10\pi x) \cdot [-\text{sen}(200\pi t)] \cdot 200\pi$

$v = \underbrace{-2\pi \cdot \text{sen}(10\pi x)}_{v_{max}} \cdot \text{sen}(200\pi t) \rightarrow 1$ es su valor máximo.

La velocidad máxima también depende de la posición x, y por ello no tiene porqué ser la misma en diferentes puntos. En una onda estacionaria incluso hay puntos que poseen en cualquier instante velocidad nula (nodos).

⑨ a)

$y(x,t) = \underbrace{10 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} x\right)}_{\text{Amplitud del movimiento descrito por la partícula } x \text{ en cuestión}} \cdot \text{sen}(2\pi t)$

$x = 1\ m \Rightarrow y = 10 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot 1\right) \cdot \text{sen}(2\pi t) \rightarrow 1$ valor máximo que podría alcanzar ese término

$y = 10 \cdot \cos 60° \cdot 1$

$y = 5\ m \Rightarrow$ La amplitud del pto $x = 1m$ no llegaría a alcanzar la máxima amplitud que podría presentar la onda, que como se ve abajo son 10m

b) $y = 10 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} x\right) \cdot \text{sen}(2\pi t)$ (S.I)

$y = 2A \cdot \cos Kx \cdot \text{sen}(\omega t)$

$2A = A_{max} = 10\ m \Rightarrow$ Amplitud máxima que podría existir en la onda pero que no podrían alcanzarla todos los ptos x, solo aquellos que cumplan que $\cos\left(\frac{\pi}{3} x\right) = \pm 1$

(9) c) (Continuación). En una onda estacionaria, cuyas ecuaciones pueden ser:

$$\left\{\begin{array}{l} y = \boxed{2A \cdot sen(Kx)} \cdot \cos(\omega t) \\ y = \boxed{2A \cdot \cos(Kx)} \cdot sen(\omega t) \end{array}\right\}$$

La amplitud máxima valdría 2A, pero no todos los puntos x de la onda podrían alcanzarla, ya que el valor de x nos determina el valor de la amplitud de ese punto en concreto:

amplitud resultante del punto x $\left\{\begin{array}{l} 2A \cdot sen(Kx) \\ 2A \cdot \cos(Kx) \end{array}\right.$ (Según el caso)

→ Por ello, en una onda estacionaria la amplitud del pto nos la determina su valor x, habiendo puntos que alcanzan la máxima A (vientres), puntos con amplitud menor, y puntos con amplitud nula (nodos)

En una onda viajera, en la que pueden presentarse las ecuaciones → $\left\{\begin{array}{l} y = \boxed{A} \cdot sen(\omega t - kx) \\ y = \boxed{A} \cdot \cos(\omega t - kx) \end{array}\right.$ sea cual sea el valor de x, siempre puede corresponderle en un instante t el valor de la amplitud A, por ello, todos los puntos alcanzados por la perturbación describen el mismo M.A.S con la misma amplitud (todos pueden tenerla), por lo que en este caso no cabe hablar de amplitud máxima puesto que es la misma en todos los puntos.

Todos los ptos x pueden alcanzar el valor de la amplitud $y = A$

(10) a) $y = 0'2 \cdot \cos(0'5\pi x) \cdot sen(30\pi t)$ (S.I)

$x = 0'5\,m \rightarrow y = 0'2 \cdot \cos(0'5\,\pi \cdot 0'5) \cdot \boxed{sen(30\pi t)}$ (S.I)

La elongación será máxima en todos aquellos instantes en los que se cumpla que $\boxed{sen(30\pi t) = \pm 1}$, es decir; tiene que cumplirse que →

- $30\pi t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{60}$ s
- $30\pi t = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{3}{20}$ s
- $30\pi t = \frac{5\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{5}{60}$ s

⋮

y así sucesivamente en todos los instantes que cumplan que $sen(30\pi t) = \pm 1$.

$$v = \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{x=cte} = 0'2 \cdot \cos(0'5\,\pi x) \cdot \cos(30\pi t) \cdot 30\pi$$

$$v = 6\pi \cdot \cos(0'5\,\pi x) \cdot \cos(30\pi t) \quad (S.I)$$

$x = 0'5\,m \rightarrow v = 6\pi \cdot \cos(0'25\,\pi) \cdot \boxed{\cos(30\pi t)}$ (S.I)

La velocidad será máxima en todos aquellos instantes en los que se cumpla que $\boxed{\cos(30\pi t) = \pm 1}$ →

- $30\pi t = 0 \rightarrow t = 0$
- $30\pi t = \pi \rightarrow t = \frac{1}{30}$ s
- $30\pi t = 2\pi \rightarrow t = \frac{2}{30}$ s

⋮

y así sucesivamente siempre que $\cos(30\pi t) = \pm 1$

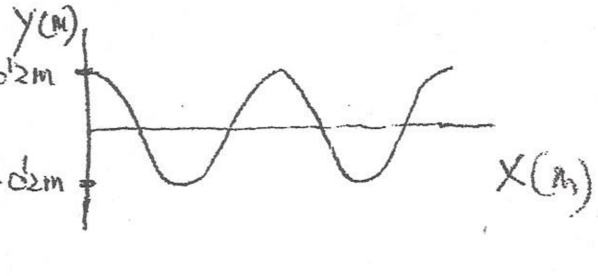
b) Cuando nos pidan representar la forma que adopta la cuerda, debemos representar la elongación y en función del punto x en cuestión. En el caso de que se trate del instante $t = \frac{1}{60}$ s, la función a representar será:

$$y = 0'2 \cdot \cos(0'5\,\pi x) \cdot sen(30\pi t)$$

$$t = \frac{1}{60}\,s \rightarrow y = 0'2 \cdot \cos(0'5\,\pi x) \cdot sen\left(30\pi \cdot \frac{1}{60}\right)$$

$$y = 0'2 \cdot \cos(0'5\,\pi x) \cdot sen\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\boxed{y = 0'2 \cdot \cos(0'5\,\pi x) \quad (S.I)}$$ →



11

Una cuerda de banjo de 30 cm de largo oscila en un patrón de onda estacionaria. Resuena en su modo fundamental a 256 Hz. ¿Cuál es la tensión en la cuerda si 80 cm de ésta tienen una masa de 0.75 g?

Primero se debe encontrar v y después la tensión. Se sabe que la cuerda vibra en un segmento cuando $f = 256$ Hz. Por consiguiente, de la figura 22-2*a*,

$$\frac{\lambda}{2} = L \qquad \text{o} \qquad \lambda = (0.30 \text{ m})(2) = 0.60 \text{ m}$$

y

$$v = f\lambda = (256 \text{ s}^{-1})(0.60 \text{ m}) = 154 \text{ m/s}$$

La masa por unidad de longitud de la cuerda es

$$\frac{0.75 \times 10^{-3} \text{ kg}}{0.80 \text{ m}} = 9.4 \times 10^{-4} \text{ kg/m}$$

Entonces, de $v = \sqrt{(\text{tensión})/(\text{masa por unidad de longitud})}$,

$$F_T = (154 \text{ m/s})^2(9.4 \times 10^{-4} \text{ kg/m}) = 22 \text{ N}$$

12

a) $$v = \sqrt{\frac{\text{tensión}}{\text{masa por unidad de longitud}}} = \sqrt{\frac{88.2 \text{ N}}{(5.00 \times 10^{-4} \text{ kg})/(0.500 \text{ m})}} = 297 \text{ m/s}$$

b) Recuerde que la longitud del segmento es $\lambda/2$ y utilice $\lambda = v/f$. Para la fundamental:

$$\lambda = 1.00 \text{ m} \qquad \text{y} \qquad f = \frac{297 \text{ m/s}}{1.00 \text{ m}} = 297 \text{ Hz}$$

13

Una cuerda de violín resuena a su frecuencia fundamental de 196 Hz. ¿Dónde debe colocar su dedo, a lo largo de la cuerda, para que la frecuencia fundamental sea de 440 Hz?

En la frecuencia fundamental, $L = \frac{1}{2}\lambda$. Ya que $\lambda = v/f$, se tiene que $f_1 = v/2L$. Originalmente, la cuerda de longitud L_1 resonaba a una frecuencia de 196 Hz, así que

$$196 \text{ Hz} = \frac{v}{2L_1}$$

Se quiere que resuene a 440 Hz, por consiguiente

$$440 \text{ Hz} = \frac{v}{2L_2}$$

Al eliminar v de las ecuaciones simultáneas se obtiene

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{196 \text{ Hz}}{440 \text{ Hz}} = 0.445$$

Para obtener la resonancia deseada, el dedo debe acortar la longitud de la cuerda hasta 0.445 de su longitud inicial.

14

a) Determine la menor longitud de un tubo cerrado en uno de sus extremos a la que resonará el aire cuando se active mediante una fuente sonora de 160 Hz de frecuencia. Considere que la rapidez del sonido en el aire es de 340 m/s. *b*) Repita el cálculo para un tubo abierto en ambos extremos.

a) En este caso se aplica la figura 22-4*a*. El tubo más corto tendrá una longitud $\lambda/4$. Por tanto,

$$L = \frac{1}{4}\lambda = \frac{1}{4}\left(\frac{v}{f}\right) = \frac{340 \text{ m/s}}{4(160 \text{ s}^{-1})} = 0.531 \text{ m}$$

b) En este caso, el tubo tiene antinodos en ambos extremos y un nodo en su centro. Entonces,

$$L = 2\left(\frac{1}{4}\lambda\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{v}{f}\right) = \frac{340 \text{ m/s}}{2(160 \text{ s}^{-1})} = 1.06 \text{ m}$$
