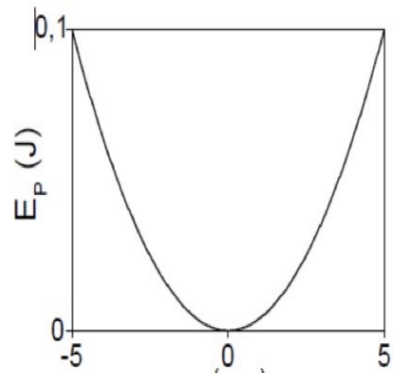


MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE, ESPEJOS, LEYES DE KEPLER - MOMENTO ANGULAR



~~Problema 1.-~~ En la figura se muestra la representación gráfica de la energía potencial (E_p) de un oscilador armónico simple constituido por una masa puntual de valor 200 g unida a un muelle horizontal, en función de su elongación (x).

- Calcule la constante elástica del muelle
- Calcule la aceleración máxima del oscilador.
- Determine numéricamente la energía cinética cuando la masa está en la posición $x = +2,3$ cm.
- ¿Dónde se encuentra la masa puntual cuando el módulo de su velocidad es igual a la cuarta parte de su velocidad máxima?



$x(m)$

Problema 1.-

- a) Según la figura, $E_{p\text{ máx}} = 0,1$ J y $A = 0,05$ m

$$E_{p\text{ máx}} = \frac{1}{2} K A^2 \Rightarrow K = \frac{2 E_{p\text{ máx}}}{A^2} = \frac{2 \cdot 0,1}{0,05^2} = 80 \text{ N/m}$$

b) $|a_{\text{máx}}| = A \omega^2 = A \frac{K}{m} = \frac{0,05 \cdot 80}{0,2} = 20 \text{ m/s}^2$

- c) Podemos utilizar la expresión de v en función de x , o utilizar la conservación de energía para restar a la energía total la potencial y obtener la cinética, llegando en ambos casos a

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 (A^2 - x^2) = \frac{1}{2} K (A^2 - x^2) = 0,5 \cdot 80 \cdot (0,05^2 - 0,023^2) = 0,079 \text{ J}$$

$$v(x) = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

d) $v = \frac{1}{4} v_{\text{máx}} = \frac{1}{4} A \omega \Rightarrow \frac{1}{4} A \omega = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2} \Rightarrow \frac{A^2}{4^2} = A^2 - x^2; x^2 = A^2 \left(1 - \frac{1}{16}\right)$

$$x = \pm A \sqrt{\frac{15}{16}} = \pm 0,05 \sqrt{\frac{15}{16}} = \pm 0,048 = \pm 4,8 \text{ cm}$$

2

Un objeto de 100 g de masa, unido al extremo libre de un resorte de constante elástica k , se encuentra sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Se estira, suministrándole una energía elástica de 2 J, comenzando a oscilar desde el reposo con un periodo de 0,25 s.

Determine:

- La constante elástica y escriba la función matemática que representa la oscilación.
- La energía cinética cuando han transcurrido 0,1 s.

A. Pregunta 1.-

a) El periodo está relacionado con la frecuencia y con la constante elástica, ya que $\omega = 2\pi/T$, y $\omega^2 = K/m$, luego sustituyendo

$$K = \omega^2 m = (2\pi/T)^2 \cdot m = (2\pi/0,25)^2 \cdot 0,1 = 63,1 \text{ N/m}$$

Para escribir la función matemática calculamos

$$\text{Frecuencia angular } \omega = 2\pi/T = 2\pi/0,25 = 8\pi \text{ rad/s}$$

Amplitud A : como la energía potencial elástica inicial es el valor máximo, podemos plantear

$$E_{pm\acute{a}x} = \frac{1}{2} K A^2 \Rightarrow A = \sqrt{2 \frac{E_{pm\acute{a}x}}{K}} = \sqrt{2 \cdot \frac{2}{63,1}} = 0,25 \text{ m}$$

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) \quad 1 = \sin(\varphi_0) \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$t=0 \quad y=A \quad A = A \cdot \sin(\varphi_0) \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

Respecto a la fase inicial, si tomamos $t=0$ en el momento que comienza a oscilar, será

$$x = 0,25 \cdot \sin(8\pi t + \frac{\pi}{2}) \text{ (SI)}$$

$$x = 0,25 \cdot \cos(8\pi t) \text{ (SI)}$$

b) Si derivamos $v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -2\pi \sin(8\pi t) \text{ (v en m/s, t en s)}$

$$E_c(t) = \frac{1}{2} m v(t)^2 \Rightarrow E_c(t=0,1 \text{ s}) = \frac{1}{2} 0,1 (-2\pi \sin(8\pi 0,1))^2 = 0,68 \text{ J}$$

3

Una partícula que describe un movimiento armónico simple recorre una distancia de 16 cm en cada ciclo de su movimiento y su aceleración máxima es de 48 m/s^2 . Calcule:

a) la frecuencia y el periodo del movimiento; b) la velocidad máxima de la partícula

a) Si la distancia que recorre en cada ciclo son 16 cm, la amplitud es la cuarta parte, 4 cm.

$$a_{\text{máx}} = A \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{a_{\text{máx}}}{A}} = \sqrt{\frac{48}{0,04}} = 34,64 \text{ rad/s}$$

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{34,64}{2\pi} = 5,51 \text{ Hz}; T = \frac{1}{f} = \frac{1}{5,51} = 0,18 \text{ s}$$

b) $v_{\text{máx}} = A\omega = 0,04 \cdot 34,64 = 1,39 \text{ m/s}$

Un muelle cuya constante de elasticidad es k está unido a una masa puntual de valor m . Separando la masa de la posición de equilibrio el sistema comienza a oscilar. Determine:

- El valor del período de las oscilaciones T y su frecuencia angular ω .
- Las expresiones de las energías cinética, potencial y total en función de la amplitud y de la elongación del movimiento del sistema oscilante.

Solución:

a) Combinando la ley de Hooke y la segunda ley de Newton, $F = -kx = ma$, luego $a = \frac{-k}{m}x$ expresión que es asociable a un movimiento armónico simple con $a = -\omega^2 x$, siendo

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \text{ El periodo de oscilación } T \text{ está relacionado con } \omega, \text{ ya que}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{1}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}, \text{ y por lo tanto } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$b) E_m \approx E_{c_{\max}} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = \frac{1}{2} m (A \cdot \omega)^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 \cdot A^2$$

$$E_m \approx \frac{1}{2} K \cdot A^2$$

$$E_c \approx \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\omega \cdot \sqrt{A^2 - x^2} \right)^2 = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 (A^2 - x^2) = \frac{1}{2} K (A^2 - x^2)$$

Recordar que para la expresión de v en función de la posición

$$v = \frac{dx}{dt} \quad x = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) \quad \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$$

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \quad \cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}$$

$$v = A \cdot \omega \cdot \sqrt{1 - \sin^2(\omega t + \varphi_0)}$$

$$v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)} \rightarrow x^2$$

$$v = \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

$$E_m = E_p + E_c.$$

$$E_p = E_m - E_c = \frac{1}{2} K A^2 - \frac{1}{2} K (A^2 - x^2) = \frac{1}{2} K x^2.$$

5

~~Problema 1~~ - La velocidad angular con la que un satélite describe una órbita circular en torno al planeta Venus es $\omega_1 = 1,45 \times 10^{-4} \text{ rad/s}$ y su momento angular respecto al centro de la órbita es $L_1 = 2,2 \times 10^{12} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$

a) Determine el radio r_1 de la órbita del satélite y su masa.

b) ¿Qué energía sería preciso invertir para cambiar a otra órbita circular con velocidad angular $\omega_2 = 10^{-4} \text{ rad/s}$?

Datos: Constante de Gravitación Universal: $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N}$

Masa de Venus: $M_V = 4,87 \times 10^{24} \text{ kg}$

~~Problema 1~~

a) Como sabemos la velocidad angular, sabemos el periodo

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{1,45 \cdot 10^{-4}} = 43332 \text{ s}$$

Conocido el periodo y la masa del objeto respecto al que orbita, podemos conocer el radio de la órbita utilizando la tercera ley de Kepler

$$T_1^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r_1^3 \Rightarrow r_1 = \sqrt[3]{\frac{GMT_1^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 4,87 \cdot 10^{24} \cdot 43332^2}{4\pi^2}} = 2,49 \cdot 10^7 \text{ m}$$

Al ser una órbita circular los vectores r y v forman siempre 90°

$$L_1 = r_1 \cdot m \cdot v_1 = r_1 \cdot m \cdot \omega_1 \cdot r_1 \Rightarrow m = \frac{L_1}{\omega_1 \cdot r_1^2} = \frac{2,2 \cdot 10^{12}}{1,45 \cdot 10^{-4} \cdot (2,49 \cdot 10^7)^2} = 24,47 \text{ kg}$$

b) La energía a invertir será la diferencia de energía entre ambas situaciones

$$\text{Órbita 1: } E_{m_1} = \frac{-GMm}{2r_1} = \frac{-6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 4,87 \cdot 10^{24} \cdot 24,47}{2 \cdot 2,49 \cdot 10^7} = -1,6 \cdot 10^8 \text{ J}$$

En la órbita 2 hay que tener en cuenta que tendremos un nuevo radio que debemos calcular, calculando el periodo y utilizando la tercera ley de Kepler como en el apartado anterior.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10^{-4}} = 62832 \text{ s}$$

$$T_2^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r_2^3 \Rightarrow r_2 = \sqrt[3]{\frac{GMT_2^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 4,87 \cdot 10^{24} \cdot 62832^2}{4\pi^2}} = 3,19 \cdot 10^7 \text{ m}$$

$$\text{Órbita 2: } E_{m_2} = \frac{-GMm}{2r_2} = \frac{-6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 4,87 \cdot 10^{24} \cdot 24,47}{2 \cdot 3,19 \cdot 10^7} = -1,25 \cdot 10^8 \text{ J}$$

$$\text{Energía a invertir } \Delta E = E_{m_2} - E_{m_1} = -1,25 \cdot 10^8 - (-1,6 \cdot 10^8) = 3,5 \cdot 10^7 \text{ J}$$

6

~~6.1.1.1~~ - La velocidad de un asteroide es de 20 km/s en el perihelio y de 14 km/s en el afelio.

Determine en esas posiciones cuál es la relación entre:

- a) Las distancias al Sol en torno al cual orbitan.
- b) Las energías potenciales del asteroide.

a) El momento angular es constante en la órbita al ser fuerzas centrales. Como en perihelio y afelio

los vectores r y p son perpendiculares, podemos plantear $r_A m v_A = r_P m v_P \Rightarrow \frac{r_P}{r_A} = \frac{v_A}{v_P} = \frac{14}{20} = 0,7$

$$b) \frac{E_{p_A}}{E_{p_P}} = \frac{\frac{-GMm}{r_A}}{\frac{-GMm}{r_P}} = \frac{r_P}{r_A} = \frac{14}{20} = 0,7$$

7

~~Question 1~~ - a) Explique la posibilidad de obtener una imagen derecha y mayor que el objeto mediante un espejo cóncavo, realizando un esquema con el trazado de rayos. Indique si la imagen es real o virtual.

b) ¿Dónde habría que colocar un objeto frente a un espejo cóncavo de 30 cm de radio para que la imagen sea derecha y de doble tamaño que el objeto?

a) Conociendo las distintas casuísticas del tipo de imagen y aumento según la posición del objeto, se puede razonar que el objeto debe estar entre el foco y el centro óptico. Razonándolo matemáticamente, sabiendo que como la imagen es derecha, el aumento A es positivo, y como la imagen es mayor, $A > 1$

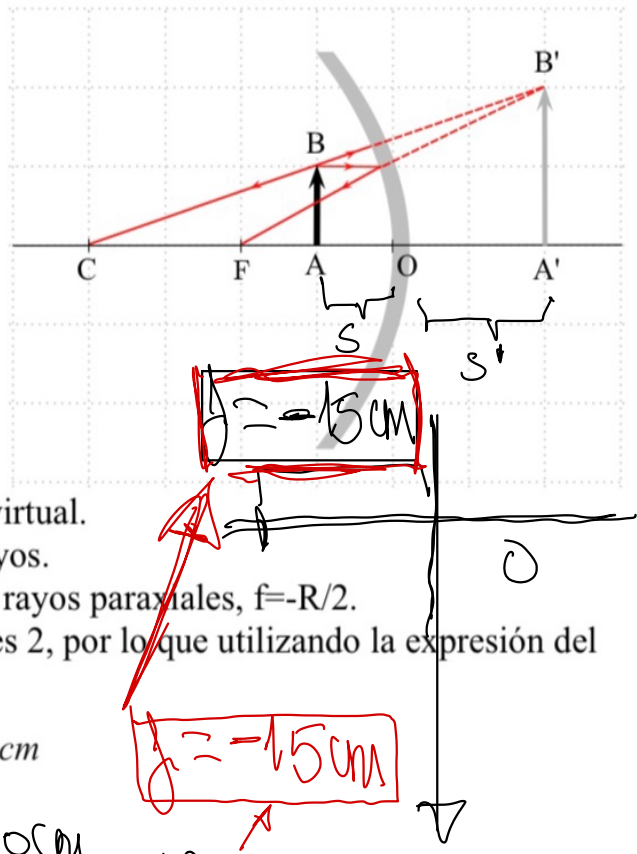
$$A = \frac{y'}{y} = \frac{-s'}{s} \Rightarrow s' = -sA$$

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{-1}{sA} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{A-1}{sA} = \frac{1}{f} \Rightarrow s = \frac{(A-1)}{A} f$$

Si $A > 1$, entonces de la expresión anterior, ignorando signos, tenemos que $|s| < |f|$, y como tanto s como f son negativos, s será un valor entre 0 y f, es decir, el objeto estará situado entre centro óptico y foco.

Como el aumento es positivo y s es negativa, s' debe ser positiva: la imagen se formará detrás del espejo, y será virtual. Incluimos un esquema con un ejemplo del trazado de rayos.



b) Tomando R positivo, y utilizando la aproximación de rayos paraxiales, $f = -R/2$.

Si la imagen es derecha y de doble tamaño, el aumento es 2, por lo que utilizando la expresión del apartado anterior

$$s = \frac{(2-1)}{2} \left(\frac{-R}{2} \right) = \frac{-R}{4} \quad \text{En este caso} \quad s = \frac{-30}{4} = -7,5 \text{ cm}$$

$$f = \frac{R}{2} = \frac{30 \text{ cm}}{2} = 15 \text{ cm}$$

$$\frac{y'}{y} = 2 = \frac{s'}{s} \Rightarrow s' = 2s$$

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{2s} + \frac{1}{s} = \frac{1}{15 \text{ cm}}$$

$$\frac{1}{2s} = \frac{1}{15 \text{ cm}} - \frac{1}{s}$$

$$\frac{1}{2s} = \frac{1}{15 \text{ cm}} - \frac{2}{2s} \Rightarrow \frac{1}{2s} + \frac{2}{2s} = \frac{1}{15 \text{ cm}} \Rightarrow \frac{3}{2s} = \frac{1}{15 \text{ cm}}$$

$$2s = -15 \text{ cm} \quad \boxed{s = -7,5 \text{ cm}}$$

8

Pregunta 1.- Un espejo esférico convexo, proporciona una imagen virtual de un objeto que se encuentra a 3 m del espejo con un tamaño $1/5$ del de la imagen real.

- Realice el trazado de rayos y determine la distancia a la que se forma la imagen virtual del espejo.
- Determine el radio de curvatura del espejo.

Enunciado 11

a) Utilizamos el convenio de signos DIN 1335, por lo que la posición será negativa, $s = -3$ m. Al tratarse de un espejo convexo sabemos que la imagen será menor, virtual y no invertida, por lo que el aumento es positivo, $A = 1/5$.

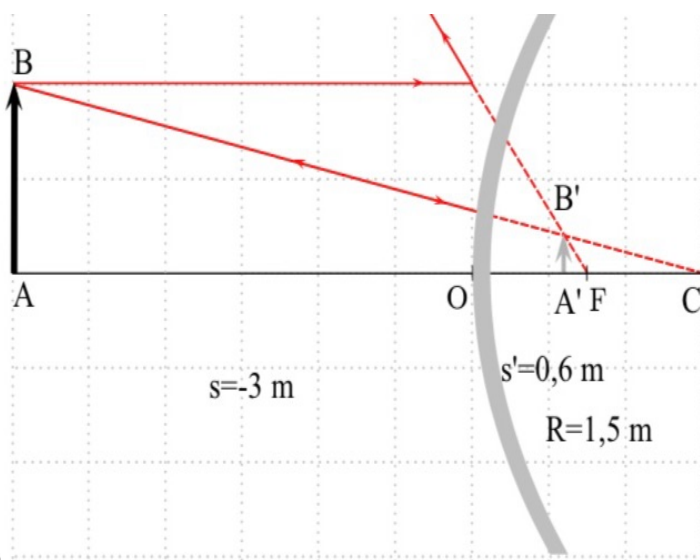
$$A = \frac{y'}{y} = \frac{-s'}{s} = \frac{1}{5}$$

$$s' = \frac{-s}{5} = \frac{-(-3)}{5} = 0,6 \text{ m}$$

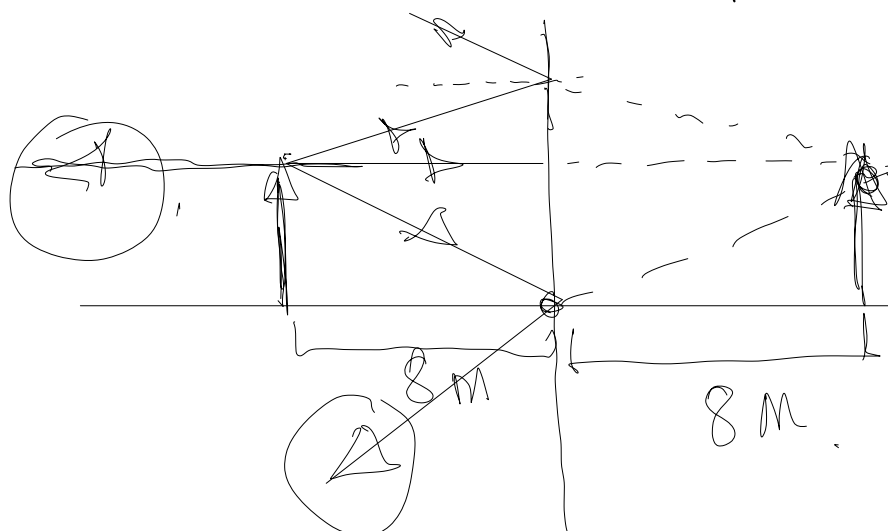
En el trazado de rayos comprobamos la validez del cálculo realizado. Se ve como al representar el

espejo como convexo los rayos representados no llegan al objeto, dado que no hemos representado a escala para que sean visibles los objetos: si lo hiciéramos, el espejo sería prácticamente plano, para que fuese válida la aproximación paraxial (no se indica tamaño del objeto así que se puede tomar todo lo pequeño que se quiera).

$$b) \quad f = \frac{R}{2}; \quad \frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{0,6} + \frac{1}{-3} = \frac{2}{R} \Rightarrow R = \frac{2}{\frac{1}{0,6} - \frac{1}{3}} = 1,5 \text{ m}$$



Estudiar también espejo plano (aparte)



Si nos hiciéramos una foto frente a un espejo, tendríamos que enfocarnos a 16 m de nosotros, que es donde estaría la imagen.