

EJERCICIO 1

La posición de la imagen se obtiene aplicando la ecuación fundamental de los espejos esféricos:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f} \quad [1]$$

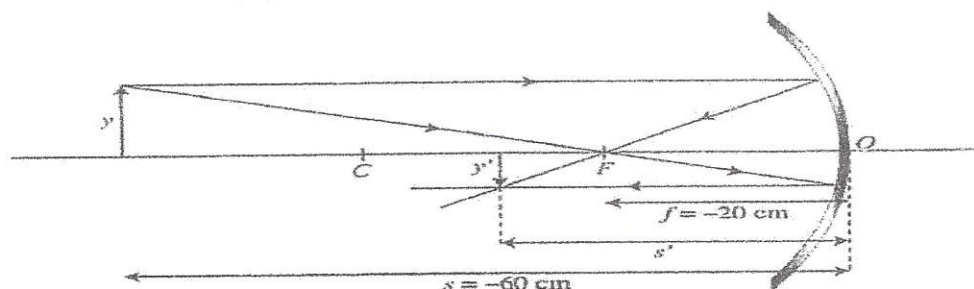
Siendo s y s' las distancias objeto e imagen, y f la distancia focal, que es la mitad del radio de curvatura.

El tamaño de la imagen se obtiene de la ecuación del aumento lateral:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \quad [2]$$

donde y e y' son el tamaño del objeto y de la imagen, respectivamente.

1) Para el caso del espejo cóncavo en que el objeto está a 60 cm del espejo:



(Obsérvese que el origen de coordenadas está en el centro del espejo, las medidas a su derecha son positivas y, a su izquierda, negativas; las medidas por encima son positivas y por debajo negativas).

Sustituyendo en la ecuación [1]:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{-60} = \frac{1}{-20} \rightarrow \frac{1}{s'} = -\frac{1}{20} + \frac{1}{60} = \frac{-3+1}{60} = \frac{-2}{60}$$

$$s' = -\frac{60}{2} = -30 \text{ cm}$$

El resultado obtenido es negativo porque la imagen está, al igual que el objeto, a la izquierda del espejo.

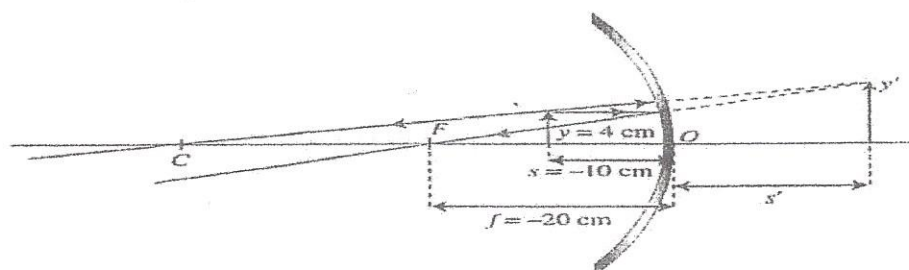
Sustituyendo en la ecuación [2]:

$$\frac{y'}{4} = -\frac{-30}{-60} = -\frac{1}{2} \rightarrow y' = -\frac{4}{2} = -2 \text{ cm}$$

El resultado es negativo, al contrario que el tamaño del objeto que tomó positivo, porque la imagen está invertida.

La imagen es real (se forma con los rayos que salen del objeto), menor e invertida.

2) Para el caso en que el objeto está a 10 cm del espejo:



Sustituyendo en la ecuación [1]:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{-10} = \frac{1}{-20}$$

$$\frac{1}{s'} = -\frac{1}{20} + \frac{1}{10} = \frac{-1+2}{20} = \frac{1}{20}$$

$$s' = 20 \text{ cm}$$

La distancia imagen es positiva porque la imagen sale a la derecha de espejo; es una imagen que sale no con los rayos sino con sus prolongaciones.

Sustituyendo en la ecuación [2]:

$$\frac{y'}{4} = -\frac{20}{-10} \rightarrow \frac{y'}{4} = 2 \rightarrow y' = 8 \text{ cm}$$

y' sale positivo como el objeto, porque la imagen es derecha.

La imagen es virtual, mayor y derecha.

EJERCICIO 2

a) La ecuación fundamental de los espejos esféricos es:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{R} = \frac{1}{f}$$

donde s y s' son las distancias del objeto al espejo y de la imagen al espejo respectivamente, y f es la distancia focal.

La ecuación del aumento lateral es:

$$M_L = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$$

donde y y y' son los tamaños del objeto y de la imagen, respectivamente.

Aplicando la ecuación fundamental de los espejos esféricos, se puede calcular la posición de la imagen:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{-45} = \frac{1}{-15} ; \frac{1}{s'} = \frac{1}{45} - \frac{1}{15} = \frac{1-3}{45} = -\frac{2}{45} ; s' = -\frac{45}{2} = -22,5 \text{ cm}$$

La distancia es negativa, lo que indica que la imagen se forma a la izquierda del espejo, con los rayos reflejados. Por tanto, la imagen es real.

Aplicando la ecuación del aumento lateral se obtiene:

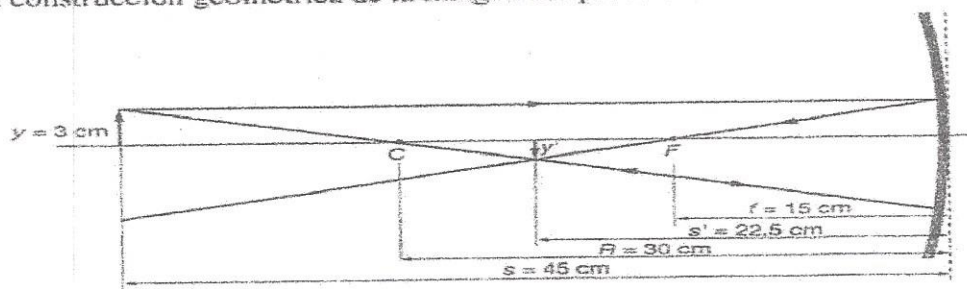
$$\frac{y'}{3} = -\frac{-22,5}{-45} = -\frac{1}{2} ; y' = -\frac{3}{2} = -1,5 \text{ cm}$$

La imagen tiene un tamaño menor que el objeto; concretamente, la mitad que este, y está invertida.

b) Para hallar gráficamente la imagen de un objeto producida por un espejo, se usan al menos dos rayos de trayectoria conocida; allí donde se corten ellos o sus prolongaciones, después de reflejarse en el espejo, estará la imagen del objeto. Estos rayos pueden ser:

- Un rayo proveniente del objeto que sale de él paralelo al eje óptico y que, después de reflejarse en el espejo, pasa por el foco.
- Un rayo que sale del objeto en la dirección que une a este con el centro de curvatura del espejo y que se refleja en el espejo en la misma dirección.
- Un rayo proveniente del objeto que se dirige al foco y que, después de reflejarse en el espejo, sale paralelo al eje óptico.

La construcción geométrica de la imagen del problema es:



Como se ve en la figura, la imagen es real porque se hace con los rayos reflejados. Es menor que el objeto y está invertida.

c) Pasando de la fórmula de los dioptrios esféricos a los planos (R tiende a infinito) y considerando la reflexión como un caso particular de la refracción en que $n' = -n$, se obtienen las fórmulas para la distancia y el tamaño de la imagen de un objeto en un espejo plano:

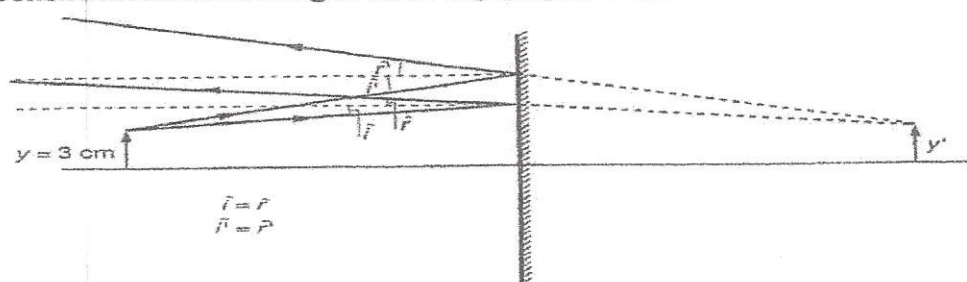
$$s' = -s ; y' = y$$

Para hallar gráficamente la imagen se usan dos rayos. Estos rayos se reflejan en el espejo según las leyes de la reflexión, de modo que las prolongaciones de los rayos nos dan la imagen que es, por tanto, virtual.

Las leyes de la reflexión son:

- El rayo incidente, la normal y el rayo reflejado están en el mismo plano.
- El ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.

La construcción de la imagen en el espejo plano es:



Vemos que la imagen es virtual porque se hace con las prolongaciones de los rayos. Es, además, de igual tamaño que el objeto y derecha.

EJERCICIO 3

P2 El espejo ha de ser cóncavo, ya que los convexos sólo dan imágenes virtuales.

Al ser cóncavo el espejo, la distancia del objeto al espejo y la distancia focal son negativas, como se indica en el dibujo:



Las leyes de los espejos esféricos son:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f} \quad \beta = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$$

donde s = distancia del objeto al espejo, s' = distancia de la imagen al espejo, f = distancia focal, y = tamaño del objeto, y' = tamaño de la imagen.

Sustituyendo los datos del problema podemos calcular s' :

$$\frac{-2 \cdot y}{y} = -\frac{s'}{-20} \rightarrow s' = -40 \text{ cm}$$

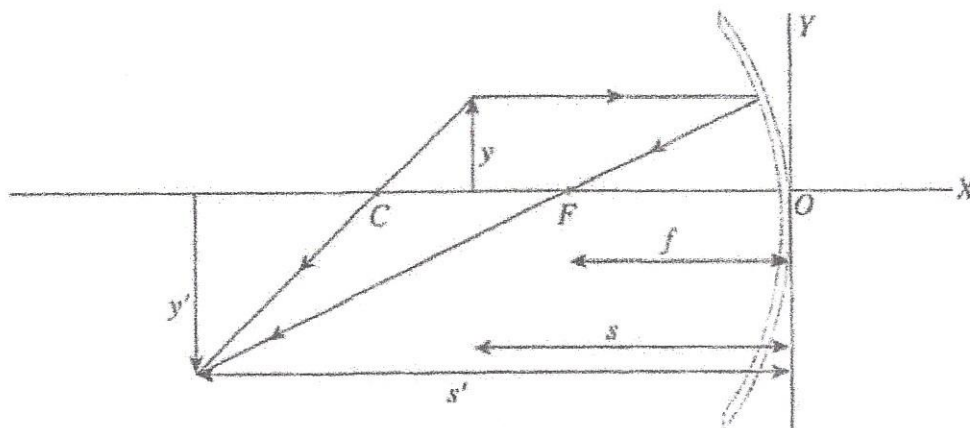
y, a continuación, f :

$$\frac{1}{-40} + \frac{1}{-20} = \frac{1}{f} \rightarrow -\frac{3}{40} = \frac{1}{f} \rightarrow f = -\frac{40}{3} = -13,3 \text{ cm}$$

y, por fin, el radio de curvatura:

$$R = 2 \cdot f = 26,6 \text{ cm}$$

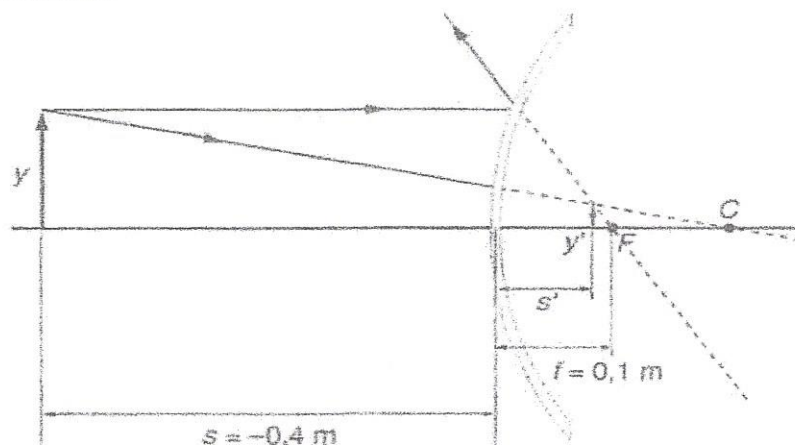
El esquema gráfico del problema es:



EJERCICIO 4

Para formar la imagen, se eligen dos rayos que salgan de un punto del objeto, y allí donde se corten, después de reflejarse en el espejo, estará la imagen de ese punto. Lo más fácil es elegir los siguientes:

- Un rayo paralelo al eje principal que, después de reflejarse en el espejo, pasa por el foco.
- Un rayo que pasa por el centro de curvatura del espejo, incide sobre el espejo perpendicularmente a su superficie y se refleja siguiendo la misma trayectoria.



La posición de la imagen se obtiene aplicando la ley fundamental de los espejos esféricos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} &= \frac{1}{f} \\ \frac{1}{-0,4} + \frac{1}{s'} &= \frac{1}{0,1} \rightarrow \frac{1}{s'} = \frac{1}{0,4} + \frac{1}{0,1} \\ \frac{1}{s'} &= \frac{1+4}{0,4} \rightarrow \frac{1}{s'} = \frac{5}{0,4} \\ s' &= \frac{0,4}{5} = 0,08 \text{ m}\end{aligned}$$

El resultado es positivo porque la imagen del objeto se forma a la derecha del espejo.

El tamaño de la imagen se obtendrá sustituyendo valores en la ecuación del aumento lateral:

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} &= -\frac{s'}{s} \\ \frac{y'}{0,03} &= -\frac{0,08}{-0,4} \rightarrow y' = \frac{0,08 \cdot 0,03}{0,4} = 0,006 \text{ m}\end{aligned}$$

El resultado es positivo porque la imagen es derecha. Es virtual, porque se forma con las prolongaciones de los rayos, y menor que el objeto.

EJERCICIO 5

④ Esta pregunta pertenece al tema de óptica geométrica.

a) La ecuación fundamental de los espejos esféricos es:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f} \quad f = \frac{R}{2}$$

Donde s y s' son las distancias del objeto y de la imagen al espejo, respectivamente y f es la distancia focal. La ecuación del aumento lateral es:

$$M_L = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$$

Donde y e y' son los tamaños del objeto y de la imagen, respectivamente.

Aplicando la ecuación fundamental, se puede obtener la posición del objeto:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{s} = \frac{1}{7,5} \rightarrow \frac{1}{s} = \frac{1}{7,5} - \frac{1}{5} = \frac{2-3}{15} = -\frac{1}{15} \rightarrow s = -15 \text{ cm}$$

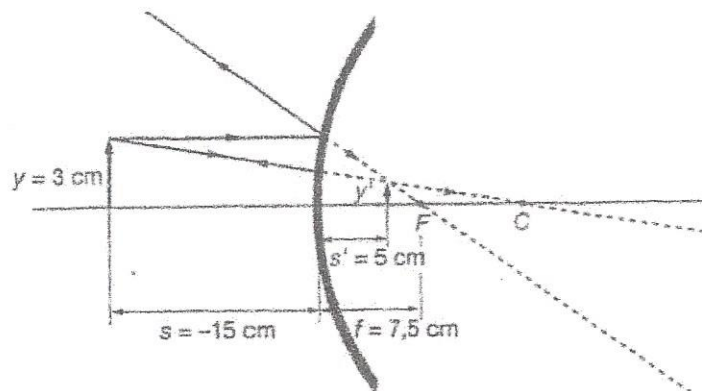
Aplicando la ecuación del aumento lateral, se puede obtener la altura del objeto:

$$\frac{1}{y} = -\frac{5}{-15} \quad y = 3 \text{ cm}$$

b) La imagen de un objeto se puede hallar gráficamente. Para ello se usan al menos dos rayos de trayectorias conocidas; allí donde se corten ellos o sus prolongaciones, después de reflejarse en el espejo, estará la imagen del objeto. Estos rayos pueden ser:

- Un rayo proveniente del objeto que sale de él paralelo al eje óptico y que, después de reflejarse en el espejo, pasa por el foco.
- Un rayo que sale del objeto en la dirección que une a este con el centro de curvatura del espejo, y que se refleja en el espejo en la misma dirección.

La construcción geométrica de la imagen en este caso es:



EJERCICIO 6

En las lentes se considera el centro óptico, O , como el centro de coordenadas. Todas las magnitudes que queden a la derecha serán positivas, y las que queden a la izquierda, negativas. Las magnitudes que queden por encima serán positivas, y las que queden por debajo, negativas.

La ecuación fundamental de las lentes delgadas es:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}$$

donde s es la distancia del objeto a la lente (siempre es negativa), s' es la distancia de la imagen a la lente y f' es la distancia focal imagen.

La ecuación del aumento lateral de las lentes es:

$$M_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}$$

donde y e y' representan el tamaño del objeto y de la imagen, respectivamente.

a) Aplicando la ecuación fundamental de las lentes delgadas, se puede calcular la posición de la imagen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s'} - \frac{1}{s} &= \frac{1}{f'} \rightarrow \frac{1}{s'} - \frac{1}{-20} = \frac{1}{4} \rightarrow \\ \rightarrow \frac{1}{s'} &= \frac{1}{4} - \frac{1}{20} \rightarrow \frac{1}{s'} = \frac{5-1}{20} \rightarrow \frac{1}{s'} = \frac{4}{20} \rightarrow s' = \frac{20}{4} = 5 \text{ cm} \end{aligned}$$

El signo positivo indica que la imagen está a la derecha de la lente; la imagen se forma con los rayos refractados que salen de la lente (no con sus prolongaciones) y la imagen es, por tanto, real.

b) Para calcular el aumento de la imagen aplicamos la ecuación:

$$M_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} ; M_L = \frac{y'}{y} = \frac{5}{-20} = -0,25$$

El resultado nos indica que la imagen es cuatro veces menor que el objeto y que está invertida:

$$y' = -0,25 \cdot y$$

EJERCICIO 7

La ecuación fundamental de las lentes delgadas es:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}$$

donde s es la distancia del objeto a la lente (siempre es negativa); s' , la distancia de la imagen a la lente, y f' , la distancia focal imagen. En las lentes convergentes, la distancia focal imagen, f' , es siempre positiva porque está situada a la derecha del centro óptico.

La ecuación del aumento lateral en las lentes, es:

$$M_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}$$

donde y e y' representan el tamaño del objeto y de la imagen, respectivamente.

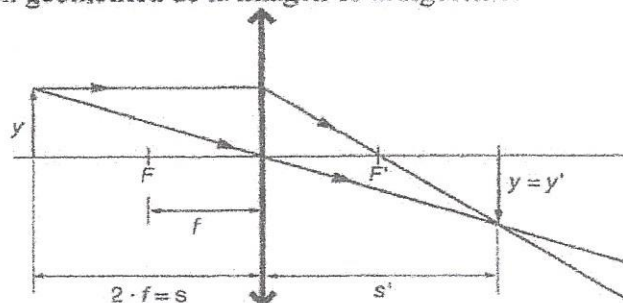
En las lentes se considera el centro óptico, O , como el centro de coordenadas. Todas las magnitudes que queden a la derecha serán positivas, y las que queden a la izquierda, negativas. Las magnitudes que queden por encima serán positivas, y las que queden por debajo, negativas.

a) Al estar situado el objeto a una distancia doble de la distancia focal, la imagen que se va obtener es real, invertida y de igual tamaño que el objeto.

Para construir la imagen de un objeto en una lente delgada, se deben dibujar, al menos, dos rayos de trayectorias conocidas y hallar su intersección (de ellos o de sus prolongaciones) después de refractarse en la lente. Los rayos son los siguientes:

- Un rayo que sale del objeto paralelo al eje óptico y que después de refractarse en la lente, pasa por el foco imagen, F' .
- Un rayo que pasa por el centro óptico de la lente y que no se desvía.
- Un rayo proveniente del objeto que pasa por el foco objeto, F ; este rayo llega a la lente y se refracta en ella, emergiendo paralelo al eje óptico.

La construcción geométrica de la imagen es la siguiente:



b) Sustituyendo valores en la ecuación fundamental de las lentes delgadas, se obtiene la distancia imagen:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \rightarrow \frac{1}{s'} - \frac{1}{(-20)} = \frac{1}{10} \rightarrow \frac{1}{s'} = -\frac{1}{20} + \frac{1}{10} = \frac{1}{20}$$

$$s' = 20 \text{ cm}$$

La distancia de la imagen es positiva, como corresponde a una imagen real y de valor absoluto igual que la distancia objeto, porque el objeto está situado a una distancia doble de su distancia focal.

Aplicando la ecuación del aumento lateral se puede conocer el tamaño de la imagen, y' :

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \rightarrow y' = y \cdot \frac{s'}{s} = 5 \cdot \frac{20}{-20} = -5 \text{ cm}$$

El tamaño de la imagen es igual al tamaño del objeto porque el objeto está situado a una distancia doble de la distancia focal. La imagen está invertida porque tiene signo negativo.

La potencia de la lente es la inversa de la distancia focal imagen expresada en metros:

$$P = \frac{1}{f'} = \frac{1}{0,1} = 10 \text{ D}$$

La potencia de las lentes convergentes siempre es positiva.

EJERCICIO 8

a) La ecuación fundamental de las lentes delgadas es:

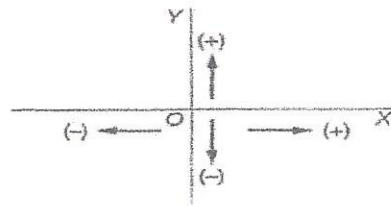
$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}$$

donde s es la distancia del objeto a la lente (siempre es negativa); s' , la distancia de la imagen a la lente, y f' , la distancia focal imagen. En las lentes convergentes, la distancia focal imagen, f' , es siempre positiva porque está situada a la derecha del centro óptico.

La ecuación del aumento lateral en las lentes es:

$$M_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}$$

donde y e y' representan el tamaño del objeto y de la imagen, respectivamente. En las lentes se considera el centro óptico, O , como el centro de coordenadas. Todas las magnitudes que queden a la derecha serán positivas, y las que queden a la izquierda, negativas. Las magnitudes que queden por encima serán positivas, y las que queden por debajo, negativas.



Sustituyendo valores en la ecuación fundamental, se puede calcular la posición de la imagen:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{-1} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{1}{s'} = \frac{1}{2} - 1 \quad ; \quad \frac{1}{s'} = -0,5 \quad ; \quad s' = -2 \text{ cm}$$

La imagen está a la izquierda de la lente, por tanto, no se ha formado con los rayos que se refractan en la lente, sino con sus prolongaciones. Es una imagen virtual.

El aumento lateral será:

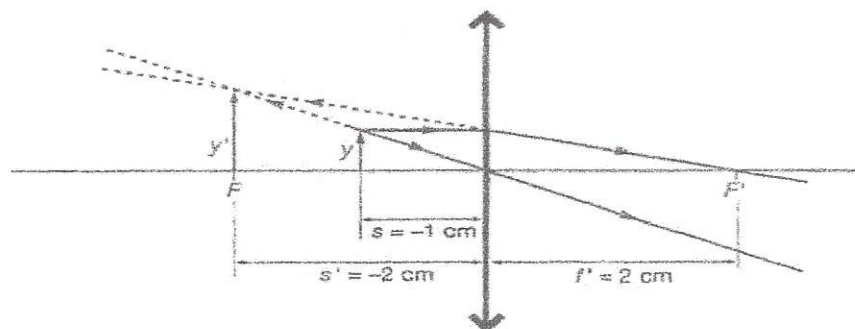
$$M_L = \frac{s'}{s} = \frac{-2}{-1} = 2$$

La imagen es mayor, de doble tamaño que el objeto y está derecha.

b) Para construir la imagen de un objeto en una lente delgada, se deben dibujar, al menos, dos rayos de trayectorias conocidas y hallar su intersección (de ellos o de sus prolongaciones) después de refractarse en la lente. Los rayos son los siguientes:

- Un rayo que sale del objeto paralelo al eje óptico y que, después de refractarse en la lente, pasa por el foco imagen, F' .
- Un rayo que pasa por el centro óptico de la lente y que no se desvía.
- Un rayo proveniente del objeto que pasa por el foco objeto, F ; este rayo llega a la lente y se refracta en ella, emergiendo paralelo al eje óptico.

La construcción geométrica de la imagen es la siguiente:



La imagen es virtual (se forma con las prolongaciones de los rayos) y de doble tamaño que el objeto (actúa como una lupa).

EJERCICIO 9

$$y = 1 \text{ cm} \quad ; \quad s = -30 \text{ cm} \quad ; \quad f' = 25 \text{ cm}$$

Sustituyendo en la ecuación se obtiene:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \rightarrow \frac{1}{s'} - \frac{1}{-30} = \frac{1}{25}$$
$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{25} - \frac{1}{30} = \frac{30 - 25}{25 \cdot 30} = \frac{5}{25 \cdot 30} = \frac{1}{150} \rightarrow s' = 150 \text{ cm}$$

b) Sustituyendo valores en la ecuación del aumento lateral, se obtiene el tamaño de la imagen:

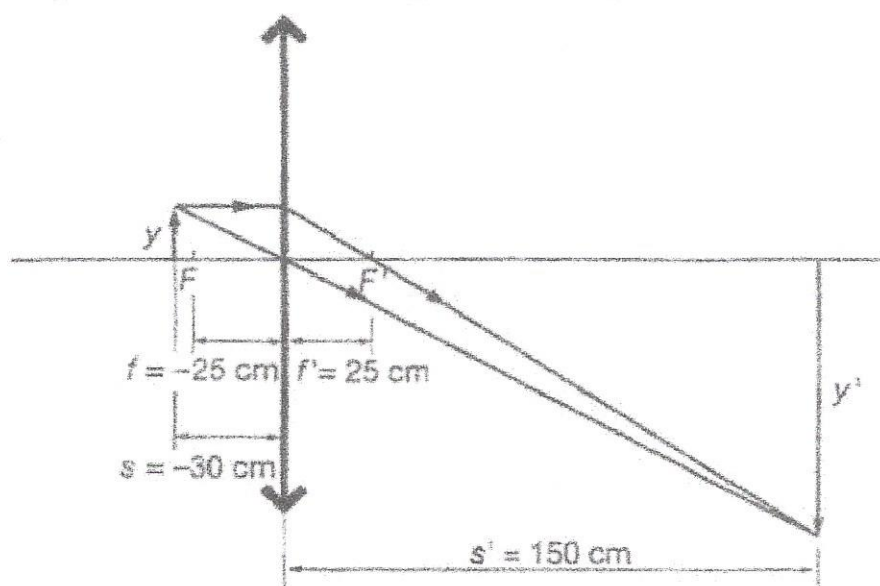
$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \rightarrow \frac{y'}{1} = \frac{150}{-30} = -5 \rightarrow y' = -5 \text{ cm}$$

La imagen es invertida (y' es negativa), de mayor tamaño que el objeto (cinco veces mayor la imagen que el objeto), y es real porque s' es positiva.

Para construir la imagen de un objeto en una lente delgada, se deben dibujar, al menos, dos rayos de trayectorias conocidas y hallar su intersección (de ellos o de sus prolongaciones) después de refractarse en la lente. Los rayos principales son los siguientes:

- Un rayo que sale del objeto paralelo al eje óptico y que, después de refractarse en la lente, pasa por el foco imagen, F' .
- Un rayo que pasa por el centro óptico de la lente, y que no se desvía.
- Un rayo proveniente del objeto que pasa por el foco objeto, F ; este rayo llega a la lente y se refracta en ella, emergiendo paralelo al eje óptico.

La construcción geométrica de la imagen es la siguiente:

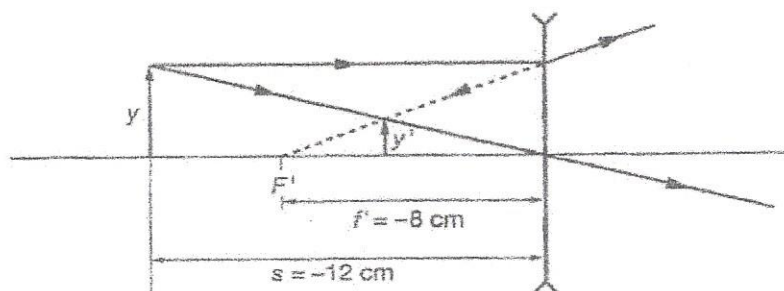


EJERCICIO 10

En las lentes se considera que todas las magnitudes que queden a la derecha y por encima del centro óptico serán positivas y las que queden a la izquierda y por debajo, negativas.

a) Para construir la imagen de un objeto en una lente delgada, se deben dibujar, al menos, dos rayos de trayectorias conocidas y hallar su intersección (de ellos o de sus prolongaciones) después de refractarse en la lente. Los rayos principales son los siguientes:

- Un rayo que sale del objeto paralelo al eje óptico y que, después de refractarse en la lente, pasa por el foco imagen, F' .
- Un rayo que pasa por el centro óptico de la lente, y que no se desvía.
- Un rayo proveniente del objeto que pasa por el foco objeto, F ; este rayo llega a la lente y se refracta en ella, emergiendo paralelo al eje óptico.



b) Aplicando la ecuación de las lentes delgadas se obtiene la posición de la imagen s' :

$$\begin{aligned} \frac{1}{s'} - \frac{1}{s} &= \frac{1}{f'} \rightarrow \frac{1}{s'} - \frac{1}{-12} = \frac{1}{-8} \rightarrow \\ \rightarrow \frac{1}{s'} + \frac{1}{12} &= \frac{1}{-8} \rightarrow \frac{1}{s'} = \frac{1}{-8} - \frac{1}{12} \rightarrow \\ \rightarrow \frac{1}{s'} &= -\frac{3}{24} - \frac{2}{24} = -\frac{5}{24} \rightarrow \\ \rightarrow s' &= -\frac{24}{5} = -4,8 \text{ cm} \end{aligned}$$

Como s' es negativa, la imagen está a la izquierda de la lente, por lo que no se produce con los rayos sino con sus prolongaciones; la imagen es, por tanto, virtual.

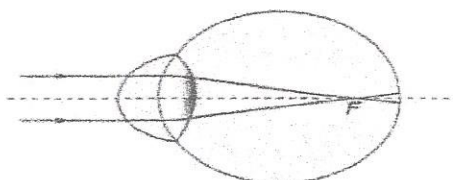
Aplicando la ecuación del aumento lateral se obtiene el tamaño de la imagen:

$$\begin{aligned} M_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \rightarrow \frac{y'}{2,5} &= \frac{-4,8}{-12} \rightarrow \\ \rightarrow \frac{y'}{2,5} &= 0,4 \rightarrow y' = 1 \text{ cm} \end{aligned}$$

La imagen es menor que el objeto y derecha (y' es positiva).

c) En las lentes divergentes, las imágenes son siempre virtuales. Los rayos divergen después de atravesar la lente (como se ve en el dibujo) y lo que convergen son las prolongaciones de los rayos.

La miopía consiste en la incapacidad del ojo de enfocar sobre la retina los rayos paralelos procedentes de un objeto lejano. Se debe a que la córnea tiene demasiada curvatura o a que el ojo es demasiado alargado. La imagen del objeto se forma delante de la retina:



EJERCICIO 11

Las distancias serán positivas o negativas según lo sean la abscisa o la ordenada correspondientes.

Los datos del problema son los siguientes:

Potencia lente = $-4,2$ dioptrías

Objeto delante de la lente $\rightarrow s = -50$ cm

Para saber el tipo de lente que tenemos, hemos de calcular primero la distancia focal imagen.

La distancia focal imagen podemos calcularla a partir de la expresión de la potencia de la lente:

$$\text{Potencia} = P = \frac{1}{f'}$$

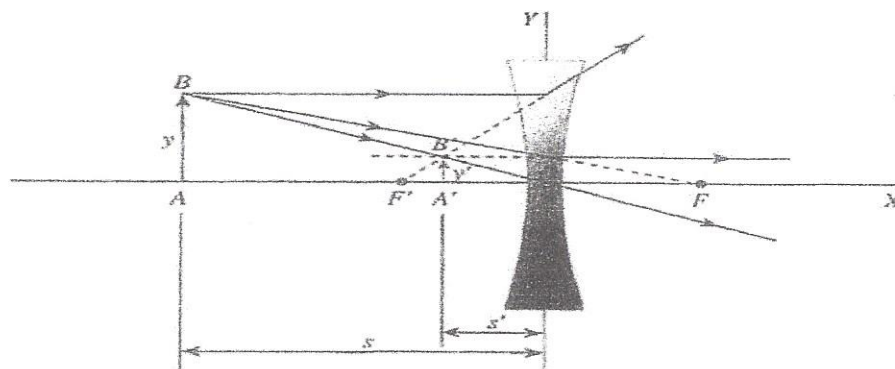
$$\text{Despejando: } f' = \frac{1}{-4,2} = -0,24 \text{ m}$$

f' = distancia focal imagen

Como la distancia focal imagen es negativa, esto nos indica que la lente es divergente. Las imágenes formadas por lentes divergentes siempre son virtuales, derechas y de menor tamaño que el objeto.

Para construir la imagen en una lente, se puede hacer dibujando al menos dos rayos de trayectorias conocidas y hallando su intersección después de refractarse en la lente. Por ejemplo:

1. Trazando un rayo paralelo al eje óptico que una vez refractado pasa por el foco imagen.
2. Trazando un rayo que pase por el centro geométrico de la lente (centro óptico), pues éste no se desvía.



Teniendo en cuenta la ecuación fundamental de las lentes, podemos calcular la posición de la imagen.

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}$$

donde: s' $\rightarrow$ distancia de la imagen a la lente

s $\rightarrow$ distancia del objeto a la lente

f' $\rightarrow$ distancia focal imagen

Por tanto:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{-50} = \frac{1}{-24} \rightarrow \frac{1}{s'} = -\frac{1}{24} - \frac{1}{50} \rightarrow s' = -16,22 \text{ cm}$$

- b) El aumento obtenido lo calculamos a partir de la fórmula del tamaño lateral de la lente:

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}$$

Donde: y $\rightarrow$ tamaño del objeto

y' $\rightarrow$ tamaño de la imagen

Por tanto:

$$\beta' = \frac{-16,22}{-50} = 0,32 \text{ cm}$$

- c) No se pueden obtener imágenes reales con las lentes divergentes. Las imágenes formadas por lentes divergentes siempre son virtuales.

EJERCICIO 12

La ecuación fundamental de las lentes delgadas es:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}$$

Donde s es la distancia del objeto a la lente (siempre es negativa); s' , la distancia de la imagen a la lente, y f' , la distancia focal imagen. En las lentes convergentes, la distancia focal imagen, f' , es siempre positiva porque está situada a la derecha del centro óptico y en las lentes divergentes, la distancia focal imagen, f' , es negativa porque está situada a la izquierda del centro óptico.

La ecuación del aumento lateral en las lentes es:

$$M_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}$$

Donde y e y' representan el tamaño del objeto y de la imagen, respectivamente.

En las lentes se considera que todas las magnitudes que queden a la derecha y por encima del centro óptico serán positivas y las que queden a la izquierda y por debajo, negativas.

- a) Del enunciado se deduce que la imagen es virtual (se produce delante de la lente) y reducida. Por tanto, debe tratarse de una lente divergente, cuya distancia focal imagen es negativa. Sustituyendo en [1] obtenemos la posición del objeto:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \rightarrow \frac{1}{-4} - \frac{1}{s} = \frac{1}{-6} \rightarrow \frac{1}{-4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{s} \rightarrow \frac{-2}{24} = \frac{1}{s} \rightarrow s = -12 \text{ cm}$$

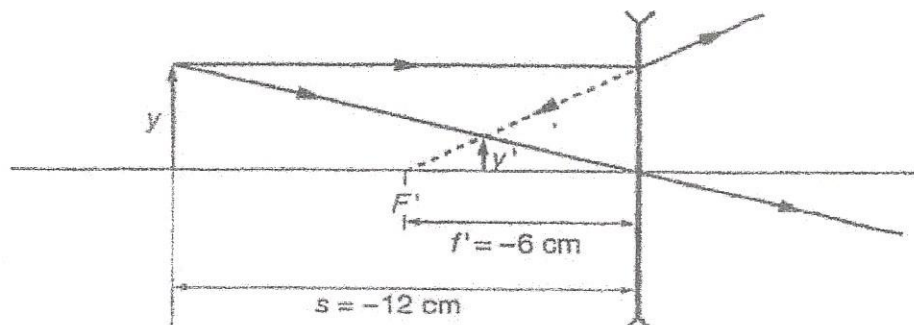
Aplicando la ecuación del aumento lateral, se obtiene el tamaño del objeto:

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \rightarrow \frac{1}{y} = \frac{-4}{-12} \rightarrow y = 3 \text{ cm}$$

- b) Para construir la imagen de un objeto en una lente delgada, se deben dibujar, al menos, dos rayos de trayectorias conocidas y hallar su intersección (de ellos o de sus prolongaciones) después de refractarse en la lente. Los rayos principales son los siguientes:

- Un rayo que sale del objeto paralelo al eje óptico y que, después de refractarse en la lente, pasa por el foco imagen, F' .
- Un rayo que pasa por el centro óptico de la lente, y que no se desvía.
- Un rayo proveniente del objeto que pasa por el foco objeto, F ; este rayo llega a la lente y se refracta en ella, emergiendo paralelo al eje óptico.

La construcción geométrica de la imagen es la siguiente:



EJERCICIO 13

- a) Las imágenes formadas por lentes divergentes son siempre virtuales, derechas y de menor tamaño que el objeto. Como según el enunciado, la imagen es mayor que el objeto, la lente es convergente.
- b) La ecuación fundamental de las lentes delgadas es:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}$$

donde s es la distancia del objeto a la lente (siempre es negativa); s' , la distancia de la imagen a la lente, y f' , la distancia focal imagen. En las lentes convergentes, la distancia focal imagen, f' , es siempre positiva porque está situada a la derecha del centro óptico.

La ecuación del aumento lateral en las lentes es:

$$M_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}$$

donde y e y' representan el tamaño del objeto y de la imagen, respectivamente. En las lentes se considera el centro óptico, O , como el centro de coordenadas. Todas las magnitudes que queden a la derecha serán positivas y las que queden a la izquierda, negativas. Las magnitudes que queden por encima serán positivas, y las que queden por debajo, negativas.

La potencia de la lente, medida en dioptrías, es la inversa de la distancia focal, f' , expresada en metros:

$$P = \frac{1}{f' \text{ (m)}}$$

Aplicando la ecuación del aumento lateral se puede conocer la distancia de la imagen a la lente, s' :

$$M_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} ; \quad \frac{20}{10} = \frac{s'}{-2} \rightarrow s' = -4 \text{ m}$$

Sustituyendo valores en la ecuación fundamental de las lentes delgadas, se obtiene la distancia focal imagen:

$$\frac{1}{-4} - \frac{1}{-2} = \frac{1}{f'} \rightarrow -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{f'}$$

$$0,25 = \frac{1}{f'} \rightarrow f' = \frac{1}{0,25} = 4 \text{ m}$$

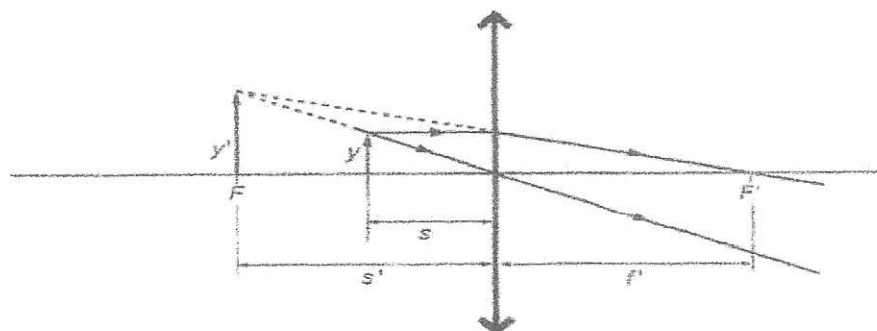
La potencia de la lente será:

$$P = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ D}$$

- c) Para construir la imagen de un objeto en una lente delgada, se deben dibujar, al menos, dos rayos de trayectorias conocidas y hallar su intersección (de ellos o de sus prolongaciones) después de refractarse en la lente. Los rayos son los siguientes:

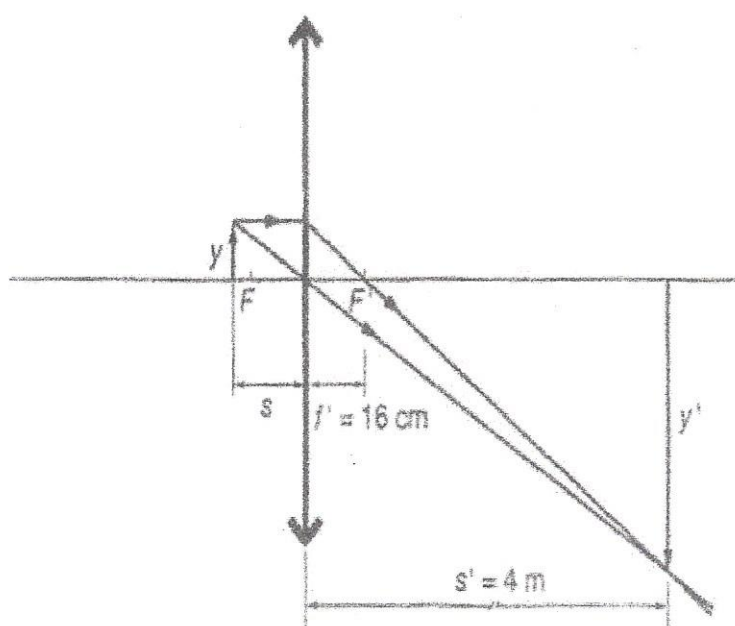
- Un rayo que sale del objeto paralelo al eje óptico y que, después de refractarse en la lente, pasa por el foco imagen, F' .
- Un rayo que pasa por el centro óptico de la lente y que no se desvía.
- Un rayo proveniente del objeto que pasa por el foco objeto, F ; este rayo llega a la lente y se refracta en ella, emergiendo paralelo al eje óptico.

La construcción geométrica de la imagen es la siguiente:



EJERCICIO 14

La construcción geométrica aproximada será:



- b) Aplicando la ecuación fundamental de las lentes delgadas, se puede hallar la distancia a la que hay que colocar la diapositiva para que la imagen se forme en la pantalla:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s'} - \frac{1}{s} &= \frac{1}{f'} \rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{s} = \frac{1}{0,16} \rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{0,16} = \frac{1}{s} \rightarrow \frac{0,16 - 4}{0,64} = \frac{1}{s} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{-3,84}{0,64} = \frac{1}{s} \rightarrow -6 = \frac{1}{s} \rightarrow s = -\frac{1}{6} = -0,166 \text{ m} = -16,6 \text{ cm} \end{aligned}$$

El signo negativo indica que el objeto está a la izquierda de la lente.

- c) El aumento de la imagen será:

$$M_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \rightarrow M_L = \frac{4}{-0,166} = -24$$

La imagen es 24 veces mayor y está invertida. Su tamaño será:

$$y' = M_L \cdot y = -24 \cdot 0,03 = -0,72 = -72 \text{ cm}$$

EJERCICIO 15

Datos suministrados en el enunciado del problema:

Tamaño del objeto: $y = 2 \text{ mm}$

Tamaño de la imagen: $y' = 3 \cdot y = 6 \text{ mm}$

Distancia objeto-pantalla: $d = 4 \text{ m}$

a) La imagen se recoge sobre una pantalla, así que es real. La lente es convergente, porque las divergentes solamente dan imágenes virtuales.

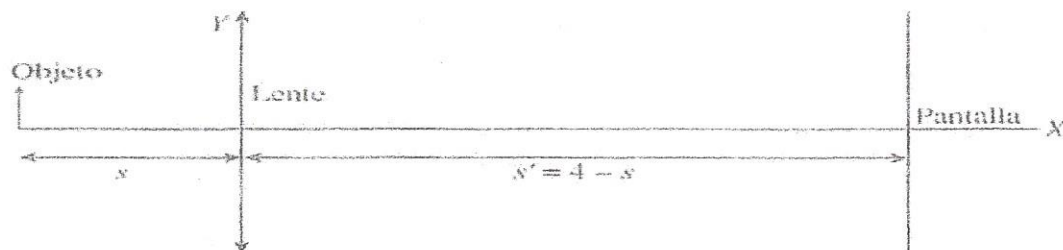
El enunciado ya dice que la lente está entre el objeto y la pantalla; la condición para que una lente convergente dé una imagen real es que el objeto esté entre el infinito y el foco.

b) Para calcular la distancia focal y la potencia de la lente, aplicamos las fórmulas de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{s'} - \frac{1}{s} \quad (1) \qquad \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \quad (2)$$

donde s = distancia del objeto a la lente, s' = distancia de la imagen a la lente, f' = distancia focal imagen. El centro de coordenadas se considera en el centro de la lente.

En el problema:



Sustituyendo valores en (2):

$$\frac{-6}{2} = \frac{4-s}{-s} \rightarrow s = 1 \text{ m}; \quad s' = 3 \text{ m}$$

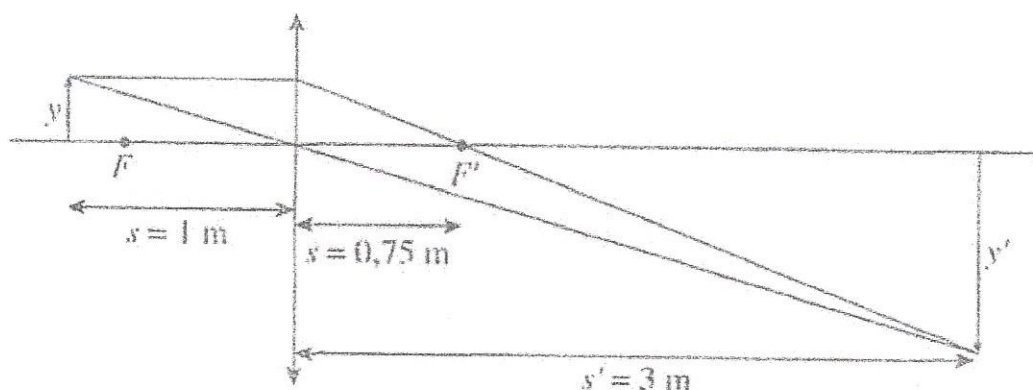
Sustituyendo luego en (1):

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{3} - \frac{1}{-1} \rightarrow f' = \frac{3}{4} \text{ m}$$

La potencia de la lente es la inversa de la distancia focal imagen expresada en metros:

$$P = \frac{1}{f'} = \frac{4}{3} \text{ dioptrías}$$

La construcción geométrica de la imagen:



EJERCICIO 16

- a) La imagen es real; por tanto, se trata de una lente convergente.

La imagen es invertida y de mayor tamaño que el objeto. Esto implica que el objeto estará situado entre F y $2 \cdot F$, es decir, cumple la relación $F < s < 2 \cdot F$.

La distancia focal la calculamos aplicando la ecuación fundamental de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{F'} \quad [1]$$

Hemos de hallar primero s' (distancia imagen). Esta puede obtenerse aplicando la ecuación del aumento lateral:

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}$$

Según el enunciado y el convenio de signos, los datos del problema son los siguientes:

$$y' = -4 \cdot y \quad s = -6 \text{ m}$$

Sustituyendo:

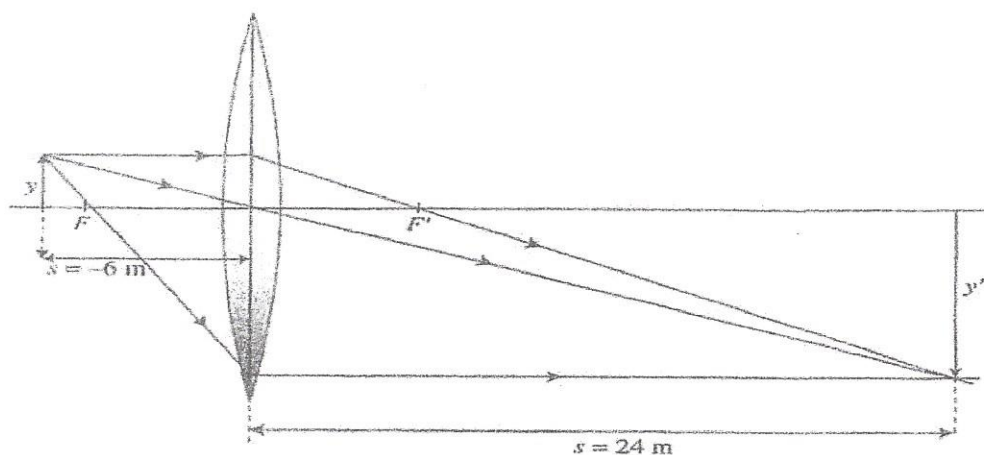
$$-\frac{4 \cdot y}{y} = \frac{s'}{-6} \rightarrow s' = 24 \text{ m}$$

Aplicando la ecuación [1] y despejando, obtenemos la distancia focal.

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \rightarrow \frac{1}{24} + \frac{1}{6} = \frac{1}{f'}$$

$$f' = 4,8 \text{ m}$$

La construcción geométrica es la siguiente:



- b) En este apartado, la posición de la pantalla, la distancia focal y el tamaño del objeto son los mismos que en el apartado a); solo varían la posición de la lente y, por tanto, los valores de s y s' .

Para calcular s y s' , aplicamos la ecuación fundamental de las lentes delgadas, teniendo en cuenta que, en valor absoluto, $s + s' = 30 \text{ m}$.

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{-(30 - s')} = \frac{1}{4,8} \rightarrow \frac{1}{s'} + \frac{1}{30 - s'} = \frac{1}{4,8}$$

$$\frac{30 - s' + s'}{s' \cdot (30 - s')} = \frac{1}{4,8}$$

$$(s')^2 - 30 \cdot s' + 144 = 0$$

$$s' = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 576}}{2} = \frac{30 \pm 18}{2} = \begin{cases} 24 \text{ m} \\ 6 \text{ m} \end{cases}$$

Resultado: $s' = 24 \text{ m} \rightarrow s = 30 - s' = 6 \text{ m}$ (Estos valores son los del caso a).)

$s' = 6 \text{ m} \rightarrow s = 24 \text{ m}$ (Esta es la solución del apartado b).)

EJERCICIO 17

La ecuación del aumento lateral es:

$$M_L = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$$

donde y e y' son los tamaños del objeto y de la imagen, respectivamente.

a) Los valores de la distancia objeto y del radio de curvatura son los siguientes:

$$R = 40 \text{ cm} ; s = -25 \text{ cm}$$

Sustituyendo en la ecuación [1], se obtiene la posición de la imagen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s'} + \frac{1}{-25} &= \frac{2}{40} = \frac{1}{20} \rightarrow \frac{1}{s'} = \frac{1}{20} + \frac{1}{25} = \frac{25 + 20}{20 \cdot 25} = \frac{45}{500} \rightarrow \\ \rightarrow s' &= \frac{500}{45} = 11,11 \text{ cm} \end{aligned}$$

A partir de la ecuación del aumento lateral se obtiene el tamaño de la imagen:

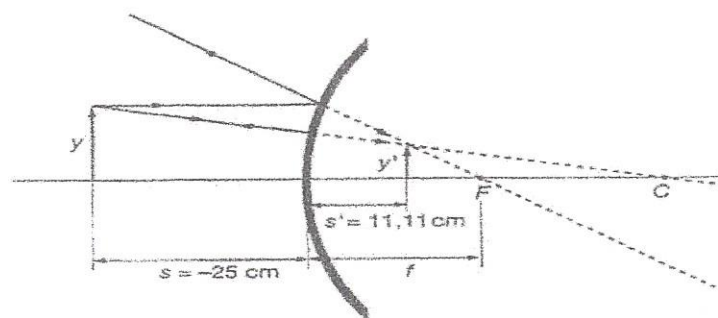
$$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \rightarrow \frac{y'}{0,5} = \frac{-11,11}{-25} \rightarrow y' = \frac{-11,11 \cdot 0,5}{-25} = 0,22 \text{ cm}$$

La imagen es virtual, derecha y de menor tamaño que el objeto, y está entre el espejo y el foco, como corresponde a una imagen obtenida en un espejo convexo.

Para hallar gráficamente la imagen de un objeto producida por un espejo, se usan al menos dos rayos de trayectoria conocida; allí donde se corten ellos o sus prolongaciones, después de reflejarse en el espejo, estará la imagen del objeto. Estos rayos pueden ser:

- Un rayo proveniente del objeto que sale de él paralelo al eje óptico y que, después de reflejarse en el espejo, pasa por el foco.
- Un rayo que sale del objeto en la dirección que une a este con el centro de curvatura del espejo y que se refleja en el espejo en la misma dirección.

La construcción geométrica de la imagen será, entonces:



En las lentes delgadas la imagen virtual está siempre situada a la izquierda de la lente; por tanto, debe ser negativa.

$$s' = -11,11 \text{ cm}$$

Aplicando la ecuación del aumento lateral se puede calcular la posición del objeto:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \rightarrow \frac{0,22}{0,5} = \frac{-11,11}{s} \rightarrow s = \frac{-11,11 \cdot 0,5}{0,22} = -25,25 \text{ cm}$$

Sustituyendo valores en la ecuación fundamental de las lentes delgadas, se obtiene la distancia focal imagen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s'} - \frac{1}{s} &= \frac{1}{f'} \rightarrow \frac{1}{-11,11} - \frac{1}{-25,25} = \frac{1}{f'} \\ \frac{1}{f'} &= \frac{-25,25 + 11,11}{11,11 \cdot 25,25} = \frac{-14,14}{280,53} \rightarrow f' = -19,84 \text{ cm} = -0,1984 \text{ m} \end{aligned}$$

La potencia de la lente será, entonces:

$$P = \frac{1}{f'} (\text{m}) = \frac{1}{-0,1984} = -5,04 \text{ D}$$

La potencia de la lente es negativa, lo que se corresponde con una lente divergente. Las lentes convergentes tienen potencia positiva.

EJERCICIO 18

- b) En las lentes se considera el centro óptico, O , como el centro de coordenadas. Todas las magnitudes que queden a la derecha serán positivas y las que queden a la izquierda, negativas. Las magnitudes que queden por encima serán positivas y las que queden por debajo, negativas.

La ecuación fundamental de las lentes delgadas es:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}$$

Donde s es la distancia del objeto a la lente y, como el objeto está a la izquierda, en la fórmula habrá que ponerla negativa. En este problema, s' es siempre positiva, ya que la imagen es real (se recoge en la película o el sensor).

Aplicando la ecuación fundamental de las lentes obtenemos la posición del objeto:

$$\frac{1}{14} - \frac{1}{s} = \frac{1}{12} \rightarrow \frac{1}{14} - \frac{1}{12} = \frac{1}{s} \rightarrow \frac{12 - 14}{12 \cdot 14} = \frac{1}{s} \rightarrow \frac{-2}{12 \cdot 14} = \frac{1}{s} \rightarrow s = -84 \text{ cm}$$

La ecuación del aumento lateral en las lentes es:

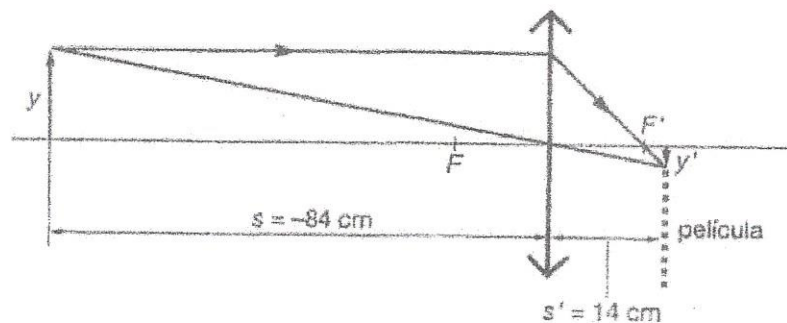
$$M_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}$$

Con el tamaño de la imagen y los valores de las distancias objeto e imagen se puede obtener el tamaño o altura máxima del objeto para que salga entero en la fotografía:

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \rightarrow \frac{-2,4}{y} = \frac{14}{-84} \rightarrow -2,4 \cdot (-84) = 14 \cdot y \rightarrow$$

$$\rightarrow y = \frac{-2,4 \cdot -84}{14} = 14,4 \text{ cm}$$

Donde hemos considerado y' negativo ya que la imagen producida por la lente convergente está invertida. La construcción geométrica es:



EJERCICIO 19

- a) Como la lente actúa como una lupa, la imagen es virtual, derecha y de mayor tamaño que el objeto y, por ello, el objeto debe estar situado entre el foco y la lente convergente.

La posición del objeto se calcula aplicando la ecuación fundamental de las lentes delgadas [1] y la ecuación del aumento lateral de la lente [2], y resolviendo el sistema formado por ambas:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \quad [1]$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \quad [2]$$

- I) Si la imagen virtual obtenida es diez veces mayor que el objeto $y' = 10 \cdot y$, y, por tanto, $s' = 10 \cdot s$, con lo que obtenemos:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{5} \rightarrow \frac{1}{10 \cdot s} - \frac{1}{s} = \frac{1}{5}$$

Despejando obtenemos la distancia objeto:

$$s = -4,5 \text{ cm}$$

La distancia imagen resulta:

$$\frac{10 \cdot y}{y} = \frac{s'}{s} \rightarrow s' = 10 \cdot s = -45 \text{ cm}$$

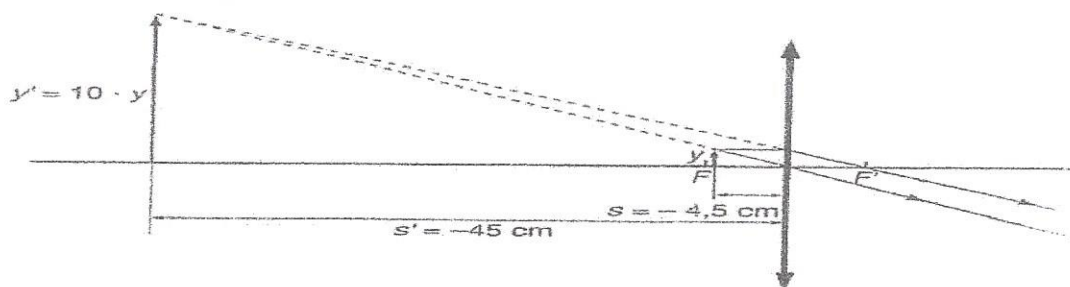
- II) Si la imagen virtual obtenida es veinte veces mayor que el objeto, los resultados que obtenemos, procediendo del mismo modo que en el caso anterior, son:

$$y' = 20 \cdot y \rightarrow s' = 20 \cdot s$$

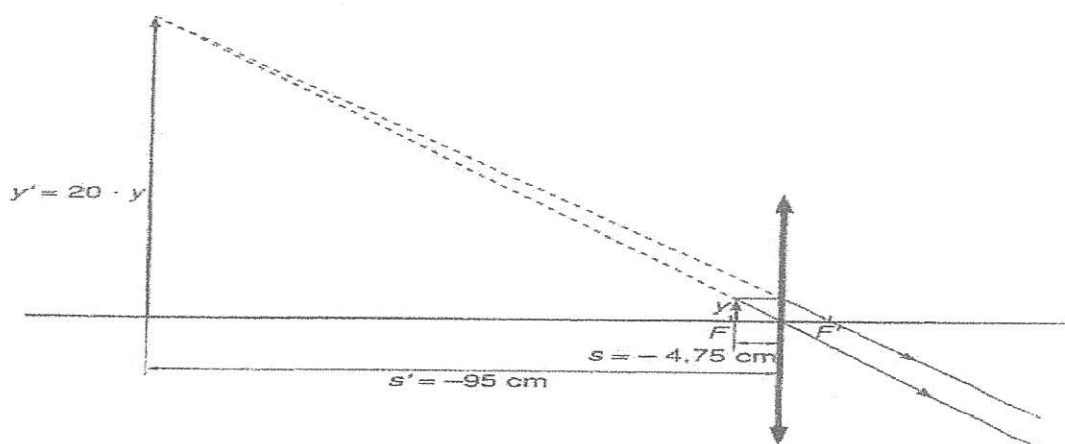
$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{5} \rightarrow \frac{1}{20 \cdot s} - \frac{1}{s} = \frac{1}{5} \rightarrow s = -4,75 \text{ cm}$$

$$\frac{20 \cdot y}{y} = \frac{s'}{s} \rightarrow s' = 20 \cdot s = 20 \cdot (-4,75) = -95 \text{ cm}$$

- I) Construcción geométrica para el caso en que la imagen es diez veces mayor que el objeto:



- II) Construcción geométrica para el caso en que la imagen es veinte veces mayor que el objeto:



EJERCICIO 20

a) Los valores de la distancia objeto y del radio de curvatura son los siguientes:

$$R = 40 \text{ cm} ; s = -25 \text{ cm}$$

Sustituyendo en la ecuación [1], se obtiene la posición de la imagen:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{-25} = \frac{2}{40} = \frac{1}{20} \rightarrow \frac{1}{s'} = \frac{1}{20} + \frac{1}{25} = \frac{25 + 20}{20 \cdot 25} = \frac{45}{500} \rightarrow$$

$$\rightarrow s' = \frac{500}{45} = 11,11 \text{ cm}$$

A partir de la ecuación del aumento lateral se obtiene el tamaño de la imagen:

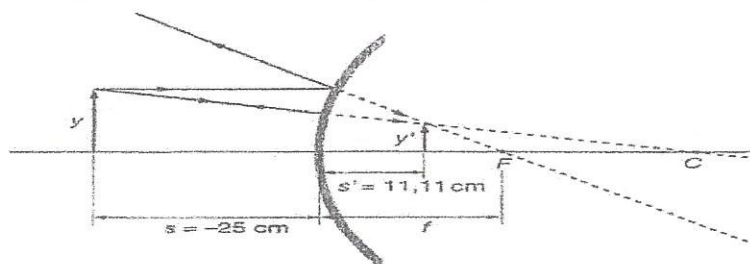
$$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \rightarrow \frac{y'}{0,5} = \frac{-11,11}{-25} \rightarrow y' = \frac{-11,11 \cdot 0,5}{-25} = 0,22 \text{ cm}$$

La imagen es virtual, derecha y de menor tamaño que el objeto, y está entre el espejo y el foco, como corresponde a una imagen obtenida en un espejo convexo.

Para hallar gráficamente la imagen de un objeto producida por un espejo, se usan al menos dos rayos de trayectoria conocida; allí donde se corten ellos o sus prolongaciones, después de reflejarse en el espejo, estará la imagen del objeto. Estos rayos pueden ser:

- Un rayo proveniente del objeto que sale de él paralelo al eje óptico y que, después de reflejarse en el espejo, pasa por el foco.
- Un rayo que sale del objeto en la dirección que une a este con el centro de curvatura del espejo y que se refleja en el espejo en la misma dirección.

La construcción geométrica de la imagen será, entonces:



b) Para obtener una imagen virtual, derecha y de menor tamaño que el objeto, hemos de utilizar una lente divergente.

En las lentes delgadas la imagen virtual está siempre situada a la izquierda de la lente; por tanto, debe ser negativa.

$$s' = -11,11 \text{ cm}$$

Aplicando la ecuación del aumento lateral se puede calcular la posición del objeto:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \rightarrow \frac{0,22}{0,5} = \frac{-11,11}{s} \rightarrow s = \frac{-11,11 \cdot 0,5}{0,22} = -25,25 \text{ cm}$$

Sustituyendo valores en la ecuación fundamental de las lentes delgadas, se obtiene la distancia focal imagen:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \rightarrow \frac{1}{-11,11} - \frac{1}{-25,25} = \frac{1}{f'}$$

$$\frac{1}{f'} = \frac{-25,25 + 11,11}{11,11 \cdot 25,25} = \frac{-14,14}{280,53} \rightarrow f' = -19,84 \text{ cm} = -0,1984 \text{ m}$$

La potencia de la lente será, entonces:

$$P = \frac{1}{f'} (\text{m}) = \frac{1}{-0,1984} = -5,04 \text{ D}$$

La potencia de la lente es negativa, lo que se corresponde con una lente divergente. Las lentes convergentes tienen potencia positiva.