

FÍSICA 2º BACHILLERATO

RESOLUCIÓN EJERCICIOS Y CUESTIONES INTERACCIÓN GRAVITATORIA

1

$$F = G \frac{M_T \cdot M_L}{r^2} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{G \cdot M_T \cdot M_L}{F}} = \sqrt{\frac{667 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 72 \cdot 10^{22}}{19 \cdot 10^{20}}}$$

$$M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$M_L = 72 \cdot 10^{22} \text{ kg}$$

$$F = 19 \cdot 10^{20} \text{ N}$$

$$G = 667 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$$

$$r = 39 \cdot 10^8 \text{ m}$$

2

OJO! distancia centro-centro

$$F = G \frac{M_T \cdot M}{(R_T + h)^2}$$

$$F = G \frac{M_T \cdot M}{R_T^2}$$

$$F' = G \frac{M_T \cdot M}{(3R_T)^2}$$

$$F = G \frac{M_T \cdot M}{9R_T^2}$$

$$\frac{F}{F'} = \frac{G \frac{M_T \cdot M}{R_T^2}}{G \frac{M_T \cdot M}{9R_T^2}} \Rightarrow \frac{F}{F'} = \frac{1}{1/9} \Rightarrow F' = \frac{1}{9} F$$

El peso a esa altura es la novena parte

3

$$P_h = F_h = G \frac{M_T \cdot m}{(R_T + h)^2}$$

$$g_h = G \frac{M_T}{(R_T + h)^2} < 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$P_T = F_T = G \frac{M_T \cdot m}{R_T^2}$$

$$g_T = G \frac{M_T}{R_T^2} = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$P = m \cdot g$$

$$g = \frac{P}{m}$$

No es correcto decir que hay ausencia de gravedad. A una cierta altura h la gravedad es menor que en la superficie terrestre, pero no es nula. Solamente podríamos decir que se anul en el infinito.

- ④ Podemos relacionar el peso en la Tierra y el peso en Marte escribiendo ambas expresiones del peso y dividiéndolas después.

según el problema

$$P_T \Rightarrow F_T = G \cdot \frac{M_T \cdot M}{R_T^2}$$

$$P_M \Rightarrow F_M = G \cdot \frac{M_M \cdot M}{R_M^2} \Rightarrow F_M = \frac{0.41 M_T \cdot M}{R_M^2}$$

$$\frac{F_M}{F_T} = \frac{G \cdot \frac{0.41 M_T \cdot M}{R_M^2}}{G \cdot \frac{M_T \cdot M}{R_T^2}}$$

$$\frac{F_M}{F_T} = \frac{0.41}{(3.44 \cdot 10^6)^2} \cdot \frac{1}{(6.37 \cdot 10^6)^2}$$

En este caso, habiéndose dado igual no cambian las unidades.

$$F_M = 0.37 \cdot F_T$$

$$F_M = 0.37 \cdot 200 \text{ N}$$

$$F_M = 75.43 \text{ N}$$

$$\frac{F_M}{F_T} = 0.37$$

⑤ a) $P_T = F_T = G \cdot \frac{M_T \cdot M}{R_T^2}$

$$P_V = F_V = G \cdot \frac{M_V \cdot M}{R_V^2}$$

R_T^2 Si el diámetro de Venus es el mismo que el de la Tierra, el radio de Venus será el mismo que el de la Tierra.

$$\frac{F_T}{F_V} = \frac{G \cdot \frac{M_T \cdot M}{R_T^2}}{G \cdot \frac{M_V \cdot M}{R_T^2}} \Rightarrow \frac{F_T}{F_V} = \frac{M_T}{M_V}$$

$$M_T = M_V \cdot \frac{F_T}{F_V} \Rightarrow M_T = M_V \cdot \frac{735}{600}$$

$$M_T = 1.225 M_V$$

b) $M_V = \frac{M_T}{1.225} = \frac{6 \cdot 10^{24}}{1.225} = 4.9 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

o bien

$$M_V = \frac{1}{1.225} M_T$$

$$M_V = 0.816 M_T$$

6) Definimos la densidad $\rho = \frac{M}{V}$, siendo sus unidades S.I $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

$$\rho_T = \frac{M_T}{V_T} = \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} = \frac{g_T \cdot R_T^2 / G}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} = \frac{g_T \cdot R_T^2}{\frac{4}{3}\pi R_T^3 \cdot G} \Rightarrow \rho_T = \frac{g_T}{\frac{4}{3}\pi R_T \cdot G}$$

Tomamos a la Tierra como si fuese una esfera

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V_T = \frac{4}{3}\pi R_T^3$$

Si no sabemos la masa de la Tierra, la escribimos en función de datos que conocemos:

$$g_T = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} \Rightarrow M_T = \frac{g_T \cdot R_T^2}{G}$$

$$g_T = 9.8 \text{ m/s}^2$$

$$R_T = 6370 \text{ km} = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$$

$$\rho_T = \frac{9.8 \text{ m/s}^2}{\frac{4}{3}\pi (6.37 \cdot 10^6 \text{ m}) \cdot 6.67 \cdot 10^{-11}}$$

$$\rho_T = 5.5 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

7) a)

$$g_J = G \cdot \frac{M_J}{R_J^2} \Rightarrow$$

$$g_J = G \cdot \frac{\frac{4}{3}\pi R_J^3 \rho_J}{R_J^2} \Rightarrow$$

$$g_J = G \rho_J \cdot \frac{4}{3}\pi R_J$$

Escribimos la expresión de M_J en función de la densidad de Júpiter ρ_J , que nos da el problema

$$\rho_J = \frac{M_J}{V_J} \Rightarrow \rho_J = \frac{M_J}{\frac{4}{3}\pi R_J^3}$$

$$M_J = \rho_J \cdot \frac{4}{3}\pi R_J^3$$

$$\rho_J = 1.34 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$(R_J = 0.718 \cdot 10^5 \text{ km})$$

$$R_J = 0.718 \cdot 10^8 \text{ m}$$

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$$

$$g_J = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 1.34 \cdot 10^3 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot (0.718 \cdot 10^8)$$

$$g_J = 26.86 \text{ m/s}^2$$

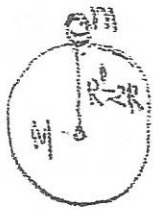
b) $\Downarrow$
No, la masa del cuerpo es la misma en la Tierra y en Júpiter porque su cantidad de materia es igual, sin embargo, pesa más en Júpiter que en la Tierra porque la atracción gravitatoria que ejerce Júpiter es mayor.

$$\begin{array}{l} P_T = m \cdot g_T \\ P_J = m \cdot g_J \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } m \\ \text{es igual} \\ \text{y } g_J > g_T \\ \Downarrow \\ P_J > P_T \end{array} \right.$$

8. a)



$$\Rightarrow F = G \frac{M \cdot m}{R^2}$$



$$\Rightarrow F' = G \frac{M \cdot m}{(2R)^2} \Rightarrow F' = G \frac{M \cdot m}{4R^2}$$

$$\frac{F}{F'} = \frac{\cancel{G} \cdot \cancel{M} \cdot \cancel{m}}{\cancel{R}^2} \Rightarrow \frac{F}{F'} = \frac{1}{1/4}$$

$$F' = \frac{1}{4} F$$

El nuevo peso F' será la cuarta parte del inicial

b) Hay que obtener una expresión del peso en función de la densidad del planeta, y posteriormente, manteniendo la densidad del planeta que obtenemos la otra expresión con la misma densidad y un radio dos veces mayor, para posteriormente comparar.

$$F = G \frac{M \cdot m}{R^2} \quad \rho = \frac{M}{V} \Rightarrow M = \rho \cdot V \Rightarrow M = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$F = G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R \cdot m$$

$$\frac{F'}{F} = \frac{\cancel{G} \cdot \cancel{\rho} \cdot \cancel{\frac{4}{3}} \pi \cdot 2R \cdot m}{\cancel{G} \cdot \cancel{\rho} \cdot \cancel{\frac{4}{3}} \pi R \cdot m} \Rightarrow \frac{F'}{F} = 2 \Rightarrow F' = 2F$$

El nuevo peso F' será el doble del inicial

9.

$$g = G \frac{M_T}{R_T^2}$$

$$\Rightarrow g = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3} \pi R_T^3}{R_T^2} \Rightarrow g = G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R_T$$

Para que esté en función de la densidad $\Rightarrow$

$$\rho = \frac{M_T}{V_T} \Rightarrow M_T = \rho \cdot V_T$$

$$M_T = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R_T^3$$

$$\Rightarrow g' = G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R'$$

3º paso $\Rightarrow$ Si nos dicen que la gravedad no varía, $g = g'$

$$G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R_T = G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R'$$

$$R' = \frac{1}{3} R_T$$

Para que el valor de la gravedad no varíe aumentando tres veces la densidad, el nuevo radio terrestre ha de ser la tercera parte del anterior.

10

$$\text{masa } m \Rightarrow g = \frac{F}{m} = \frac{G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2}}{m} = G \cdot \frac{M_T}{r^2}$$

$$\text{masa } M \text{ mayor} \Rightarrow g = \frac{F}{M} = \frac{G \cdot \frac{M_T \cdot M}{r^2}}{M} = G \cdot \frac{M_T}{r^2}$$

Las dos masas caen igual de deprisa porque la aceleración de la gravedad (o intensidad del campo gravitatorio) es la misma para ambas a igual distancia (depende de la masa que crea el campo, no de la que situamos en el punto)

11

a)

$$|\vec{F}_2| = G \cdot \frac{m_2 \cdot m}{r^2}$$

$$|\vec{F}_2| = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} = 5.93 \cdot 10^{-11} \text{ N}$$

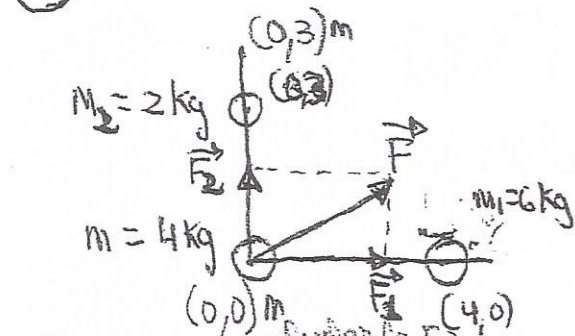
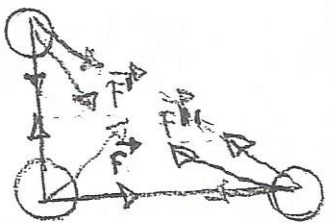
$$\vec{F}_2 = 5.93 \cdot 10^{-11} \hat{j} \text{ (N)}$$

$$|\vec{F}_1| = G \cdot \frac{m_1 \cdot m}{r^2}$$

$$|\vec{F}_1| = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6 \cdot 4}{4^2} = 10^{-10} \text{ N}$$

$$\vec{F}_1 = 10^{-10} \hat{i} \text{ (N)}$$

b)



Sola/ nos piden la F_g aparece en la masa de 4 kg, aunque real/ todas las F_g aparecerían serían

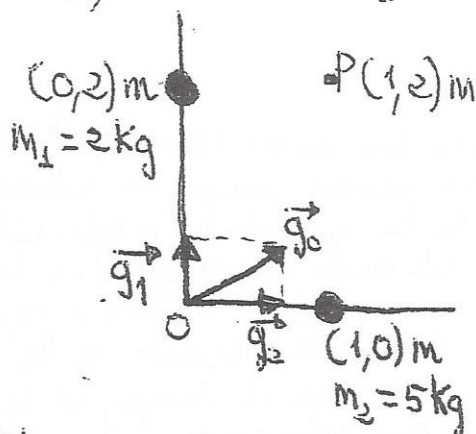
Ppco de superposición

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 10^{-10} \hat{i} + 5.93 \cdot 10^{-11} \hat{j} \text{ (N)} \Rightarrow \text{Vector } \vec{F}$$

$$|\vec{F}| = \sqrt{|\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2} = \sqrt{(10^{-10})^2 + (5.93 \cdot 10^{-11})^2} = 1.16 \cdot 10^{-10} \text{ N}$$

Cuidado: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$
 ~~$F = F_1 + F_2$~~

(12) a)



En el punto O (0,0)

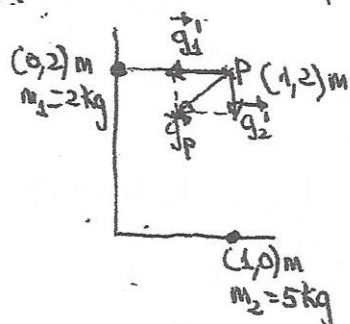
$$|\vec{g}_1| = g_1 = G \cdot \frac{m_1}{r_1^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{2}{2^2} = 3.33 \cdot 10^{-11} \frac{M}{s^2} \quad \vec{g}_1 = 3.33 \cdot 10^{-11} \vec{j} \left(\frac{M}{s^2} \right)$$

$$|\vec{g}_2| = g_2 = G \cdot \frac{m_2}{r_2^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5}{1^2} = 3.33 \cdot 10^{-10} \frac{M}{s^2} \quad \vec{g}_2 = 3.33 \cdot 10^{-10} \vec{i} \left(\frac{M}{s^2} \right)$$

$$\vec{g}_0 = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = 3.33 \cdot 10^{-10} \vec{i} + 3.33 \cdot 10^{-11} \vec{j} \left(\frac{M}{s^2} \right)$$

$$|\vec{g}_0| = \sqrt{(3.33 \cdot 10^{-10})^2 + (3.33 \cdot 10^{-11})^2} = 3.34 \cdot 10^{-10} \frac{M}{s^2}$$

En el punto P (1,2) m



$$|\vec{g}_1'| = g_1' = G \cdot \frac{m_1}{r_1'^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{2}{1^2} = 13.34 \cdot 10^{-11} \frac{M}{s^2}$$

$$\vec{g}_1' = -13.34 \cdot 10^{-11} \vec{i} \left(\frac{M}{s^2} \right)$$

$$|\vec{g}_2'| = g_2' = G \cdot \frac{m_2}{r_2'^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5}{2^2} = 8.33 \cdot 10^{-11} \frac{M}{s^2}$$

$$\vec{g}_2' = -8.33 \cdot 10^{-11} \vec{j} \left(\frac{M}{s^2} \right)$$

$$\vec{g}_P = -13.34 \cdot 10^{-11} \vec{i} - 8.33 \cdot 10^{-11} \vec{j} \left(\frac{M}{s^2} \right) \Rightarrow \text{Prin de superposición}$$

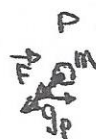
$$|\vec{g}_P| = g_P = \sqrt{(-13.34 \cdot 10^{-11})^2 + (-8.33 \cdot 10^{-11})^2}$$

$$g_P = 1.57 \cdot 10^{-10} \frac{M}{s^2}$$

b) $\vec{F} = m \cdot \vec{g}_P \rightarrow$ Aunque tb se podría haber hecho igual que el problema 11

$$\vec{F} = 0.1 \cdot (-13.34 \cdot 10^{-11} \vec{i} - 8.33 \cdot 10^{-11} \vec{j})$$

$$\vec{F} = -13.34 \cdot 10^{-12} \vec{i} - 8.33 \cdot 10^{-12} \vec{j} \text{ (N)}$$

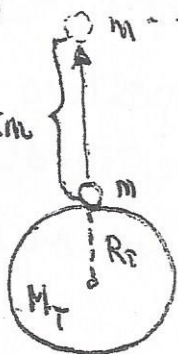


$$|\vec{F}| = F = \sqrt{(-13.34 \cdot 10^{-12})^2 + (-8.33 \cdot 10^{-12})^2}$$

$$F = 1.57 \cdot 10^{-11} \text{ N}$$

13 a)

$h = 1000 \text{ km}$



$$E_{P_2} = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T + h} = -6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24} \cdot 500}{(6.4 \cdot 10^6 + 10^6)} = -2.17 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

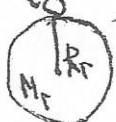
$$E_{P_1} = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T} = -6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24} \cdot 500}{6.4 \cdot 10^6} = -3.12 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

$$\Delta E_p = E_{P_2} - E_{P_1} = -2.17 \cdot 10^{10} - (-3.12 \cdot 10^{10}) = 4.26 \cdot 10^9 \text{ J}$$

b) No, ya que la energía potencial gravitatoria en un punto es siempre negativa al tomar el máximo de energía potencial en el infinito como cero. Sin embargo, el incremento de E_p puede ser positivo o negativo dependiendo de si se acerca o se aleja la masa. En caso de acercar la masa la E_p disminuye (incremento negativo), pero al alejar la masa la E_p aumenta (incremento positivo).

c)

$h = 1000 \text{ km}$



$$E_{P_2} = m \cdot g \cdot h = 500 \cdot 9.8 \cdot 10^6 = 4.9 \cdot 10^9 \text{ J}$$

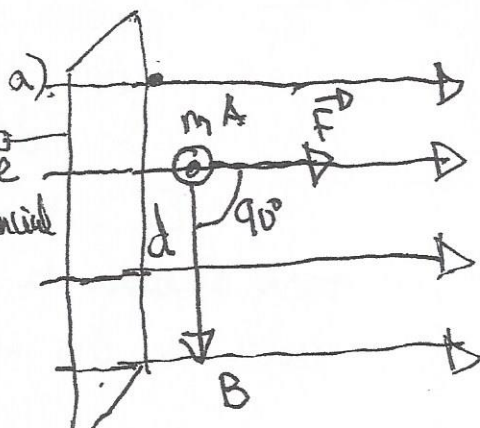
$$E_{P_1} = m \cdot g \cdot h = 0$$

$$\Delta E_p = E_{P_2} - E_{P_1} = 4.9 \cdot 10^9 - 0 = 4.9 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Una de las diferencias es q esta expresion toma como n. de referencia la superficie terrestre tomándolo como cero de E_p gravitatoria. Otra diferencia que si afecta al resultado del ΔE_p es que g es cte, lo cual no es aplicable en el ámbito de las distancias que se estudia. (1000 km)

14

Superficie equipotencial



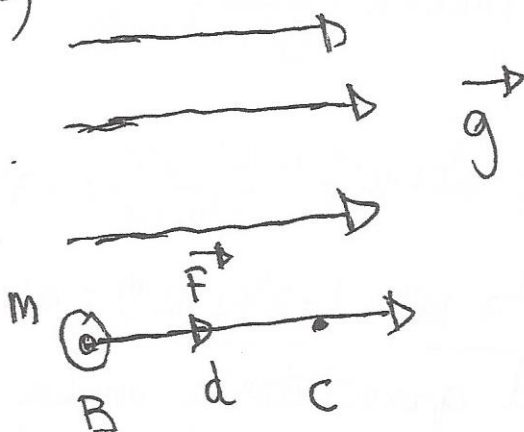
$\vec{g} \rightarrow$ Si $\vec{g} = \text{cte}$, ya que $m = \text{cte}$, $\vec{F}$ también lo será.

$$W_{A \rightarrow B} = F \cdot d \cdot \cos 90^\circ = 0$$

El trabajo es nulo, y la E_p gravitatoria no cambia.

14 (continuación)

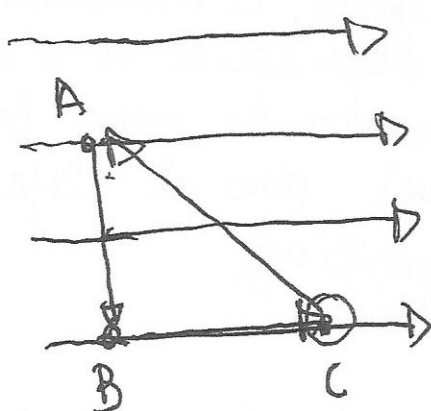
b)



$$W_{B \rightarrow C} = F \cdot d \cdot \cos 0^\circ = m \cdot g \cdot d$$

El trabajo es positivo o espontáneo y coincidirá con una disminución de E_p

c)



Al tratarse de una fuerza conservativa tenemos que:

$$W_{A \rightarrow A} = 0$$

$$W_{A \rightarrow A} = W_{A \rightarrow B} + W_{B \rightarrow C} + W_{C \rightarrow A}$$

$$0 = 0 + m \cdot g \cdot d + W_{C \rightarrow A}$$

$$W_{C \rightarrow A} = -m \cdot g \cdot d$$

El trabajo es negativo, ya que llevar la masa de C a A no es espontáneo, y en este caso aumenta la E_p .

15

ORIGEN DE E_p CERO EN EL INFINITO

$$E_p = -G \cdot \frac{M_T \cdot M}{R_T}$$

$r = \infty$

$$E_p = 0$$

Aquí se muestra la situación habitual

AL CAMBIAR EL ORIGEN, LA DIFERENCIA DE E_p ENTRE LOS DOS NIVELES SE MANTIENE



$$E_p = 0$$

$$E_p = +G \cdot \frac{M_T \cdot M}{R_T}$$

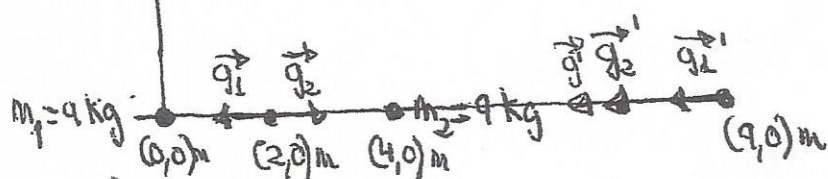
Si aquí cambiamos el cero de E_p como nos dice el problema

$$E_p = +G \cdot \frac{M_T \cdot M}{R_T}$$

para mantener la diferencia entre los dos niveles

(16)

$\vec{g} \Rightarrow$ Campo gravitatorio $\equiv$ intensidad
del campo gravitatorio $\equiv$ gravedad



a) $(2,0)m \Rightarrow |\vec{g}_1| = |\vec{g}_2| = G \cdot \frac{m_1}{r_1^2} = 1.5 \cdot 10^{-10} \frac{N}{kg}$ Prio superposición $\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$
 $\vec{g} = 0 \Rightarrow$ Igual módulo y dirección y sentido contrario se anulan

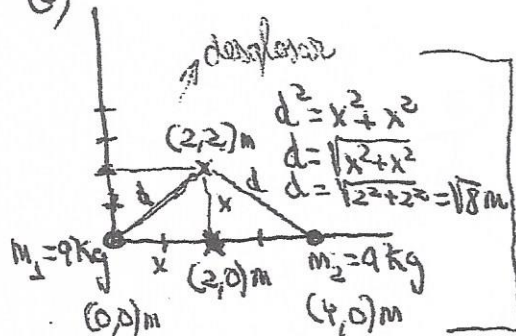
$(9,0)m \Rightarrow$

$|\vec{g}_1'| = G \cdot \frac{m_1}{r_1'^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{9}{9^2} = 7.41 \cdot 10^{-12} \frac{N}{kg}$ $\vec{g}_1' = -7.41 \cdot 10^{-12} \hat{i} \left(\frac{N}{kg} \right)$

$|\vec{g}_2'| = G \cdot \frac{m_2}{r_2'^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{9}{5^2} = 2.4 \cdot 10^{-11} \frac{N}{kg}$ $\vec{g}_2' = -2.4 \cdot 10^{-11} \hat{i} \left(\frac{N}{kg} \right)$

$\vec{g}' \Rightarrow$ Prio de superposición $\vec{g}' = \vec{g}_1' + \vec{g}_2' = -7.41 \cdot 10^{-12} \hat{i} - 2.4 \cdot 10^{-11} \hat{i}$
 $\vec{g}' = -3.14 \cdot 10^{-11} \hat{i} \left(\frac{N}{kg} \right)$

b)



$V_{(2,0)m} \Rightarrow$ Principio de superposición

$V_{(2,0)m} = V_1 + V_2$

$V_1 = -G \cdot \frac{m_1}{r_1} = -6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{9}{2} = -3 \cdot 10^{-10} \frac{J}{kg}$

$V_2 = -G \cdot \frac{m_2}{r_2} = -6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{9}{2} = -3 \cdot 10^{-10} \frac{J}{kg}$

$V_{(2,0)m} = V_1 + V_2 = -3 \cdot 10^{-10} + (-3 \cdot 10^{-10}) = -6 \cdot 10^{-10} \frac{J}{kg}$

Prio de superposición.

$V_{(2,2)m} = V_1' + V_2'$

$V_1' = -G \cdot \frac{m_1}{d} = -6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{9}{\sqrt{8}} = -2.12 \cdot 10^{-10} \frac{J}{kg}$

$V_2' = -G \cdot \frac{m_2}{d} = -6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{9}{\sqrt{8}} = -2.12 \cdot 10^{-10} \frac{J}{kg}$

$V_{(2,2)m} = V_1' + V_2' = -2.12 \cdot 10^{-10} + (-2.12 \cdot 10^{-10}) = -4.24 \cdot 10^{-10} \frac{J}{kg}$

$$c) V = \frac{E_p}{m} \Rightarrow E_p = m \cdot V$$

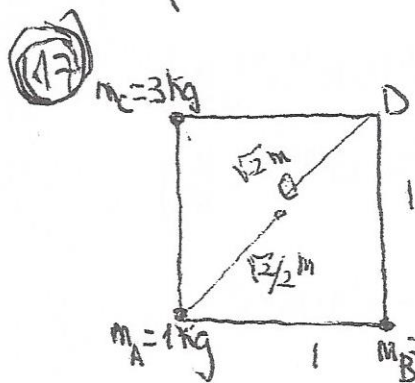
$$E_{p(2,2)m} = m \cdot V_{(2,2)m} = 2 \cdot 10^{-3} \cdot (-4'24 \cdot 10^{-10}) = -8'48 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

$$d) W_{(2,2)m \rightarrow (2,0)m} = m \cdot (V_{(2,2)m} - V_{(2,0)m})$$

Ver teoría

$$W_{(2,2) \rightarrow (2,0)} = 2 \cdot 10^{-3} \cdot (-4'24 \cdot 10^{-10} - (-6 \cdot 10^{-10}))$$

$$W_{(2,2) \rightarrow (2,0)} = 3'52 \cdot 10^{-13} \text{ J} \Rightarrow \text{Trabajo espontáneo, realizado por parte de las fuerzas gravitatorias del campo}$$



Ppio de superposición

$$a) V_0 = -G \cdot \frac{M_A}{r_{0A}} - G \cdot \frac{M_B}{r_{0B}} - G \cdot \frac{M_C}{r_{0C}}$$

$$V_0 = -6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}/2} - 6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}/2} - 6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}/2}$$

$$V_0 = -5'66 \cdot 10^{-10} \text{ J} \cdot \text{Kg}^{-1}$$

$$V_D = -G \cdot \frac{M_A}{r_{AD}} - G \cdot \frac{M_B}{r_{BD}} - G \cdot \frac{M_C}{r_{CD}}$$

$$V_D = -6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{2}{1} - 6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{3}{1}$$

$$V_D = -3'81 \cdot 10^{-10} \text{ J} \cdot \text{Kg}^{-1}$$

$$b) E_{p_0} = m \cdot V_0 = 10^{-4} \cdot (-5'66 \cdot 10^{-10}) = -5'66 \cdot 10^{-14} \text{ J}$$

$$E_{p_D} = m \cdot V_D = 10^{-4} \cdot (-3'81 \cdot 10^{-10}) = -3'81 \cdot 10^{-14} \text{ J}$$

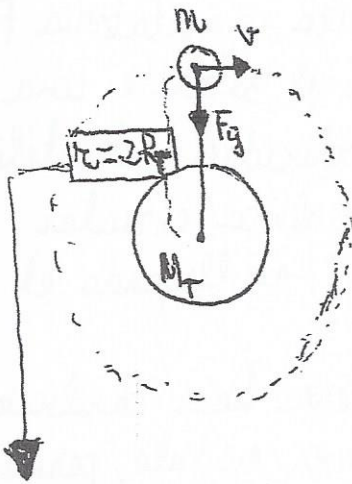
$$c) W_{0 \rightarrow D} = m(V_0 - V_D) = 10^{-4} \cdot (-5'66 \cdot 10^{-10} - (-3'81 \cdot 10^{-10}))$$

$$W_{0 \rightarrow D} = -1'85 \cdot 10^{-14} \text{ J} \Rightarrow \text{no espontáneo (separar la masa m de las otras tres no es espontáneo, la E_p se incrementa)}$$

$$\text{otra forma} \Rightarrow W_{0 \rightarrow D} = -\Delta E_p = -(E_{p_D} - E_{p_0}) = E_{p_0} - E_{p_D}$$

$$W_{0 \rightarrow D} = E_{p_0} - E_{p_D} = -5'66 \cdot 10^{-14} - (-3'81 \cdot 10^{-14}) = -1'85 \cdot 10^{-14} \text{ J}$$

18) a)



Si nos dicen que el satélite orbita, eso significa que podemos expresar la fuerza gravitatoria F_g como fuerza normal F_n

$$F_g = F_n$$

$$G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2} = m \cdot a_n$$

$$G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

$$v = \sqrt{G \cdot \frac{M_T}{r}}$$

Hemos deducido la expresión de la velocidad orbital

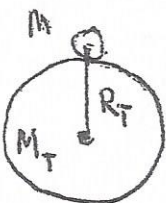
Nos especifican que el radio de la órbita es $2R_T$, luego $r = 2R_T$ es la distancia centro a centro de la expresión

$$v = \sqrt{G \cdot \frac{M_T}{r}} = \sqrt{G \cdot \frac{M_T}{2R_T}} = \sqrt{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{2 \cdot (6.4 \cdot 10^6)}} = \sqrt{\frac{4.002 \cdot 10^{14}}{1.28 \cdot 10^7}} = 5591.57 \frac{m}{s}$$

Al usar la cte G en unidades S.I., tenemos que cambiar las unidades al sistema internacional.

$$6400 \text{ km} = 6.4 \cdot 10^6 \text{ m}$$

b)



$$F_T = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T^2}$$

Se observa que el peso en la órbita es la cuarta parte del peso en la Tierra. Lo demostramos:

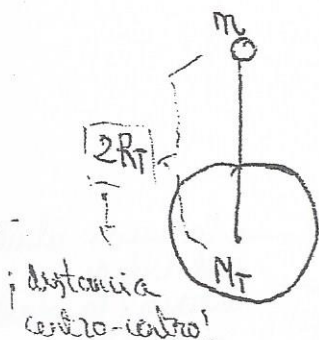
$$F_{orb} = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{(2R_T)^2} \Rightarrow F_{orb} = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{4R_T^2}$$

$$\frac{F_{orb}}{F_T} = \frac{G \cdot \frac{M_T \cdot m}{4R_T^2}}{G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T^2}}$$

$$\frac{F_{orb}}{F_T} = \frac{1/4}{1}$$

$$F_{orb} = \frac{1}{4} F_T$$

$$F_{orb} = \frac{1}{4} 5000 = 1.250 \text{ N}$$



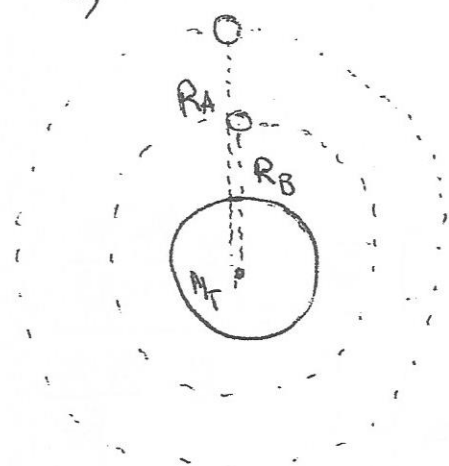
¡distancia centro-centro!

c) Según la ley de la Gravitación Universal, sobre el satélite actúa una fuerza gravitatoria (F_g) cuyo carácter es atractivo y que va dirigida hacia el centro de la Tierra. En este caso, dicha fuerza es perpendicular (o normal) a la velocidad con la que orbita el satélite, por lo que podemos expresar la fuerza gravitatoria F_g como una fuerza normal F_n que proporcionará al satélite una aceleración normal a_n que hará cambiar la velocidad del satélite en dirección, de forma que se describe una órbita circular que coincidirá con la curvatura de la Tierra, no llegando el satélite a impactar sobre ella.

La aceleración normal proporcionada por la fuerza hace cambiar la velocidad del satélite en dirección pero no en módulo, permaneciendo su valor constante ($v = \text{cte}$), y por ello se dice que el satélite describirá un movimiento circular uniforme (M.C.U)

d) $v = \sqrt{G \cdot \frac{M_T}{r}}$ En la expresión de la velocidad orbital deducida en el apartado a) se observa que esta es independiente de la masa del satélite, y por ello el nuevo satélite de masa doble tendrá la misma velocidad orbital.

19) a) Deducimos la expresión de la velocidad orbital igual que en 1 a)



$$F_g = F_n$$

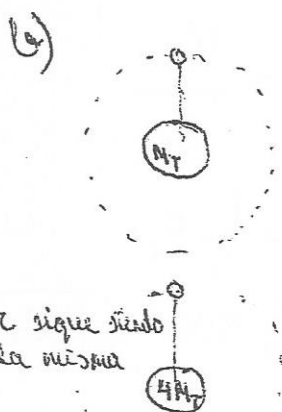
$$G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2} = m \cdot a_n \Rightarrow G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

$$v = \sqrt{G \cdot \frac{M_T}{r}}$$

Si $R_A > R_B$, en la expresión, entonces

$v_A < v_B$, luego B

tendrá mayor velocidad orbital



$$v = \sqrt{G \cdot \frac{M_T}{r}}$$

$$v' = \sqrt{G \cdot \frac{4M_T}{r}}$$

$$v' = 2 \sqrt{G \cdot \frac{M_T}{r}}$$

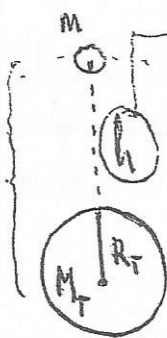
$$\frac{v'}{v} = \frac{\sqrt{G \cdot \frac{4M_T}{r}}}{\sqrt{G \cdot \frac{M_T}{r}}}$$

$$\frac{v'}{v} = \frac{\sqrt{4}}{1} \Rightarrow v' = 2v$$

La nueva velocidad es el doble de la anterior (la velocidad se duplica)

$\Rightarrow$ Se observa que la velocidad se duplica

r (distancia centro-centro)
 and
 $r = R_T + h$



¡Ojo! nos preguntan la altura h sobre la superficie terrestre, que es lo que deberá aparecer en las expresiones para poderla despejar.

Si queremos que el satélite orbite, tendrá que cumplir la condición:

$$F_g = F_n$$

$$G \cdot \frac{M_T \cdot m}{(R_T + h)^2} = m \cdot \frac{v^2}{(R_T + h)}$$

La distancia centro-centro es $r = R_T + h$, siendo h la altura sobre la superficie terrestre que nos pide el problema que despejemos

El radio r de la trayectoria coincide con la distancia centro-centro $r = R_T + h$

Si en el problema nos dicen que el satélite debe orbitar con un periodo $T = 2$ horas, en la expresión deberá aparecer el periodo T con esa condición. La manera de hacerlo es expresar la velocidad como

$$G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)} = \frac{v^2}{r}$$

$$v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow v = \frac{2\pi(R_T + h)}{T}$$

$$G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)} = \left(\frac{2\pi(R_T + h)}{T} \right)^2$$

$$G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)} = \frac{4\pi^2(R_T + h)^2}{T^2}$$

$$G \cdot M_T \cdot T^2 = 4\pi^2(R_T + h)^3$$

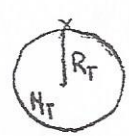
$$(R_T + h)^3 = \frac{G \cdot M_T \cdot T^2}{4\pi^2}$$

$$R_T + h = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_T \cdot T^2}{4\pi^2}}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_T \cdot T^2}{4\pi^2}} - R_T$$

Todo va en unidades SI
 $6400 \text{ km} = 6.4 \cdot 10^6 \text{ m}$
 $2h = 7200 \text{ s}$

No disponemos del dato de G ni de M_T que nos aparece en la expresión final, sin embargo nos dan el dato de $g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ que es la gravedad en la superficie terrestre y mediante el cual resolveremos.



$$g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$g = \frac{G \cdot M_T}{R_T^2}$$

Si despejamos este producto $[G \cdot M_T]$ podremos sustituirlo en la ecuación en función de los datos que conocemos

$$G \cdot M_T = g \cdot R_T^2$$

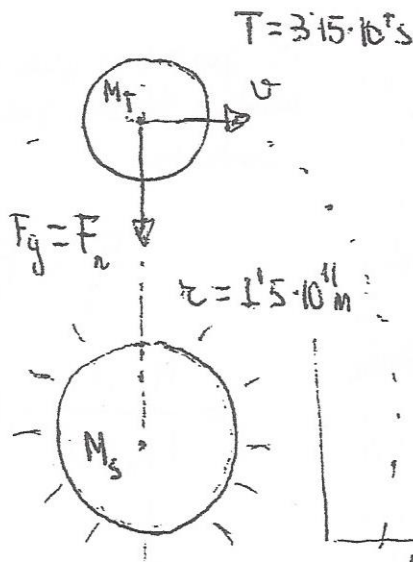
$$h = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_T \cdot T^2}{4\pi^2}} - R_T = \sqrt[3]{\frac{g \cdot R_T^2 \cdot T^2}{4\pi^2}} - R_T$$

$$h = 1.68 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Deberá estar situado a esa altura sobre la superficie terrestre para tener $T = 2h = 7200 \text{ s}$.

21

a)



Si la Tierra describe una órbita alrededor del Sol, entonces podemos expresar la F_g como F_n (condición de orbitación)

$$F_g = F_n$$

$$G \cdot \frac{M_T \cdot M_s}{r^2} = M_T \cdot \frac{v^2}{r}$$

Al hablarnos del radio de la circunferencia nos están dando la distancia centro-centro

No nos dan la velocidad orbital de la Tierra, pero si su periodo T , luego hacemos que en la expresión aparezca T de la siguiente forma:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \rightarrow \text{Nos dan la distancia centro-centro}$$

$$G \cdot \frac{M_s}{r} = v^2$$

$$G \cdot \frac{M_s}{r} = \left(\frac{2\pi r}{T} \right)^2$$

$$G \cdot \frac{M_s}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$$

$$M_s = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2 \cdot G}$$

Todo tiene que ir en unidades S-I

$$M_s = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2 \cdot G} = \frac{4\pi^2 \cdot (1.5 \cdot 10^{11})^3}{(3.15 \cdot 10^7)^2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11}} = 2.01 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

b)



Para calcular el potencial gravitatorio que crea el sol en el pto en donde se halla la Tierra también sabemos la distancia r $\rightarrow$ masa que crea el campo

$$V_{\text{sol}} = -G \cdot \frac{M_s}{r} = -6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{2.01 \cdot 10^{30}}{1.5 \cdot 10^{11}} = -8.94 \cdot 10^8 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

22

a)



Esta r que es la distancia centro-centro es la que nos piden calcular

$F_g = F_n \Rightarrow$ Ya que la Luna orbita en torno a la Tierra

$$G \cdot \frac{M_T \cdot M_L}{r^2} = M_L \cdot \frac{v^2}{r} \rightarrow v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$G \cdot \frac{M_T}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$$

$$G \cdot M_T \cdot T^2 = 4\pi^2 r^3$$

$$r^3 = \frac{G \cdot M_T}{4\pi^2} \cdot T^2$$

Con esto demostramos la 3ª ley de Kepler
 $T^2 = \text{cte} \cdot r^3$
 $T^2 = C \cdot r^3$

22

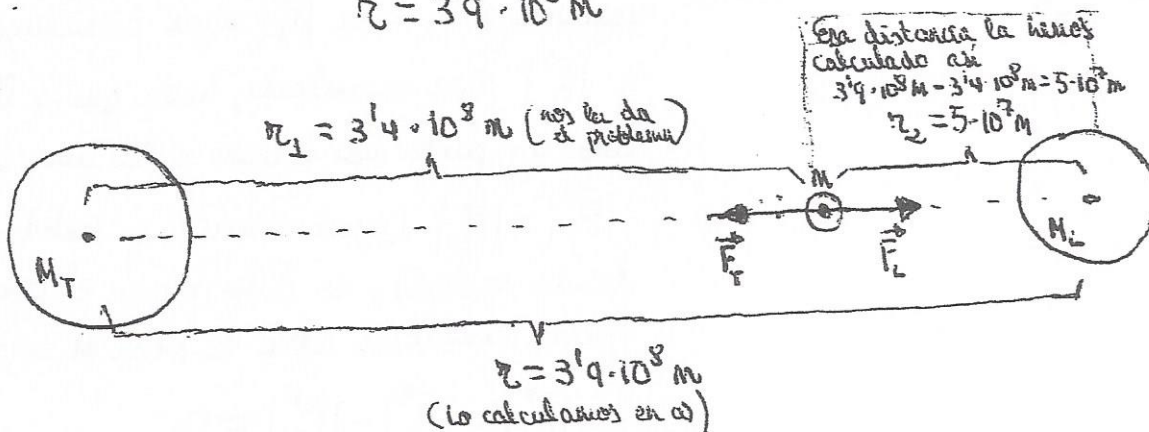
a) (Continuación)

$$G \cdot M_T \cdot T^2 = 4 \pi^2 r^3 \quad \text{Nos piden la distancia entre los centros } r$$

$$r^3 = \frac{G \cdot M_T \cdot T^2}{4 \pi^2} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_T \cdot T^2}{4 \pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot (28.24 \cdot 60 \cdot 60)^2}{4 \pi^2}}$$

$$r = 3.9 \cdot 10^8 \text{ m}$$

b)



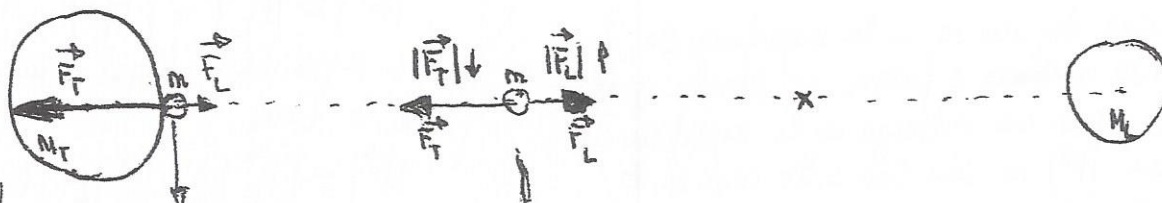
Ahora partimos de otra premisa, y es que si esa masa m está en equilibrio entre la Tierra y la luna, es debido a que la fuerza con la que la atrae la Tierra (F_T) y la fuerza con la que la atrae la luna (F_L) son iguales en módulo y en dirección, pero de sentido contrario, es decir, se equilibran siendo nula la fuerza resultante o total. Por lo tanto, ahora la condición de la que debemos partir es de que ambas fuerzas son iguales en módulo, para luego despejar la masa de la luna M_L .

$$|\vec{F}_T| = |\vec{F}_L|$$

$$G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r_1^2} = G \cdot \frac{M_L \cdot m}{r_2^2}$$

$$M_L = \frac{M_T \cdot r_2^2}{r_1^2} = \frac{6 \cdot 10^{24} \cdot (5 \cdot 10^7)^2}{(3.4 \cdot 10^8)^2} = 1.29 \cdot 10^{23} \text{ kg}$$

23

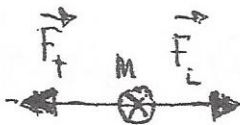


$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En la superficie terrestre $|\vec{F}_T| > |\vec{F}_L|$, ya que $M_T > M_L$ y está mas cercano a la Tierra (r menor), siendo su peso máximo en este caso $|\vec{F}| = |\vec{F}_T| - |\vec{F}_L|$

Conforme nos vamos alejando de la Tierra, $|\vec{F}_T|$ disminuye al ser mayor la distancia a la Tierra, mientras que $|\vec{F}_L|$ aumenta al ser menor la distancia a la luna, $|\vec{F}_T|$ sigue siendo mayor que $|\vec{F}_L|$ pero el peso total sería menor que en el caso anterior: $|\vec{F}| = |\vec{F}_T| - |\vec{F}_L| = \text{menor}$

(23) (continuación)

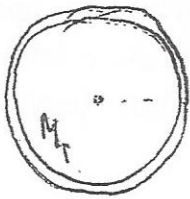


$$F = G \cdot \frac{M \cdot M}{r^2}$$

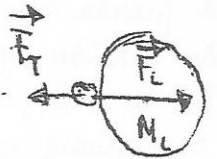


Conforme nos alejamos de la Tierra y nos acercamos a la luna $|\vec{F}_T|$ sigue disminuyendo y $|\vec{F}_L|$ sigue aumentando, hasta que se llegue a un punto más cercano a la luna en donde $|\vec{F}_T| = |\vec{F}_L|$ (igual dirección y sentido contrario los dos vectores), en dicho punto, el peso o fuerza resultante sobre la masa m sería cero

$$|\vec{F}| = |\vec{F}_T| - |\vec{F}_L| = 0$$



$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$



A partir de este punto, seguimos acercándonos a la luna y alejándonos de la Tierra, luego $|\vec{F}_T|$ sigue disminuyendo y $|\vec{F}_L|$ sigue aumentando, en este caso ya ocurre que $|\vec{F}_L| > |\vec{F}_T|$, luego el peso resultante en este caso será

$$|\vec{F}| = |\vec{F}_L| - |\vec{F}_T|$$

De aquí hasta llegar a la superficie de la luna

$$|\vec{F}| = |\vec{F}_L| - |\vec{F}_T|, \text{ luego el peso total aumenta.}$$

Hasta llegar de nuevo a la superficie de la luna el peso ~~se vuelve~~ o fuerza resultante vuelve a aumentar, pero sin embargo en la superficie de la luna el peso $|\vec{F}|$ no será tan alto como en la superficie terrestre.

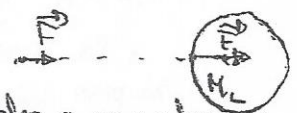
Resumiendo el peso total:



disminuye

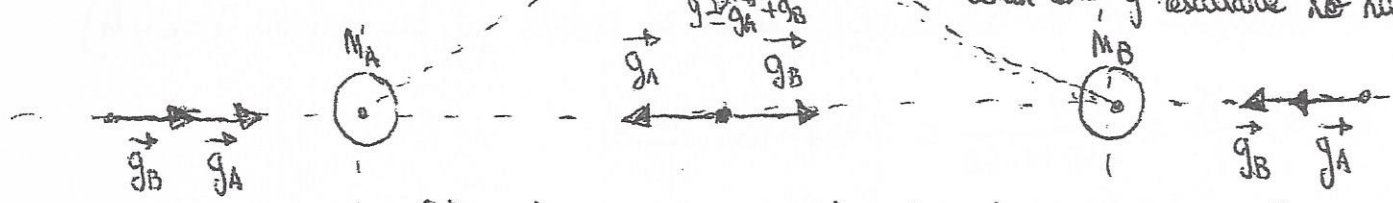
$\vec{F}$ disminuye hasta hacerse cero

cero



$\vec{F}$ vuelve a aumentar pero no llega al valor máximo

24) a) Campo gravitatorio $\equiv \vec{g}$



En cualquier pto fuera de la recta que une a las dos masas, $\vec{g}_A$ y $\vec{g}_B$ tendrán distinta dirección, y por ello darán un $\vec{g}$ resultante no nulo

En esta zona de la recta el campo gravitatorio total no se anulará ya que $\vec{g}_A$ y $\vec{g}_B$ llevarán el mismo sentido (nunca darán un vector resultante $\vec{g}$ nulo)

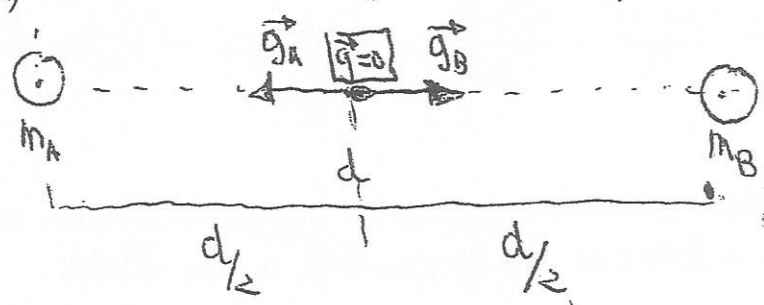
$$\vec{g} = \vec{g}_A + \vec{g}_B \neq 0$$

(Principio de superposición)

Sólo en la zona central de la recta que une a las dos masas se cumplirá que $\vec{g}_A$ y $\vec{g}_B$ tienen la misma dirección y sentido contrario, con lo cual podrían anularse si su módulo es el mismo.

Esto sólo ocurre en el pto intermedio entre las dos masas, y qd que $g = G \cdot \frac{M}{r^2}$

y entonces si $M_A = M_B$, y además $r_A = r_B$, se cumple que $|\vec{g}_A| = |\vec{g}_B|$ y entonces $\vec{g} = 0$ (se anulan)



$$\vec{g} = \vec{g}_A + \vec{g}_B = 0$$

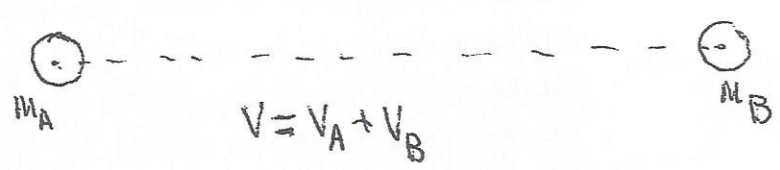
(Principio de superposición)

Esto ocurrirá a $\frac{d}{2}$ de M_A y a $\frac{d}{2}$ de M_B

En cualquiera de los puntos de esta zona de la recta $\vec{g}_B$ y $\vec{g}_A$ también tienen el mismo sentido, y por ello nunca darán un vector resultante $\vec{g}$ nulo.

$$\vec{g} = \vec{g}_A + \vec{g}_B \neq 0$$

b) Exceptuando el infinito donde por convenio el potencial gravitatorio es cero, en cualquier otro punto del espacio que rodea a las masas el potencial sería según el principio de superposición



$$V = -G \cdot \frac{M_A}{r_A} + \left(-G \cdot \frac{M_B}{r_B} \right) = -G \cdot \frac{M_A}{r_A} - G \cdot \frac{M_B}{r_B}$$

Sería la suma de dos magnitudes escalares que son dos potenciales negativos, luego el potencial gravitatorio no sería nulo.

(25)

a) Si el satélite es geostacionario no significa que esté en reposo sobre la Tierra, sino que gira al mismo ritmo que la Tierra siendo su velocidad angular ω la siguiente (tenemos en cuenta que su período $T=24h$)

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} = 7.27 \cdot 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$T = 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s}$

b) Ver problema 20 porque la expresión que vamos a utilizar se deduce de la misma forma; obteniendo lo siguiente

Es igual que en el problema 20 solo que sustituyendo $T=24h$

$$h = \sqrt[3]{\frac{g_0 \cdot R_T^2 \cdot T^2}{4\pi^2}} - R_T = \sqrt[3]{\frac{9.8 \cdot (6.4 \cdot 10^6)^2 \cdot (24 \cdot 60 \cdot 60)^2}{4\pi^2}} - 6.4 \cdot 10^6$$

$$h = 3.6 \cdot 10^7 \text{ m}$$

c) $v = \omega \cdot r$ (ver Teoría)

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{(\omega \cdot r)^2}{r} = \frac{\omega^2 \cdot r^2}{r} = \omega^2 \cdot r = \omega^2 \cdot (R_T + h) = (7.27 \cdot 10^{-5})^2 \cdot (6.4 \cdot 10^6 + 3.6 \cdot 10^7)$$

$$a_n = 0.22 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

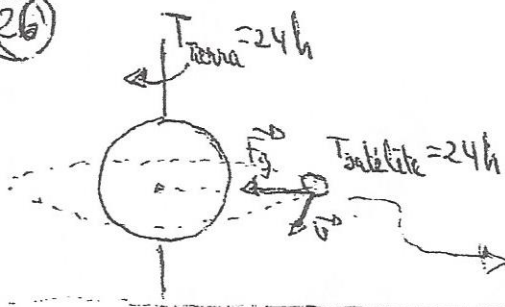
Se podría haber calculado suponiendo que esa aceleración normal no es más que la aceleración de la gravedad a esa altura.

$h \downarrow a_n = g$

$$g_{\text{órbita}} = G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)^2} = \dots = 0.22 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$


d) Porque actúa una fuerza gravitatoria normal que proporciona una aceleración normal que hace que la velocidad cambie de dirección (no de módulo) coincidiendo su trayectoria con la curvatura de la Tierra, no llegando a impactar con ella.

(26)



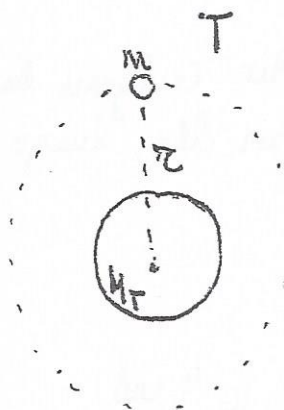
Características de la órbita. El satélite tiene que estar a una altura h determinada de manera que posea $T=24h$ y se mantenga siempre en la vertical sobre un punto de la Tierra. Solo es posible una única órbita de altura h a la que le corresponde $T=24h$, y además la órbita ha de estar situada sobre el ecuador.

La F_g es una F_{central} (aquí se dirige al centro de la Tierra), y de ahí que el satélite describa esa órbita.



Con una órbita (a esa altura h) que no fuese ecuatorial el satélite no sería geostacionario porque no se mantendría sobre la vertical de un pto.

27



⇒ A la vista de lo que nos pregunta el problema, lo primero que tenemos que hacer es hallar una expresión del periodo T del satélite en función de la masa de la Tierra M_T , partiendo de que si el satélite orbita:

$$F_g = F_n$$

$$G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r} \rightarrow v = \frac{2\pi r}{T} \text{ para que aparezca el periodo } T$$

$$G \cdot \frac{M_T}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$$

$$G \cdot M_T \cdot T^2 = 4\pi^2 r^3$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{G \cdot M_T}}$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{G \cdot M_T}}$$

$$T' = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{G \cdot 4M_T}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{G \cdot M_T}}$$

$$\frac{T'}{T} = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{G \cdot M_T}}}{\sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{G \cdot M_T}}}$$

$$T' = \frac{1}{2} T$$

↓
En ese caso, el periodo se ha reducido a la mitad.

$$T' = \frac{1}{2} T = \frac{1}{2} 10h = 5h$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{G \cdot M_T}}$$

⇒ En la expresión deducida anteriormente se observa que el periodo T del satélite es independiente de la masa m de éste, por lo que si el satélite duplica su masa el periodo T seguirá siendo el mismo (10h)

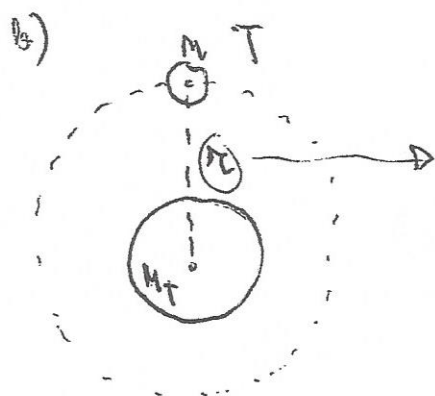
28

a) Si el satélite nos envía tres veces al día imágenes de Europa es porque pasa tres veces al día por ella, luego su periodo de revolución es

$$T = \frac{24h}{3} = 8h$$

$$\text{velocidad angular } \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{8 \cdot 60 \cdot 60} = 2.18 \cdot 10^{-4} \frac{\text{rad}}{s}$$

↳ pasarlo a s



Al preguntarnos por el radio de la órbita que describe, nos están pidiendo la distancia centro-centro.

$F_g = F_n$ Si el satélite orbita

$$G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r} \quad \rightarrow \quad v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$G \cdot \frac{M_T}{r} = \left(\frac{2\pi r}{T} \right)^2$$

$$G \cdot \frac{M_T}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$$

$$G \cdot M_T \cdot T^2 = 4\pi^2 r^3$$

$$r^3 = \frac{G \cdot M_T \cdot T^2}{4\pi^2}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_T \cdot T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.98 \cdot 10^{24} \cdot (8 \cdot 60 \cdot 60)^2}{4\pi^2}} \approx 2.03 \cdot 10^7 \text{ m}$$

(29) a)

El peso del meteorito no es más que la fuerza gravitatoria con la que la Tierra lo atrae

$$P = F = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{(7R_T)^2} = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{49R_T^2}$$

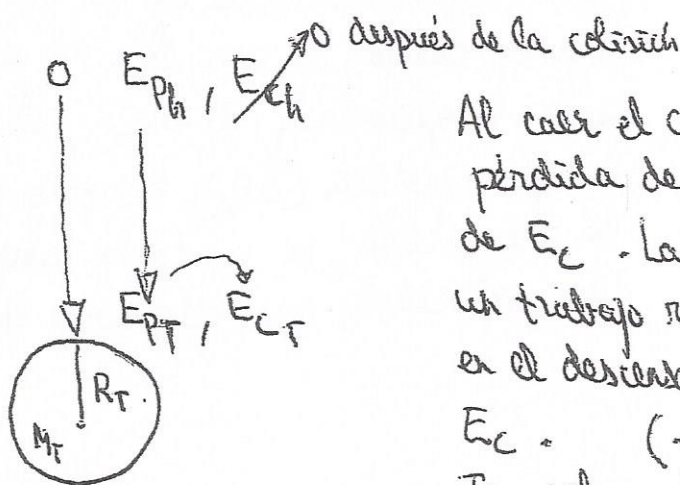
$$F = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24} \cdot 1000}{49 \cdot (6.4 \cdot 10^6)^2} = 200 \text{ N}$$

$$E_m = E_c + E_p$$

porque al chocar pierde toda su E_c

$$E_m = E_p = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r} = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{7R_T} = -6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24} \cdot 1000}{7 \cdot 6.4 \cdot 10^6} = -8.93 \cdot 10^9 \text{ J}$$

b)



Al caer el cuerpo pierde E_p , y esa pérdida de E_p coincidirá con un aumento de E_c . La pérdida de E_p , mediante un trabajo realizado por la fuerza gravitatoria en el descenso pasará a incrementar la E_c . ($-\Delta E_p = W = \Delta E_c$)

Tan solo actúa la fuerza gravitatoria, la cual es conservativa, y por ello la E_m no varía, es decir, que lo que se pierde en E_p es lo que se gana en E_c de manera que la E_m no varía (se conserva).

Calcularemos la velocidad con la que llega a la superficie terrestre aplicando la conservación de la energía.

$$E_{ph} + E_{ch} = E_{pt} + E_{ct}$$

porque cae desde el reposo arriba

$$-G \cdot \frac{M_T \cdot m}{7R_T} + 0 = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T} + \frac{1}{2} m \cdot v_f^2$$

$$G \cdot \frac{M_T}{R_T} - G \cdot \frac{M_T}{7R_T} = \frac{1}{2} v_T^2$$

$$G \cdot \frac{6M_T}{7R_T} = \frac{1}{2} v_T^2$$

$$v_T^2 = 2G \cdot \frac{6M_T}{7R_T}$$

$$v = \sqrt{\frac{12G \cdot M_T}{7R_T}} = \sqrt{\frac{12 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{7 \cdot 6.4 \cdot 10^6}} = 1.035 \cdot 10^4 \frac{m}{s}$$

c) $-\Delta E_p = W = \Delta E_c$



La velocidad no depende de la trayectoria seguida ya que la fuerza gravitatoria al ser una fuerza conservativa realizará un trabajo W independientemente de la trayectoria que siga el cuerpo, y por ello si W es independiente de la trayectoria y $W = \Delta E_c$, el incremento de energía cinética (ΔE_c) tampoco dependerá de la trayectoria, ni por tanto tampoco dependerá la velocidad que adquiera en ese trayecto.

Independientemente del origen de E_p que tomemos, la variación de E_p va a ser la misma, luego si esa disminución de E_p ~~es~~ es la misma, el incremento de E_c será el mismo y la velocidad con la que llegue la misma. Por ello, la v tampoco dependerá del origen de E_p tomado.

30

a)



Al llegar a la altura máxima se para, luego el balance energético es:

$$E_{cT} + E_{pT} = E_{p_{h_{max}}} + E_{c_{h_{max}}}$$

- 30) a) (Continuación) A partir del balance energético calculamos la altura máxima

$$E_{CT} + E_{PT} = E_{Ph} + E_{Ch} \rightarrow 0$$

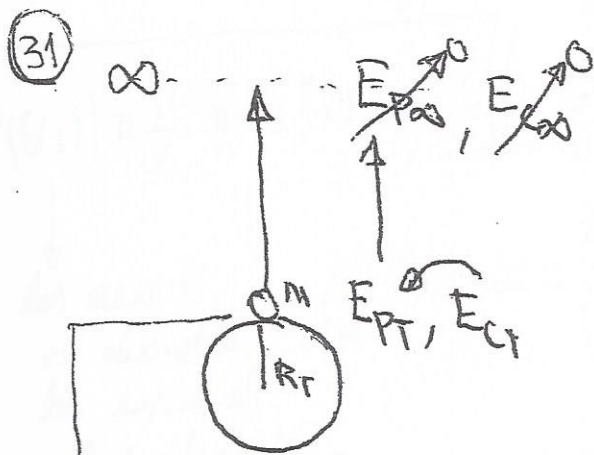
$$\frac{1}{2} M \cdot v^2 - G \cdot \frac{M_T \cdot M}{R_T} = -G \cdot \frac{M_T \cdot M}{(R_T + h_{max})} + 0$$

$$\frac{1}{2} (4 \cdot 10^3)^2 - 6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5'98 \cdot 10^{24}}{6'4 \cdot 10^6} = -6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5'98 \cdot 10^{24}}{(6'4 \cdot 10^6 + h_{max})}$$

Despejando h_{max} de esa ecuación nos da:

$$h_{max} = 9'5 \cdot 10^5 \text{ m}$$

- b) A la altura máxima llegaría sin velocidad, y sobre el cuerpo actuaría una fuerza gravitatoria haciendo que descendiese llegando a la superficie de la Tierra con la misma velocidad con la que partió (conservación de la energía)



$$g_T = \frac{G \cdot M_T}{R_T^2}$$

$$G \cdot M_T = g_T \cdot R_T^2$$

Con función de los datos que nos dan.

La velocidad necesaria para que llegue al infinito o velocidad de escape v_e que hemos de comunicarle en la Tierra la tenemos según el balance energético:

$$E_{PT} + E_{CT} = E_{P\infty} + E_{C\infty}$$

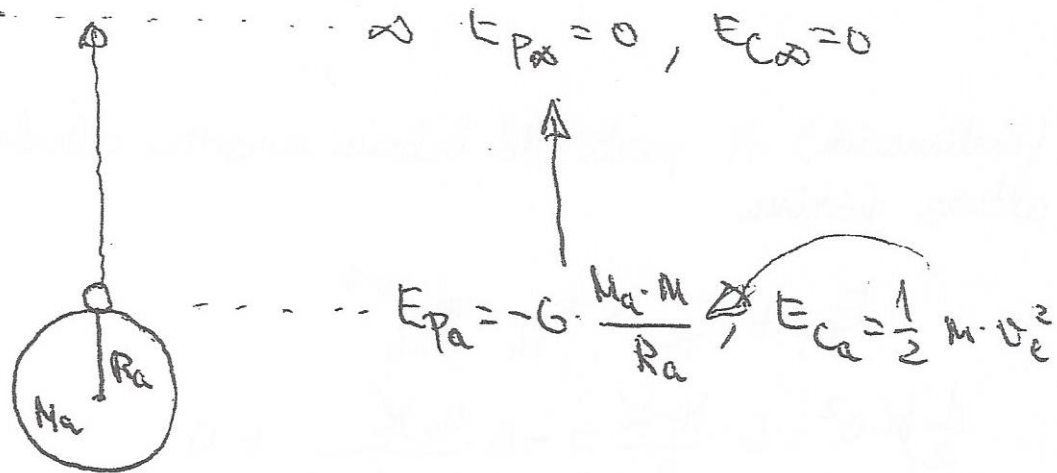
$$-G \cdot \frac{M_T \cdot M}{R_T} + \frac{1}{2} M \cdot v_e^2 = 0 + 0$$

$$\frac{1}{2} M \cdot v_e^2 = G \cdot \frac{M_T \cdot M}{R_T}$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2G M_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{2 \cdot g_T \cdot R_T^2}{R_T}} = \sqrt{2 g_T \cdot R_T}$$

$$v_e = \sqrt{2 g_T \cdot R_T} = \sqrt{2 \cdot 9'8 \cdot 6'4 \cdot 10^6} = 11200 \text{ m/s}$$

(32)



a) $E_{Pa} + E_{Ca} = E_{Pa} + E_{Ca}$

$$-G \frac{M_a M}{R_a} + \frac{1}{2} M v_e^2 = 0 + 0$$

$$\frac{1}{2} M v_e^2 = G \frac{M_a M}{R_a}$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2G M_a}{R_a}} \quad \rightarrow \quad \rho_a = \frac{M_a}{V_a} = \frac{M_a}{\frac{4}{3} \pi R_a^3}$$

$$\rightarrow M_a = \rho_a \cdot \frac{4}{3} \pi R_a^3$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2G \rho_a \cdot \frac{4}{3} \pi R_a^3}{R_a}} = \sqrt{2G \rho_a \cdot \frac{4}{3} \pi R_a^2} = \sqrt{2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 2.2 \cdot 10^3 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot (1.2 \cdot 10^3)^2}$$

$$\rho_a = 2.2 \frac{g}{cm^3} \cdot \frac{1 \text{ Kg}}{10^3 g} \cdot \frac{10^6 cm^3}{1 m^3} = 2.2 \cdot 10^3 \frac{Kg}{m^3}$$

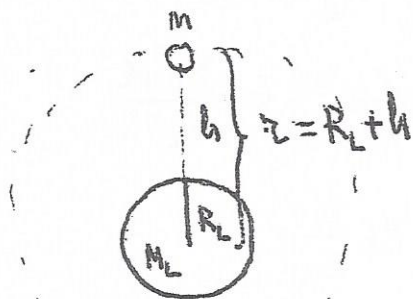
$$v_e = 1.33 \frac{m}{s}$$

El radio del
asteroide es
la mitad del
diámetro y lo pasamos
a m

b) Velocidad de escape o velocidad mínima de escape

c) Según la expresión deducida en a), la velocidad de escape es independiente de la masa del astronauta, por lo tanto no le sería ni más fácil ni más difícil.

33 a)



Para que el vehículo espacial Apolo VIII estuviese en órbita tuvo que cumplirse que:

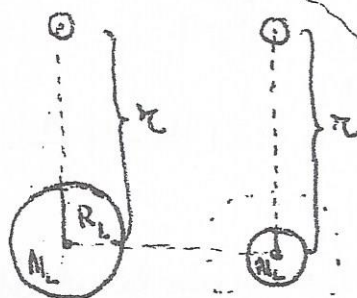
$$F_g = F_A$$

$$G \cdot \frac{M_L \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

$$G \cdot \frac{M_L}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$$

$$G \cdot M_L \cdot T^2 = 4\pi^2 r^3$$

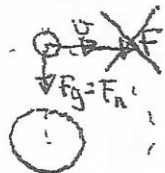
$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{G \cdot M_L}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 (R_L + h)^3}{G \cdot M_L}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 (1740 \cdot 10^3 + 113 \cdot 10^3)^3}{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 7.36 \cdot 10^{22}}} = 7153.05 \text{ s}$$



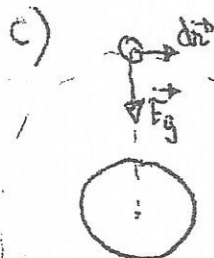
Si la luna redujese su radio a la mitad manteniéndose masa M_L , no se modificaría la distancia centro a centro (r), y por ello, según la expresión anteriormente deducida, no se modificaría el valor del período calculado.

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi (R_L + h)}{T} = \frac{2\pi (1740 \cdot 10^3 + 113 \cdot 10^3)}{7153.05} = 1626.93 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{7153.05} = 8.78 \cdot 10^{-4} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$



$\rightarrow a_t = 0$. No existe aceleración tangencial puesto que en el caso del satélite orbitando la fuerza gravitatoria solo tiene componente normal, y por ello solo existe aceleración normal, cuyo valor será:

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{(R_L + h)} = \frac{(1626.93)^2}{(1740 \cdot 10^3 + 113 \cdot 10^3)} = 1.42 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$


Cuando el satélite orbita, al ser la fuerza y el desplazamiento perpendiculares entre sí, el trabajo realizado por esa fuerza gravitatoria será nulo $W_{A \rightarrow B} = F \cdot d \cos 90^\circ = 0$

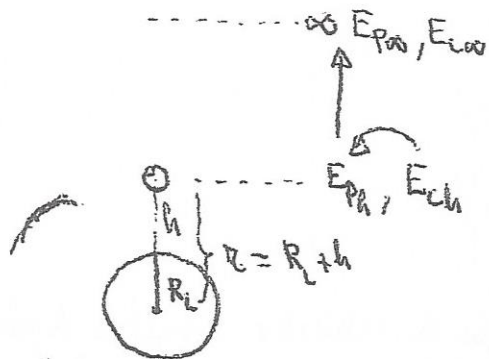
$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Otra forma de verlo es comprobando que el satélite se mueve en cualquier caso entre dos puntos de una superficie equipotencial

$$W = m \cdot (V_A - V_B) = 0$$

$$A \rightarrow B \quad (V_A = V_B)$$

d)



Hemos de tener en cuenta que el vehículo espacial no está en la superficie lunar a la hora de hacer el planteamiento energético

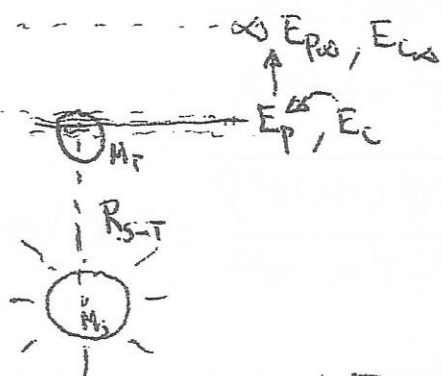
$$E_{ph} + E_{ch} = E_{p\infty} + E_{c\infty}$$

$$-G \cdot \frac{M_L \cdot m}{R_L + h} + \frac{1}{2} m \cdot v_e^2 = 0 + 0$$

$$\frac{1}{2} m \cdot v_e^2 = G \cdot \frac{M_L \cdot m}{R_L + h}$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_L}{R_L + h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 7.36 \cdot 10^{22}}{(1740 \cdot 10^3 + 113 \cdot 10^3)}} = 2301.86 \frac{m}{s}$$

34)



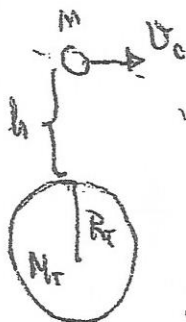
$$E_p + E_c = E_{p\infty} + E_{c\infty}$$

$$-G \cdot \frac{M_S \cdot m_T}{R_{S-T}} + \frac{1}{2} m_T \cdot v_e^2 = 0 + 0$$

$$\frac{1}{2} m_T \cdot v_e^2 = G \cdot \frac{M_S \cdot m_T}{R_{S-T}}$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2G \cdot M_S}{R_{S-T}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30}}{15 \cdot 10^{24}}} = 42174.24 \frac{m}{s}$$

35)



Deducimos primero la expresión de la velocidad orbital v_o

$$F_g = F_n$$

$$G \cdot \frac{M_T \cdot m}{(R_T + h)^2} = m \cdot \frac{v_o^2}{(R_T + h)}$$

$$v_o = \sqrt{G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)}}$$

Aparte deducimos la velocidad de escape v_e del satélite desde esa posición.

$$-G \cdot \frac{M_T \cdot m}{(R_T + h)} + \frac{1}{2} m \cdot v_e^2 = 0 + 0$$

$$\frac{1}{2} m \cdot v_e^2 = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{(R_T + h)}$$

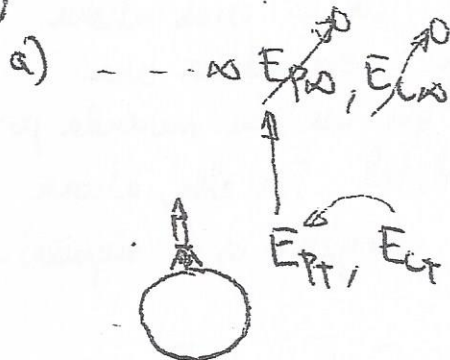
$$v_e = \sqrt{2G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)}}$$

Por último relacionaremos las dos expresiones obtenidas anteriormente de la siguiente forma:

$$\frac{v_e}{v_o} = \frac{\sqrt{2G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)}}}{\sqrt{G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)}}}$$

$$\Rightarrow v_e = \sqrt{2} \cdot v_o$$

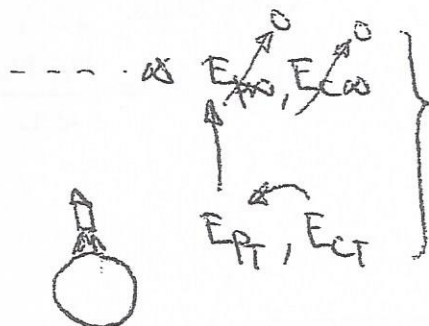
(36)



La E_c que se le suministra hace que se incremente durante todo el trayecto la E_p , hasta que en el ∞ se llega al valor máximo de E_p ($E_p = 0$) y se ha perdido toda la E_c , ya que nos basta que el cohete llegue al ∞ con $E_c = 0$. La E_c suministrada será por tanto la diferencia de E_p del cohete entre el ∞ y la Tierra.

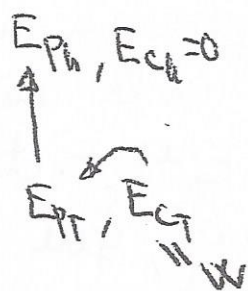
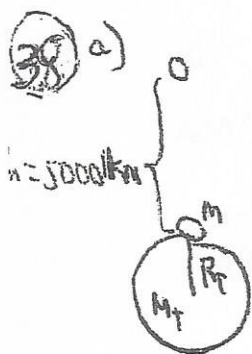
b) No, ya que al ser la E_c suministrada la diferencia de E_p del cohete entre el ∞ y la Tierra y dicha diferencia se mantiene sin depender de donde situemos el origen de energía potencial, por tanto la E_c suministrada no dependerá de dicho origen tampoco.

(37)



→ Esto sería en una situación ideal, sin embargo en la realidad, parte de la E_c suministrada en la Tierra se pierde como consecuencia del rozamiento, transformándose en calor, y por ello el cohete no llegaría a incrementar su E_p hasta llegar al infinito.

Si en la realidad quisiéramos que el cohete llegase al ∞ , tendríamos que suministrarle una E_c mayor, y por ello una velocidad mayor que la velocidad de escape que calculamos para compensar la disipación de energía.



Tendremos que aportar una energía cinética (o trabajo externo, no realizado por la fuerza gravitatoria) que pasará a incrementar la energía potencial gravitatoria hasta que al llegar a la altura h se consume toda la E_c (o W) suministrado.

$$E_{pT} + W = E_{ph} + E_{ch}$$

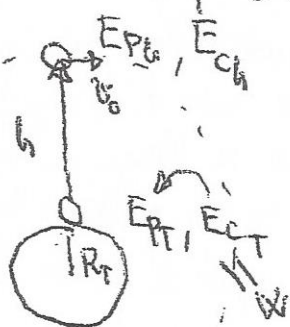
$$-G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T} + W = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{(R_T + h)} + 0 \Rightarrow W = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T} - G \cdot \frac{M_T \cdot m}{(R_T + h)}$$

$$W = G \cdot M_T \cdot m \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{(R_T + h)} \right)$$

$$W = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 200 \left(\frac{1}{6.37 \cdot 10^6} - \frac{1}{6.37 \cdot 10^6 + 200} \right) = 5.52 \cdot 10^9 \text{ J}$$

138) 6)

(Continuación)



La diferencia ahora es que el satélite debería permanecer orbitando con una determinada velocidad orbital, con la cual ahora tendría que tener a esa altura una determinada E_c que vendría marcada por la velocidad orbital. Por ello, ahora el planteamiento energético es el siguiente:

$$E_{Pt} + W = E_{Ph} + E_{c \text{ orbital}}$$

(E_{cT})

$$-G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T} + W = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{2R} \rightarrow \boxed{R = R_T + h}$$

Energía mecánica de un satélite orbitando (ver tema 3)

$$E_m = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{2r}$$

$$W = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T} - G \cdot \frac{M_T \cdot m}{2(R_T + h)}$$

$$W = G \cdot M_T \cdot m \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2(R_T + h)} \right)$$

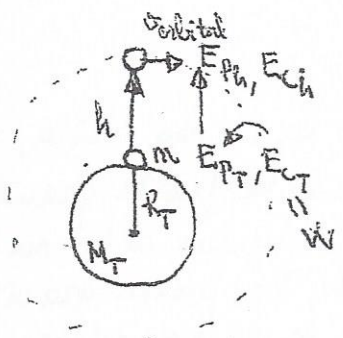
$$W = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 200 \left(\frac{1}{6.4 \cdot 10^6} - \frac{1}{2 \cdot (6.4 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^6)} \right)$$

$$W = 9.04 \cdot 10^9 \text{ J}$$

c) No varía ninguna de las tres, ya que permanece a la misma altura permaneciendo $E_p = \text{cte}$, y con la misma velocidad $E_c = \text{cte}$, luego $E_m = E_p + E_c = \text{cte}$.
(Si solo actúa la fuerza gravitatoria, que es conservativa entonces E_m permanece cte)

d) Nulo, ya que cuando orbita fuerza y desplazamiento son perpendiculares, y así $W = F \cdot d \cdot \cos 90^\circ = 0$.

39a)



En la superficie terrestre posee una $E_{pT} = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T}$.

Al cuerpo lo lanzamos con una velocidad v desde la superficie terrestre de manera que adquiere una $E_c = \frac{1}{2} m v^2$. Conforme asciende gana E_p hasta llegar.

a $E_{ph} = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T + h}$, a costa de una disminución de E_c .

Sin embargo, cuando llega a la altura h no ha perdido toda su E_c , sino que conserva una parte de manera que estará orbitando con una $E_{ch} = \frac{1}{2} m v_{\text{orbital}}^2$

b) $E_{pT} + W = E_{ph} + E_{ch}$ $\rightarrow$ lo expresamos como la energía mecánica E_m del satélite orbitando, deducida en la pregunta 3: del Tema 3 $E_m = -G \frac{M_T m}{2z}$

$$-G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T} + W = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{2(R_T + h)}$$

$$W = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T} - G \cdot \frac{M_T \cdot m}{2(R_T + h)} \Rightarrow \text{Sacando factor común}$$

$$W = G \cdot \cancel{M_T} \cdot m \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2(R_T + h)} \right)$$

$g = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}$
 $\Rightarrow M_T = \frac{g \cdot R_T^2}{G}$

$\rightarrow$ Ya que no nos dan el dato de la M_T , lo pondremos en función de la gravedad en la superficie terrestre g , que es el dato que nos dan.

$$W = G \cdot \frac{g \cdot R_T^2}{G} m \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2(R_T + h)} \right)$$

$$W = 10 \cdot (6.4 \cdot 10^6)^2 \cdot 50 \left(\frac{1}{6.4 \cdot 10^6} - \frac{1}{2 \cdot (6.4 \cdot 10^6 + 6 \cdot 10^5)} \right)$$

$$W = 1.74 \cdot 10^9 \text{ J}$$

c) $E_m = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{2z} = -G \cdot \frac{\cancel{M_T} \cdot m}{2(R_T + h)} \Rightarrow g = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} \Rightarrow M_T = \frac{g \cdot R_T^2}{G}$

$$= -G \cdot \frac{g \cdot R_T^2 / G \cdot m}{2(R_T + h)} = -g \cdot R_T^2 \cdot \frac{m}{2(R_T + h)}$$

$$= -10 \cdot (6.4 \cdot 10^6)^2 \cdot \frac{50}{2 \cdot (6.4 \cdot 10^6 + 6 \cdot 10^5)} = -1.46 \cdot 10^9 \text{ J}$$

$\rightarrow$ La E_m negativa significa que el objeto permanece ligado al campo gravitatorio terrestre.

10) Primero deducimos la expresión de la velocidad orbital:

$F_g = F_n$ si el satélite orbita.

$$G \cdot \frac{M_T \cdot m}{z^2} = m \cdot \frac{v^2}{z} \Rightarrow v = \sqrt{G \cdot \frac{M_T}{z}}$$

$\Rightarrow$ Si $z \uparrow$, $v \downarrow$, acercándose el satélite a la Tierra. El satélite orbitará con una velocidad mayor a una distancia mayor de la Tierra.

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \rightarrow \text{Si } v \uparrow, \text{ la } E_c \uparrow \text{ también}$$

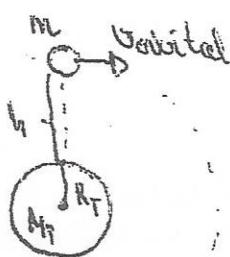
$$E_p = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r} \rightarrow \text{Si } r \downarrow, \text{ la } E_p \downarrow \text{ también}$$

$$E_m = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{2r} \rightarrow \text{Si } r \downarrow, \text{ la } E_m \downarrow \text{ también}$$

En el caso en el que el satélite se encuentra describiendo la misma órbita, la E_m se mantiene cte (se conserva), (actúa una única fuerza que es la fuerza gravitatoria). Sin embargo, este no es el caso, ya que el satélite no se encuentra en la misma órbita sino que cambia a una órbita de radio distinto, la fuerza gravitatoria espontáneamente no produce esto ya que lo mantendría en la misma órbita, y hace falta un trabajo externo para cambiarlo. En la nueva órbita tendrá mayor velocidad orbital (mayor E_c), sin embargo la E_p que le corresponde a la misma altura ha disminuido más de lo que ha aumentado la E_c con la nueva velocidad orbital que ha de tener, por lo que la E_m también habrá disminuido según se ve en la expresión de la E_m del satélite orbitando $E_m = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{2r}$.

41

a)



$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v_{\text{orbital}}^2 = \frac{1}{2} m \left(\sqrt{G \cdot \frac{M_T}{R_T + h}} \right)^2 = \frac{1}{2} m \cdot G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)}$$

$$E_c = \frac{1}{2} 100 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5.98 \cdot 10^{24}}{6.37 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5} = 2.9 \cdot 10^9 \text{ J}$$

$$E_p = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T + h} = -6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5.98 \cdot 10^{24} \cdot 100}{6.37 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5} = -5.8 \cdot 10^9 \text{ J}$$

$$E_m = E_p + E_c = -5.8 \cdot 10^9 + 2.9 \cdot 10^9 = -2.9 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Otra forma de hallar la E_m hubiese sido por la expresión de la E_m del satélite orbitando (pregunta 3ª, Tema 3)

$$E_m = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{2(R_T + h)} = -2.9 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Es E_m del apdo anterior ($-2.9 \cdot 10^9 \text{ J}$)

$$E_c + E_p + W = E'_c + E'_p$$

$$E_m + W = E'_m$$

$$E_m + W = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{2(R_T + h')}$$

$$-2.9 \cdot 10^9 + W = -6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5.98 \cdot 10^{24} \cdot 100}{2 \cdot (6.37 \cdot 10^6 + 16.9 \cdot 10^5)} \Rightarrow W = 4.3 \cdot 10^8 \text{ J}$$

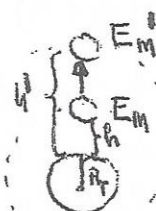
Deducimos la expresión de la v_{orbital}

$$F_g = F_n$$

$$G \cdot \frac{M_T \cdot m}{(R_T + h)^2} = m \cdot \frac{v_{\text{orbital}}^2}{(R_T + h)}$$

$$v_{\text{orbital}} = \sqrt{G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)}}$$

b)



c) $E_p = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r} \rightarrow \text{Si } r \uparrow \rightarrow E_p \uparrow$, $E_c = \frac{1}{2} m \cdot v_c^2 \rightarrow \text{Si } r \uparrow \rightarrow v_c \downarrow$, $E_c \downarrow$ (ver expresión)

$E_m = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{2r} \rightarrow \text{Si } r \uparrow \rightarrow E_m \uparrow \rightarrow$ la explicación es igual que en el ejercicio 40 pero al contrario

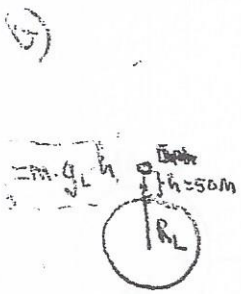
42) a) La masa del cuerpo en la Tierra y en la luna será la misma.
 Sabiendo que el peso en la Tierra $F_T = P = 800 \text{ N}$ y que la gravedad en la Tierra es $g = 10 \text{ m/s}^2$ se calcula: $P = m \cdot g \Rightarrow m = \frac{P}{g} = \frac{800}{10} = 80 \text{ kg}$ → masa en la Tierra y en la luna.

Para hallar el peso en la luna, lo compararemos con el de la Tierra:

$$F_T = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T^2}$$

$$F_L = G \cdot \frac{M_L \cdot m}{R_L^2} = G \cdot \frac{0.01 M_T \cdot m}{(0.25 R_T)^2} = G \cdot \frac{0.01 M_T \cdot m}{0.0625 R_T^2}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{F_L}{F_T} &= \frac{\cancel{G} \cdot \frac{0.01 M_T \cdot m}{0.0625 R_T^2}}{\cancel{G} \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T^2}} \\ \frac{F_L}{F_T} &= 0.16 \Rightarrow F_L = 0.16 F_T = 0.16 \cdot 800 = 128 \text{ N} \end{aligned} \right.$$



Balance de E $\Rightarrow$ A una determinada altura de 50m poseerá una cierta E_p , si desde esa altura se deja caer desde el reposo su E_c valdrá cero. Conforme desciende perderá energía potencial, y en pérdida se corresponde con lo que gana de energía cinética, pero de manera que la E_m se conserva, ya que si no consideramos rozamientos, únicamente actuará la fuerza gravitatoria (conservativa)

$\Rightarrow$ En este problema debemos hacer una simplificación, y es que como la altura es muy pequeña (50m), durante todo el trayecto de caída puedo considerar la gravedad local g_L como constante, por lo que en este caso podría utilizar la expresión $E_p = m \cdot g_L \cdot h$ cuyo ~~caso~~ supuesto podría aplicar el principio de conservación de la E_m de la siguiente forma:

50m

$E_{p1} = m \cdot g_L \cdot h, E_{c1} = 0$

$E_{p2} = m \cdot g_L \cdot h, E_{c2} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$

$E_{p1} + E_{c1} = E_{p2} + E_{c2}$

$m \cdot g_L \cdot h = \frac{1}{2} m \cdot v^2$

$v = \sqrt{2 g_L \cdot h}$

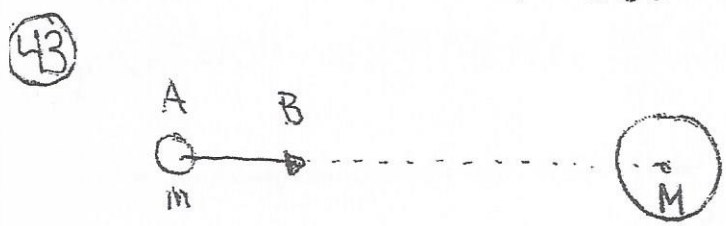
$v = \sqrt{2 \cdot 1.6 \cdot 50} = 12.64 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

No se cuanto vale g_L , pero lo calculo por comparación con g_T

$$\left\{ \begin{aligned} g_T &= G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} \\ g_L &= G \cdot \frac{0.01 M_T}{(0.25 R_T)^2} = G \cdot \frac{0.01 M_T}{0.0625 R_T^2} \end{aligned} \right.$$

$$\frac{g_L}{g_T} = \frac{\cancel{G} \cdot \frac{0.01 M_T}{0.0625 R_T^2}}{\cancel{G} \cdot \frac{M_T}{R_T^2}}$$

$$g_L = 0.16 g_T = 0.16 \cdot 10 = 1.6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

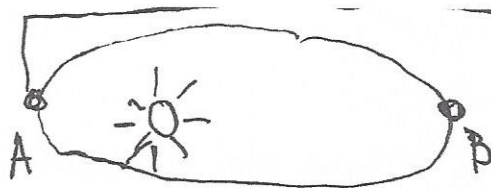


a) Para que espontáneamente por la acción de la $F_{\text{gravitatoria}}$ m se desplace desde A hasta B, $W_{A \rightarrow B} > 0$. Relacionando trabajo y potenciales: $W_{A \rightarrow B} = m (V_A - V_B) > 0$

El pto B está a menor potencial $V_A > V_B$

b) $E_p \downarrow, E_c \uparrow, E_m$ permanece cte ya que lo que se pierde de E_p es lo que se gana en E_c de manera que la suma de ambas permanece cte por actuar únicamente la fuerza gravitatoria que es conservativa (conserva la E_m)

44)



→ Cuando el cometa está más cercano al sol su $E_p = -G \cdot \frac{M_s \cdot m}{r}$ es menor que en B, luego E_{cA} es mayor ~~para~~ para que $E_m = cte$ (en exclusiva acción de una fuerza conservativa)

La aceleración del cometa no es más que la aceleración de la gravedad g , luego entonces:

$$g = G \cdot \frac{M_s}{r^2} \rightarrow r_B < r_A \Rightarrow g_B > g_A$$

$$b) E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \Rightarrow \text{si } v_B > v_A \Rightarrow E_{cB} > E_{cA}$$

$$E_p = -G \cdot \frac{M_s \cdot m}{r} \Rightarrow \text{si } r_A > r_B \Rightarrow E_{pA} > E_{pB}$$

Si consideramos que ~~en~~ el cometa en su órbita actúa únicamente una fuerza conservativa (la fuerza gravitatoria), entonces la E_m permanece cte.

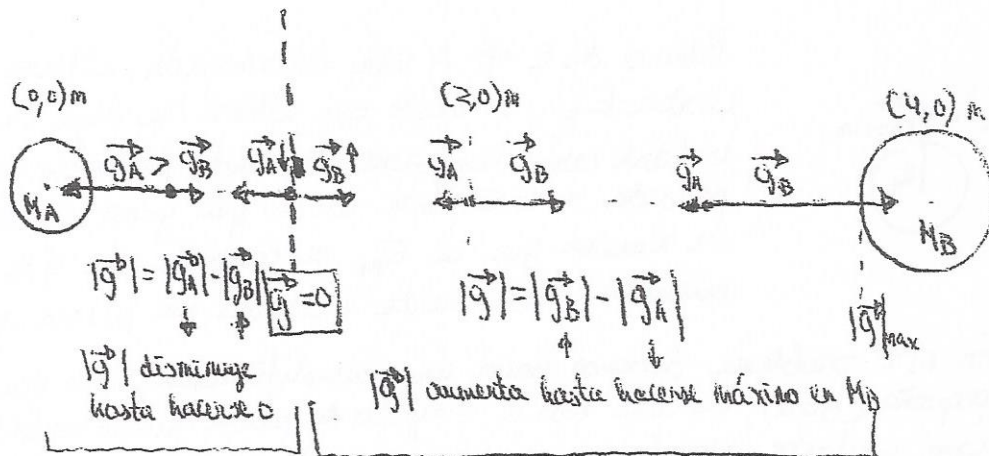
45)

a)

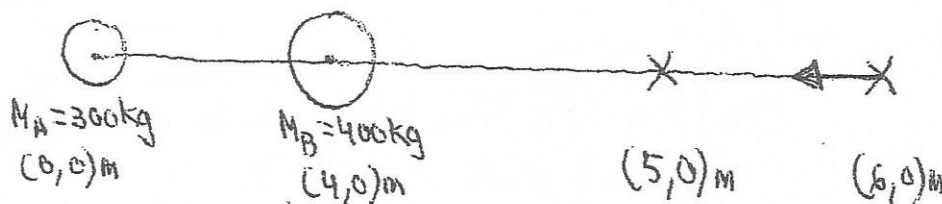
$$g = G \cdot \frac{M}{r^2}$$

$$\vec{g} = \vec{g}_A + \vec{g}_B$$

(Principio de superposición)



b)



Principio de superposición

$$V_{(5,0)m} = V_A + V_B = -G \cdot \frac{M_A}{r_A} - G \cdot \frac{M_B}{r_B} = -6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{300}{5} - 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{400}{1} = -3 \cdot 10^{-8} J/kg$$

$$V_{(6,0)m} = V_A' + V_B' = -G \cdot \frac{M_A}{r_A'} - G \cdot \frac{M_B}{r_B'} = -6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{300}{6} - 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{400}{2} = -1.6 \cdot 10^{-8} J/kg$$

c) Obsérvese en el dibujo del apartado b) que la fuerza gravitatoria desplazaría a la partícula espontáneamente desde $(6,0)m$ hasta $(5,0)m$

$$W_{(6,0)m \rightarrow (5,0)m} = \Delta E_c$$

Podemos su expresión en función de los potenciales ya hallados

$$m \cdot (V_{(6,0)m} - V_{(5,0)m}) = \frac{1}{2} m \cdot v_{(5,0)m}^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_{(6,0)m}^2$$

$$v_{(5,0)m} = \sqrt{2 \cdot (V_{(6,0)m} - V_{(5,0)m})}$$

$$v_{(5,0)m} = \sqrt{2 \cdot (-1.6 \cdot 10^{-8} - (-3 \cdot 10^{-8}))}$$

$$v_{(5,0)m} = 1.67 \cdot 10^{-4} \frac{m}{s}$$

46

a) Sabemos que para una órbita circular $E_c = \frac{1}{2} |E_p|$

$$E_c = \frac{1}{2} 5 \cdot 10^8 \text{ J} = 2.5 \cdot 10^8 \text{ J}$$

b) Si se duplica la velocidad, entonces la $E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$ se cuadruplica $\Rightarrow E'_c = \frac{1}{2} m (2v)^2 = 4 \cdot \left[\frac{1}{2} m \cdot v^2 \right] = 4 E_c$ pasando a un valor de 10^9 J . Sin embargo, la E_p sigue valiendo igual. ($-5 \cdot 10^8 \text{ J}$).

En este caso $E_m = E_p + E'_c > 0$, luego la órbita será hiperbólica (de tipo abierto) y el satélite acabará escapando a la atracción gravitatoria del planeta.

47

a) Falsa, porque entonces la luna escaparía a la atracción gravitatoria de la Tierra ($E_m = 0$) describiendo una trayectoria parabólica.

b) Falsa, porque entonces la luna escaparía a la atracción gravitatoria de la Tierra ($E_m > 0$), describiendo una trayectoria hiperbólica.

c) Verdadera, porque en este caso la $E_m < 0$ y la luna permanece ligada al campo gravitatorio terrestre. Además, la órbita es circular ya que $E_c = \frac{1}{2} |E_p| \Rightarrow |E_p| = 2 E_c$.

d) Falsa, ya que la luna está orbitando alrededor de la Tierra, y a la distancia r tendrá una E_p que determinará una velocidad orbital para su órbita circular, y una E_c .

(48)

a) Falsa, porque en ese caso escaparía a la atracción gravitatoria del planeta (órbita parabólica que es abierta)

$$\begin{aligned} b) \quad E_c &= \frac{1}{2} |E_p| = \frac{1}{2} G \cdot \frac{M \cdot m}{r} \\ E_m &= -E_c = -G \cdot \frac{M \cdot m}{2r} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{verdadera} \\ \text{Se cumple que} \\ \text{permanente ligado} \\ \text{y con órbita circular} \\ (E_m \text{ del satélite} \\ \text{orbitando}) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} c) \quad E_m &= E_p + E_c \\ E_m &= -\frac{E_c}{2} + E_c \\ E_m &> 0 \end{aligned} \quad \left. \right\} \Rightarrow \text{Falsa, escaparía a la atracción gravitatoria (órbita hiperbólica)}$$

(49)

Velocidad de escape (ya deducida) $\Rightarrow v_{\text{escape}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$

Si $R \downarrow$, $v_e \uparrow$ y se hará agujero negro cuando $v_e = c$

$$c = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \Rightarrow R = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{31} \text{ Kg}}{(3 \cdot 10^8)^2} = 2.97 \cdot 10^4 \text{ m}$$

radio del agujero negro.

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3} \pi R^3} = \frac{2 \cdot 10^{31}}{\frac{4}{3} \pi \cdot (2.97 \cdot 10^4)^3} = 1.82 \cdot 10^{17} \text{ Kg/m}^3$$

Obsérvese el valor tan elevado de la densidad en el agujero negro.

(50)

$$F_{g \text{ SOL-LUNA}} = G \cdot \frac{M_S \cdot M_L}{r^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{2 \cdot 10^{30} \cdot 7.3 \cdot 10^{22}}{(150 \cdot 10^9)^2} = 4.33 \cdot 10^{20} \text{ N}$$

$$F_{g \text{ TIERRA-LUNA}} = G \cdot \frac{M_T \cdot M_L}{r^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24} \cdot 7.3 \cdot 10^{22}}{(380 \cdot 10^6)^2} = 2.03 \cdot 10^{20} \text{ N}$$

$$E_{p \text{ SOL-LUNA}} = -G \cdot \frac{M_S \cdot M_L}{r} = -6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{2 \cdot 10^{30} \cdot 7.3 \cdot 10^{22}}{150 \cdot 10^9} = -6.49 \cdot 10^{31} \text{ J}$$

$$E_{p \text{ TIERRA-LUNA}} = -G \cdot \frac{M_T \cdot M_L}{r} = -6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24} \cdot 7.3 \cdot 10^{22}}{380 \cdot 10^6} = -7.68 \cdot 10^{28} \text{ J}$$

La Luna presenta atracción gravitacional tanto por el Sol como por la Tierra, y de hecho gira en torno a ambos. Sin embargo de la comparación de energías potenciales, sacamos la conclusión de que la luna está mas ligada al Sol que a la Tierra.

The first part of the paper is devoted to a discussion of the
 general principles of the theory of the structure of the
 crystal lattice. It is shown that the structure of the
 crystal lattice is determined by the nature of the
 chemical bonds between the atoms. The nature of the
 chemical bonds is determined by the electronic structure
 of the atoms. The electronic structure of the atoms is
 determined by the number of electrons and the arrangement
 of the electrons in the atomic orbitals. The arrangement
 of the electrons in the atomic orbitals is determined by
 the Pauli exclusion principle and the Coulomb repulsion
 between the electrons. The Pauli exclusion principle
 states that no two electrons can occupy the same
 atomic orbital. The Coulomb repulsion between the
 electrons tends to keep the electrons as far apart as
 possible. The balance between the Pauli exclusion
 principle and the Coulomb repulsion determines the
 arrangement of the electrons in the atomic orbitals.
 The arrangement of the electrons in the atomic orbitals
 determines the nature of the chemical bonds between the
 atoms. The nature of the chemical bonds determines the
 structure of the crystal lattice.

REPASO 5ª HORA

51

b) La afirmación es falsa, G como su propio nombre indica, es una constante universal, es decir su valor es el mismo para todo el universo. La gravedad de Venus es menor que la de la Tierra por el valor de su masa y de su radio.

52

$$g = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}$$

$$g' = G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)^2}$$

$$\frac{g}{g'} = \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2}$$

$$3 = \frac{(R_T + h)^2}{R_T^2}$$

$$3 = \left(\frac{R_T + h}{R_T} \right)^2$$

$$\sqrt{3} = \frac{R_T + h}{R_T}$$

$$h = \sqrt{3} R_T - R_T = R_T (\sqrt{3} - 1) = 4650 \text{ km} = 4.65 \cdot 10^6 \text{ m}$$

53

a) Siempre que en este tipo de problemas nos hablen del tiempo, tendremos que hacerlo por consideraciones cinemáticas teniendo en cuenta de que se trata de un M.R.U.A.

(movimiento rectilíneo uniformemente acelerado)

Recordatorio

descenso (aceleración)

$$\begin{cases} v = v_0 + g \cdot t \\ h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} g t^2 \\ v^2 = v_0^2 + 2 g h \end{cases}$$

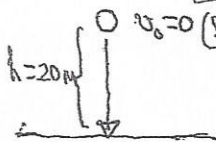
ascenso (frena)

$$\begin{cases} v = v_0 - g \cdot t \\ h = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \\ v^2 = v_0^2 - 2 g h \end{cases}$$

$$g_L = G \cdot \frac{M_L}{R_L^2}$$

gravedad en la superficie lunar

$$g_L = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{7.36 \cdot 10^{22}}{(1740 \cdot 10^3)^2} = 1.62 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



$$h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} g_L \cdot t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{h}{\frac{1}{2} g_L}} = \sqrt{\frac{20}{\frac{1}{2} 1.62}} = 4.97 \text{ s}$$

b)

En el ámbito de la superficie lunar

h_{max}

podemos usar E_p = m · g · h

En la h_{max} se para

$$E_{pL} + E_{cL} = E_{p\text{max}} + E_{c\text{max}}$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = m \cdot g_L \cdot h_{\text{max}}$$

$$h_{\text{max}} = \frac{\frac{1}{2} v_0^2}{g_L} = \frac{\frac{1}{2} 5^2}{1.62} = 7.71 \text{ m}$$

Otra forma de hacerlo es mediante las ecuaciones cinemáticas de arriba

El tiempo lo calculamos tomando las ecuaciones cinemáticas en el ascenso

$$v = v_0 - g_L \cdot t$$

$$0 = v_0 - g_L \cdot t$$

$$v_0 = g_L \cdot t$$

$$t = \frac{v_0}{g_L} = \frac{5}{1.62} = 3.08 \text{ s}$$

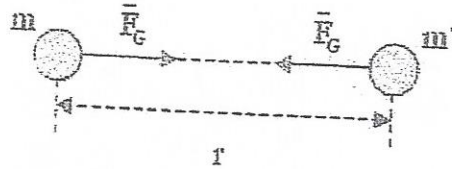
En la h_{max} se para

54)

5.- a) La interacción gravitatoria entre dos cuerpos es atractiva y puede expresarse mediante una fuerza central directamente proporcional al producto de las masas de los cuerpos e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa. La constante de proporcionalidad es la llamada **constante de gravitación universal** G , vectorialmente, expresamos esta fuerza de la siguiente manera:

$$\vec{F}_G = -G \frac{m \cdot m'}{r^2} \vec{u}_r$$

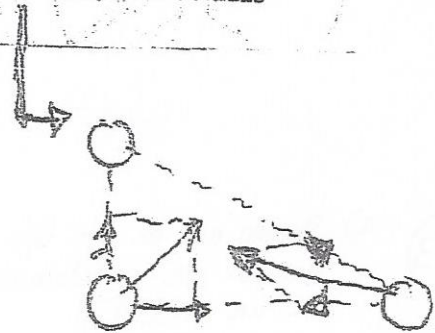
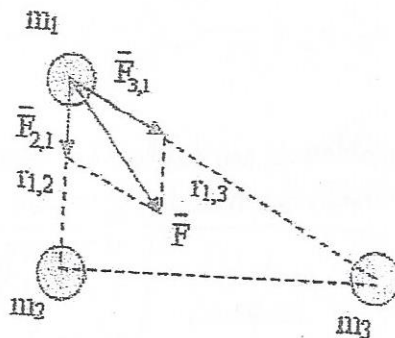
es la ley de gravitación universal desarrollada por Newton.



La fuerza que actúa sobre m es igual que la actúa sobre m' , pero dirigida en sentido contrario.

b) Cuando tenemos un conjunto de varias masas la fuerza que actúa sobre una de ellas es igual a la resultante de las fuerzas que las demás ejercen sobre ella, consideradas individualmente.

b) (continuación)



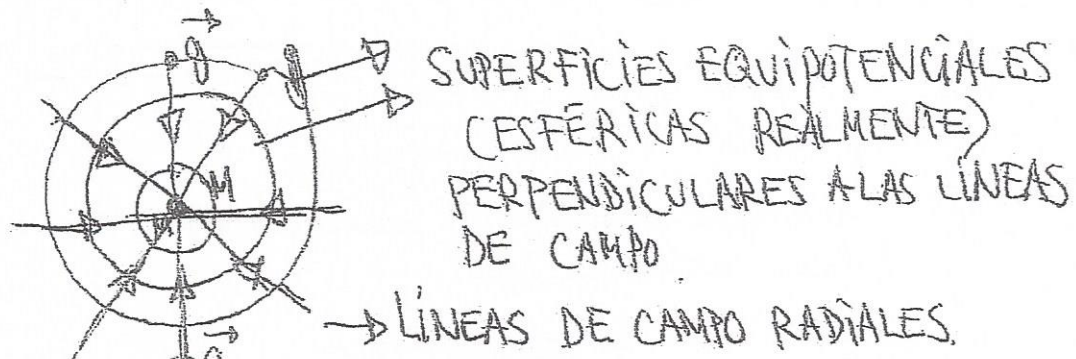
$$\vec{F} = \vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{3,1}$$

55) a) Pregunta muy extensa. Definir g creado por una masa puntual M especificando la expresión de su módulo ($g = \frac{F}{m}$), su dirección (tangente en cada pto a las líneas de campo, y de ellas), y su sentido (atractivo en cualquier caso). Hablar de la variación de g con la distancia a la masa que lo crea. Hablar del carácter central del campo gravitatorio, de su



$$g = 6 \cdot \frac{M}{r^2}$$

55) *continuación) Carácter conservativo, dibujar un esquema con las líneas de campo en donde se especifique $\vec{g}$ y las superficies equipotenciales. (13)



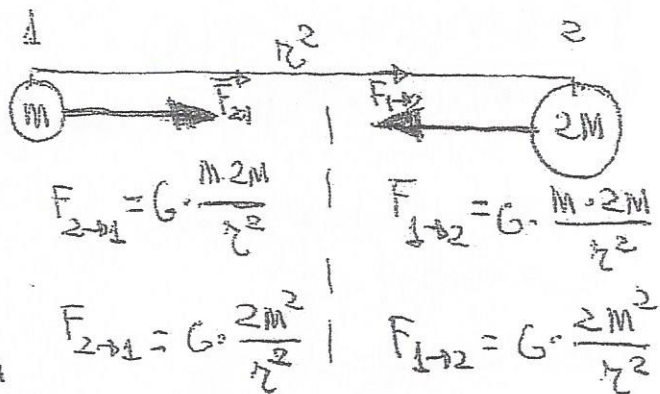
Hablar también que en un campo gravitatorio creado por la masa puntual M a cada punto le corresponde un único valor de $\vec{g}$.

$\vec{g}$ decrece con la distancia (no se trata de un campo gravitatorio uniforme)

Hablar también del alcance infinito de $\vec{g}$

6) EXPLICARLA

LEY DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL

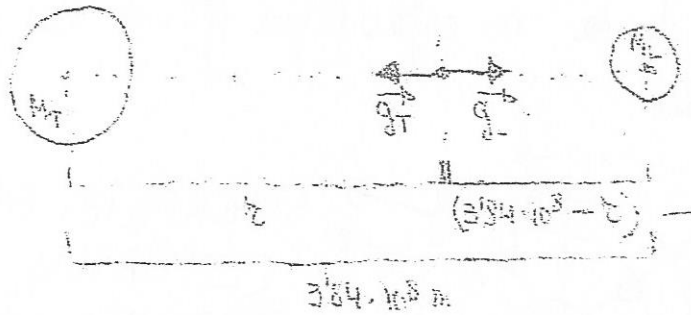
$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$


(la masa más pequeña experimentalmente mayor)

$$g_1 = \frac{F_{2 \rightarrow 1}}{m} = \frac{G \cdot \frac{2M^2}{r^2}}{m} = G \cdot \frac{2M}{r^2}$$

A PESAR DE QUE EN ESA INTERACCIÓN LAS FUERZAS SON IGUALES EN MÓDULO, SUS ACELERACIONES NO SERÍAN LAS MISMAS, A IGUALDAD DE FUERZA LA DE MAYOR MASA TENDRÍA MENOR ACELERACIÓN

$$g_2 = \frac{F_{1 \rightarrow 2}}{2M} = \frac{G \cdot \frac{2M^2}{r^2}}{2M} = G \cdot \frac{M}{r^2}$$



$\vec{g}$ se mide cuando $\vec{g}_1$ y $\vec{g}_2$ posean igual módulo, misma dirección y sentido contrario, es decir:

$$|\vec{g}_1| = |\vec{g}_2|$$

$$G \cdot \frac{M_1}{z^2} = G \cdot \frac{M_2}{(3.84 \cdot 10^8 - z)^2}$$

De esta forma sale una única incógnita.

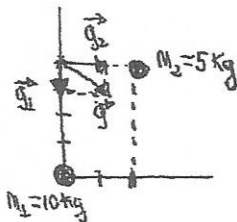
Operamos la raíz cuadrada en ambos miembros

$$\sqrt{\frac{M_1}{z^2}} = \sqrt{\frac{M_2}{(3.84 \cdot 10^8 - z)^2}}$$

Después sustituyendo M_1 y despejando.

$$z = 3.46 \cdot 10^8 \text{ m}$$

57) a) $\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$ (Principio de superposición) Campo gravitatorio es la intensidad del campo gravitatorio $\vec{g}$

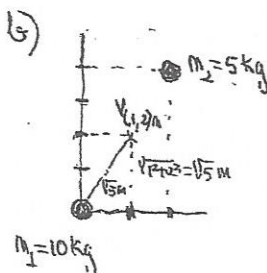


$$g_1 = G \cdot \frac{M_1}{r_1^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{10}{4^2} = 4.17 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N}}{\text{kg}} \quad g_2 = G \cdot \frac{M_2}{r_2^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5}{5^2} = 8.34 \cdot 10^{-12} \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

$$\vec{g}_1 = -4.17 \cdot 10^{-11} \hat{j} \left(\frac{\text{N}}{\text{kg}} \right) \text{ (ver dibujo)} \quad \vec{g}_2 = 8.34 \cdot 10^{-12} \hat{i} \left(\frac{\text{N}}{\text{kg}} \right)$$

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = 8.34 \cdot 10^{-12} \hat{i} - 4.17 \cdot 10^{-11} \hat{j} \left(\frac{\text{N}}{\text{kg}} \right)$$

$$g = \sqrt{(8.34 \cdot 10^{-12})^2 + (-4.17 \cdot 10^{-11})^2} = \sqrt{8.69 \cdot 10^{-21}} = 9.32 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

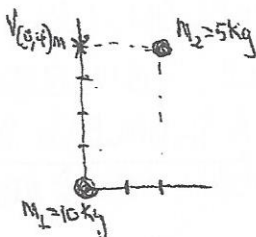


$$V_{(1,2)u} = V_1 + V_2 \text{ (Principio de superposición)}$$

$$V_{(1,2)u} = -G \cdot \frac{M_1}{r_1} + \left(-G \cdot \frac{M_2}{r_2} \right)$$

$$V_{(1,2)u} = -6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{10}{\sqrt{5}} - 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5}{\sqrt{5}}$$

$$V_{(1,2)u} = -4.47 \cdot 10^{-10} \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$



$$V_{(1,4)u} = V_1 + V_2 \text{ (Principio de superposición)}$$

$$V_{(1,4)u} = -G \cdot \frac{M_1}{r_1} + \left(-G \cdot \frac{M_2}{r_2} \right)$$

$$V_{(1,4)u} = -6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{10}{4} - 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5}{2}$$

$$V_{(1,4)u} = -3.34 \cdot 10^{-10} \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

c) $V = \frac{E_p}{m} \Rightarrow E_p = m \cdot V$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{p(1,2)u} = m \cdot V_{(1,2)u} = 0.2 \text{ kg} \cdot (-4.47 \cdot 10^{-10} \frac{\text{J}}{\text{kg}}) = -8.94 \cdot 10^{-11} \text{ J} \\ E_{p(1,4)u} = m \cdot V_{(1,4)u} = 0.2 \text{ kg} \cdot (-3.34 \cdot 10^{-10} \frac{\text{J}}{\text{kg}}) = -6.68 \cdot 10^{-11} \text{ J} \end{array} \right.$$

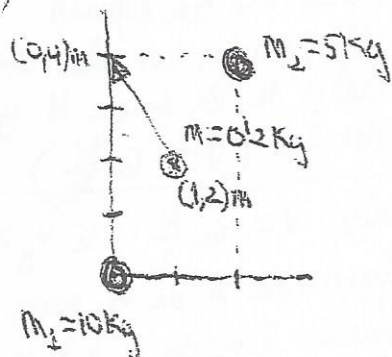
el apartado c) también se podría haber hecho aplicando el principio de superposición a la energía potencial en cada uno de los puntos

continuación i -

$$E_{P(1,2)m} = E_{P_{1(1,2)m}} + E_{P_{2(1,2)m}}$$

$$E_{P(2,4)m} = E_{P_{1(2,4)m}} + E_{P_{2(2,4)m}}$$

d)



masa que se traslada

$$W_{(1,2)m \rightarrow (2,4)m} = m \cdot (V_{(1,2)m} - V_{(2,4)m})$$

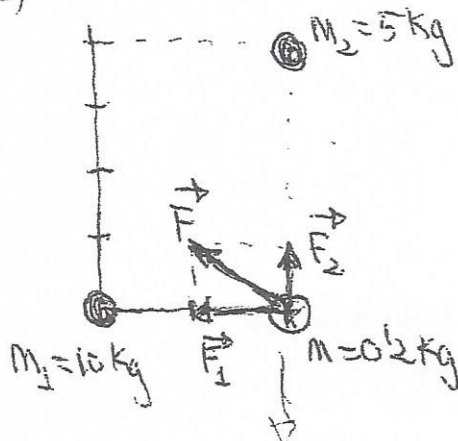
$$W_{(1,2)m \rightarrow (2,4)m} = 0.2 \cdot (-4.47 \cdot 10^{-10} - (-3.34 \cdot 10^{-10}))$$

$$W_{(1,2)m \rightarrow (2,4)m} = -2.26 \cdot 10^{-11} \text{ J}$$

Como era de esperar, al alejar la masa $m = 0.2 \text{ kg}$ de las otras dos, no nos saldría un trabajo positivo o espontáneo, es decir, que espontáneamente las fuerzas del campo gravitatorio no alejarán la masa $m = 0.2 \text{ kg}$ de las otras dos, por ello será necesaria una fuerza externa que realice un trabajo externo de $2.26 \cdot 10^{-11} \text{ J}$ que pasará a incrementar la E_p gravitatoria en $2.26 \cdot 10^{-11} \text{ J}$ (podría comprobarse con los resultados de c)).

Si el trabajo hubiera sido espontáneo, como por ejemplo en el desplazamiento al contrario que este, habría sido la fuerza gravitatoria la que lo hubiera hecho haciendo disminuir la E_p gravitatoria.

e)



$$F_1 = G \cdot \frac{M_1 \cdot m}{r_1^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{10 \cdot 0.2}{2^2} = 3.33 \cdot 10^{-11} \text{ N}$$

$$\vec{F}_1 = -3.33 \cdot 10^{-11} \vec{e}_x \text{ (N)}$$

$$F_2 = G \cdot \frac{M_2 \cdot m}{r_2^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5 \cdot 0.2}{4^2} = 4.17 \cdot 10^{-12} \text{ N}$$

$$\vec{F}_2 = 4.17 \cdot 10^{-12} \vec{e}_y \text{ (N)}$$

Otra forma de hacerlo sería calcular el campo gravitatorio $\vec{g}$ en ese pto y luego multiplicarlo por la masa m

$$\vec{F} = m \cdot \vec{g}$$

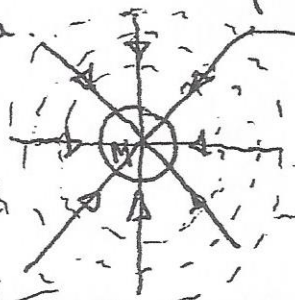
Nos saldría el mismo vector $\vec{F}$ y calcularíamos su módulo

Principio de superposición $\Rightarrow \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

$$\vec{F} = -3.33 \cdot 10^{-11} \vec{e}_x + 4.17 \cdot 10^{-12} \vec{e}_y \text{ (N)}$$

$$|\vec{F}| = \sqrt{(-3.33 \cdot 10^{-11})^2 + (4.17 \cdot 10^{-12})^2} = 3.34 \cdot 10^{-11} \text{ N}$$

- (58) a) La masa M no crea un campo gravitatorio uniforme ya que g disminuye con la distancia.

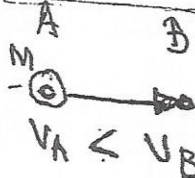


Líneas de campo: hipotéticas trayectorias que seguiría una masa m abandonada en reposo en el interior de ese campo gravitatorio

Las superficies equipotenciales también se llaman superficies de trabajo nulo porque $W_{A \rightarrow B} = m(V_A - V_B) = 0$
 $V_A = V_B$

Superficies equipotenciales perpendiculares a las líneas de campo (En este caso son esferas concéntricas). En ellas, todos los pts son equidistantes al centro de la masa M y están al mismo potencial ($V = -G \cdot \frac{M}{r}$)

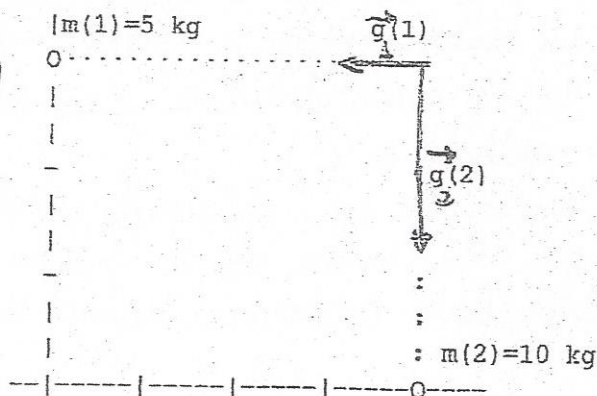
b)



Según la expresión $V = -G \cdot \frac{M}{r}$, si $V_B > V_A$, B está más lejano que A de la masa M , y por ello al pasar m de A a B se aleja

- c) $W = m \cdot (V_A - V_B) < 0$
 $V_A < V_B$
- Se observa además que ese desplazamiento no lo realizaría espontáneamente la F gravitatoria (la F gravitatoria no aleja masas porque es atractiva), sino una F externa (cuyo trabajo incrementa la EP ($W_{ext} = \Delta E_p$))

(59)



a)

$$|\vec{g}_1| = G \frac{m_1}{r_1^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{5}{4^2} = 2,08 \cdot 10^{-11} \text{ m s}^{-2}$$

$$|\vec{g}_2| = G \frac{m_2}{r_2^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{10}{3^2} = 7,41 \cdot 10^{-11} \text{ m s}^{-2}$$

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = (-2,08 \cdot 10^{-11} \hat{i} - 7,41 \cdot 10^{-11} \hat{j}) \text{ m s}^{-2}$$

b) Calculamos la energía potencial en los dos puntos (suma de las energías potenciales de las dos masas) y de la diferencia tendremos el trabajo realizado:

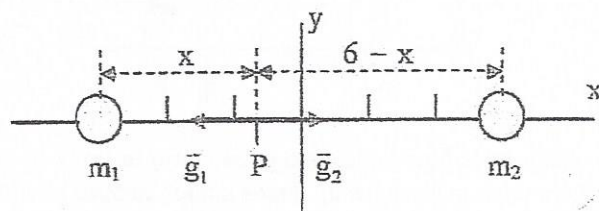
$$E_p(4,3) = -G \frac{M m_1}{r_1} - G \frac{M m_2}{r_2} = -6,67 \cdot 10^{-11} \frac{2 \cdot 5}{4} - 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{2 \cdot 10}{3} = -6,114 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

$$E_p(0,0) = -G \frac{M m_1}{r_1} - G \frac{M m_2}{r_2} = -6,67 \cdot 10^{-11} \frac{2 \cdot 5}{3} - 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{2 \cdot 10}{4} = -5,558 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

$$W_{ext} = \Delta E_p = E_p(0,0) - E_p(4,3) = (-5,558 \cdot 10^{-10}) - (-6,114 \cdot 10^{-10}) = 5,56 \cdot 10^{-11} \text{ J}$$

No depende del camino seguido puesto que dicho trabajo coincide con la variación de E_p , cuyos valores inicial y final solo dependen de cuáles sean las posiciones inicial y final y no de la trayectoria

60) a) $m_1 = 5 \text{ kg}$ en el punto $(-3,0)$ y $m_2 = 10 \text{ kg}$ en el punto $(3,0)$



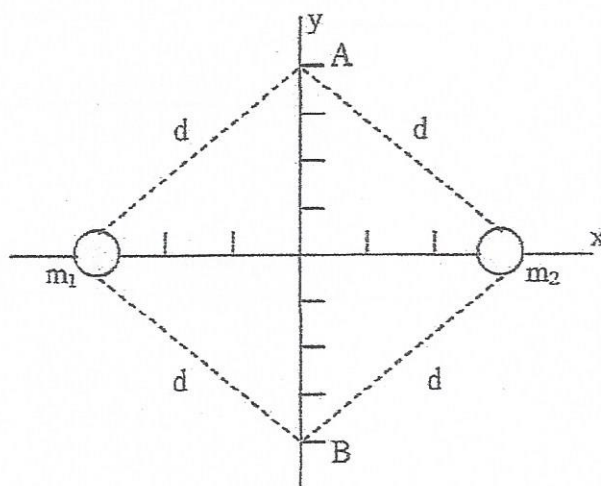
Como vemos en la figura el campo gravitatorio se anula en el punto P (más cercano a m_1 ya que esta es más pequeña), donde ambos campos se anulan al ser iguales en módulo y de sentido contrario. Si llamamos x a la distancia entre m_1 y P, la distancia entre m_2 y P será, $6 - x$. Planteamos la ecuación de la igualdad entre módulos

$$g_1 = g_2 \quad G \frac{m_1}{x^2} = G \frac{m_2}{(6-x)^2}$$

$$\frac{5}{x^2} = \frac{10}{36-12x+x^2} \quad 5x^2 + 60x - 180 = 0$$

resolviendo y escogiendo la solución adecuada nos sale $x = 2,48 \text{ m}$, por lo tanto el punto P será $(-0,52, 0)$

60) * b)



Como vemos en la figura, las cuatro distancias marcadas entre los puntos A y B y ambas masas son iguales, aplicando Pitágoras obtenemos

$$d = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ m}$$

calculamos el potencial en A sumando los potenciales que crean en dicho punto las masas m_1 y m_2

$$V_A = V_{1A} + V_{2A} = -G \frac{m_1}{d} - G \frac{m_2}{d} = -\frac{G}{d} (m_1 + m_2)$$

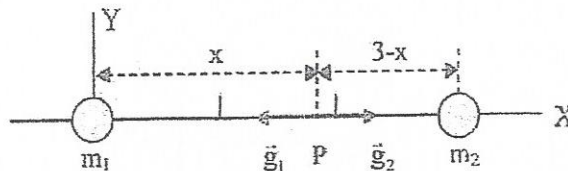
calculamos el potencial en B sumando los potenciales que crean en dicho punto las masas m_1 y m_2

$$V_B = V_{1B} + V_{2B} = -G \frac{m_1}{d} - G \frac{m_2}{d} = -\frac{G}{d} (m_1 + m_2)$$

como vemos ambos potenciales son iguales y por lo tanto el trabajo para trasladar una masa m desde A hasta B es nulo porque es nula la diferencia de potencial

(61)

Q.- a) $m_1 = 25 \text{ Kg}$ el punto $(0,0)$ y $m_2 = 15 \text{ kg}$ en el punto $(3,0)$



Como vemos en la figura el campo gravitatorio se anula en el punto P (más cercano a m_2 ya que esta es más pequeña), donde ambos campos se anulan al ser iguales en módulo y de sentido contrario. Si llamamos x a la distancia entre m_1 y P, la distancia entre m_2 y P será, $3-x$. Planteamos la ecuación de la igualdad entre módulos

$$g_1 = g_2 \quad G \frac{m_1}{x^2} = G \frac{m_2}{(3-x)^2} \quad \frac{25}{x^2} = \frac{15}{(3-x)^2}$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado y escogiendo la solución adecuada nos sale $x = 1,69 \text{ m}$, por lo tanto el punto P será $(1,69, 0)$. En los demás puntos del plano XY no se anulan los campos pues no son de sentidos contrarios.

b) Calculamos la energía potencial del sistema en la posición inicial, m_1 en el punto $(0,0)$ y m_2 en el punto $(3,0)$; distancia 3 m

$$E_p = -\frac{Gm_1m_2}{d} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 25 \cdot 15}{3} = -8,34 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

Calculamos la energía potencial del sistema en la posición final, m_1 en el punto $(0,0)$ y m_2 en el punto $(4,0)$; distancia 4 m

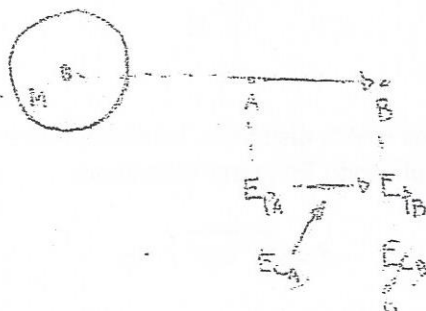
$$E_p = -\frac{Gm_1m_2}{d} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 25 \cdot 15}{4} = -6,25 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

El trabajo es

$$W = -\Delta E_p = E_p(\text{inicial}) - E_p(\text{final}) = -2,1 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

(62)

a)



$V = -G \cdot \frac{M}{r}$, luego si $V_B > V_A$, entonces $r_B > r_A$, con lo cual la partícula se aleja.

Al pasar de A a B la energía potencial gravitatoria ($E_p = -G \frac{M \cdot m}{r^2}$) aumentará, por ello en A suministraremos la E_c suficiente como para llegar a B y que toda la E_c suministrada se consuma en incrementar la E_p gravitatoria.

$$E_{PA} + E_{CA} = E_{PB} + E_{CB}$$

$$E_{CA} = E_{PB} - E_{PA}$$

$$E_{CA} = \Delta E_p$$

no basta que sea nula, ya que si suministrásemos una E_c mayor nos llegaría a posiciones más alejadas de B.

La E_c suministrada en A, que se emplea en incrementar la E_p , seguiría siendo la misma, ya que el incremento de E_p seguiría siendo el mismo independientemente de la trayectoria (solo depende de los ptes inicial y final).

63

a) Al no haber rozamiento el ejercicio se desarrolla en un campo de fuerzas conservativo por lo que el trabajo realizado es igual a la variación negativa de la energía potencial del sistema

$$W = -\Delta E_p$$

La energía potencial solo depende del estado final e inicial, por lo tanto, el trabajo realizado en los dos desplazamientos es el mismo

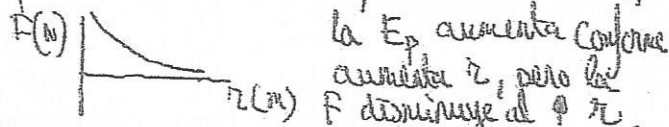
$$W_{ABC} = W_{AC}$$

b) Al existir rozamiento, aunque la variación de energía potencial es igual para ambos desplazamientos, el trabajo de rozamiento que hay que vencer es mayor por el trayecto ABC que por el AC, ya que el espacio recorrido es mayor, por lo tanto se cumple que

$$W_{ABC} > W_{AC}$$

64

Pregunta bastante extensa. Hablar de las dos expresiones de E_p que se conocen ($E_p = m \cdot g \cdot h$, $E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$), explicar sus diferencias y explicar que la energía potencial es la energía que está en función de la posición en un campo de fuerzas conservativos. Relacionar la E_p con la fuerza gravitatoria citando la expresión del trabajo realizado por la fuerza gravitatoria $W = -\Delta E_p$. Realizar los gráficos, que son similares al ejercicio anterior.



entre campo y potencial gravitatorio.

65*

a) Se define el campo gravitatorio que crea una masa 'M' como la fuerza por unidad de masa con la que es capaz de atraer a cualquier otra masa 'm' situada en el espacio que la rodea.

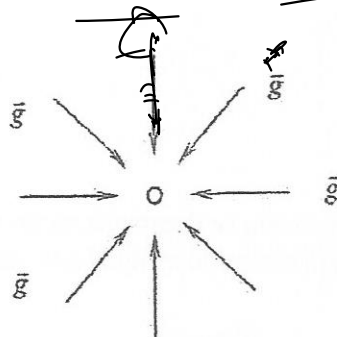
$$|\vec{g}| = \frac{\vec{F}_g}{m} \Rightarrow |\vec{g}| = -\frac{GM}{r^2}$$

donde G es la constante de gravitación universal, M es la masa que crea el campo y r es la distancia a la que se quiere calcular el campo.

Es una magnitud vectorial cuya unidad m/s^2 muestra que representa una aceleración que, en el caso de que 'M' sea una masa puntual es radial y hacia dentro.

(65) *Continuación)

9



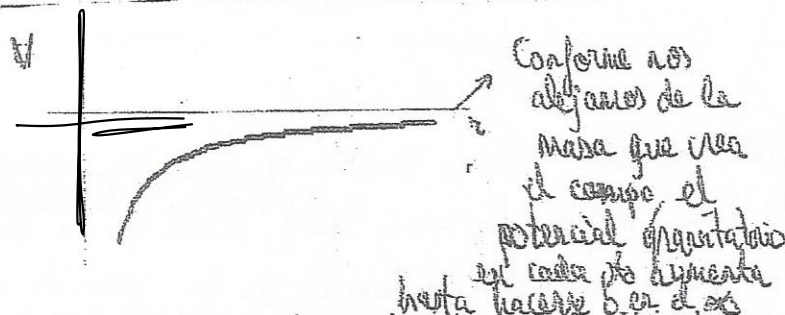
Se definen las líneas de campo como las líneas tangentes al campo gravitatorio en todos los puntos del espacio.

Se define el potencial gravitatorio que crea una masa 'M' como la energía potencial gravitatoria por unidad de masa que tendría una masa 'm' en las proximidades de 'M'.

$$V = \frac{E_{p_{grav}}}{m} \Rightarrow V = -\frac{GM}{r}$$

donde G, M y r ya se han definido.

Es una magnitud escalar cuya unidad es el J/Kg. La representación de V es

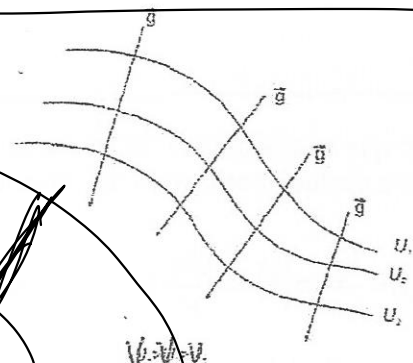


donde se puede ver como U siempre tiene un valor negativo y que para $r \rightarrow \infty$, U tiende a cero.

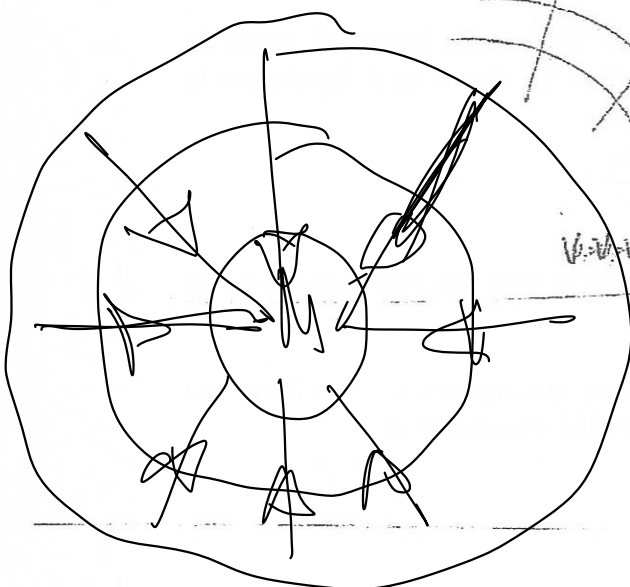
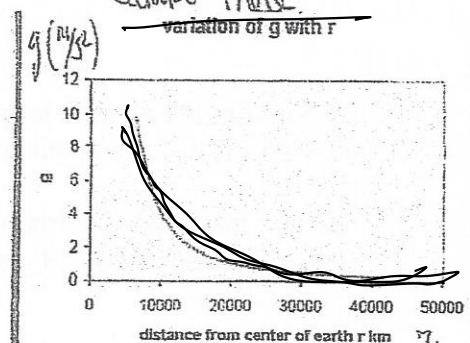
Se definen las superficies equipotenciales como las regiones del espacio que están a potencial constante

En general se cumple que

1. Las líneas de campo siempre son perpendiculares a las superficies equipotenciales.
2. Las líneas de campo siempre apuntan hacia potenciales decrecientes.



El potencial gravitatorio decrece en el mismo sentido en el que el campo crece.



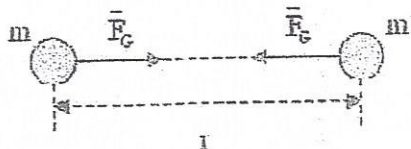
66

1.- a) La interacción gravitatoria entre dos cuerpos es atractiva y puede expresarse mediante una fuerza central directamente proporcional al producto de las masas de los cuerpos e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa. La constante de proporcionalidad es la llamada constante de gravitación universal G , vectorialmente, expresamos esta fuerza de la siguiente manera:

$$\vec{F}_G = -G \frac{m \cdot m'}{r^2} \vec{u}_r$$

indica el sentido
indica el vector unitario.

es la ley de gravitación universal desarrollada por Newton.



La fuerza que actúa sobre m es igual que la actúa sobre m' , pero dirigida en sentido contrario.

b) Al ser conservativa la interacción gravitatoria, se cumple:

$$W = -\Delta E_p$$

En una órbita semicircular el punto inicial y el final están a la misma distancia (R) del origen del campo, por lo tanto, sus energías potenciales son iguales y en consecuencia el trabajo realizado es cero.

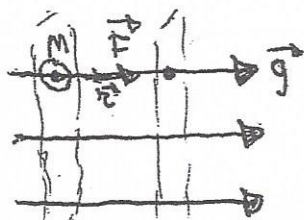
Si se desplazara desde esa distancia R hasta el infinito, como allí, por definición, la energía potencial es cero, obtendríamos

$$W = -\Delta E_p = E_{p \text{ inicial}} - E_{p \text{ final}} = E_p(R) - E_p(\infty) = -\frac{Gmm'}{R}$$

67

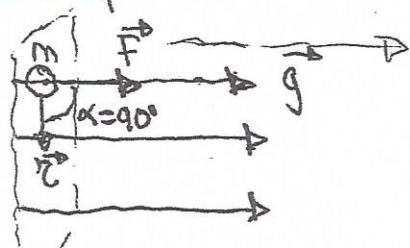
No, esa afirmación solo se cumple bajo la existencia acción de fuerzas gravitatorias. Si actúan fuerzas no conservativas, como por ejemplo el rozamiento, habrá pérdidas energéticas y por tanto la disminución de una no se compensará con el aumento de la otra, no conservándose la energía mecánica.

68



superficies equipotenciales perpendiculares a las líneas de campo

El campo gravitatorio uniforme posee líneas de campo paralelas. Si la partícula se mueve espontáneamente por acción de la fuerza gravitatoria, ésta realiza un trabajo $W = F \cdot r \cdot \cos 0^\circ = F \cdot r$ que coincidirá con la disminución de energía potencial gravitatoria $W = -\Delta E_p$



La fuerza gravitatoria, posee la misma dirección y sentido que $\vec{g}$, marcado por las líneas de campo. En este caso, fuerza y desplazamiento son perpendiculares, y por tanto $W = F \cdot r \cdot \cos 90^\circ = 0$, con lo cual $W=0$ y por ello no existe variación de energía potencial.

De otra forma podría verse que la masa m se desplaza entre dos pts de una superficie equipotencial $\Rightarrow W = m \cdot (V_A - V_B)$, y si $V_A = V_B \Rightarrow W=0$ y no varía E_p

69

Es falsa, ya que la Luna posee una aceleración normal que, aunque no haga cambiar su velocidad en módulo, sí la hace cambiar en dirección de manera que curva su trayectoria no llegando a impactar sobre la Tierra. Dicha aceleración normal es una consecuencia de acción de la fuerza gravitatoria sobre la Luna.

70 a)

La relación entre los períodos se obtiene a partir de la 3ª ley de Kepler

$$\frac{T_A^2}{T_B^2} = \frac{r_A^3}{r_B^3}$$

$$\frac{T_A^2}{T_B^2} = \frac{(2 \cdot 10^8)^3}{(8 \cdot 10^7)^3}$$

$$\frac{T_A^2}{T_B^2} = \frac{8}{512}$$

$$\sqrt{\left(\frac{T_A}{T_B}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{512}}$$

$$T_A = 0.125 T_B$$

b)

Podemos expresar la velocidad de cada uno de ellos como $v = \frac{2\pi r}{T}$

Suponiendo T y relacionándolo igual que en el apartado anterior $T = \frac{2\pi r}{v}$

$$\frac{\left(\frac{2\pi r_A}{v_A}\right)^2}{\left(\frac{2\pi r_B}{v_B}\right)^2} = \frac{r_A^3}{r_B^3}$$

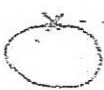
$$\frac{4\pi^2 r_A^2 \cdot v_B^2}{4\pi^2 r_B^2 \cdot v_A^2} = \frac{r_A^3}{r_B^3}$$

$$\frac{v_B}{v_A} = \sqrt{\frac{r_A}{r_B}}$$

$$\frac{v_B}{v_A} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^8}{8 \cdot 10^7}} \left\{ \begin{array}{l} v_A = 2 v_B \\ v_B = 0.5 v_A \end{array} \right.$$

71 *

a)



$$g_T = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}$$

$$\frac{g_T}{g_P} = \frac{G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}}{G \cdot \frac{M_P}{R_P^2}}$$

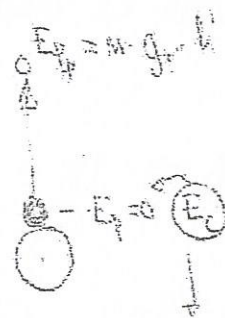
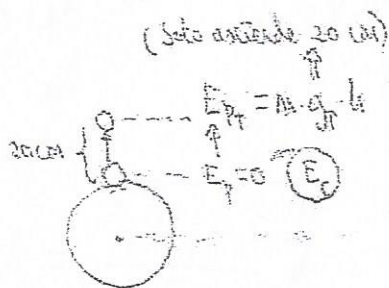
$$\frac{g_T}{g_P} = \frac{M_T \cdot R_P^2}{M_P \cdot R_T^2} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M_T = 3076 M_P \\ 0.8 \text{ cm} \\ M_P = 0.325 M_T \end{array} \right.$$

(Considerando datos)

71 (Continuación)

b)



En el otro planeta la E suministrada es la misma, luego llegará a tener la misma E_p que alcanzó en el otro caso, aunque aquí la altura alcanzada es mayor.

$$m \cdot g_T \cdot h = m \cdot g_P \cdot h'$$

$$h' = \frac{g_T \cdot h}{g_P} = \frac{9.8 \cdot 0.2}{6.32} = 0.31 \text{ m} = 31 \text{ cm}$$

72

a) Esta pregunta puede ser bastante larga, ya que corresponde a un apartado entero del tema de gravitación. En este texto nos limitaremos a enumerar los puntos que se podrían desarrollar, ya que no está claro qué preguntan concretamente.

- Características generales de la interacción gravitatoria, que evidentemente se cumplen para la Tierra, considerada como una esfera de masa $5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$: atractiva, conservativa, central, líneas de campo y superficies equipotenciales, ley de gravitación de Newton...

- Magnitudes vectoriales (fuerza, gravedad) y escalares (potencial, energía potencial). Definición y expresiones para el exterior de la Tierra. Variación de la gravedad con la altura.

- Aproximación de gravedad constante para una altura muy inferior al radio terrestre. La fórmula $E_{pg} = mgh$ frente a la fórmula general. Rango de validez.

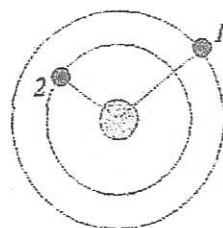
- Velocidad de escape de la Tierra.

b) La velocidad de un objeto (satélite) que describe orbitas circulares en torno a un astro central (la Tierra en este caso) debido únicamente a la atracción gravitatoria, se denomina velocidad orbital, y se calcula con la expresión $v_{orb} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$ donde M es

la masa de la Tierra, r la distancia desde el centro de masas del satélite hasta el centro de la Tierra y G la constante de gravitación universal.

Vemos que, como el primer satélite está a mayor distancia ($r_1 > r_2$), su velocidad orbital será menor, ya que G y M son las mismas en los dos casos.

Conclusión: La velocidad orbital es mayor en el segundo satélite.



La energía mecánica de un satélite es la suma de sus energías cinética y potencial gravitatoria:

$$E_M = E_c + E_{p_g} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \quad \text{donde } m \text{ es la masa del satélite}$$

Sabemos que para una órbita circular, la velocidad es constante (velocidad orbital). Así.

$$E_M = E_c + E_{p_g} = \frac{1}{2}m \left(\sqrt{\frac{GM}{r}} \right)^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2} \frac{GMm}{r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r}$$

Considerando la expresión obtenida, vemos que a mayor distancia (r), mayor energía mecánica (menor en valor absoluto, pero hay que tener en cuenta el signo -)

Así, el primer satélite poseerá mayor energía mecánica, ya que se encuentra a mayor distancia de la Tierra.

73

Según la deducción $v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$ $\Rightarrow$ La obtenemos en función de g para comparar la terrestre y la lunar

TIERRA $\Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{2g_T \cdot R_T^2}{R_T}} = \sqrt{2g_T R_T}$

$g = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} \Rightarrow G \cdot M_T = g_T \cdot R_T^2$

LUNA $v_e = \sqrt{\frac{2GM_L}{R_L}} = \sqrt{\frac{2g_L \cdot R_L^2}{R_L}} = \sqrt{2g_L R_L}$

$g_L = G \cdot \frac{M_L}{R_L^2} \Rightarrow G \cdot M_L = g_L \cdot R_L^2$

$\Downarrow$
Como $g_L < g_T$ y
 $R_L < R_T$ la
velocidad de escape
es menor en la luna
y mayor en la Tierra.