

<https://fisicacucurella.enceuta.es>

FÍSICA 2º BACH A/B

PROFESOR: JOSÉ MANUEL GARCÍA CUCURELLA,

LIBRO EN COPISTERÍA. . 1ª EVALUACIÓN.

1ª EVALUACIÓN

- CAMPO GRAVITATORIO -
- CAMPO ELÉCTRICO -

2ª EVALUACIÓN

- ELECTROMAGNETISMO -
- ONDAS -

3ª EVALUACIÓN

- ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS, FÍSICA CUÁNTICA -
FÍSICA NUCLEAR -

— ÓPTICA Y MECÁNICA —

* EXAMEN FINAL.

TEMA 1

CAMPO GRAVITATORIO.

1.- Fuerzas por contacto y a distancia.

$$\begin{array}{ccc} F & = & m \cdot a \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ N & \cdot & \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ & & \text{(SI)} \quad \text{(SI)} \end{array}$$

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$g = 2 \frac{m}{s^2}$$

$$\square \quad 0 \frac{m}{s}$$

$$\downarrow 1s$$

$$\square \quad 2 \frac{m}{s}$$

$$\downarrow 1s$$

$$\square \quad 4 \frac{m}{s}$$

$$\downarrow 1s$$

$$\square \quad 6 \frac{m}{s}$$

$$\square \quad 0 \frac{m}{s}$$

$$\downarrow 1s$$

$$\square \quad 10 \frac{m}{s}$$

$$\downarrow 1s$$

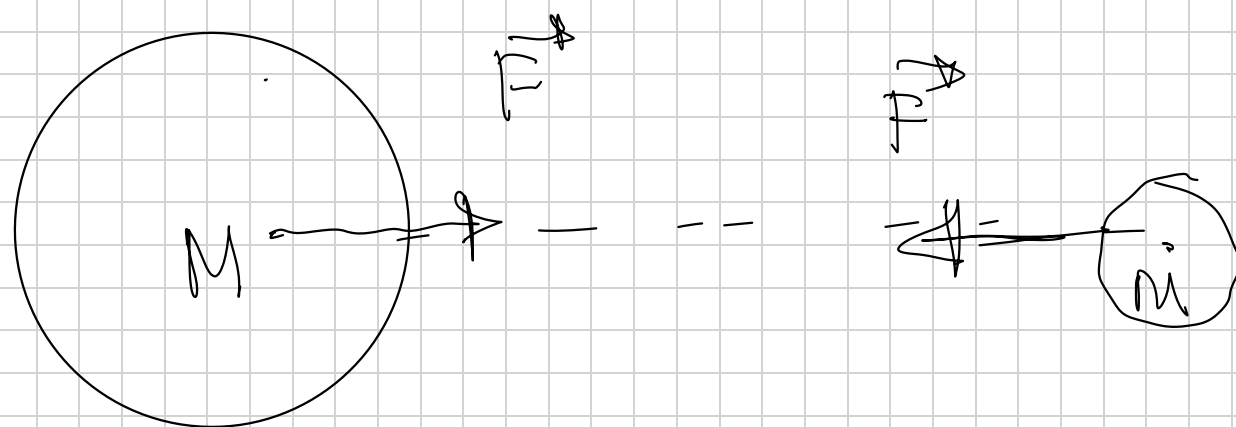
$$\square \quad 20 \frac{m}{s}$$

$$\downarrow 1s$$

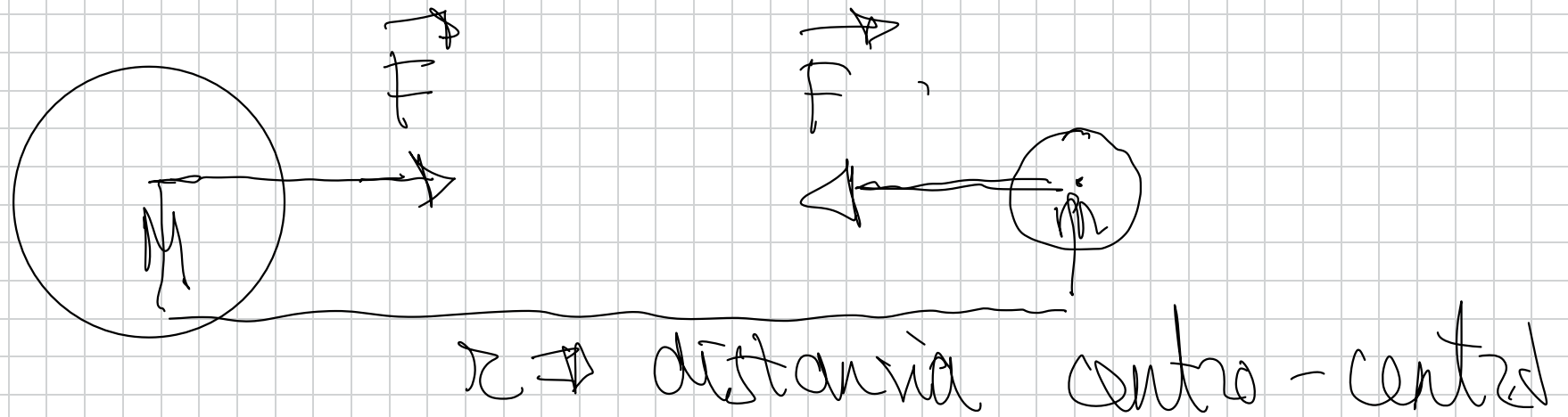
$$\square \quad 30 \frac{m}{s}$$

$$g = 10 \frac{m}{s^2}$$

— — —



Ley de la gravitación Universal.



$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$

$$G = \frac{F \cdot r^2}{M \cdot m}$$

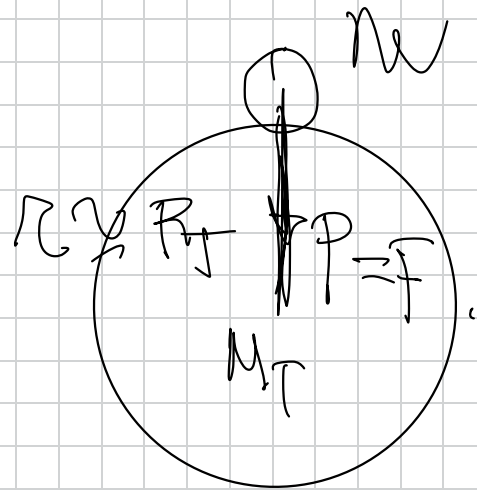
M y $m \Rightarrow$ kg en S.I.

$r \Rightarrow$ m en S.I.

$F \Rightarrow$ N en S.I.

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}.$$

$$\underline{G = 6.67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2} .}$$



$$F = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T^2}$$

$$M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$R_T = 6400 \text{ km}$$

$$R_T = 64 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$F = \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 50}{(64 \cdot 10^6)^2}$$

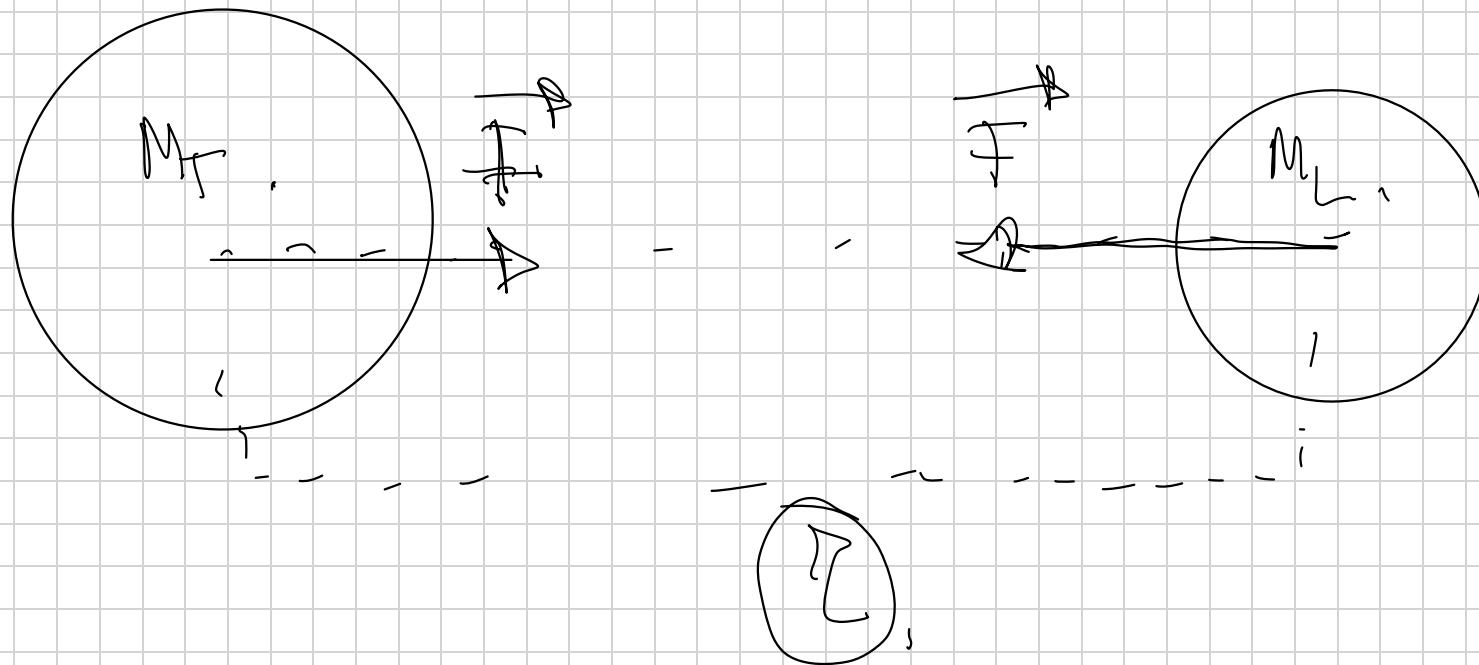
$$F = 48852 \text{ N}$$

$$P = m \cdot g$$

$$P = 50 \text{ kg} \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 490 \text{ N}$$

1.- La masa de la Tierra es de $6 \cdot 10^{24}$ Kg y la masa de la Luna es de $7,2 \cdot 10^{22}$ Kg. Si la fuerza gravitatoria entre ellas es de $1,9 \cdot 10^{20}$ N, ¿Cuál será la distancia entre sus centros?
. $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}$

1º Dibujo de la situación.



2º Aplico ley de la gravitación Universal.

$$F = G \cdot \frac{M_T \cdot M_L}{r^2}$$

Despejo r .

$$F \cdot r^2 = G \cdot M_T \cdot M_L$$

$$r^2 = \frac{G \cdot M_T \cdot M_L}{F}$$

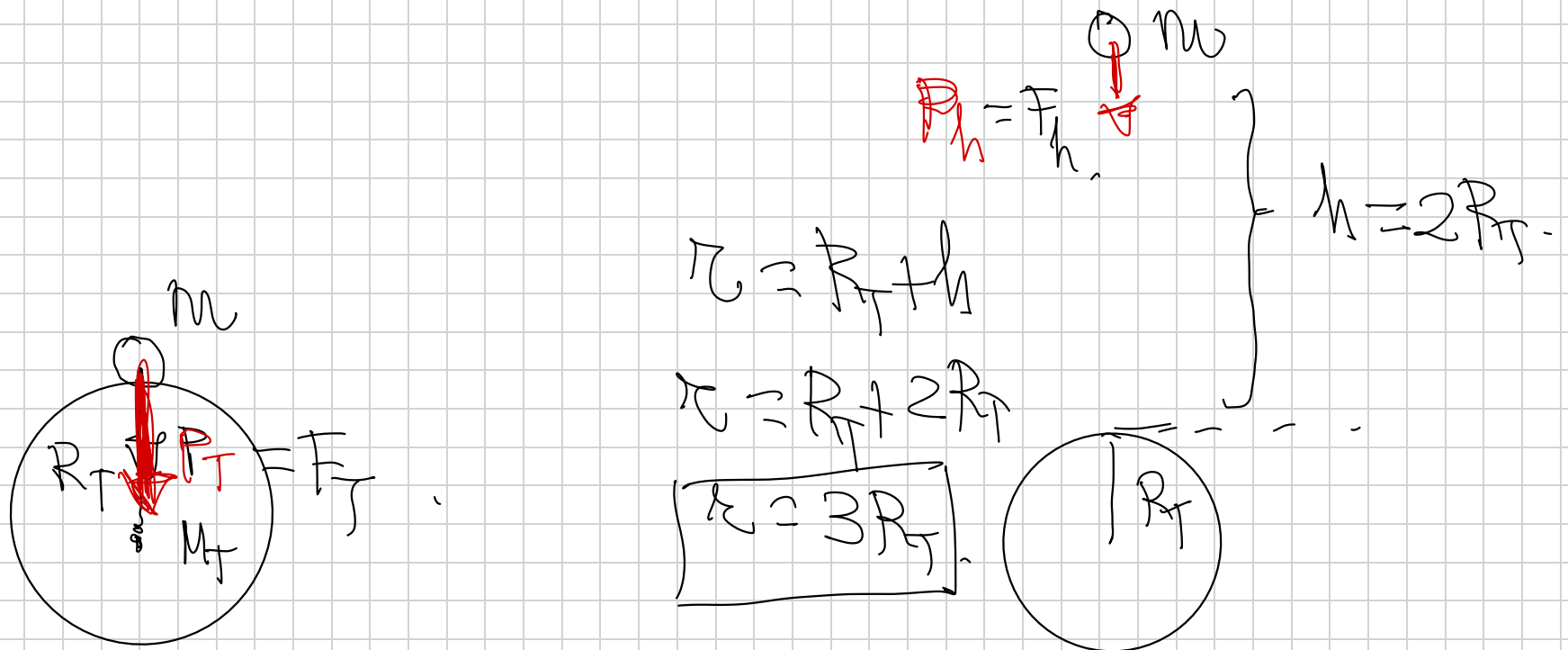
Todo en S.I

$$r = \sqrt{\frac{G \cdot M_T \cdot M_L}{F}} = \sqrt{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 7.2 \cdot 10^{22}}{1.9 \cdot 10^{20} \text{ N}}}$$

$$r = 3.9 \cdot 10^8 \text{ m}$$

2.- ¿A cuánto disminuye el peso de un cuerpo cuando se eleva desde el nivel del mar a una altura igual al doble del radio terrestre?

1º dibujo las dos situaciones con sus correspondientes expresiones, por separado.



$r \approx R_T$ | ley de la gravitación universal

$$P_T = \left[F_T = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T^2} \right]$$

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \quad P_h = F_h = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{(\underbrace{R_T + h}_r)^2}$$

$$\left[P_h = F_h = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{(\underbrace{3R_T}_r)^2} \right]$$

$$F_T = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T^2}$$

$$F_h = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{9 R_T^2}$$

2) Divido ambas expresiones



$$\frac{F_h}{F_f} = \frac{\cancel{G} \cdot \cancel{M_f} \cdot \cancel{M}}{\cancel{q} \cancel{R_f}} \rightarrow \frac{1}{g}$$

$$\frac{F_h}{F_f} = \frac{\cancel{G} \cdot \cancel{M_f} \cdot \cancel{M}}{\cancel{D_f} \cancel{R_f}}$$

$$\frac{F_h}{F_f} = \frac{1}{g}$$

$$F_h = \frac{1}{g} F_f$$

El peso a esa altura sería la novena parte que en la tierra.

Modo Alberto

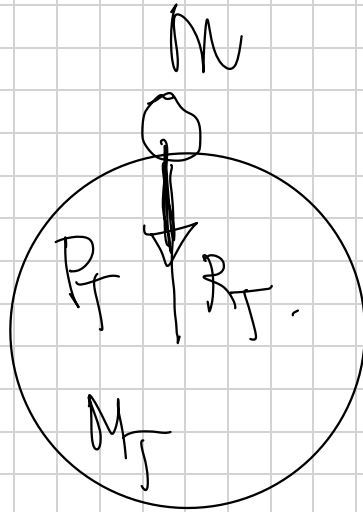
$$\frac{F_T}{F_h} \stackrel{!}{=} \frac{\cancel{G} \cdot \cancel{M_T} \cdot \cancel{M}}{\cancel{R}^2} \\ \cancel{G} \cdot \cancel{M_T} \cdot \cancel{M} \\ \hline \cancel{q} \cancel{R}^2$$

$$\frac{F_T}{F_h} = \frac{1}{1/g}$$

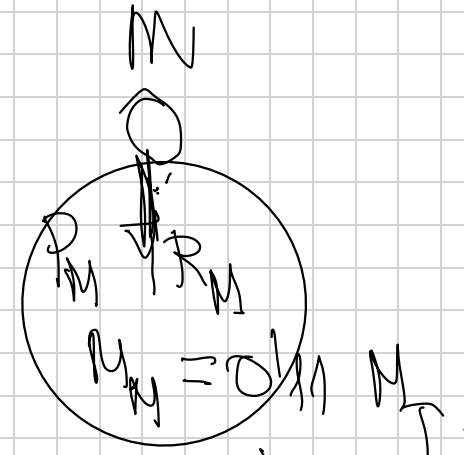
$$\frac{F_T}{F_h} = g \Rightarrow$$

$$\boxed{F_T = g F_h}$$

4.- El radio de la Tierra es aproximadamente 6370 Km, mientras que el de Marte viene a ser de unos 3440 Km. Si un objeto pesa 200 N en la Tierra, ¿Cuál sería su peso en Marte?.
 Dato: Marte tiene una masa 0,11 veces la de la Tierra.



$$P_T = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T^2}$$



$$P_M = G \cdot \frac{M_M \cdot m}{R_M^2}$$

Divide

$$\frac{P_M}{P_T} = \frac{G \cdot \frac{0.11 N \cdot M}{R_M^2}}{R_M^2}$$

$$\frac{0.11}{R_M^2} \cdot \frac{1}{R_T^2}$$

$$\frac{P_M}{P_T} = \frac{G \cdot \frac{M \cdot M}{R_T^2}}{R_T^2}$$

$$R_T = 6370 \text{ km} = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$\frac{P_M}{P_T} = \frac{0.11 R_T^2}{R_M^2}$$

$$R_M = 3440 \text{ km} = 3.44 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$P_M = \frac{0.11 R_T^2}{R_M^2} \cdot P_T = 200 \text{ N}$$

$$F_M = \frac{0.11 - (637 \cdot 10^6)^2}{(344 \cdot 10^6)^2} \cdot 200 \text{ N} = 75.43 \text{ N}$$

$$6370 \text{ km} = 6370000 \text{ m}$$

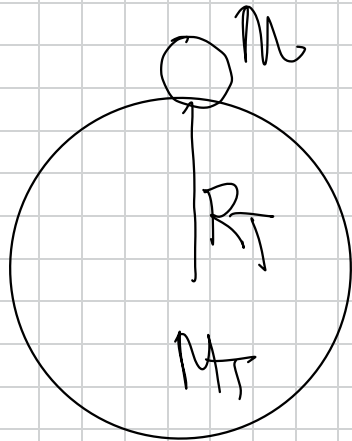
$$6370000 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$637 \cdot 10^6 \text{ m}$$

5.- Un astronauta, cuyo peso en la Tierra es de 735 N, aterriza en el planeta Venus y al medir su peso observa que éste es de 600 N. Teniendo en cuenta que el diámetro de Venus es el mismo que el de la Tierra:

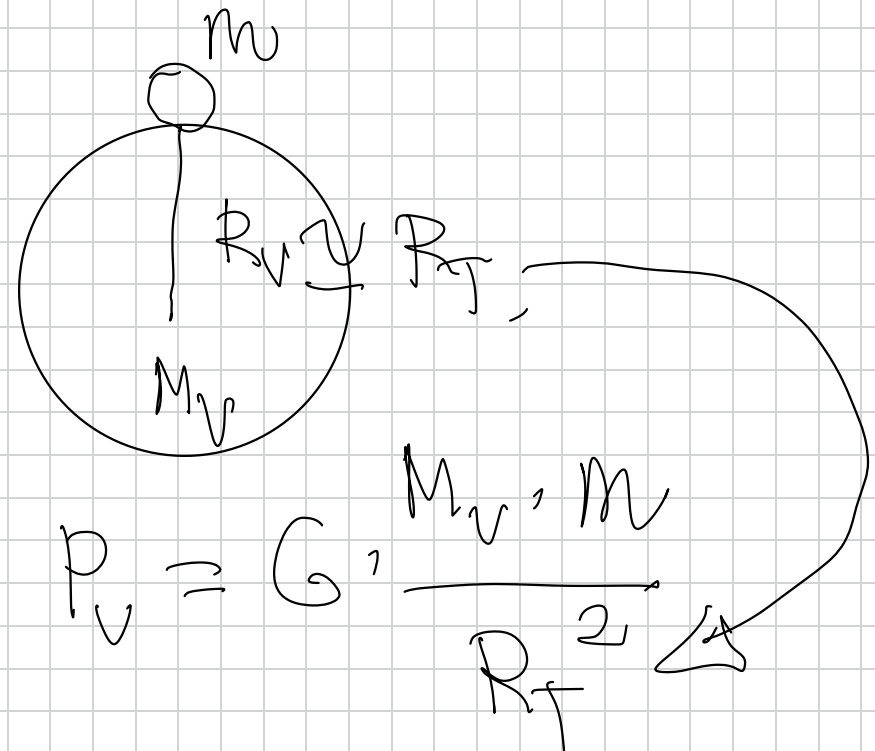
- a) Halla la relación que existe entre las masas de la Tierra y Venus ✓
b) Calcula la masa de Venus, sabiendo que la masa de la Tierra es de $6 \cdot 10^{24}$ Kg

$$P_T = 735 \text{ N}$$



$$P_T = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T^2}$$

$$P_V = 600 \text{ N}$$



$$P_V = G \cdot \frac{M_V \cdot m}{R_T^2} \triangle$$

$$\frac{P_T}{P_V} = \frac{\cancel{G} \cdot \frac{M_T \cdot \cancel{m}}{\cancel{R_T}}}{\cancel{G} \cdot \frac{M_V \cdot \cancel{m}}{\cancel{R_T}}}$$

$$\frac{P_T}{P_V} = \left[\frac{M_T}{M_V} \right]$$

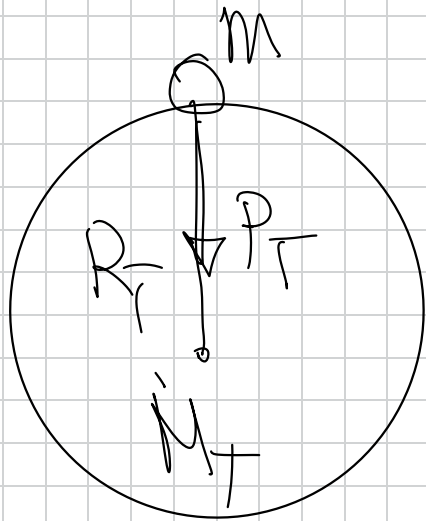
$$\frac{735 \text{ N}}{600 \text{ N}} = \frac{M_T}{M_V}$$

$$\frac{M_T}{M_V} = 1.22$$

$$\boxed{M_T = 1,22 M_{\nu}}$$

$$\frac{1}{1,22} M_T = M_{\nu} =$$

$$\boxed{M_{\nu} = 0,82 M_T}$$

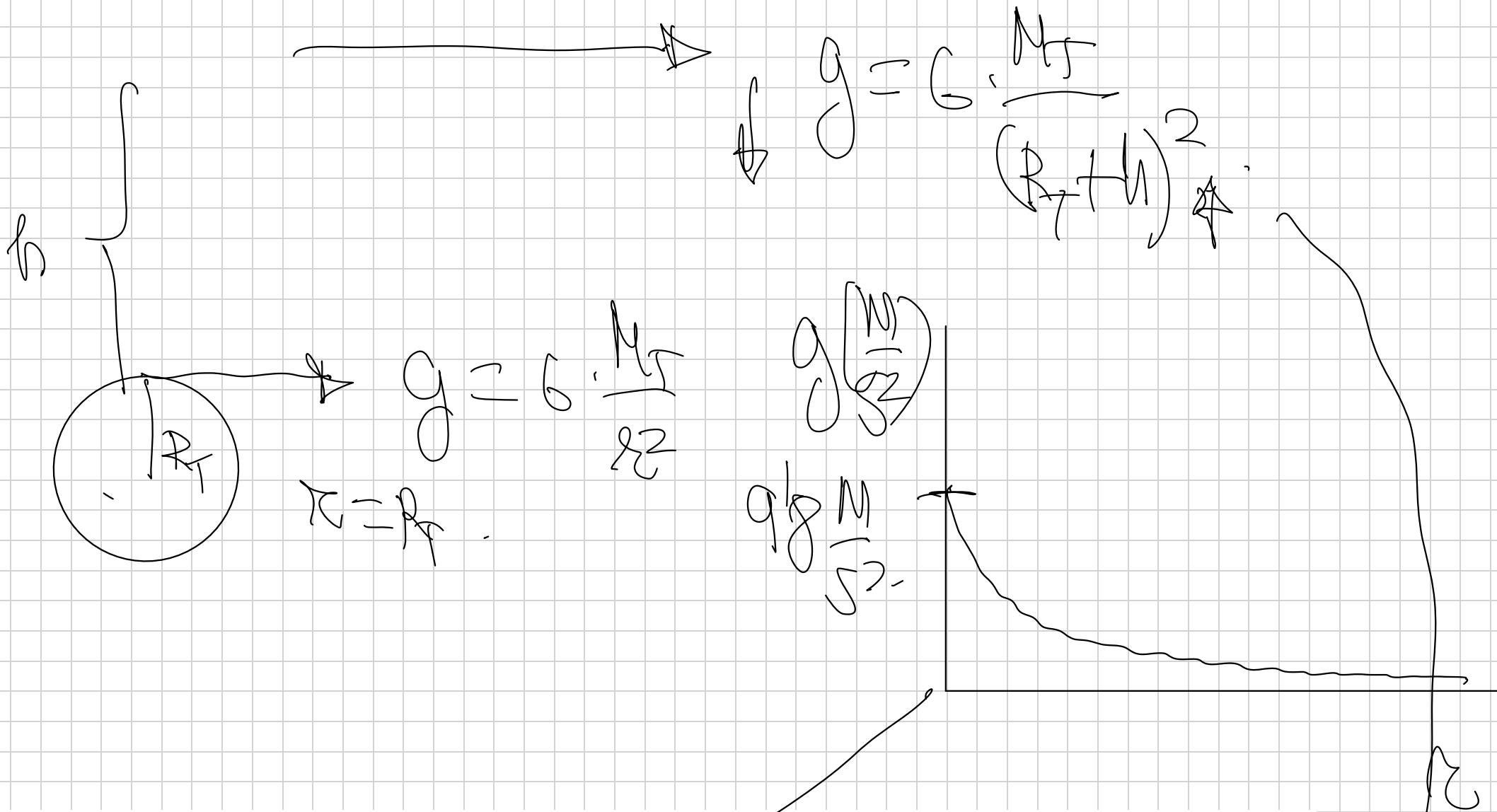


$$P_T = G \cdot \frac{M_T \cdot M}{R_T^2}$$

$$P_T = M \cdot g_T$$

$$g = G \cdot \frac{M}{r^2}$$

$$g_T = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24}}{(6.4 \cdot 10^6)^2} = 9.76 \frac{m}{s^2} = 9.8 \frac{m}{s^2}$$



3.- Frecuentemente se habla de que los astronautas en el espacio experimentan ausencia de gravedad. ¿Es correcta esta expresión? Razónese.

No, la gravedad se hace menor.

pero solamente sería nula en el ∞ →

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \left(\frac{g}{l} \right)$$

Física.

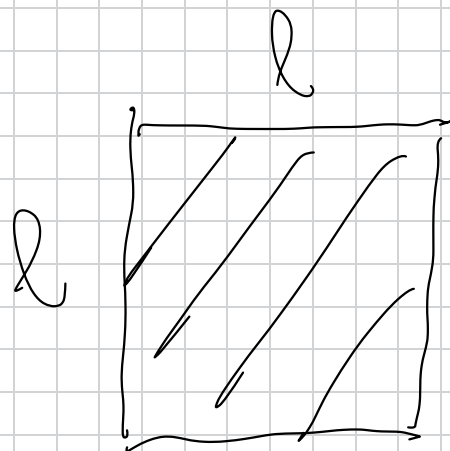
$$\rho = \frac{m}{V} =$$

$\frac{Kg}{m^3}$	en SI
------------------	-------

l

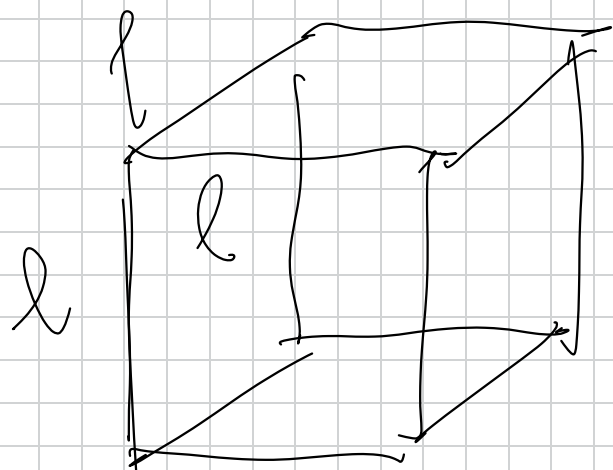


m en SI .



$$S = l \cdot l$$

m^2 en SI .



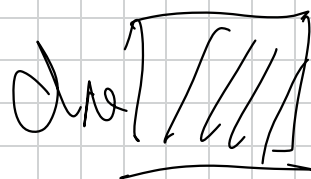
$$S = l \cdot l \cdot l$$

m^3 en SI .

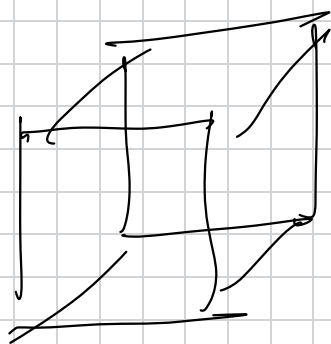
dm



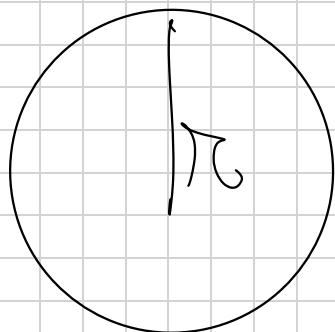
dm



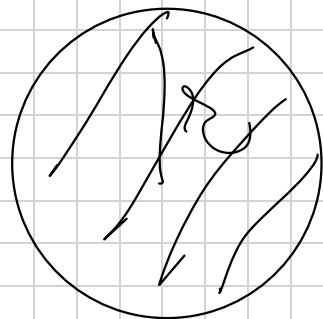
dm^2



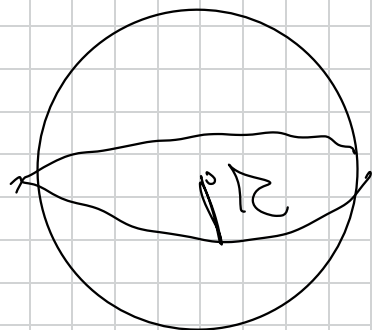
$dm^3 = Q$



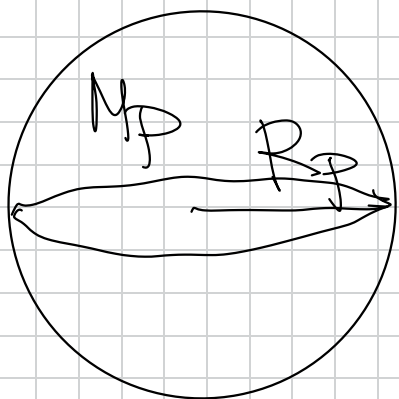
$$l = 2\pi r \quad \left(\begin{array}{c} m \\ \text{cm} \end{array} \right)$$



$$S = \pi r^2 \quad \left(\begin{array}{c} m^2 \\ \text{cm}^2 \end{array} \right)$$



$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad \left(\begin{array}{c} m^3 \\ \text{cm}^3 \end{array} \right)$$



$$\begin{aligned}
 \phi &= \frac{M_p}{V_p} = \frac{M_p}{\omega \sqrt{1 - R_p^2}} \left(\frac{K_g}{M^3} \right)
 \end{aligned}$$

6.- Calcular la densidad media de la Tierra a partir de los siguientes datos:
 $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, $R_T = 6370 \text{ Km}$, $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}$

$$\rho = \frac{M_T}{V_T} = \frac{M_T}{\frac{4}{3} \pi R_T^3}$$

$$= \frac{g_T \cdot R_T^2 / G}{\frac{4}{3} \pi R_T^3} = \frac{g_T \cdot R_T^2}{G \cdot \frac{4}{3} \pi R_T^3}$$

la pongo en función de los datos conocidos.

Diagrama de la Tierra: 

$$g_T = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}$$

despejo M_T :

$$M_T = \frac{g_T \cdot R_T^2}{G}$$

$$\rho = \frac{g_T}{G \cdot \frac{4}{3} \pi R_T^3} = \frac{918 \text{ M/s}^2}{667 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 637 \cdot 10^6 \text{ m}}$$

$$R_T = 6370 \text{ km} = 637 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$\rho = 55 \cdot 10^2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

7.- Júpiter tiene una densidad media de $\rho = 1,34 \cdot 10^3 \text{ Kg/m}^3$ y un radio medio $R = 0,718 \cdot 10^5 \text{ Km}$. Sabiendo que $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}$.

a) ¿Cuál es la aceleración de la gravedad en la superficie de Júpiter?

b) ¿Pesará un cuerpo lo mismo en Júpiter que en la Tierra?. Razónese

$R_J = 0,718 \cdot 10^5 \text{ Km} \cdot \frac{10^3 \text{ m}}{1 \text{ Km}} = 0,718 \cdot 10^8 \text{ m}$

$g_J = G \frac{M_J}{R_J^2} = G \frac{\rho_J \frac{4}{3} \pi R_J^3}{R_J^2} = G \rho_J \frac{4}{3} \pi R_J$

$\rho_J = \frac{M_J}{\frac{4}{3} \pi R_J^3}$

$M_J = \rho_J \cdot \frac{4}{3} \pi R_J^3$

$$g_J = G \cdot \rho_J \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot R_J = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 134 \cdot 10^3 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 0.718 \cdot 10^8$$

$$g_J = 26.86 \text{ m/s}^2$$

b)

$$F = m \cdot g_J$$

$$P_J = m \cdot g_J$$

$$g_J > g_T$$

$$P_J > P_T$$

pag 13 del libro.

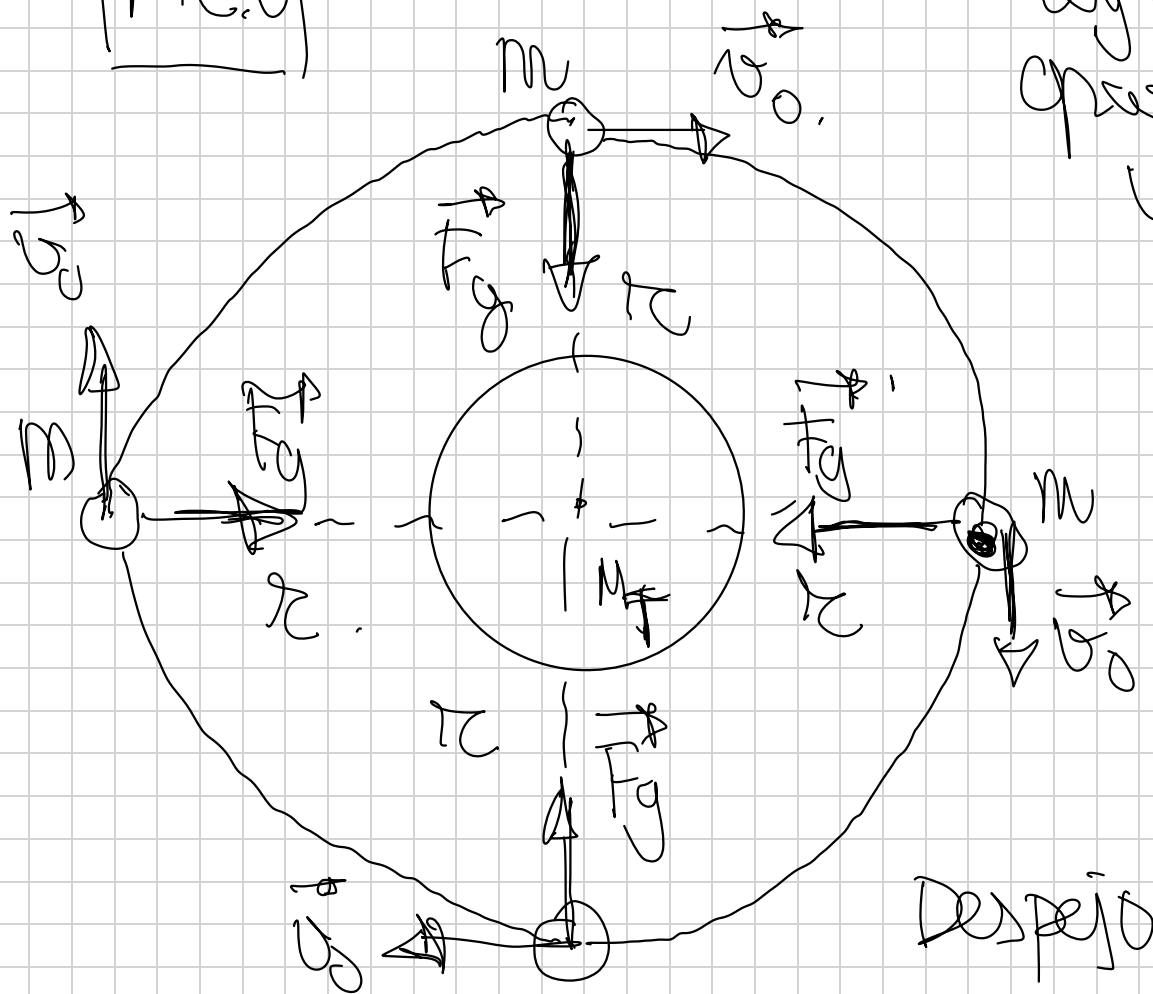
$$a_n = \frac{v_o^2}{r}$$

M.C.U

1.- Velocidad orbital de un satélite

ley de la
gravitación
universal

2a ley de
Newton.



CONDICIÓN
DE
ORBITACIÓN

$$F_g$$

$$= M \cdot |a_n|$$

$$G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{v_o^2}{r}$$

Despejo

$$v_0 = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R}}$$

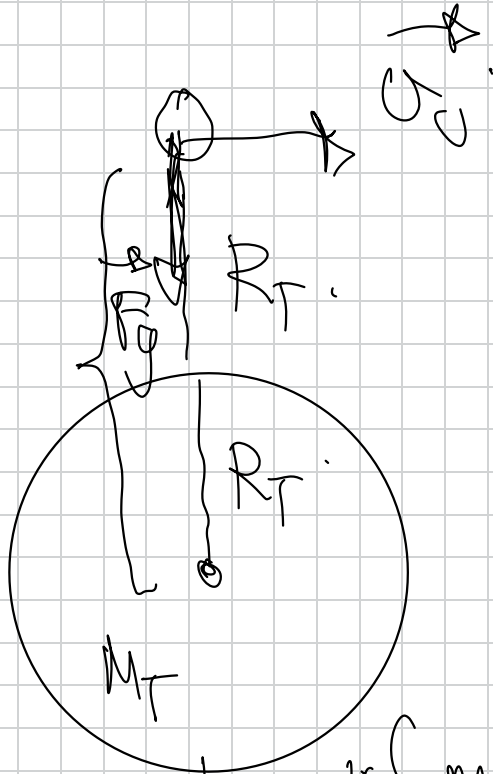
18.- Un satélite describe una órbita circular de radio $2R_T$ en torno a la Tierra.

- Determinar su velocidad orbital
- Si el satélite pesa 5000 N en la superficie terrestre, ¿Cuál será su peso en la órbita?.
- Explicar la fuerza que actúa sobre el satélite.
- Si otro satélite de masa doble al anterior se encontrase orbitando a la misma altura, ¿Con qué velocidad lo haría?.

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}, R_T = 6400 \text{ Km}, M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ Kg}$$

a)

$r = 2R_T$



Condição de orbitação.

$$F_g = F_n$$

$$F_n = m \cdot a_n$$

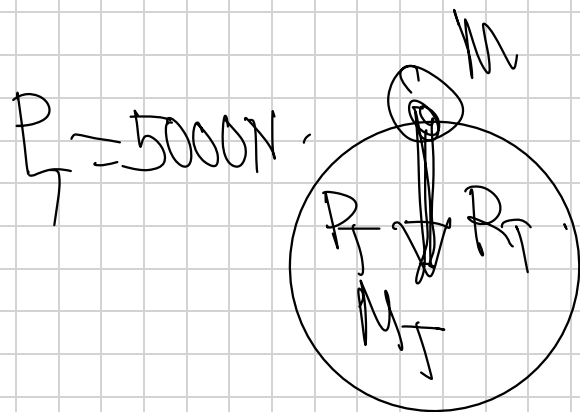
$$G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{v_0^2}{r}$$

$$R_T = 6400 \text{ km} = 6.4 \cdot 10^6 \text{ m}$$

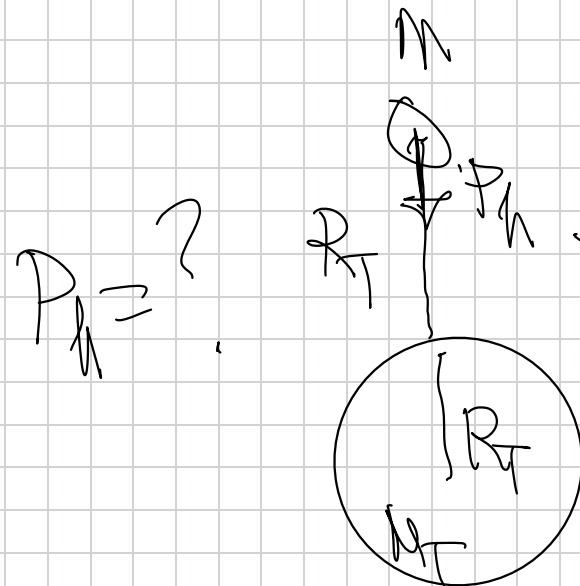
$$v_0 = \sqrt{G \cdot \frac{M_T}{r}} = \sqrt{G \cdot \frac{M_T}{2R_T}} = \sqrt{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24}}{2 \cdot (6.4 \cdot 10^6)}}$$

$$v_0 = 5591.57 \text{ m/s}$$

G)

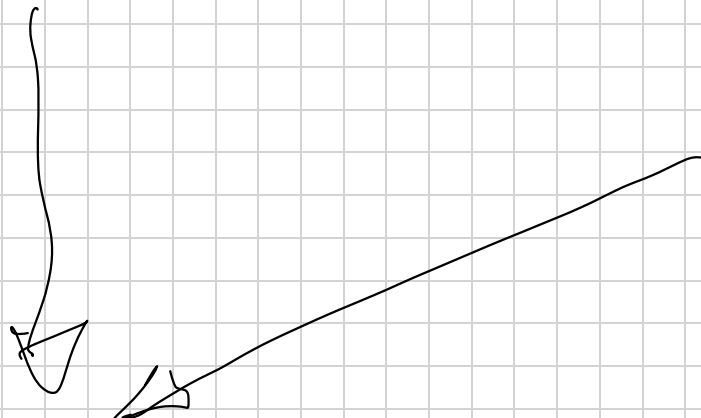


$$P_T = G \cdot \frac{M_T \cdot M}{R_T^2}$$



$$P_h = G \cdot \frac{M_T \cdot M}{(2R_T)^2}$$

$$P_h = G \cdot \frac{M_T \cdot M}{4R_T^2}$$

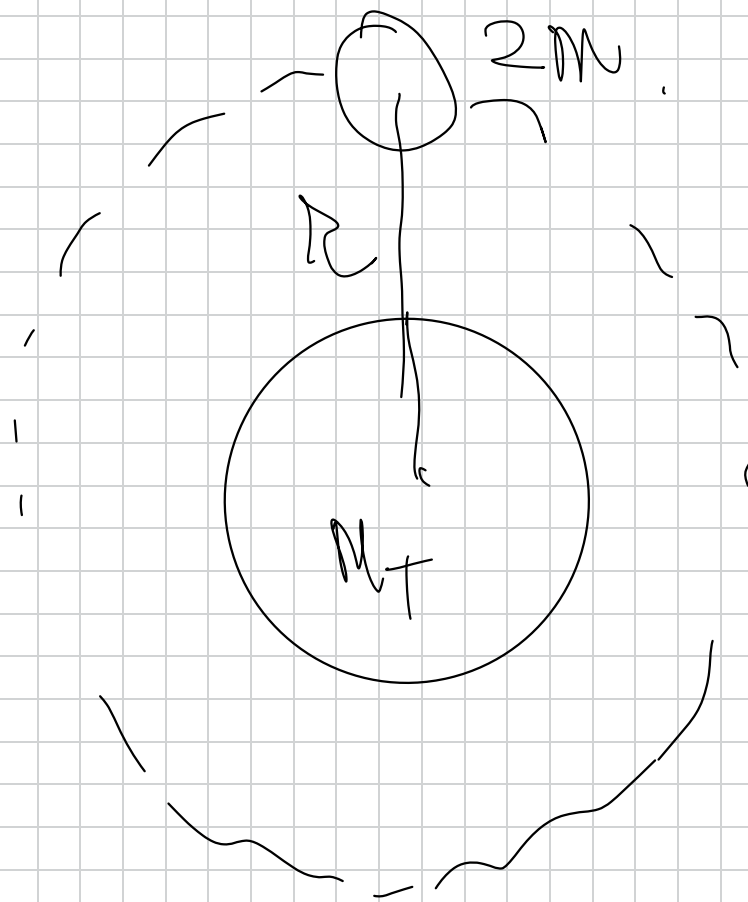


$$\frac{P_h}{P_T} = \frac{G \cdot \frac{M_T \cdot M}{4R_T^2}}{G \cdot \frac{M_T \cdot M}{R_T^2}} \quad \left| \quad \frac{P_h}{P_T} = \frac{1}{4} \right| \quad P_h = \frac{1}{4} P_T = \frac{1}{4} 5000 \text{ N} = \boxed{1250 \text{ N}}$$

c)

Según la ley de la gravitación Universal, sobre el satélite actúa una fuerza gravitatoria (F_g) cuyo carácter es atractivo y que va dirigida hacia el centro de la Tierra. En este caso, dicha fuerza es perpendicular (o normal) a la velocidad con la que orbita el satélite, por lo que podemos expresar la fuerza gravitatoria F_g como una fuerza normal F_n que proporcionará al satélite una aceleración normal a_n que hará cambiar la velocidad del satélite en dirección, de forma que se describe una órbita circular que coincidirá con la curvatura de la Tierra, no llegando el satélite a impactar sobre ella.

La aceleración normal proporcionada por la fuerza hace cambiar la velocidad del satélite en dirección pero no en módulo, permaneciendo su valor constante ($v = \text{cte}$), y por ello se dice que el satélite describirá un movimiento circular uniforme (M.C.U.)



$$R = 2R_T$$

$$v_o^2$$

$$v_o = \sqrt{G \cdot \frac{M_T}{R}}$$

→ también la
misma
velocidad.

La velocidad orbital
de la masa del
satélite es independiente
del satélite.

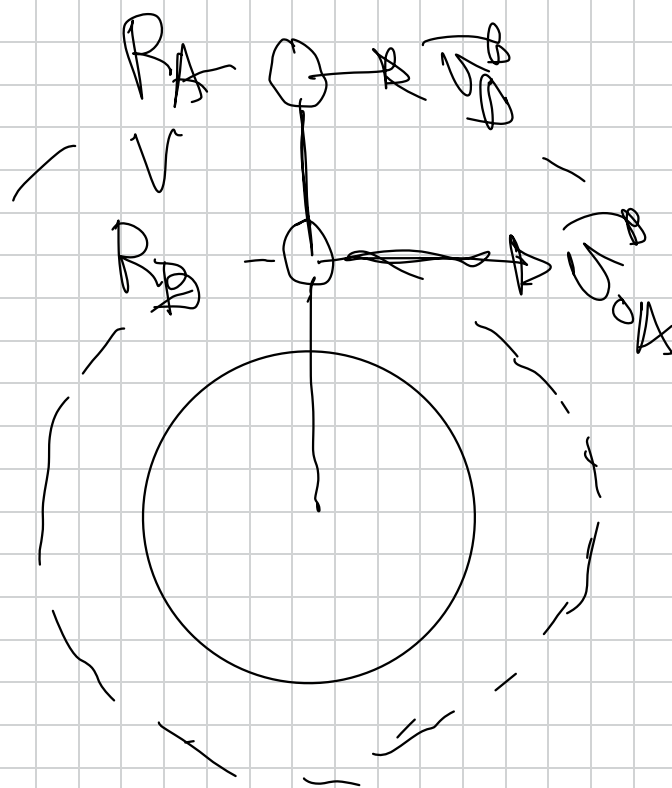
$$G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{v_0^2}{r}$$

19.- Dos satélites idénticos A y B están orbitando en órbitas circulares de distinto radio alrededor de la Tierra, siendo $R_A > R_B$.

a) Indicar cuál de los dos satélites tiene mayor velocidad orbital.

b) Si la Tierra aumentase su masa al cuádruple manteniendo su radio, ¿Cómo se vería afectada la velocidad orbital de ambos satélites?.

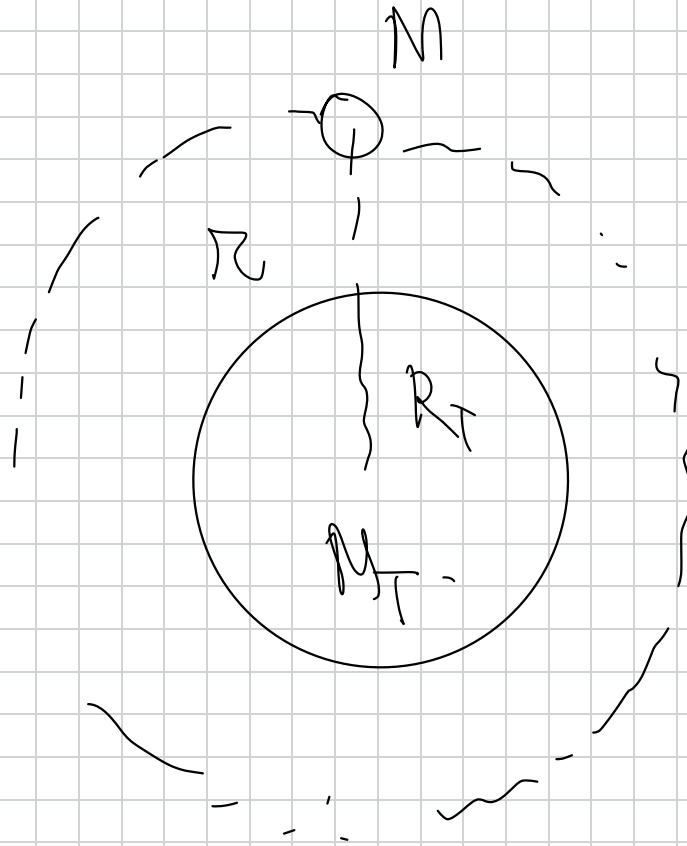
Deducción de la velocidad.



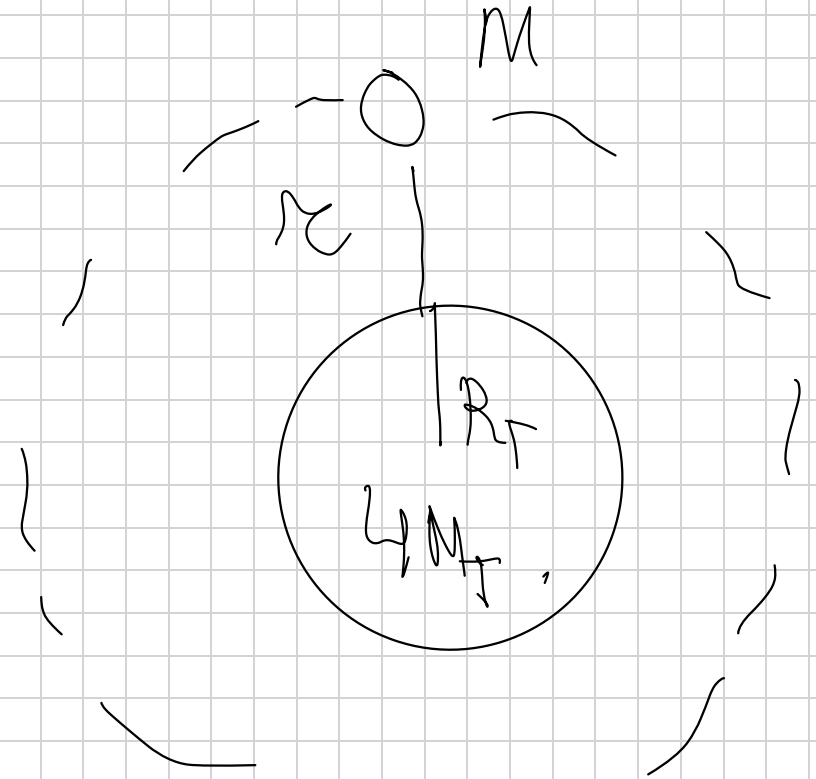
$$v = \sqrt{G \cdot \frac{M_T}{r}}$$

$$R_A > R_B$$

$$v_B > v_A$$



$$v_0 = \sqrt{G \cdot \frac{M_T}{R}}$$



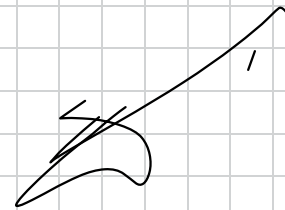
$$v_0' = \sqrt{G \cdot \frac{4M_T}{R}}$$

La v_0 aumentaria

$$\frac{v_0'}{v_0} = \frac{\sqrt{\cancel{G} \cdot \frac{4M}{\cancel{r}}}}{\sqrt{\cancel{G} \cdot \frac{M}{\cancel{r}}}} = \frac{\sqrt{\cancel{G} \cdot \frac{4M}{\cancel{r}}}}{\sqrt{\cancel{G} \cdot \frac{M}{\cancel{r}}}}$$

$$\frac{v_0'}{v_0} = \sqrt{4} \Rightarrow v_0' = \sqrt{4} v_0.$$

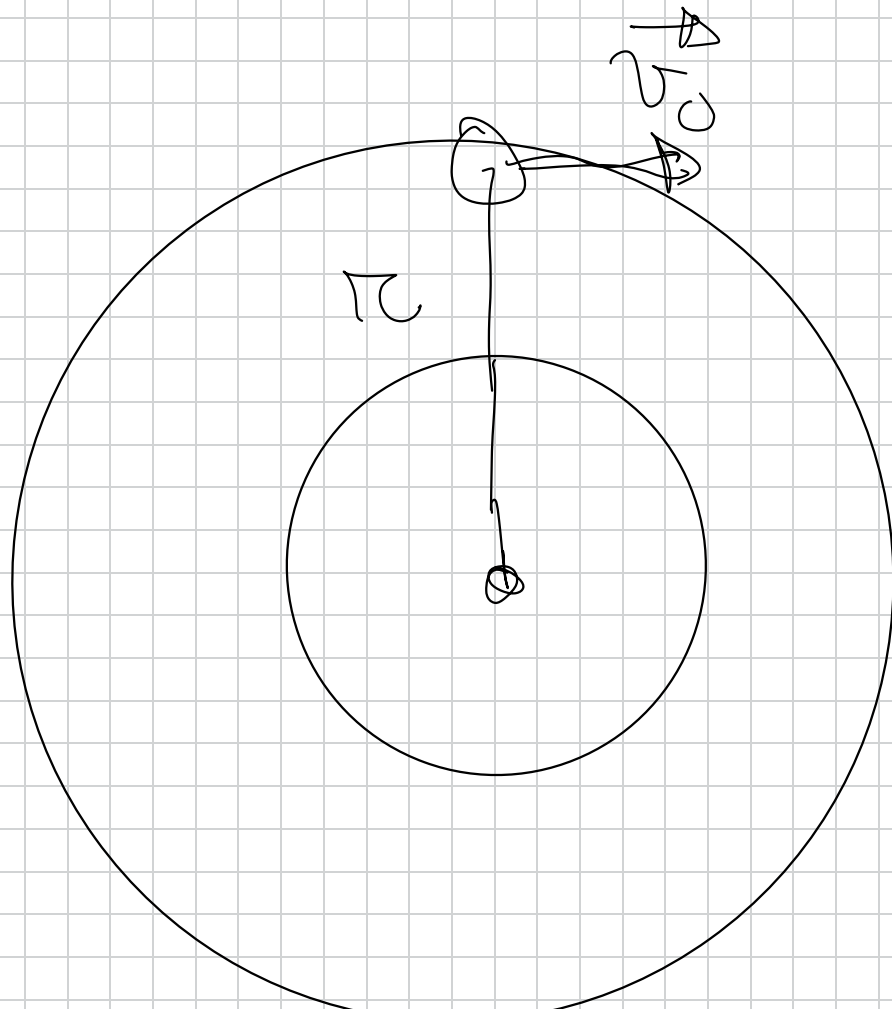
La velocidad de
ambos satélites se
duplica.



$$v_0' = 2 v_0$$

Período de un satélite. T
tiempo que tarda en describir una órbita completa.

$T \Rightarrow S$ en S.I.



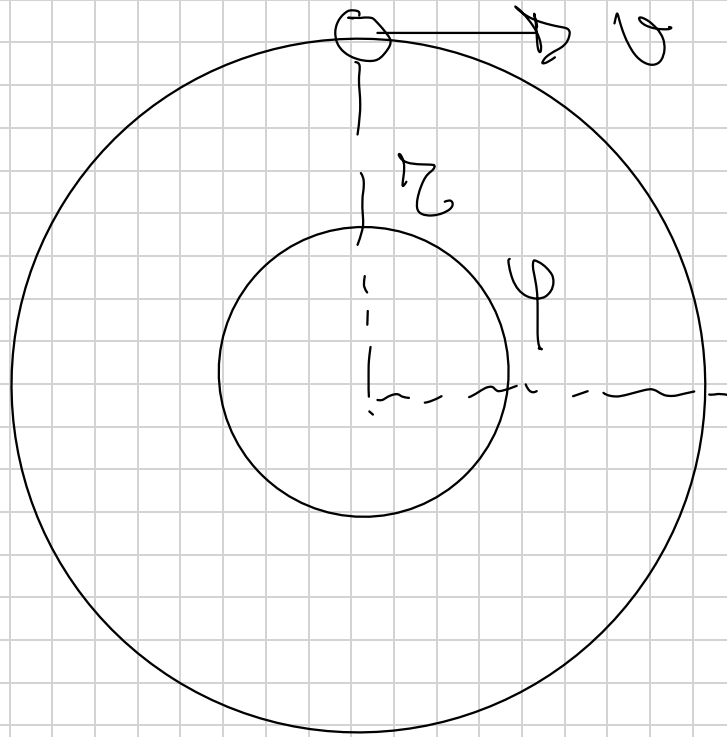
M.C.U. $\Rightarrow$

$v = \text{cte}$ en módulo,
no en dirección.

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r}{T}$$

Teoría pag 14.

M.C.V.



T

, M.C.V. $v = \text{cte}$ en módulo
no en dirección.

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r}{T} \quad \left(\frac{m}{s} \right)$$

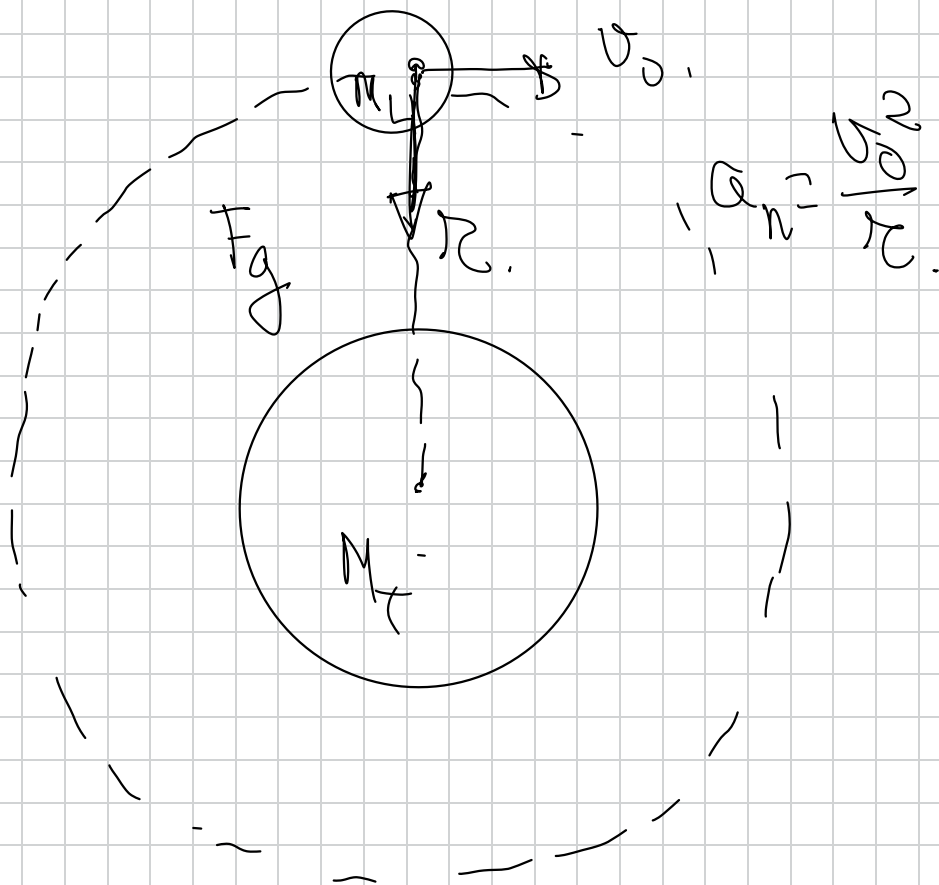
$$\omega = \frac{\phi}{t} = \frac{2\pi}{T} \quad \left(\frac{\text{rad}}{s} \right)$$

$$v = \omega \cdot r$$

22.- La Luna describe una órbita circular en torno a la Tierra en 28 días

- a) Calcular la distancia entre los centros de la Tierra y la Luna. r ?
b) Calcular el valor de la masa de la Luna sabiendo que una partícula de masa m podría estar en equilibrio en un punto alineado con los centros de la Tierra y de la Luna, a una distancia del centro de la Tierra de $3,4 \cdot 10^8$ m.

$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}$, $M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ Kg}$



CONDICIÓN DE ORBITACIÓN.

$F_g = F_n$

$$G \cdot \frac{M_T \cdot M_L}{r^2} = M_L \cdot a_n$$

$$G = \frac{2\pi R}{T}$$



$$G \cdot \frac{M_T \cdot M_E}{R^2} = M_E \cdot \frac{v^2}{R}$$

Me dan el dato del T .
y de lo hacer que
aparezca en la
expresión.

Despejando R .

$$G \cdot \frac{M_T}{R} = \left(\frac{2\pi R}{T} \right)^2$$

$$G \cdot \frac{M_T}{R} = \frac{4\pi^2 R^2}{T^2}$$

$$G \cdot M_T \cdot T^2 = 4\pi^2 R^3$$

$$R = \sqrt{\frac{G \cdot M \cdot T^2}{4\pi^2}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot (28 \cdot 24 \cdot 3600)^2}{4\pi^2}}$$

$$R = 3,9 \cdot 10^8 \text{ m}$$

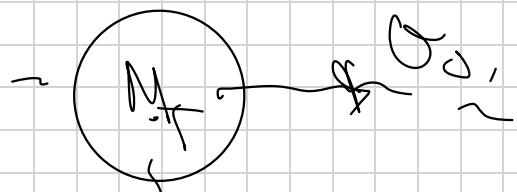
$$T = 28 \text{ días} \cdot \frac{24 \cdot 3600 \text{ s}}{1 \text{ día}}$$

21.- Suponiendo que la órbita de la Tierra en torno al Sol es una circunferencia de radio $1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$ y que la Tierra tarda $3,15 \cdot 10^7 \text{ s}$ en completar dicha órbita: $\rightarrow$

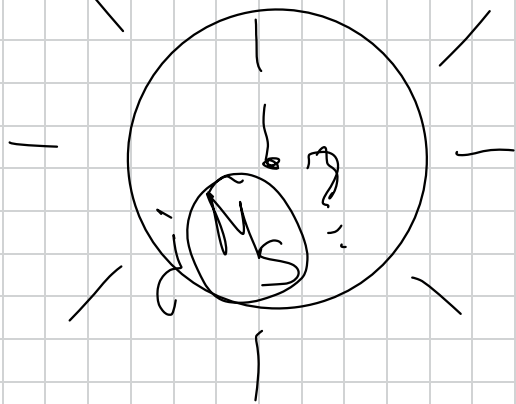
a) Calcular la masa del Sol.

b) Calcular el potencial gravitatorio debido al Sol en el punto en el que se halla la Tierra.

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}$$



$$r = 1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}$$



$$T = 3.15 \cdot 10^7 \text{ s}$$

CONDICIÓN DE ORBITACIÓN.

$$F_g = F_n = M_1 a_n$$

$$G \frac{M_S M_1}{r^2} = M_1 \frac{v^2}{r}$$

$$G \frac{M_S}{r} = v^2$$

$$G \frac{M_S}{r} = \left(\frac{2\pi r}{T} \right)^2$$

$$r = M_1 \cdot a_n$$

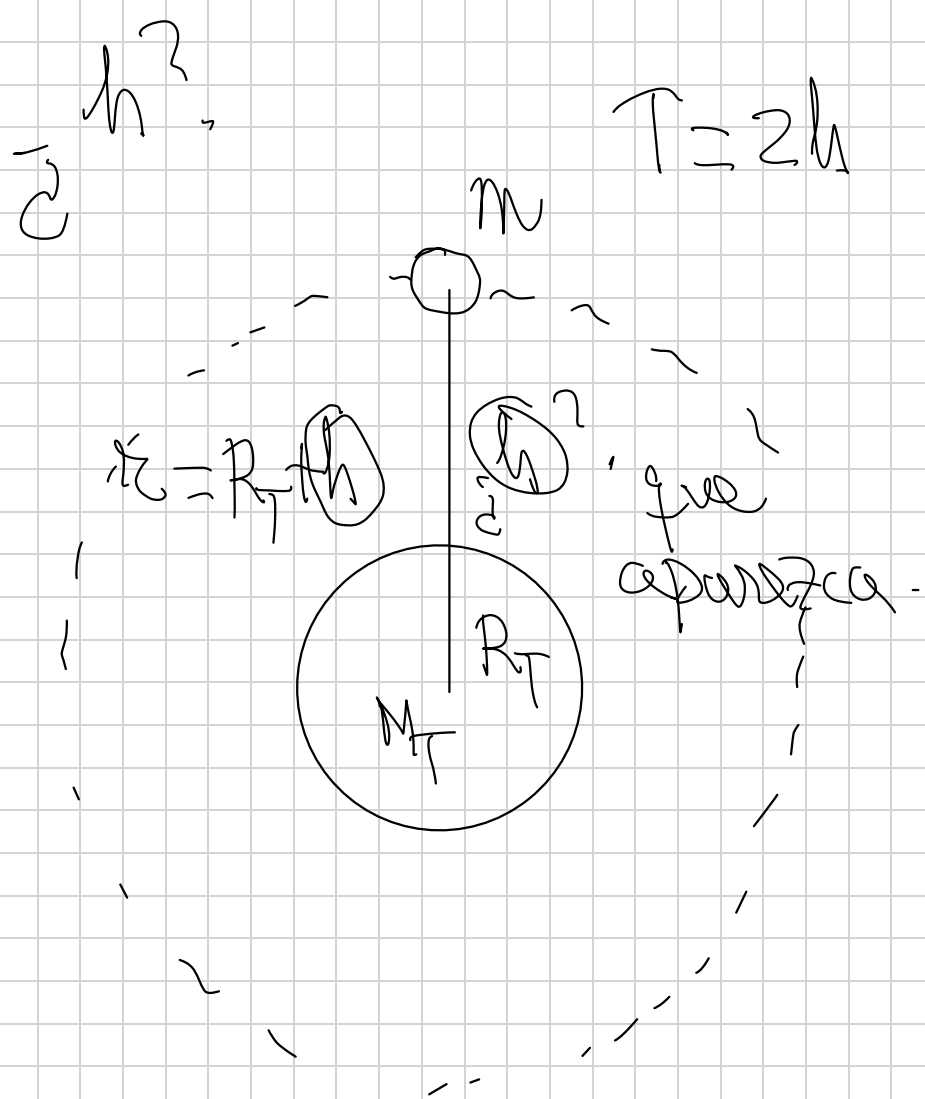
$$F_n = M_1 \frac{v^2}{r}$$

$$G \cdot \frac{M_S}{R} = \frac{4\pi^2 R^2}{T^2}$$

$$M_S = \frac{4\pi^2 R^3}{G \cdot T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot (15 \cdot 10^{11})^3}{667 \cdot 10^{-11} \cdot (215 \cdot 10^7)^2} = 2101 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

20.- ¿A qué altura de la superficie terrestre deberá estar situado un satélite si queremos que describa una órbita circular con un período de 2 horas?

$$\left\{ \begin{array}{l} g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \\ R_T = 6400 \text{ Km} \end{array} \right.$$



$\tilde{h}^?$

CONDICIÓN DE ORBITACIÓN

$$F_g = F_n$$

$$G \cdot \frac{M_T \cdot m}{(R_T + h)^2} = m \cdot a_n$$

$$\frac{v_0^2}{R} \downarrow (R = R_T + h)$$

$$G \cdot \frac{M_T \cdot m}{(R_T + h)^2} = m \cdot \frac{v_0^2}{(R_T + h)}$$

$$G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)} = \left(\frac{2\pi(R_T + h)}{T} \right)^2$$

$$G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)} = \frac{4\pi^2 (R_T + h)^2}{T^2}$$

$$G \cdot M_T \cdot T^2 = 4\pi^2 (R_T + h)^3$$

$$(R_T + h)^3 = \frac{G \cdot M_T \cdot T^2}{4\pi^2}$$

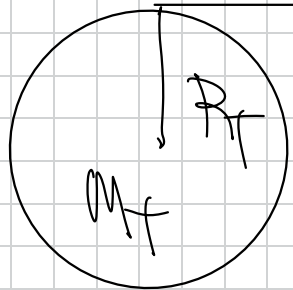
$$R_T + h = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_T \cdot T^2}{4\pi^2}}$$

$$h = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{4 \pi^2}} - R_T$$

No tengo ni G ni M_T
 pero me dan la gravedad
 en la superficie terrestre.

$g \approx M/5^2$ - Sacamos el despeje de ese producto

$$g_T = \frac{G \cdot M_T}{R_T^2}$$



$$G \cdot M_T = g_T \cdot R_T^2$$

$$h = \sqrt{\frac{g \cdot M \cdot r^2}{4\pi^2}} - R_T$$

$$h = \sqrt{\frac{g_T \cdot R_T^2 \cdot r^2}{4\pi^2}} \Rightarrow R_T$$

$$h = \sqrt{\frac{9.8 \frac{m}{s^2} (6.4 \cdot 10^6)^2 (2.3600 s)^2}{4\pi^2}} \Rightarrow 6.4 \cdot 10^6$$

$$h = 1168 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Satélites geoestacionarios

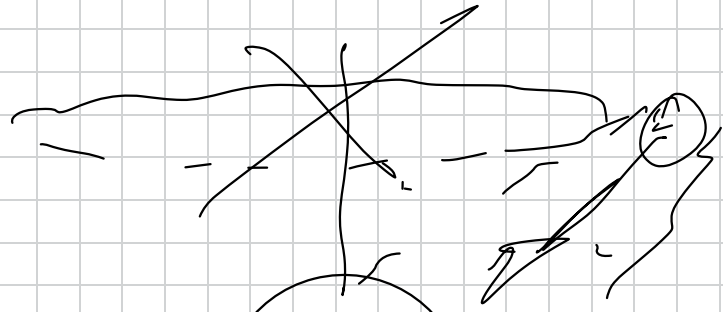
$$T_g = 24 \text{ h}$$



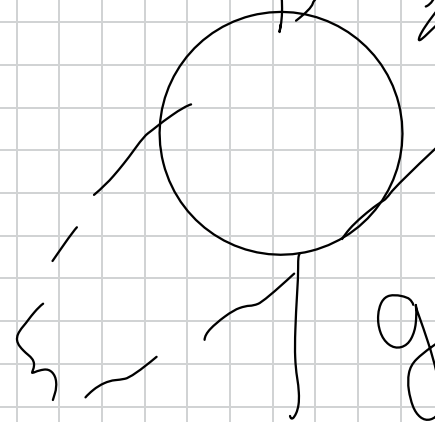
$$T = 24 \text{ h}$$



$$T = 24 \text{ h}$$



$$T = 24 \text{ h}$$

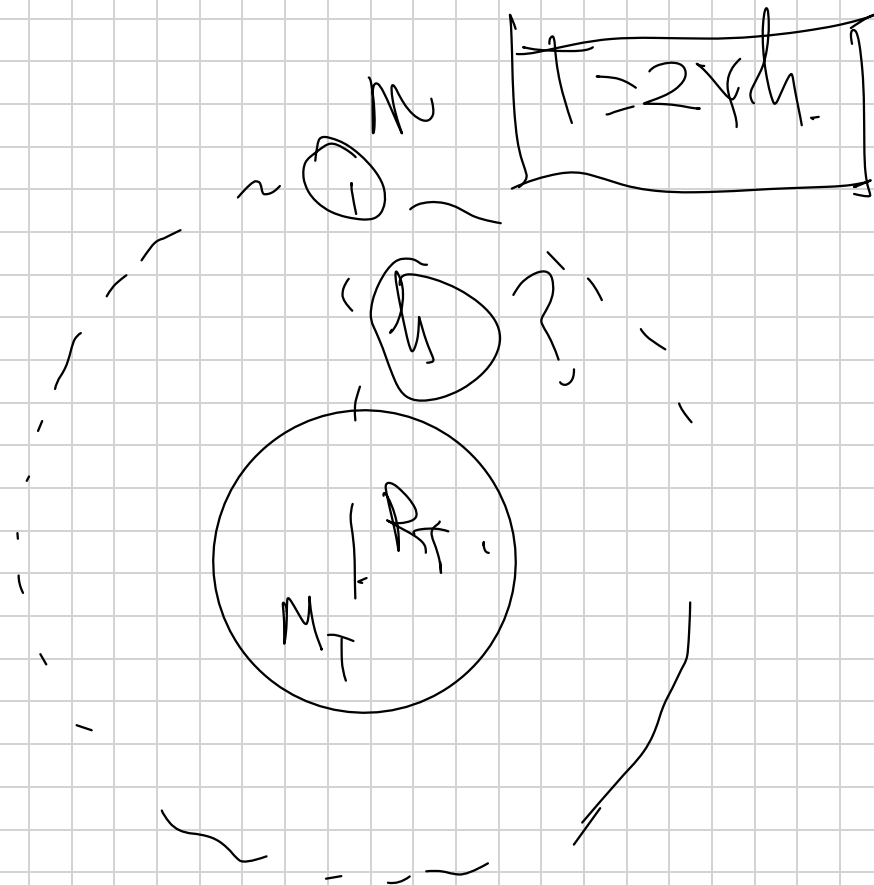


geoestacionario.

25.- Un satélite gira en una órbita geoestacionaria (es decir, la vertical del satélite siempre pasa por el mismo punto de la superficie terrestre)

- Calcular su velocidad angular
- Calcular la altura a la que se encuentra sobre la superficie terrestre
- Calcular su aceleración normal
- Explicar porqué el satélite no cae sobre la Tierra

$$g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}, R_T = 6400 \text{ Km}$$



$$F_g = F_n$$

$$G \cdot \frac{M_T m}{(R_T + h)^2} = m \cdot \frac{v^2}{(R_T + h)}$$

$$G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)} = \left(\frac{2\pi (R_T + h)}{T} \right)^2$$

$$G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)} = \frac{4\pi^2 (R_T + h)^2}{T^3}$$

$$G \cdot M_T \cdot T^2 = 4\pi^2 (R_T + h)^3$$

$$(R_T + h)^3 = \frac{G \cdot M_T \cdot T^2}{4\pi^2}$$

$$R_T + h$$

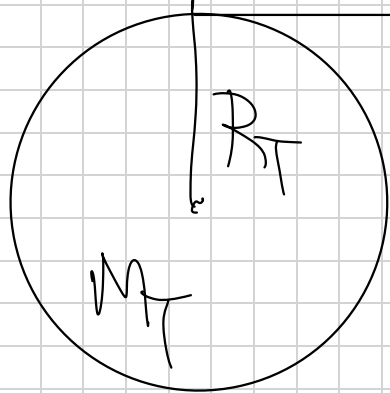
$$\sqrt[3]{\frac{G \cdot M_T \cdot T^2}{4\pi^2}}$$

$h =$

$$\sqrt{\frac{G \cdot M_T \cdot T^2}{4 \pi^2}}$$

$- R_T$

$g = 9.8 \text{ m/s}^2$



$$g = \frac{G \cdot M_T}{R_T^2}$$

$$G M_T = g \cdot R_T^2$$

$$h = \sqrt{\frac{g \cdot R_T^2 \cdot T^2}{4 \pi^2}}$$

$- R_T$

$$h = \sqrt[3]{\frac{9/8 (64 \cdot 10^6)^2 (24 \cdot 3600)^2}{4\pi^2}} \quad \text{--- } 64 \cdot 10^6 \quad \text{--- } \cancel{2\pi = 2 \times h}$$

$$h = 315 \cdot 10^7 \text{ m}$$

a)

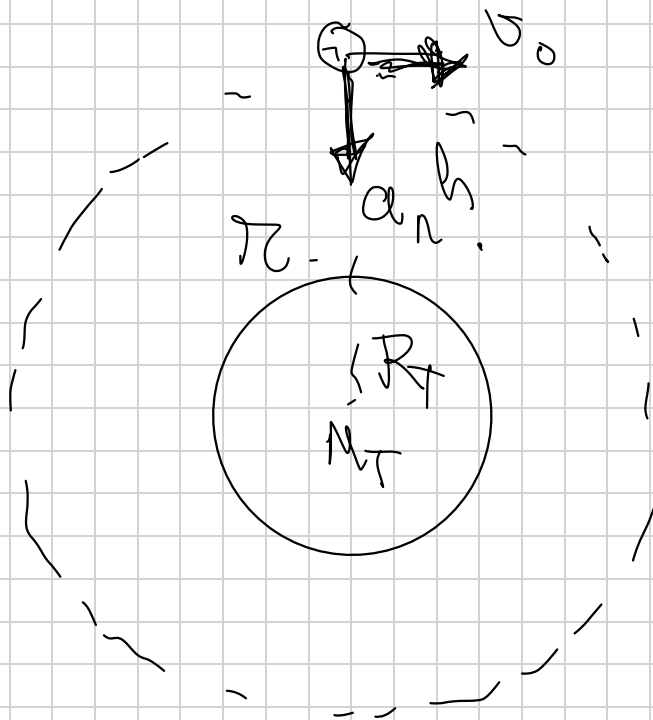
$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi \text{ rad}}{(24 \cdot 3600 \text{ s})}$$

$$\omega = 7.27 \cdot 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

25.- Un satélite gira en una órbita geoestacionaria (es decir, la vertical del satélite siempre pasa por el mismo punto de la superficie terrestre)

- a) Calcular su velocidad angular
- b) Calcular la altura a la que se encuentra sobre la superficie terrestre
- c) Calcular su aceleración normal
- d) Explicar porqué el satélite no cae sobre la Tierra

$g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $R_T = 6400 \text{ Km}$



Teoría

M.C.V. $\Rightarrow v = \omega \cdot r$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{(\omega \cdot r)^2}{r} = \frac{\omega^2 \cdot r^2}{r}$$

$$a_n = \omega^2 \cdot r$$

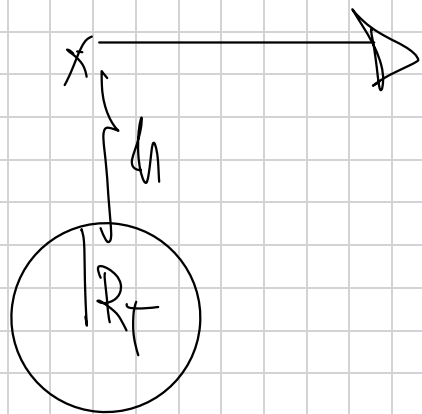
$$R = (R_T + h)$$

$$a_n = \omega^2 \cdot (R_T + h)$$

$$a_n = (7.27 \cdot 10^{-5})^2 \cdot (6.4 \cdot 10^6 + 3.6 \cdot 10^7)$$

$$a_n = 0.22 \text{ m/s}^2$$

También se podría calcular como la gravedad a esa altura.

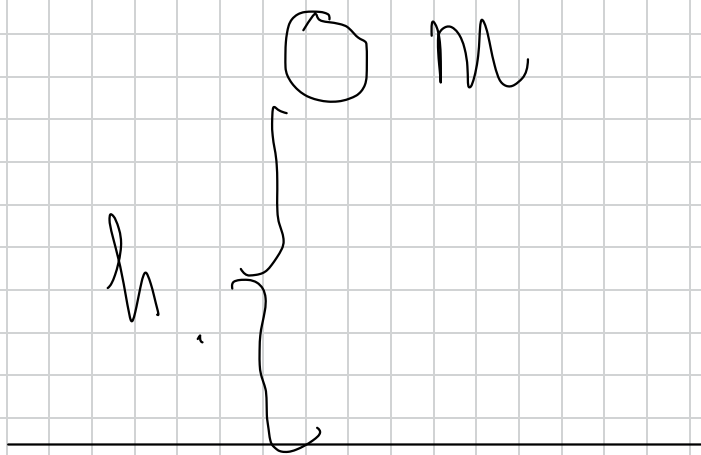


$$g = G \frac{M_T}{(R_T + h)^2} = 0.22 \text{ m/s}^2$$

Repaso 4º ESO y 1º BACH.

Energía potencial E_p

Es la energía que presenta un cuerpo de masa m en función de su posición.
(en un campo de fuerzas conservativo)

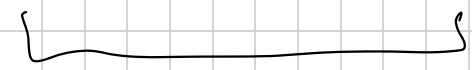


$$E_p = m \cdot g \cdot h$$

$$E_p = \left(K_g \cdot \frac{M}{52} \right) \cdot m$$

$$E_p = \underbrace{N}_{\uparrow} \cdot m$$

$$E_p =$$



J

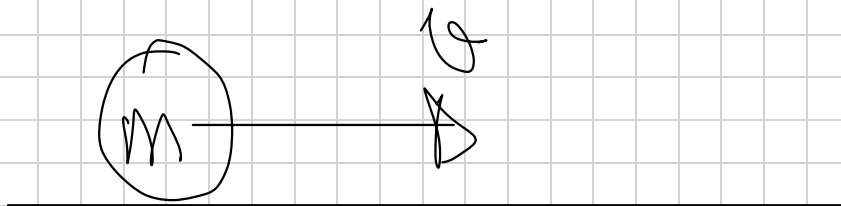
(Julio
en
S.I.)

= Energía cinética E_c

Es la energía que posee un cuerpo de masa m en función de su velocidad v

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

$$E_c = \text{kg} \cdot \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2$$



$$E_c = \text{Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{m}$$

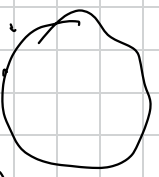
$$E_c = \text{N} \cdot \text{m}$$

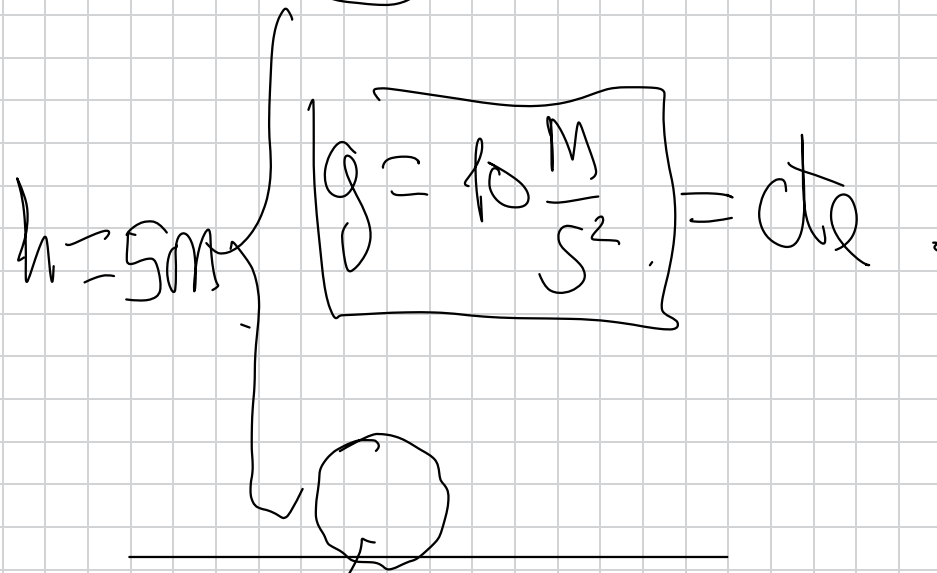
$$E_c = \text{Julio (J en SI)}$$

Energía mecánica . (E_m)

$$E_m = E_p + E_c = \text{J} + \text{J} = \text{Julio en SI}.$$

Principio de conservación de la Em.

REPOSO  $m = 1 \text{ kg}$.



Origen de E_p $E_p = m \cdot g \cdot h = 0$.

$$E_p = m \cdot g \cdot h$$

$$E_{pa} = 1 \cdot 10 \cdot 5 = 50 \text{ J}$$

$E =$
SUELTO

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

$$E_c = 0 \text{ J}$$

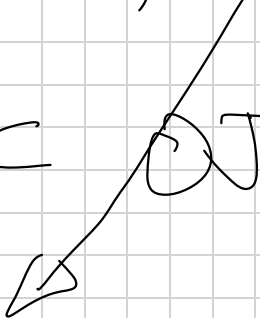
$E_c = 50 \text{ J}$
SUELTO

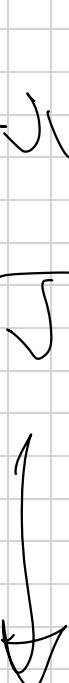
0 J

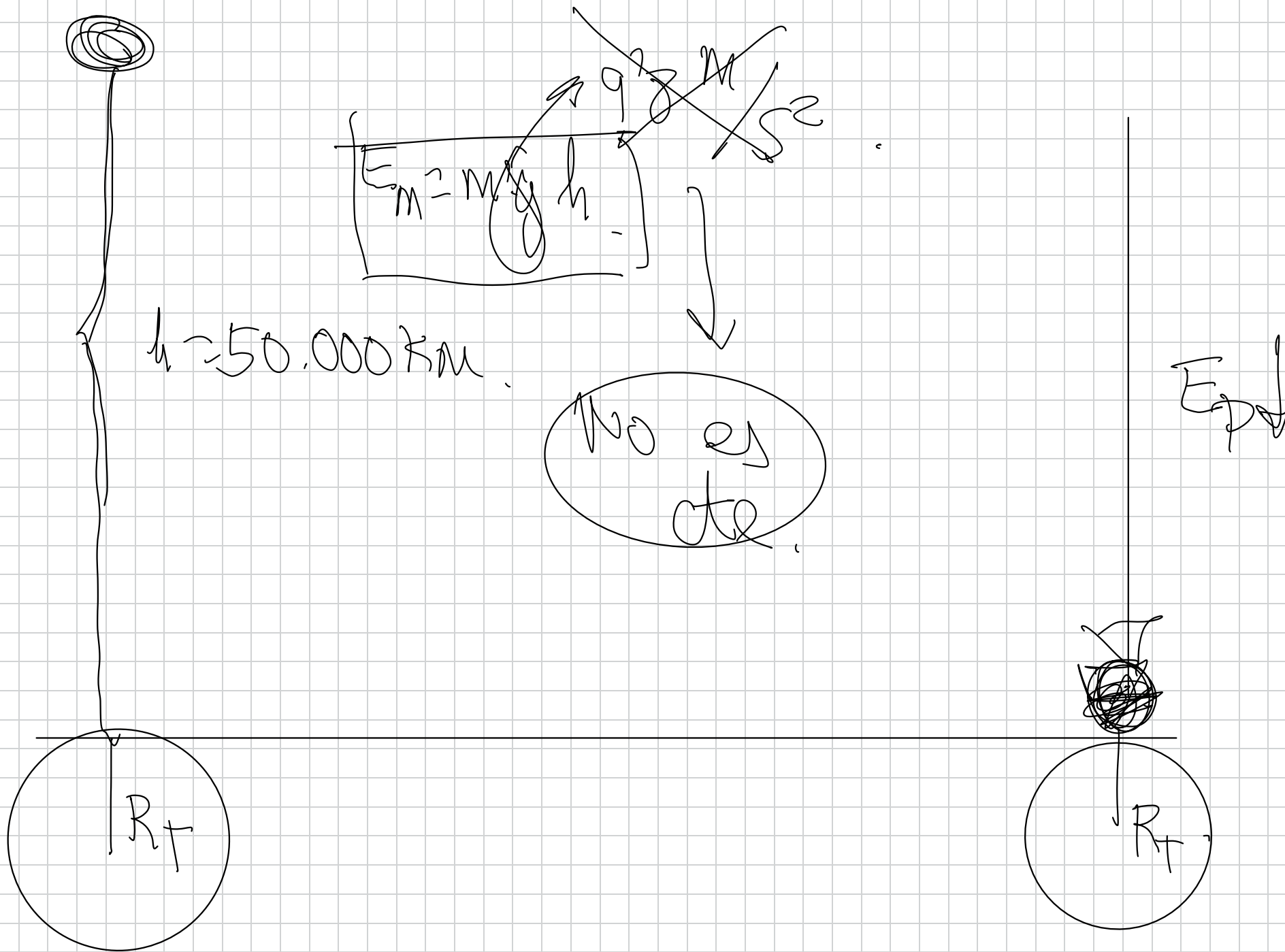
$$E_{\text{all}} = E_{\text{MSUEL}}.$$

$$E_{\text{Ph}} + E_{\text{ch}} = E_{\text{Pseu}} + E_{\text{Suelo}},$$

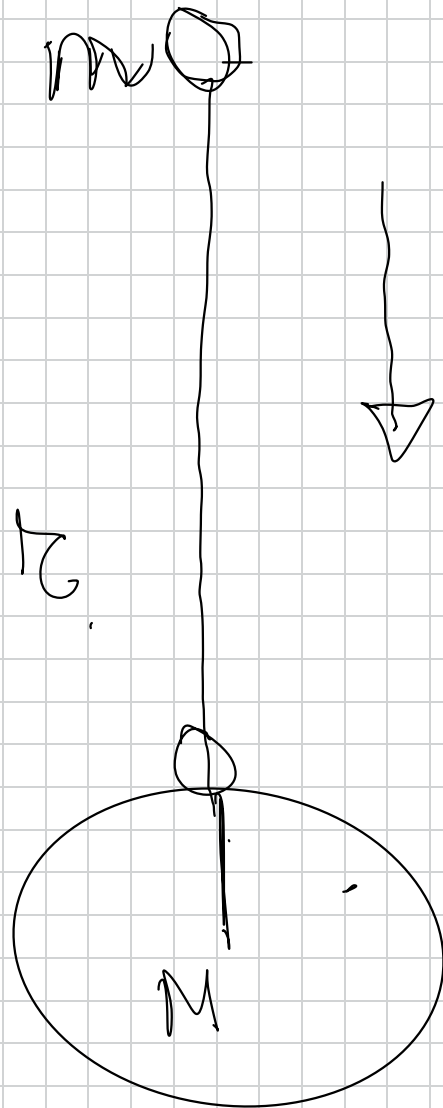
$$50\text{J} + 0\text{J} = 0\text{J} + 50\text{J}.$$


 übrigen de
 E_p


 $v?$



$\infty \longrightarrow E_p = 0$. (E_p gravitatorie .
(origen de E_p en da))



↓
Pierde .

$$E_p = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$$

↓
Julio (J) .

SANTANDER - Km 500.

SANTANDER Km 0.

MADRID - Km 0.

MADRID Km 500.

MÁLAGA - Km. - 400

MÁLAGA Km - 900

Lo que realmente tiene significado físico
son las diferencias de E_p y
no la E_p en una posición ya
que su valor depende del origen
de E_p tomado (arbitrariamente
se toma el ∞).

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}, M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ Kg}$$

29.- Un meteorito de 1000 Kg colisiona con otro a una altura sobre la superficie terrestre de 6 veces el radio de la Tierra y pierde toda su Energía cinética.

a) ¿Cuánto pesa el meteorito en ese punto y cuál es su energía mecánica después de la colisión?

b) Si cae a la Tierra, haga un análisis energético del proceso de caída. ¿Con qué velocidad llega a la superficie terrestre?

c) ¿Dependerá esa velocidad de la trayectoria seguida?, ¿y del origen de energía potencial tomado?. Razonar las respuestas.

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}, R_T = 6400 \text{ Km}, M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ Kg}$$

Handwritten notes:
 $E_p = m \cdot g \cdot h$
 $E_k = \frac{1}{2} m \cdot v^2$

∞

m pinda toda zu E_c ,

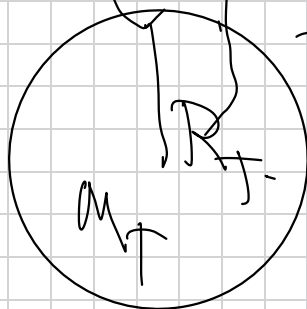
$$E_{ph} = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{7R_T} \quad / \quad E_{ch} = 0J$$

$$h = 6R_T$$

$$R = R_T + h$$

$$R = R_T + 6R_T$$

$$R = 7R_T$$



$$E_{ph} = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T}$$

$$E = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

desnervura

acumula

$$E_{m_h} = E_{m_T}$$

$$E_{p1} \rightarrow E_{c1} = E_{p1} + E_{c1}$$

$$-G \cdot \frac{M_f \cdot m}{7R_f} + 0 = -G \cdot \frac{M_f \cdot m}{R_f} + \frac{1}{2} m \cdot \underbrace{v_f^2}$$

$$G \cdot \frac{M_f \cdot m}{R_f} - G \cdot \frac{M_f \cdot m}{7R_f} = \frac{1}{2} m v_f^2$$

FACTOR COMÚN

$$G \cdot \frac{M_f \cdot m}{R_f} \left(1 - \frac{1}{7} \right) = \frac{1}{2} m v_f^2$$

$$\frac{6}{7} \cdot G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T} = \frac{1}{2} m v_T^2$$

$$v_T = \sqrt{\frac{12}{7} \frac{G M_T}{R_T}} = 1.035 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

$$G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T} - G \cdot \frac{M_T \cdot m}{7 R_T}$$

$$\underbrace{7(GM_T \cdot M)}_{7R_T} \cdot \underbrace{(GM_T \cdot M)}_{7R_T} = \underbrace{\left(\begin{array}{c} 6(GM_T \cdot M) \\ 7R_T \end{array} \right)}_{\checkmark}$$

$$2 - \frac{1}{7} = \frac{7}{7} - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}.$$

29.- Un meteorito de 1000 Kg colisiona con otro a una altura sobre la superficie terrestre de 6 veces el radio de la Tierra y pierde toda su Energía cinética.

a) ¿Cuánto pesa el meteorito en ese punto y cuál es su energía mecánica después de la colisión?

b) Si cae a la Tierra, haga un análisis energético del proceso de caída. ¿Con qué velocidad llega a la superficie terrestre?

c) ¿Dependerá esa velocidad de la trayectoria seguida?, ¿y del origen de energía potencial tomado?. Razonar las respuestas.

$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}$, $R_T = 6400 \text{ Km}$, $M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ Kg}$

$h = 6R_T$
 $E_p = -G \frac{M_T \cdot m}{(6R_T + R_T)}$
 $E_{pT} = -G \frac{M_T \cdot m}{R_T}$
 $E_c = \frac{1}{2} m v_f^2$
 $E_c = \frac{1}{2} m v_T^2$
 la disminución de E_p pasa a incrementar la E_c
 De esta forma la E_m permanece cte.

$$P_h = G \cdot \frac{M_f = M}{(6R_f + R_T)^2} \approx G \cdot \frac{M_f = M}{49 R_f^2} \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{10^{24} \cdot 1000}{49 (6.4 \cdot 10^6)^2}$$

$$P_h = 200 \text{ W}$$

— o —

b) Conservation de l'énergie

$$E_{Mh} \approx E_{MT}$$

$$E_{Ph} + E_{Ch} = E_{PT} + E_{CT}$$

$$- G \cdot \frac{M_T \cdot M}{7 R_f} + \frac{1}{2} M v^2 = - G \cdot \frac{M_f = M}{R_T} + \frac{1}{2} M \left(\frac{v_T}{T} \right)^2$$

$$1 - G \cdot \frac{M_T}{7R_T} = G \cdot \frac{M_T}{R_T} + \frac{1}{2} v_T^2$$

$$\frac{1}{2} v_T^2 = G \left[\frac{M_T}{R_T} - \frac{M_T}{7R_T} \right]$$

$$\frac{1}{2} v_T^2 = G \left[\frac{7M_T}{7R_T} - \frac{M_T}{7R_T} \right]$$

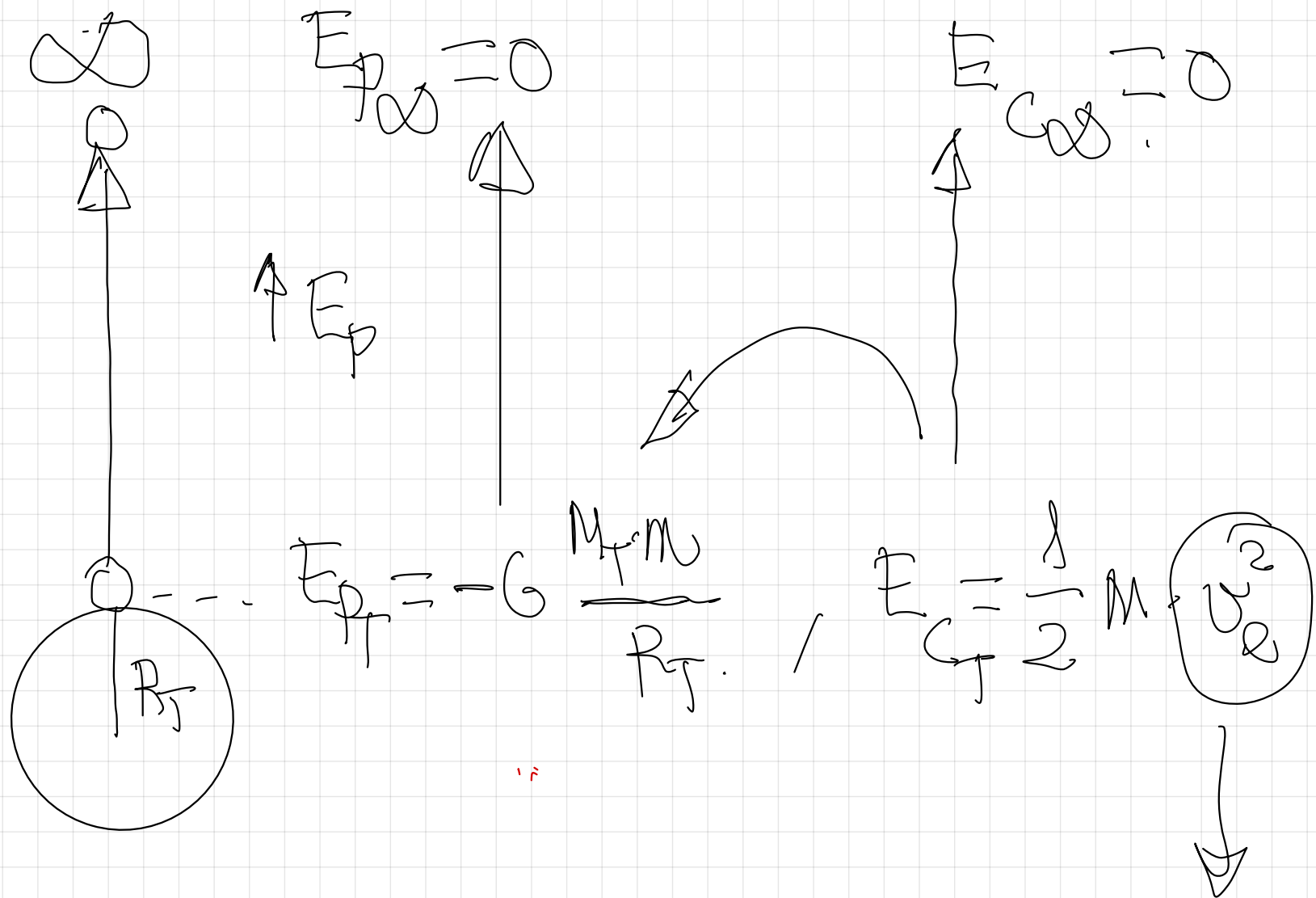
$$\frac{1}{2} v_T^2 = \frac{7(GM_T)}{7R_T} - \frac{(GM_T)}{7R_T}$$

$$\frac{1}{2} v_T^2 = \frac{6 G M_T}{7 R_T}$$

$$v_T = \sqrt{\frac{12 G M_T}{7 R_T}} = 11035 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

pag 15, pregunta 3

3: Velocidad de escape de un cuerpo.



velocidad de escape
o velocidad
mínima de
escape.

Conservación de la E_m ,

$$E_{m_i} = E_{m_f}$$
$$E_{p_i} + E_{c_i} = E_{p_f} + E_{c_f}$$

$$-G \frac{M_T \cdot m}{R_T} + \frac{1}{2} m \cancel{v_e^2} = 0 + 0$$

la calculo,

$$\frac{1}{2} \cancel{m} v_e^2 = G \cdot \frac{\cancel{M_T} \cdot m}{R_T}$$

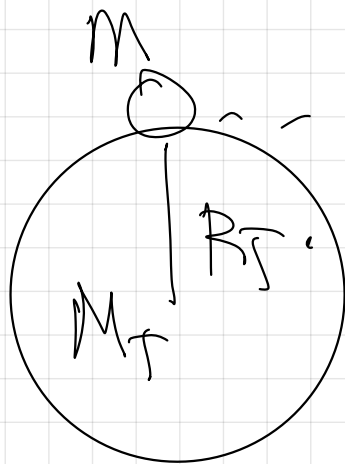
$$v_e^2 = \frac{2 G M_T}{R_T}$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2 G M_T}{R_T}}$$

31.- Calcular la velocidad de escape de un cuerpo situado en la superficie terrestre
 $g=9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, $R_T= 6400 \text{ Km}$

$$0 \dots \dots E_{\text{total}} = 0 \text{ J}$$

$$E_{\text{total}} = 0 \text{ J}$$



$$E_{\text{total}} = \cancel{0} G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T}$$

$$E_G = \frac{1}{2} M v_e^2$$

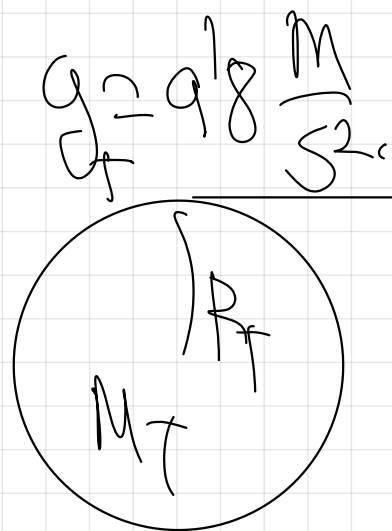
$$E_M = E_{M\infty} \rightarrow 0$$

$$E_P + E_G = E_{P\infty} + E_{G\infty} \rightarrow 0$$

$$-G \cdot \frac{M_T \cdot M}{R_T} + \frac{1}{2} M \cdot v_E^2 = 0 + 0,$$

$$\frac{1}{2} M v_E^2 = G \cdot \frac{M_T \cdot M}{R_T},$$

$$v_E = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9.8 \cdot 6.4 \cdot 10^6}{R_T}} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot 6.4 \cdot 10^6} =$$



$$g = \frac{G \cdot M_T}{R_T^2}$$

$$= 11.200 \frac{m}{s}$$

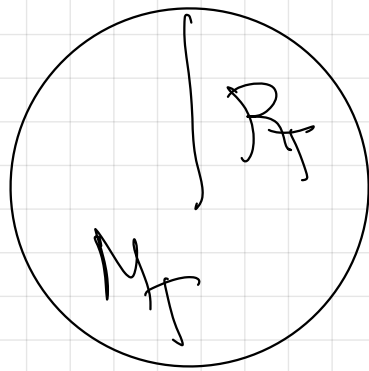
$$G \cdot M_T = g_T \cdot R_T^2$$

$$v_e = 11.200 \frac{m}{s}$$

$$\left(11.2 \frac{km}{s} \right)$$

$v_c = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$

$300000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$



Agujero
 negro

$11\frac{1}{2} \frac{\text{km}}{\text{s}}$

$$G_r = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

$$G = 3 \cdot 10^8 \frac{M}{s}$$

$$C = \sqrt{\frac{2GM}{R_s}}$$

$$C^2 = \frac{2GM_s}{R_s}$$

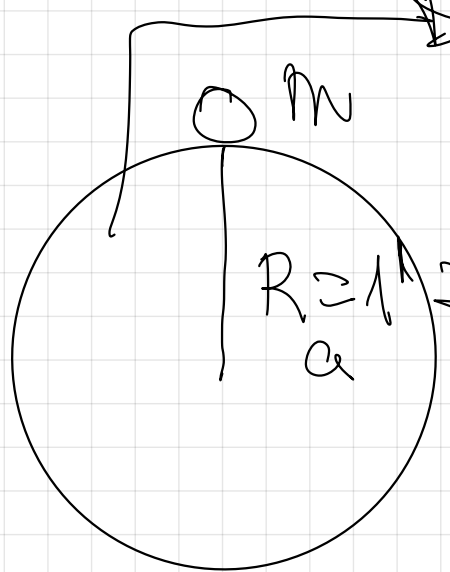
$$R_s = \frac{2GM_s}{C^2}$$



32.- Un astronauta, con 100 Kg de masa (incluyendo el traje) está en la superficie de un asteroide de forma prácticamente esférica, con 2,4 Km de diámetro y densidad media de $2,2 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$.

- a) ¿Con qué velocidad debe impulsarse el astronauta para abandonar el asteroide?
- b) ¿Cómo se denomina rigurosamente tal velocidad?
- c) El astronauta carga ahora con una mochila de 40 Kg. ¿Le será más fácil salir del planeta. Razónese

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}$$



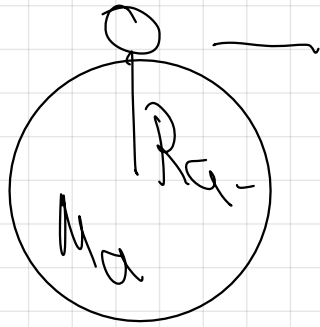
$\rho = 2,2 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot \frac{1 \text{ Kg}}{10^3 \text{ g}} \cdot \frac{10^6 \text{ cm}^3}{1 \text{ m}^3}$

$\rho = 2200 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$

$\infty \rightarrow$

$$E_{px} = 0$$

$$E_{px} = 0.$$



$$E_{pa} = G \cdot \frac{M_a \cdot m}{R_a}$$

$$E_{ca} = \frac{1}{2} m \cdot v_e^2$$

$$E_{ma} = E_{max}$$

$$= G \cdot \frac{M_a \cdot m}{R_a} + \frac{1}{2} m v_e^2 = 0 + 0.$$

$$\frac{1}{2} \cancel{M} v_e^2 = G \cdot \frac{M_a - M}{R_a} \quad \varphi = 2200 \frac{\text{cm}}{\text{m}}$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2G \cancel{M_a}}{R_a}}$$

$\rho_a \Rightarrow \cancel{M_a}$
 v_a

$$M_a = \rho_a \cdot V_a$$

$$\cancel{M_a} = \rho_a \frac{4}{3} \pi R_a^3$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2G \rho_a \frac{4}{3} \pi R_a^3}{R_a}}$$

$$v_e = \sqrt{2G \cdot f_a \cdot \frac{4}{3} \pi R_a^3}$$

c) la v_e es
independiente
de la masa
m del
astronauta

$$v_e = \sqrt{2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 2200 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot (1200)^2}$$

$$v_e = 133 \frac{m}{s}$$

b)

* velocidad de
escape

c) No le será ni más fácil
ni más difícil salir del
planeta.

49.- La masa de una estrella es de $2 \cdot 10^{31}$ Kg. Si en un momento dado, la estrella se contrae debido a la presión gravitatoria, determinar el radio por el que la estrella se convierte en un agujero negro y la densidad del mismo.

$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}$, velocidad de la luz en el vacío $c = \underline{\underline{3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}}$

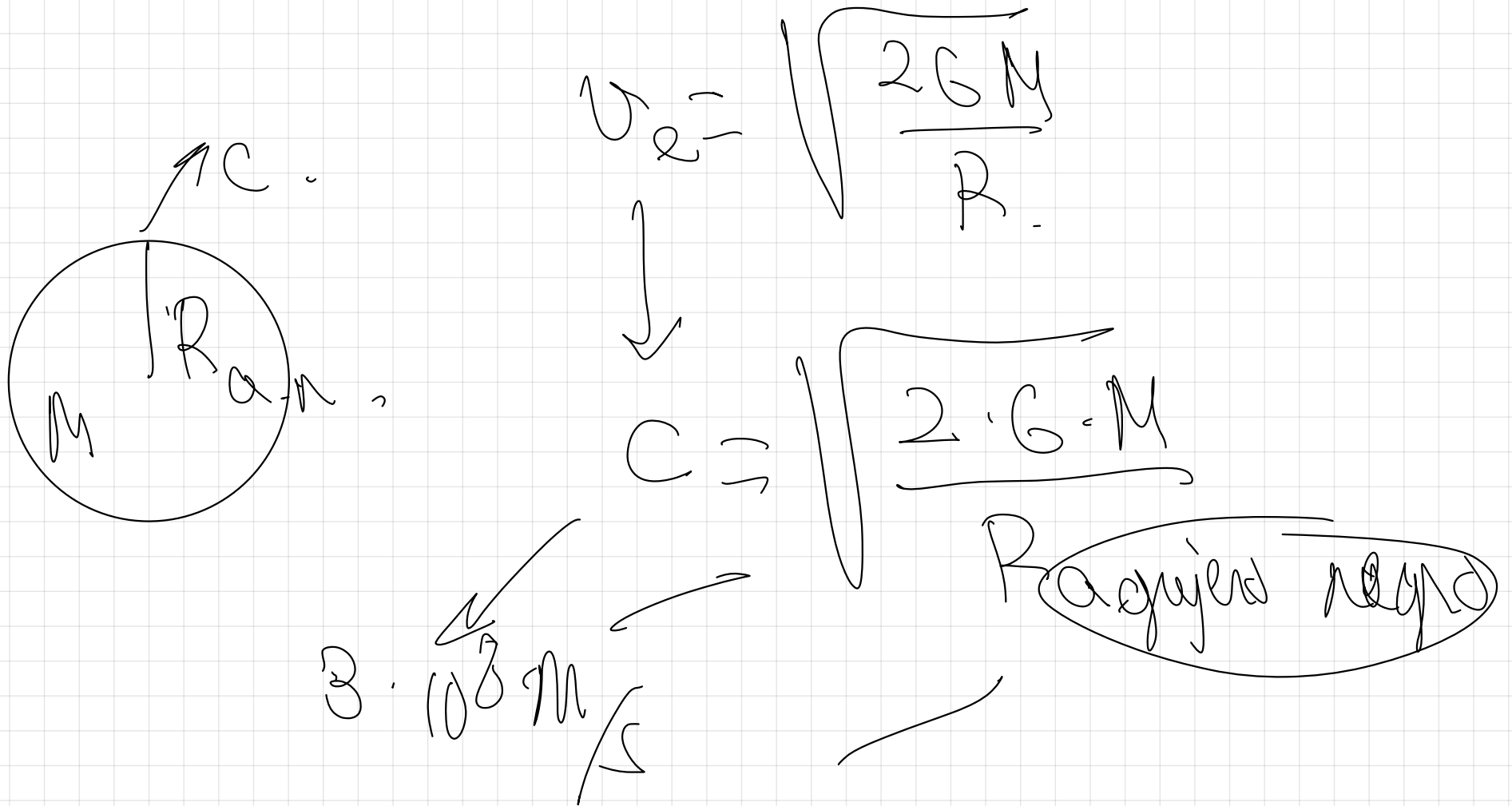


Diagram illustrating the formation of a black hole from a star. A circle represents the star with mass M and radius R . An arrow labeled c points upwards from the star. The escape velocity equation is written as $v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$. The speed of light c is equated to the escape velocity, leading to the equation $c = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{R}}$. The resulting radius is labeled "Radio agujero negro". The value $3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ is written below the diagram, with an arrow pointing to the c in the equation.

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$
$$c = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{R}}$$

Radio agujero negro

$3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

$$c^2 = \frac{2GM}{R_{an}}$$

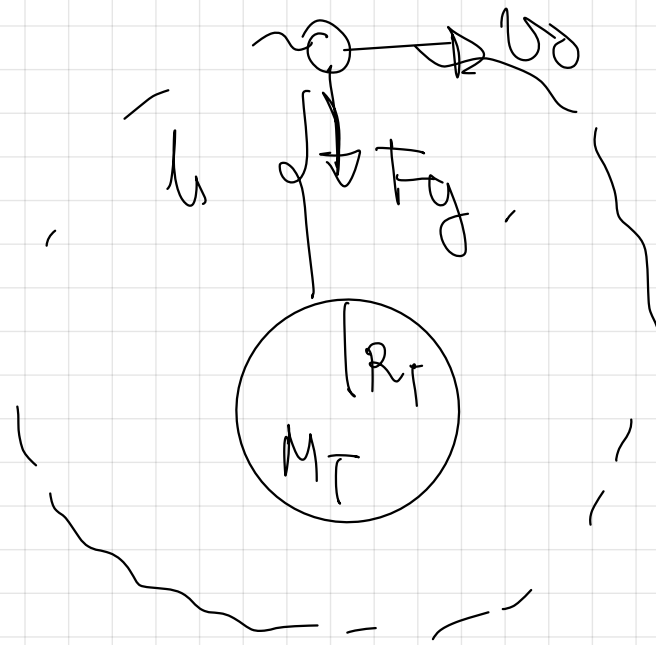
$$R_{an} = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{31}}{(3 \cdot 10^8)^2}$$

$$R_{an} = 2.97 \cdot 10^4 \text{ m}$$

densidad
↗ muy alta.

$$\rho_{an} = \frac{M}{V_{an}} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R_{an}^3} = \frac{2 \cdot 10^{31} \text{ Kg}}{\frac{4}{3}\pi \cdot (2.97 \cdot 10^4)^3} = 1.87 \cdot 10^{17} \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$$

- 35.- Un satélite se encuentra orbitando en torno a la Tierra. Determine una relación entre su velocidad de escape desde ese punto y su velocidad de orbitación en torno a la Tierra.



$$F_g = F_a$$

$$- - \infty E_{p\infty} = 0 - E_{c\infty} = 0$$

$$E = -G \frac{M \cdot m}{(R_T + h)}, E_{ph}$$

Conservación E_m .

$$E_{ph} + E_{ch} = E_{p\infty} + E_{c\infty}$$

$$G \cdot \frac{M_T \cdot R_A}{(R_T + h)^2} = m \cdot \frac{v_o^2}{(\cancel{R_T + h})}$$

$$v_o = \sqrt{G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)}}$$

$$-G \cdot \frac{M_T \cdot m}{(R_T + h)} + \frac{1}{2} m v_o^2 = 0 + 0$$

$$\frac{1}{2} m v_o^2 = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{(R_T + h)}$$

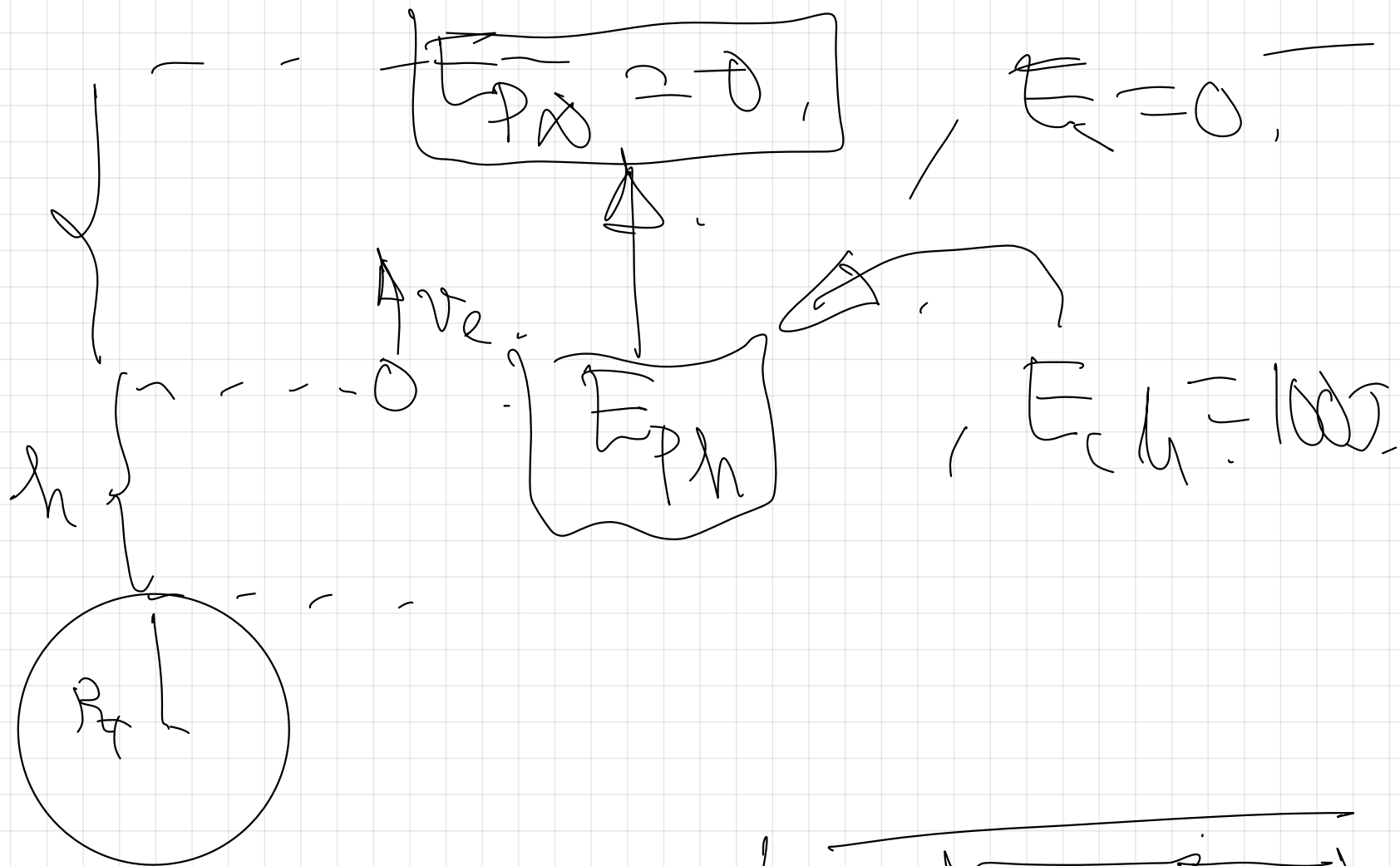
$$v_o = \sqrt{2 \cdot G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)}}$$

$$\frac{v_o}{v_o} = \frac{\sqrt{2 \cdot \cancel{G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)}}}}{\sqrt{\cancel{G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)}}}}$$

$$v_o = \sqrt{2} v_o$$

0 J

100 J

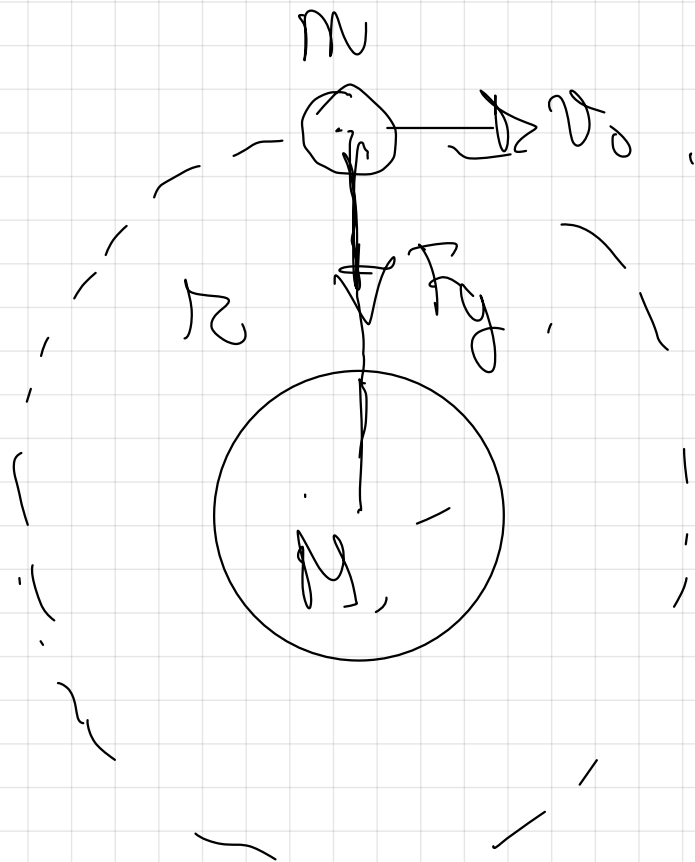


$$v_e = \sqrt{2G \frac{M_T}{CRH}}$$

pag 14 . Pregunta 2.

Energía mecánica orbital de un satélite.

Satélite que orbita,



$$E_m = E_p + E_{G \text{ órbita}}$$

órbita órbita órbita

$$E_{m \text{ órbita}} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r} + \frac{1}{2} m \cdot \boxed{v_0^2}$$

↙

$$F_g = F_n$$

$$G \cdot \frac{M \cdot M}{r^2} = M \cdot \frac{v_0^2}{r}$$

$$v_0 = \sqrt{G \cdot \frac{M}{r}}$$

Condición de órbita

$$E_{\text{órbita}} = -G \cdot \frac{M \cdot M}{r} + \frac{1}{2} M \left(G \cdot \frac{M}{r} \right)$$

$$E_{\text{órbita}} = -G \cdot \frac{M \cdot M}{r} + \frac{1}{2} G \cdot \frac{M \cdot M}{r}$$

$$E_{\text{órbita}} = G \cdot \frac{M \cdot M}{r} \left(-1 + \frac{1}{2} \right)$$

$$E_{\text{órbita}} = -\frac{1}{2} G \cdot \frac{M \cdot M}{r}$$

$$\boxed{E_{\text{órbita}} = -G \cdot \frac{M \cdot M}{2r}}$$

$$E_{\text{pot}} = G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$$

Potencia
 cuando
 distancia $\rightarrow$ r

$$E_{\text{pot}} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$$

Potencia
 cuando
 distancia $\rightarrow$ r

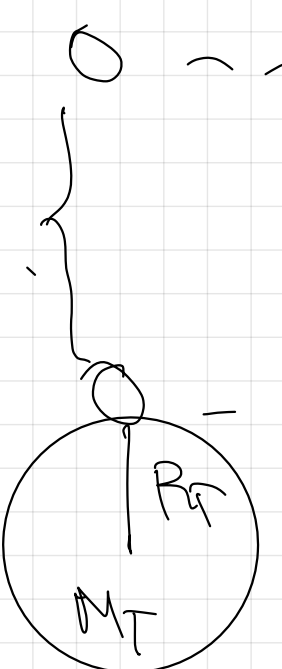
El significado físico del
 signo negativo es que
 el cuerpo permanece
 ligado al campo
 gravitatorio de M .

38.- Se eleva un cuerpo de 200 Kg desde la superficie de la Tierra hasta una altura de 5000 Km.

- Explicar las transformaciones energéticas que tienen lugar y calcular el trabajo mínimo necesario (o energía cinética que habrá que suministrarle).
- Si quisiéramos elevar a este cuerpo de manera que permaneciese orbitando a dicha altura. ¿Qué trabajo o energía cinética hubiese sido preciso suministrarle?
- Explicar cómo variarán las energías potencial, cinética y mecánica mientras el cuerpo permanece orbitando
- ¿Cuánto valdrá el trabajo que realiza la fuerza gravitatoria sobre el cuerpo orbitando durante un semiperíodo?

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}, R_T = 6400 \text{ Km}, M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ Kg}$$

Q)



$h = 5000 \text{ Km}$

$E_{Ph} = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{(R_T + h)}$

$E_{Pt} = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T}$

$E_{Ch} = \frac{1}{2} m v^2$
(Solo elevar, se para)

$E_{CT} ?$

Conservación de la Em.

¿? $E_{mf} = E_{mh}$

$E_{pf} + E_{cf} = E_{ph} + E_{ch}$

¿? ¿?

$G \cdot \frac{M_T \cdot M}{R_T} + E_{cf} = G \cdot \frac{M_T \cdot M}{(R_T + h)}$

¿? ¿?

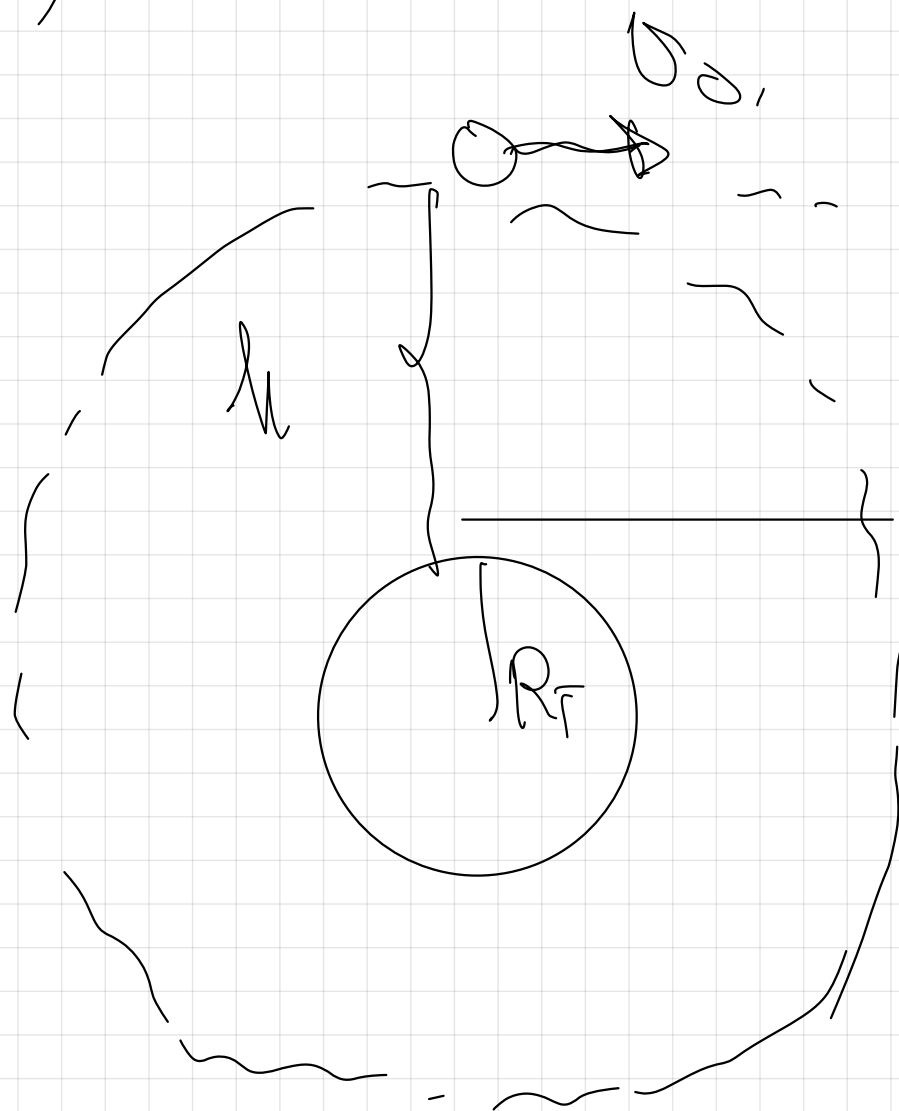
$E_{cf} = G \cdot \frac{M_T \cdot M}{R_T} - G \cdot \frac{M_T \cdot M}{(R_T + h)}$

$$E_G = G \cdot M_T \cdot M \cdot \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{(R_T + h)} \right)$$

$$E_G = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 200 \left(\frac{1}{6.4 \cdot 10^6} - \frac{1}{(6.4 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^6)} \right)$$

$$\boxed{E_G = 5.52 \cdot 10^9 \text{ J}}$$

b)



$$E_{p_h} = -G \cdot \frac{M_T \cdot M}{(R_T + h)} / E_{c_h} = \frac{1}{2} M \cdot v^2$$

$$E_{p_T} = -G \cdot \frac{M_T \cdot M}{R_T}$$

$$E_c ?$$

Conservação da Em.

$$E_{MT} = E_{PT} + E_{CT} = -G \cdot \frac{M_T \cdot M}{R_T} + E_{CT}$$

$$= -G \cdot \frac{M_T \cdot M}{R_T} + E_{CT}$$

$$E_{MT} = E_{P\ddot{o}rta} + E_{C\ddot{o}rlete}$$

$$= -G \cdot \frac{M_T \cdot M}{(R_T + h)} + \frac{1}{2} M v_{\text{orbit}}^2$$

$$= -G \cdot \frac{M_T \cdot M}{2(R_T + h)} \quad E_{\text{orbit}}$$

$$E_M = -G \cdot \frac{M \cdot M}{2(R_T + h)}$$

E_M orbit
de un
satelita

$$E'_{cf} = 2 \cdot G \cdot \frac{M_T \cdot M}{R_T} = G \cdot \frac{M_T \cdot M}{2(R_T + h)}$$

$$E'_G = G \cdot M_T \cdot M \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2(R_T + h)} \right)$$

$$E'_{cf} = W = 6'67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 200 \left(\frac{1}{6'4 \cdot 10^6} - \frac{1}{2 \cdot (6'4 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^6)} \right)$$

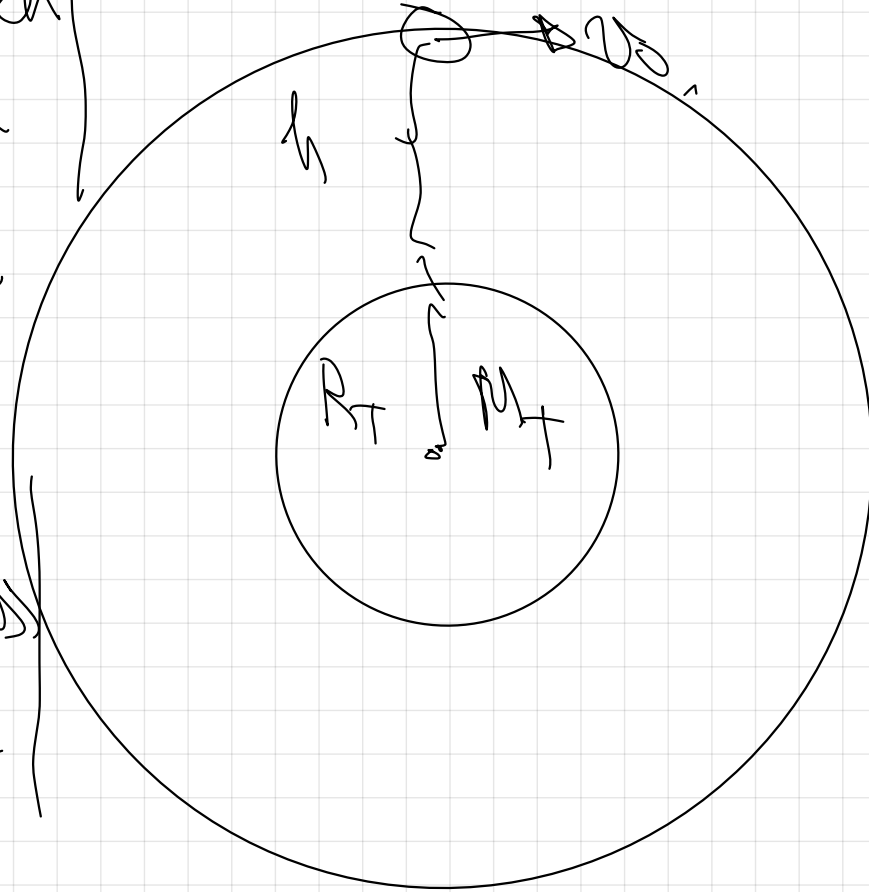
$$E'_{cf} = W = 9'04 \cdot 10^9 \text{ J}$$

→ La E_c suministrada es mayor que en el apartado anterior.

apartado c)

Si el satélite permanece en la misma órbita.

Estudiamos las variaciones energéticas.



$$E_p = -G \cdot \frac{M_T m}{(R_T + h)}$$

Distancia
centro - centro
la misma
la E_p no
varia.

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v_0^2$$

Velocidad en módulo
 E_c no varía.

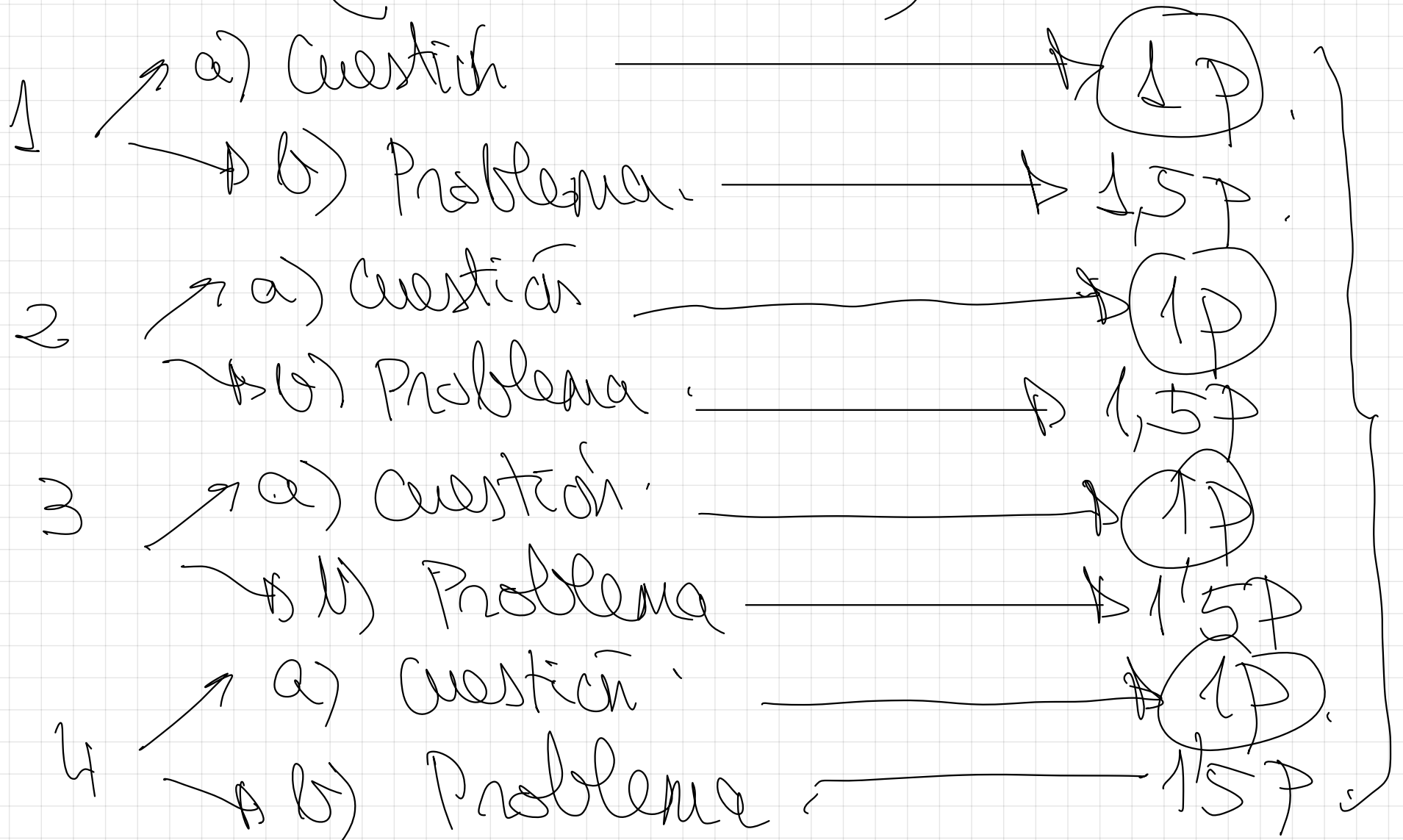
$$E_m = E_p + E_c = \text{cte.}$$

$\downarrow$
 no varía

$\downarrow$
 no varía

Si el satélite permanece en la misma órbita, se conserva la energía mecánica (actúa exclusivamente la fuerza gravitatoria bajo cuya acción se conserva la E_m , es una fuerza conservativa).

Modelo de examen para todo el curso, (modelo PEVAV)



1'5 h de tempo

top.

lunes 20 - Octubre $\Rightarrow$ Campo
gravitatorio.

lunes 24 - Noviembre $\Rightarrow$ Campo
elctrico.

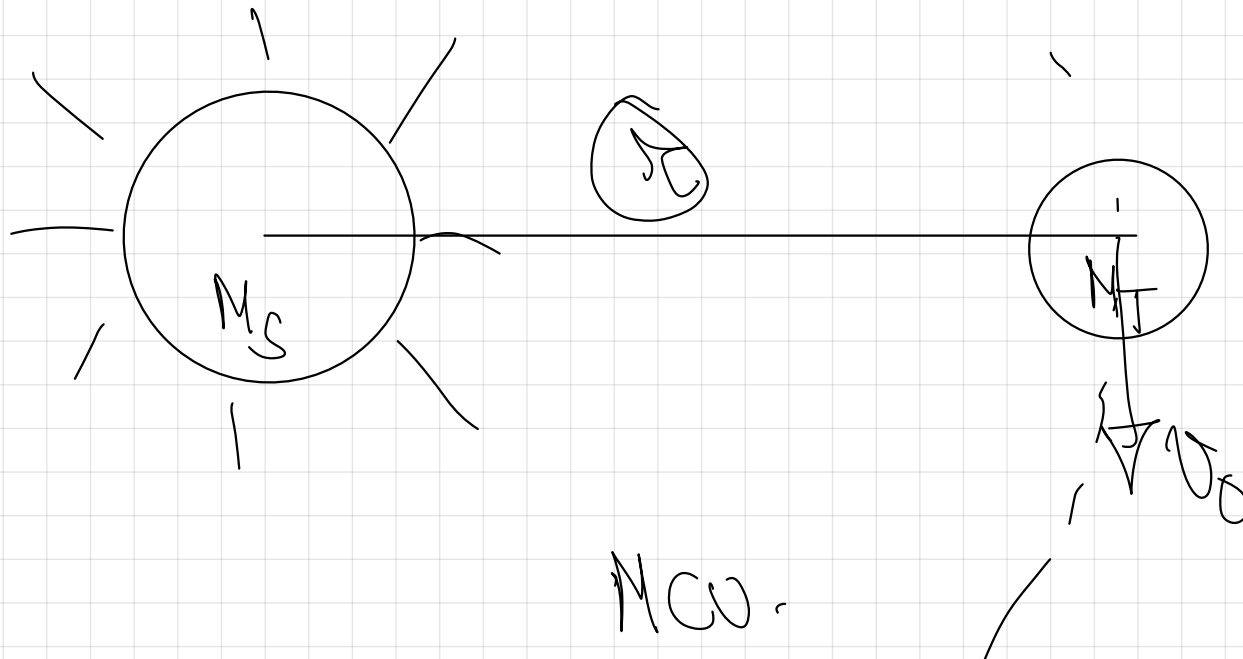
180

(09-E) Suponga que la órbita de la Tierra alrededor del Sol es circular de radio $1,5 \cdot 10^{11}$ m.

a) Calcule razonadamente la velocidad de la Tierra y la masa del Sol.

b) Si el radio orbital disminuyera en un 20%, ¿cuáles serían el período de revolución y la velocidad orbital de la Tierra?

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$$



$$F_g = F_n$$

$$G \cdot \frac{M_S \cdot M_T}{R^2} = \frac{M_T v^2}{R}$$

$$v = \sqrt{G \cdot \frac{M_S}{R}}$$

$$v^2 = G \cdot \frac{M_S}{R}$$

~~⊗~~

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi R}{T} = \frac{m}{s}$$

$\Rightarrow 365 \text{ días} \Rightarrow S$

$R_g = \frac{v^2 R}{G}$

Condición de orbitación
que aparece T

$$G \frac{M_s M}{r^2} = \frac{M}{r} \frac{v^2}{r}$$

$$G \cdot \frac{M_S}{r} = \left(\frac{2\pi r}{T} \right)^2$$

$$G \cdot \frac{M_S}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$$

$$G \cdot M_S \cdot T^2 = 4\pi^2 r^3$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{G \cdot M_S}} \rightarrow (0.8r)^3$$

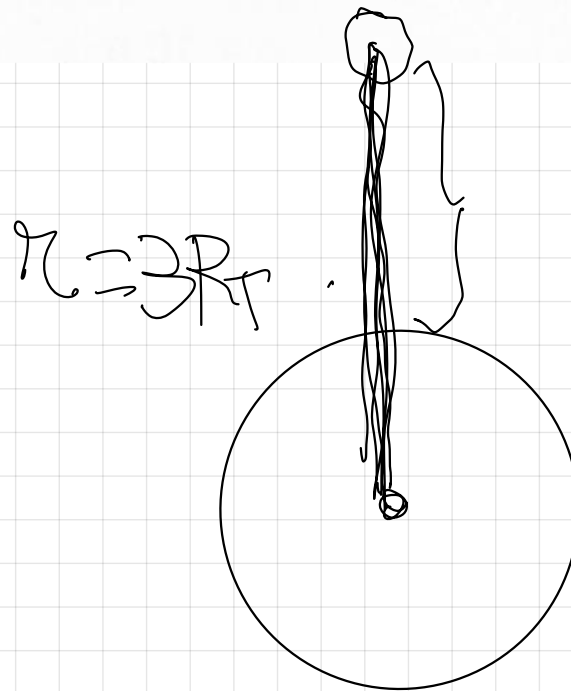
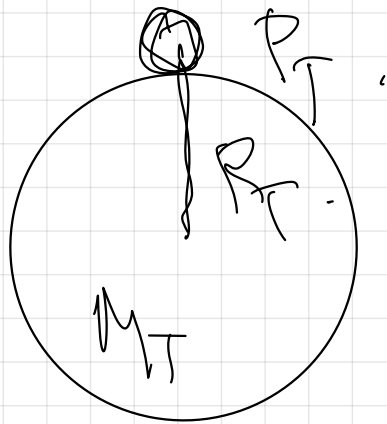
$$g = 10 \text{ m s}^{-2}$$

76 (08-E) Un satélite del sistema de posicionamiento GPS, de 1200 kg, se encuentra en una órbita circular de radio $3 R_T$.

a) Calcule la ~~variación~~ que ha experimentado el peso del satélite respecto del que tenía en la superficie terrestre.

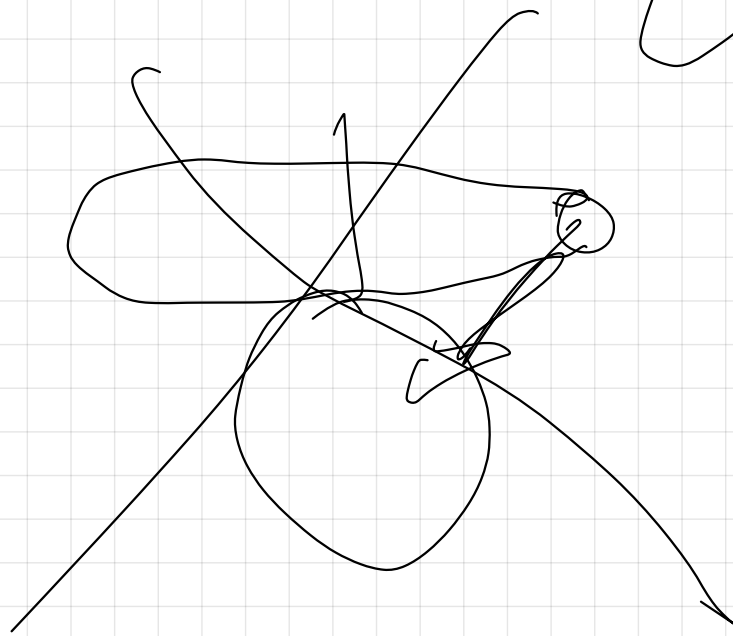
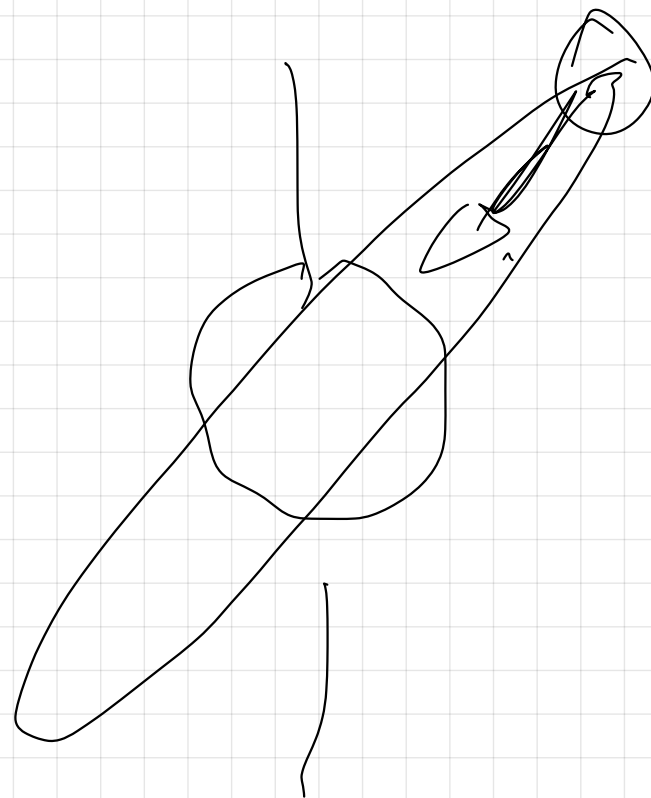
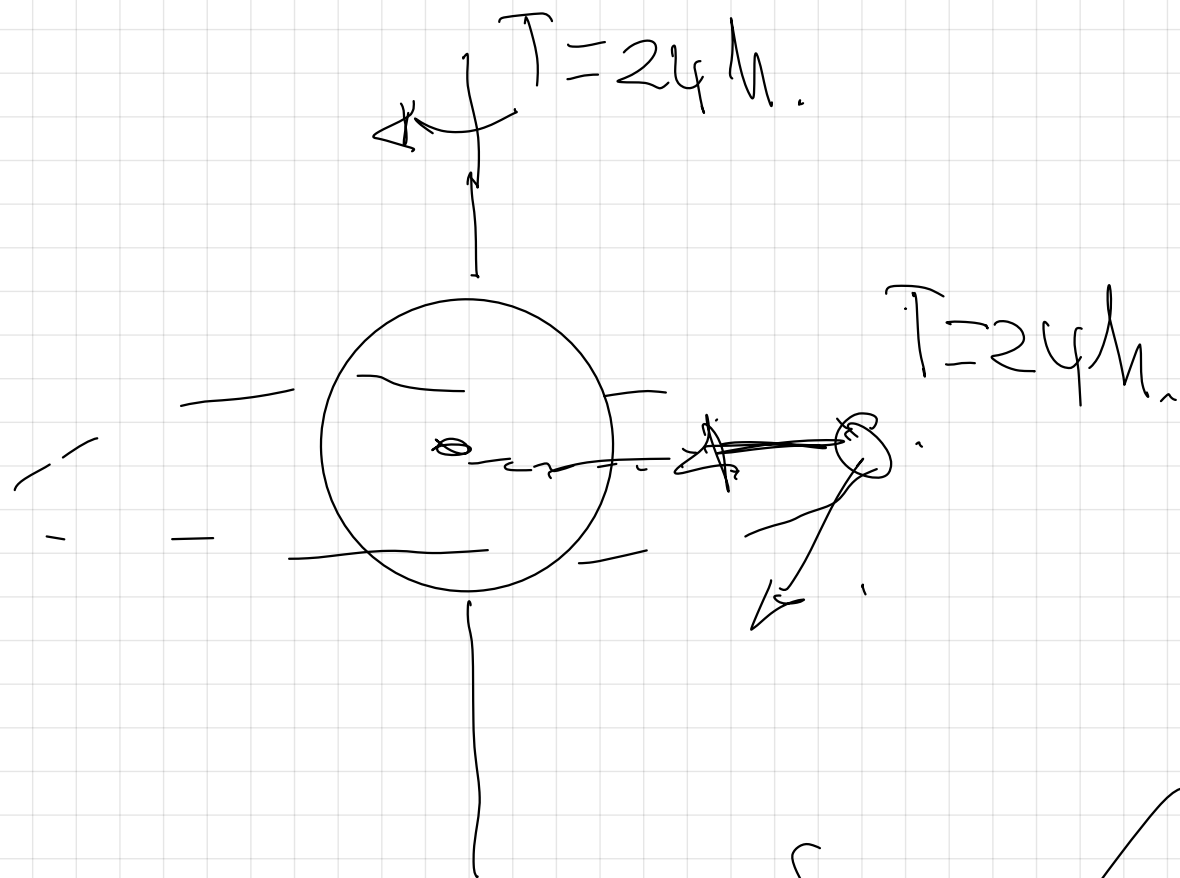
b) Determine la velocidad orbital del satélite y razone si la órbita descrita es geoestacionaria.

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}; M_t = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}; R_t = 6400 \text{ km}$$



$$P_T = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T^2}$$

$$P_h = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{(3R_T)^2}$$

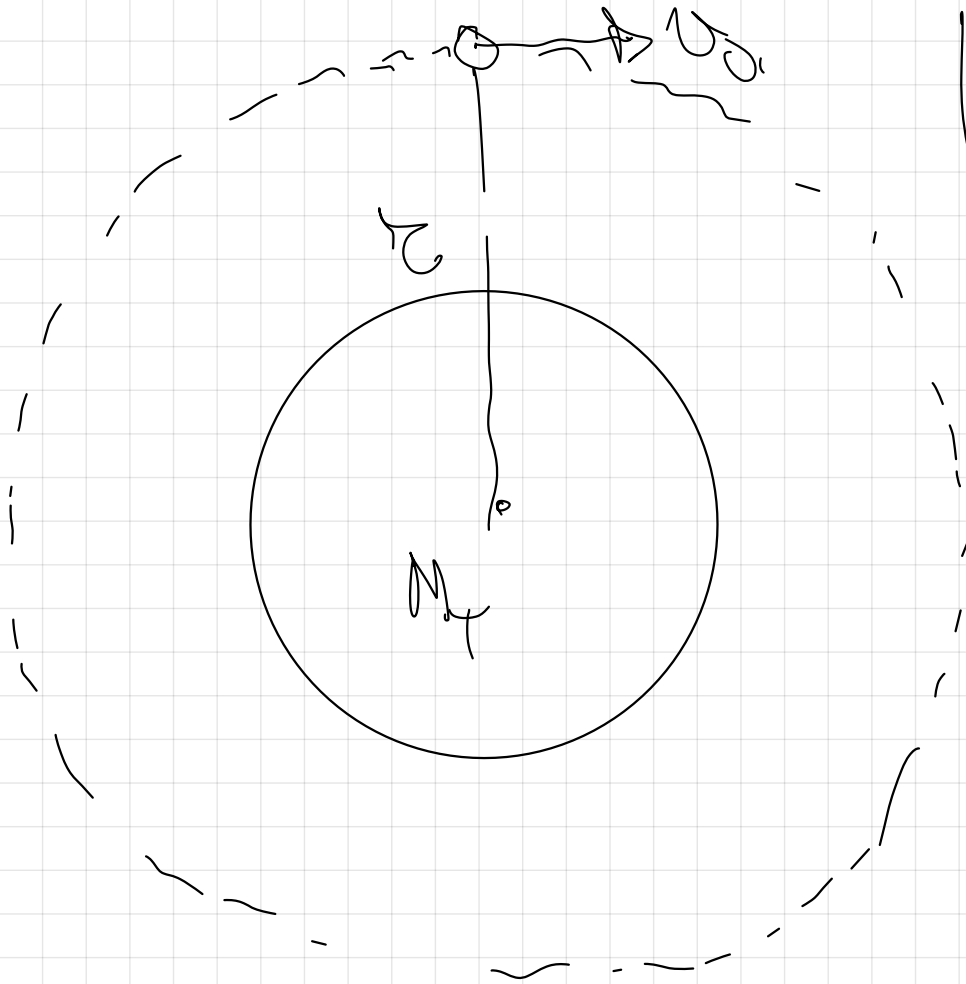


ORBITANDO.

$$E_{\text{pot}} = -G \frac{M_T \cdot m}{r}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v_{\text{orbital}}^2$$

$$E_{\text{m}} = G \frac{M_T \cdot m}{2r}$$



Cambio de órbita.

Mensor negativo.

E_m

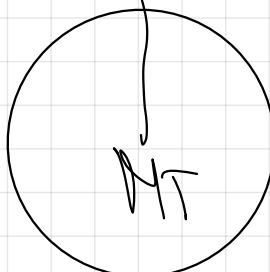


$$E_m = \left(\leftarrow \odot \right) \cdot \frac{M_T \cdot M}{2k}$$



$$E_m = \left(\leftarrow \odot \right) \cdot \frac{M_T \cdot M}{2k}$$

obter



$$E_m + \left(\leftarrow \odot \right) \cdot \frac{M_T \cdot M}{2k}$$

Con el cambio de órbita la E_m
no se conserva.



41.- Un satélite artificial de 100 Kg de masa describe una órbita circular alrededor de la Tierra a una altura de 500 Km de la superficie terrestre.

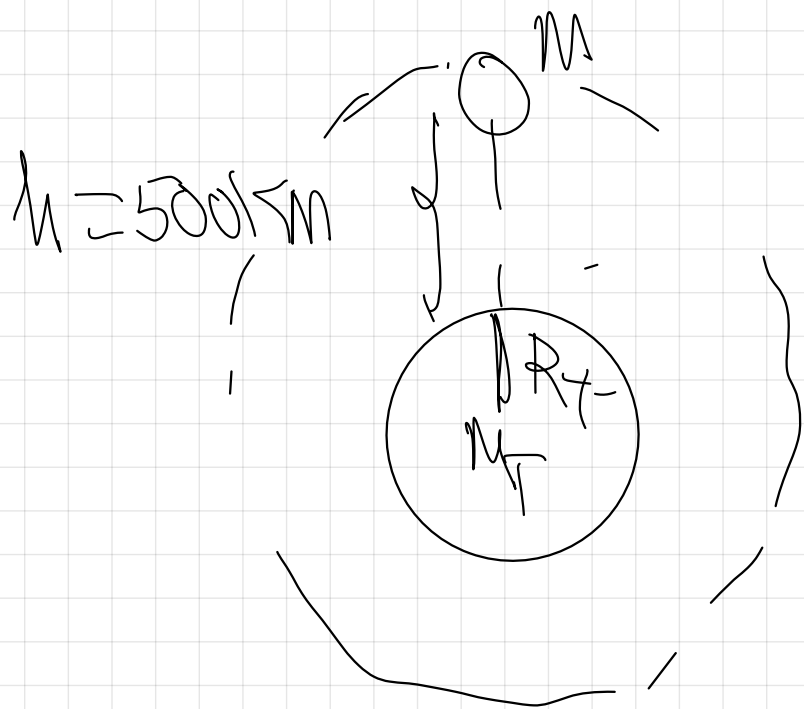
a) Calcular la energía cinética, la energía potencial y la energía mecánica del satélite en la citada órbita.

b) Si quisiésemos transferir ese satélite de forma que orbitase a una altura de 1690 Km sobre la superficie terrestre, calcular el trabajo que sería necesario realizar.

c) Explicar las variaciones que habrán experimentado la energía potencial, la energía cinética y la energía mecánica en dicho tránsito.

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}, R_T = 6370 \text{ Km}, M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ Kg}$$

energía externa aportada



$$E_p = -G \frac{M_T m}{(R_T + h)}$$

$$= -6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{598 \cdot 10^{24} \cdot 100}{(637 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5)}$$

$$= -5.8 \cdot 10^9 \text{ J}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$= \frac{1}{2} m \cdot \left(\sqrt{G \frac{M_T}{(R_T + h)}} \right)^2$$

$$F_g = F_n.$$

$$G \cdot \frac{M}{(R_T + h)^2} = \mu \cdot \frac{v_0^2}{(R_T + h)}$$

$$v_0 = \sqrt{G \frac{M}{(R_T + h)}}$$

$$E_c = \frac{1}{2} G \frac{M_T \cdot M}{(R_T + h)}$$

$$E_c = 2.9 \cdot 10^9 \text{ J.}$$

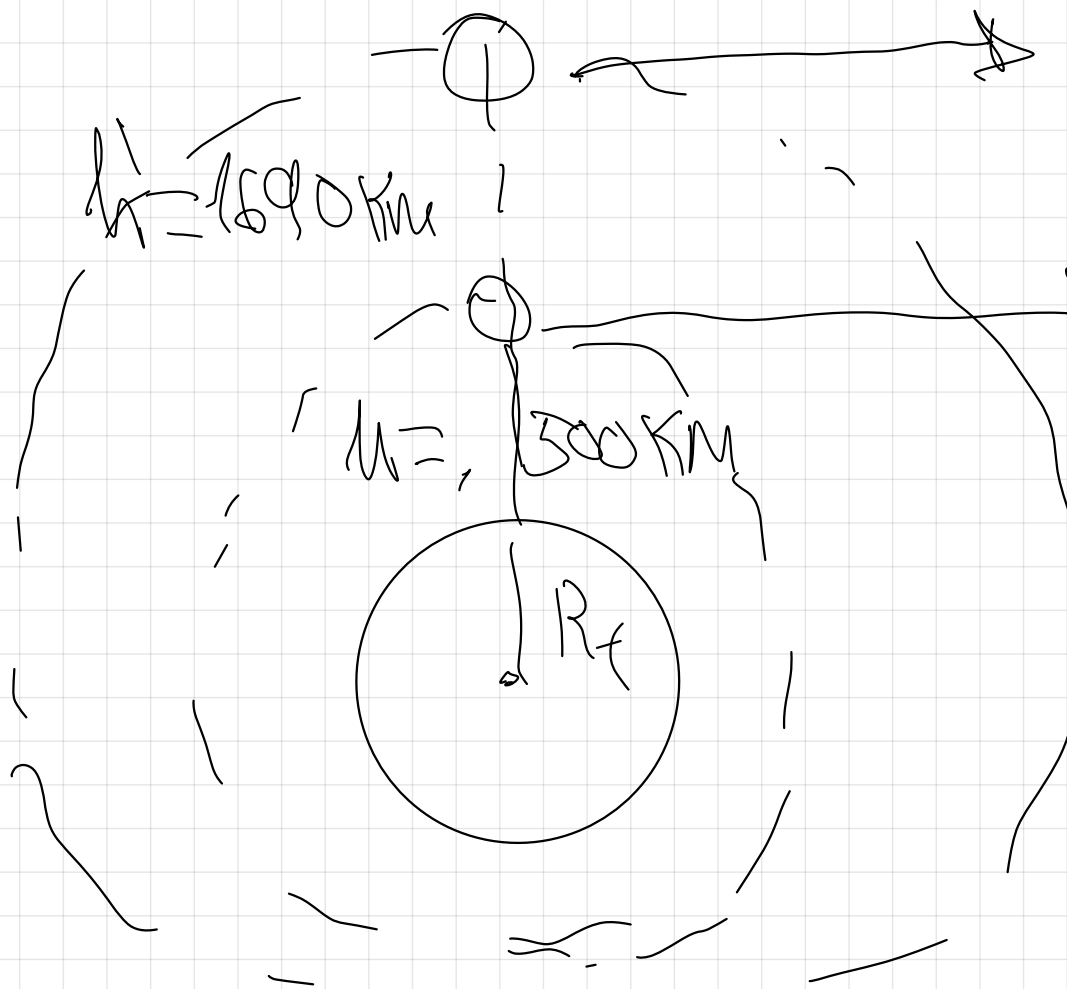
$$E_m = E_p + E_c.$$

$$E_m = -5 \cdot 10^9 \text{ J} + 2 \cdot 9 \cdot 10^9 \text{ J}$$

$$E_M = -219 \cdot 10^9 \text{ J}$$

$$E_c = -G \cdot \frac{M \cdot M}{2(R_f + h)}$$

$$F_m = 120 \cdot 10^9 \text{ J}$$



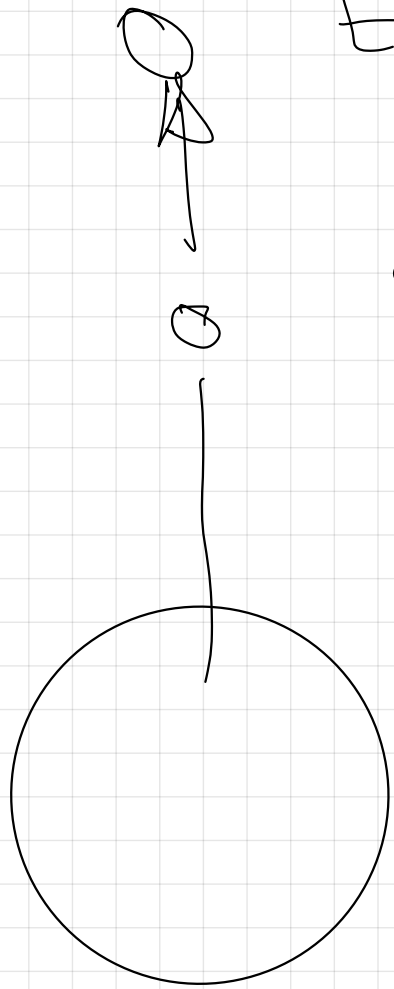
$$E_m' = -6.67 \cdot 10^{-11} \frac{5.98 \cdot 10^{24} \cdot 100}{2(6.37 \cdot 10^6 + 1.59 \cdot 10^6)}$$

$$E_m' = -2.47 \cdot 10^9 \text{ J}$$

$$E_m + E_{\text{ext}} = E_m'$$

$$-2.9 \cdot 10^9 + E_{\text{ext}} = -2.47 \cdot 10^9 \text{ J}$$

$$E_{\text{ext}} = 4.3 \cdot 10^8 \text{ J}$$



$$E_m = -G \cdot \frac{M \cdot m}{2r} \Rightarrow E_m = \text{constant}$$

$$E_p = -G \cdot \frac{M \cdot m}{2r} \Rightarrow E_p = \text{constant}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \Rightarrow E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

$$v = \sqrt{G \frac{M}{2r}}$$

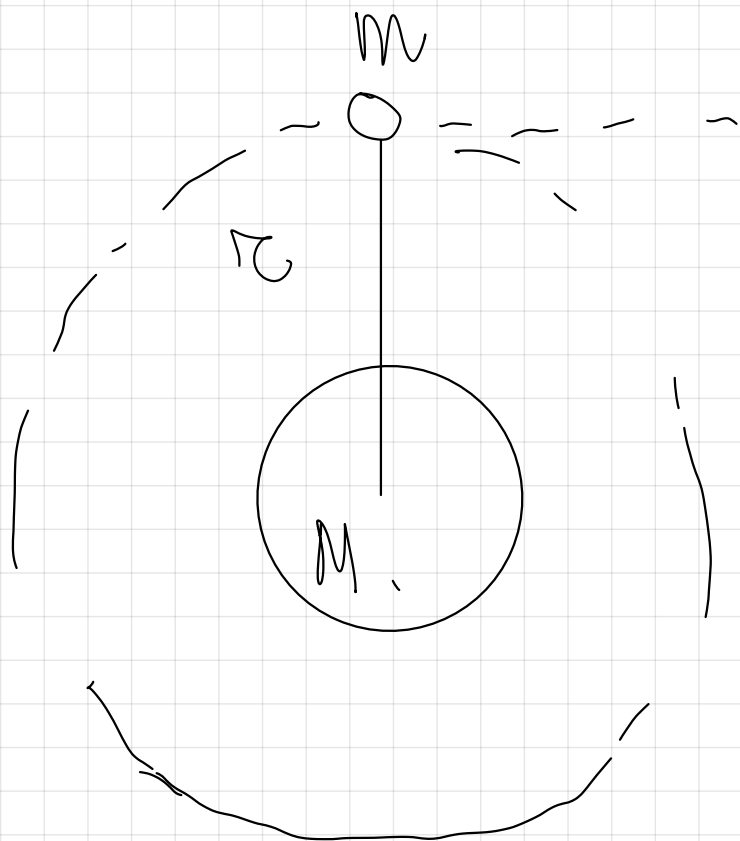


232

(17-R) a) Indique razonadamente la relación que existe entre las energías cinética y potencial gravitatoria de un satélite que gira en una órbita circular en torno a un planeta.

b) La masa del planeta Júpiter es, aproximadamente, 300 veces la de la Tierra y su diámetro 10 veces mayor que el terrestre. Calcule razonadamente la velocidad de escape de un cuerpo desde la superficie de Júpiter.

$$R_T = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}; g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$$



$$E_{\text{pot.}} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$$

$$E_{\text{cin.}} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\sqrt{G \frac{M}{r}} \right)^2$$

$$v = \sqrt{G \frac{M}{r}}$$

$$E_{\text{cin.}} = \frac{1}{2} G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$$

$$E_{\text{potential}} = -G \frac{M \cdot M}{r}$$

$$\frac{E_{\text{circular}}}{E_{\text{potential}}} = \frac{\frac{1}{2} G \frac{M \cdot M}{r}}{-G \frac{M \cdot M}{r}}$$

$$E_{\text{circular}} = -\frac{1}{2} E_{\text{potential}}$$

Orbita circulara: $E_c = \frac{1}{2} |E_p|$

193 (11-R) Un satélite de 200 kg describe una órbita circular alrededor de la Tierra y su energía cinética es de $5,3 \cdot 10^9$ J.

a) Deduzca la expresión del radio de la órbita y calcule su valor y el de la energía mecánica del satélite.

b) Determine la velocidad de escape del satélite desde su posición orbital.

$$G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2} ; M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

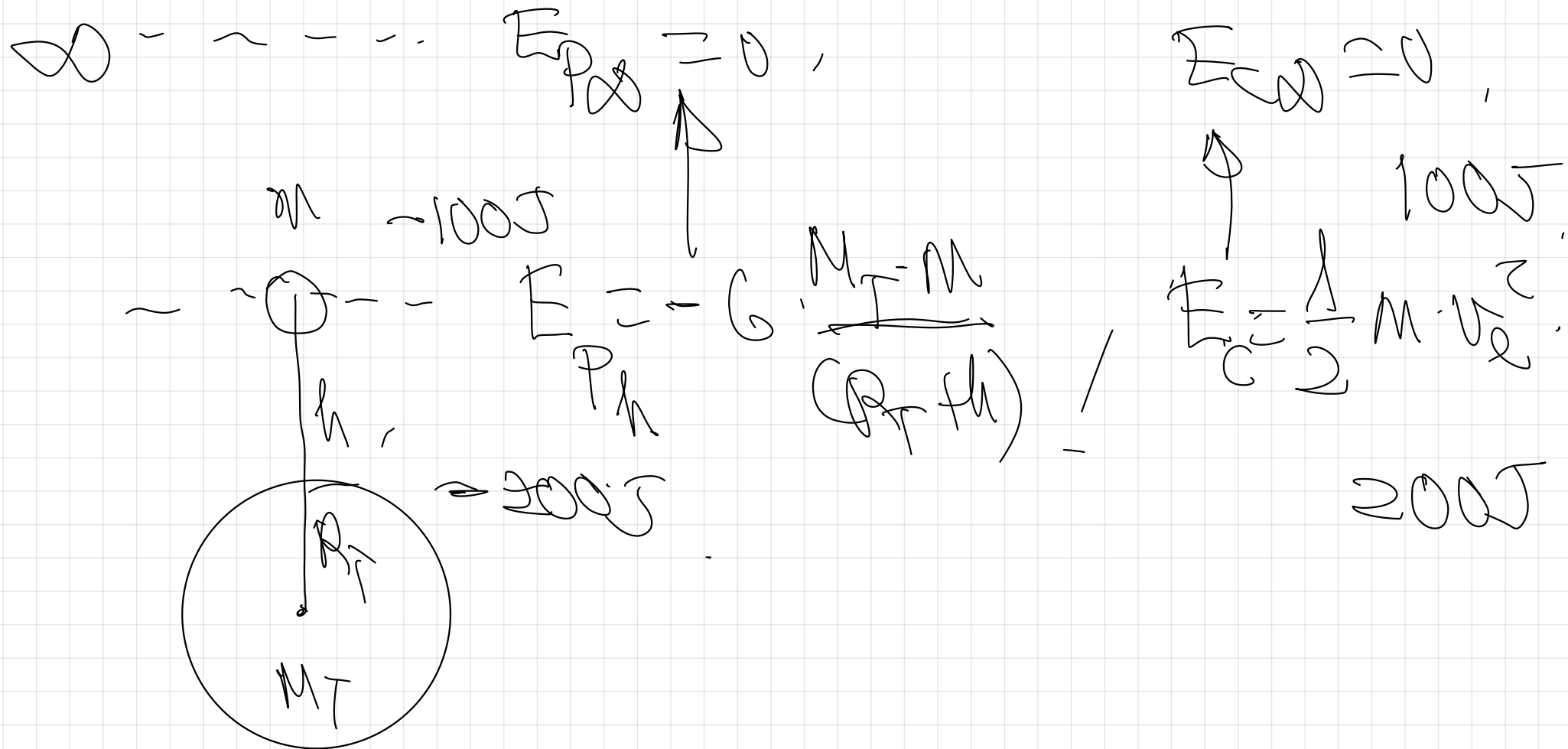


Diagram and calculations:

- Diagram shows Earth with mass M_T and radius R_T . A satellite of mass m is at a distance h from the center.
- Energy values:
 - $E_p = -200 \text{ J}$
 - $E_k = 100 \text{ J}$
 - $E = -100 \text{ J}$
- Equations:
 - $E = E_k + E_p$
 - $E = -G \frac{M_T m}{(R_T + h)}$
 - $E_k = \frac{1}{2} m v_e^2$
 - $E = -\frac{1}{2} m v_e^2$

$$E_{\text{kin}} = E_{\text{pot}}.$$

$$-G \cdot \frac{M \cdot m}{(R_T + h)} + \frac{1}{2} m v_e^2 = 0 + 0.$$

$$\frac{1}{2} m v_e^2 = G \cdot \frac{M \cdot m}{(R_T + h)}.$$

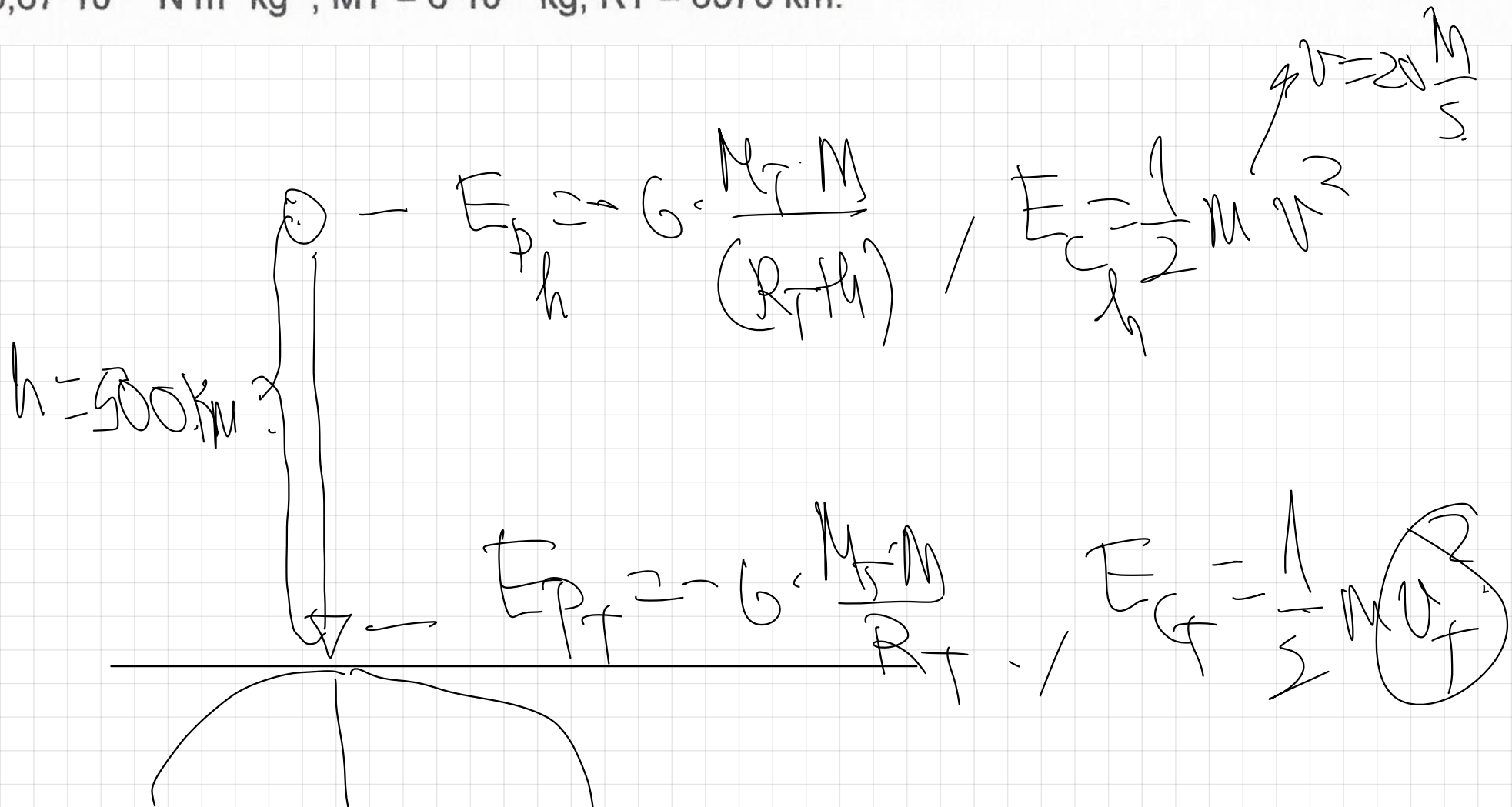
$$v_e = \sqrt{\frac{2 G M}{R_T + h}}.$$

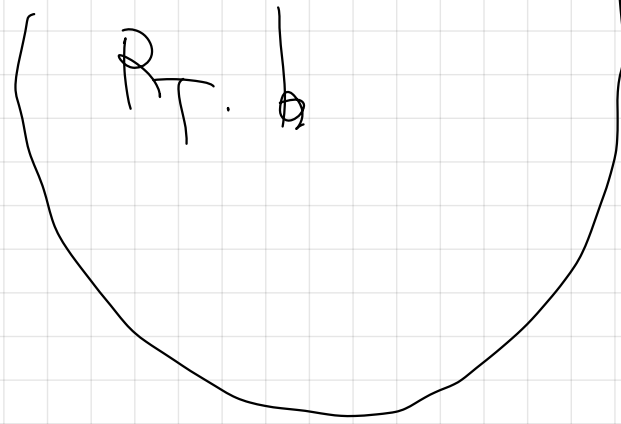
198 (12-R) Un meteorito de 400 kg que se dirige en caída libre hacia la Tierra, tiene una velocidad de 20 m s^{-1} a una altura $h = 500 \text{ km}$ sobre la superficie terrestre. Determine razonadamente:

a) El peso del meteorito a dicha altura.

b) La velocidad con la que impactará sobre la superficie terrestre despreciando la fricción con la atmósfera.

$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$; $M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; $R_T = 6370 \text{ km}$.





- 232 (17-R) a) Indique razonadamente la relación que existe entre las energías cinética y potencial gravitatoria de un satélite que gira en una órbita circular en torno a un planeta.
- b) La masa del planeta Júpiter es, aproximadamente, 300 veces la de la Tierra y su diámetro 10 veces mayor que el terrestre. Calcule razonadamente la velocidad de escape de un cuerpo desde la superficie de Júpiter.
- $R_T = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$; $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$

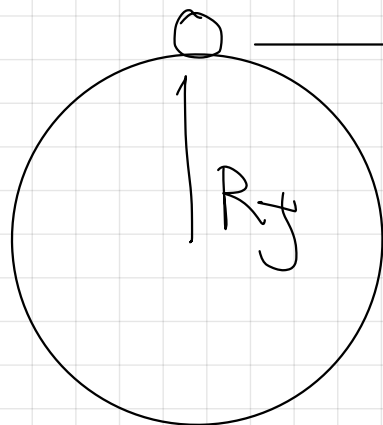
8

0

—————

$$E_{\text{pot}} = 0$$

$$/ E_{\text{kin}} = 0$$



—————

$$E_J = -G \frac{M_J \cdot m}{R_J}$$

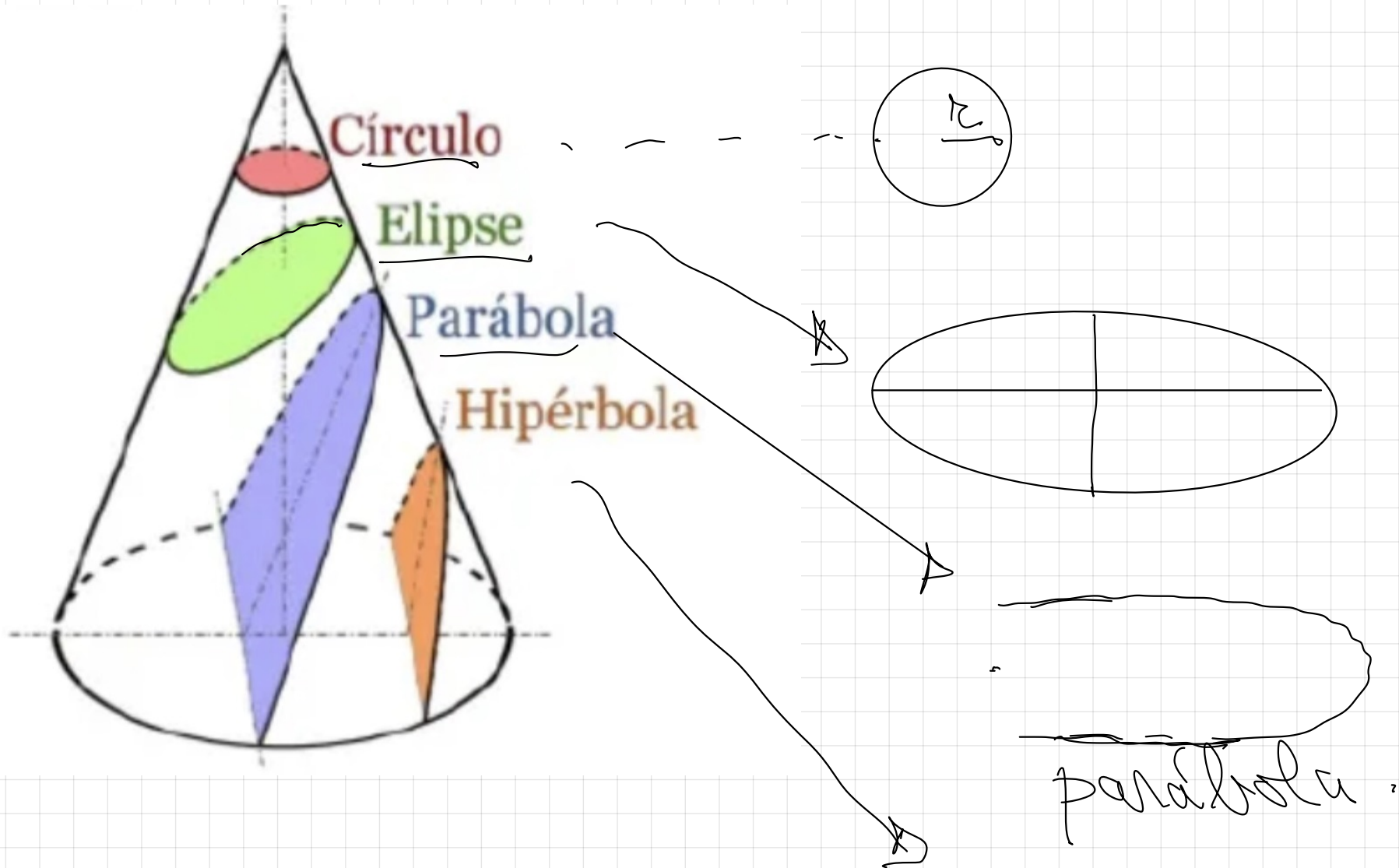
$$/ E = \frac{1}{2} m v_e^2$$

$$-G \frac{M_J \cdot m}{R_J} + \frac{1}{2} m v_e^2 = 0 + 0$$

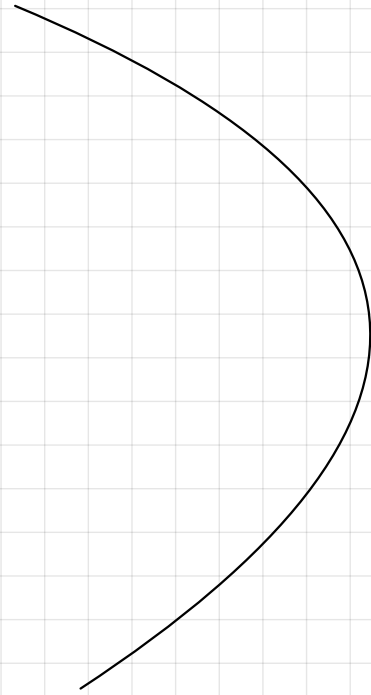
$$\frac{1}{2} \cancel{M} v_e^2 = G \cdot \frac{\cancel{M} M_J}{R_J}$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2 G M_J}{R_J}}$$

preg 18. 6° Relación entre la energía y el movimiento orbital.



hippoboscids



$E_m > 0$
 $E_m = 0$

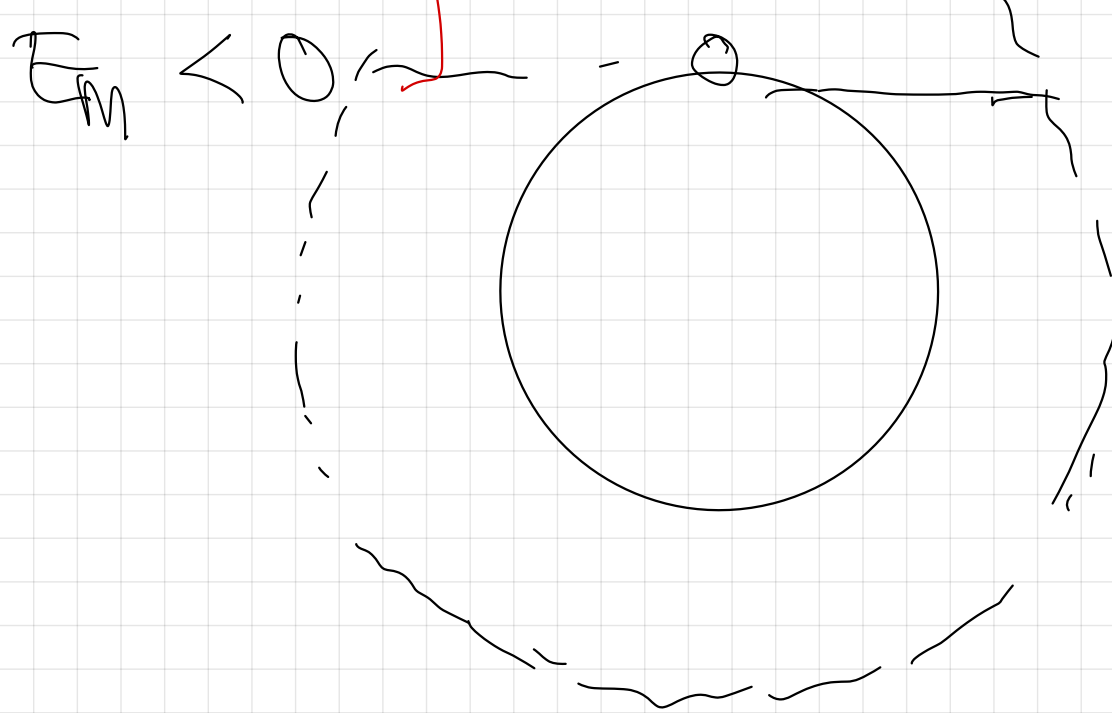
} Orbitas elipticas

$E_c > |E_p|$ — Escapa hiperbolica
 $E_c = |E_p|$ — Escapa parabolica

$E_m < 0$
 $E_m < 0$

} Orbitas circulares

$\frac{1}{2} |E_p| < E_c < |E_p|$ — No escapa
 orbita eliptica
 $E_c = \frac{1}{2} |E_p|$ — No escapa
 orbita circular



$0 < E_c < \frac{1}{2} |E_p|$ — No escapa
 colapso

Orbita circular $\rightarrow v_0 = \sqrt{G \frac{M}{r}}$
 $E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$
 $E_c = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m \left(\sqrt{G \frac{M}{r}} \right)^2 = \frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r}$

$$\frac{E_c}{E_p} = \frac{\frac{1}{2} k \frac{M \cdot M}{L}}{-k \frac{M \cdot M}{L}} \quad E_c = -\frac{1}{2} E_p$$

$$E_c = -\frac{1}{2} |E_p|$$

$$E_{p\infty} = 0$$

$$E_{c\infty} = 0$$

--- 0

$$E_p = -100 \text{ J}$$

$$E_c = |E_p|$$

$$\begin{array}{c} 11 \\ 100 \end{array}$$

$$200 \text{ J}$$

46.- Un satélite artificial de masa 100 Kg orbita en torno a un planeta describiendo una órbita circular, teniendo una energía potencial gravitatoria de valor $-5 \cdot 10^8 \text{ J}$.

a) Calcula la velocidad lineal a la que se desplaza

b) Si mediante un propulsor se duplica, sin cambiar la dirección, la velocidad lineal del satélite, ¿Qué tipo de órbita seguirá?

a) $E_p = \underline{-5 \cdot 10^8 \text{ J}}$

órbita circular

$$E_c = \frac{1}{2} |E_p| \quad \left(\text{ver páginas anteriores} \right)$$

$$E_c = \frac{1}{2} 5 \cdot 10^8 \text{ J} = 2,5 \cdot 10^8 \text{ J}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot \cancel{v^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2,5 \cdot 10^8}{100}} = 2236 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$b) E_c = \frac{1}{2} m (v')^2 = \frac{1}{2} 100 \cdot (2.2236)^2 =$$

$$E_c = 2.49 \cdot 10^8 \text{ J}$$

$$E_p = -5 \cdot 10^8 \text{ J}$$

$E_c > |E_p| \Rightarrow$ Escapa $E_m > 0$,
siguiente una
hipérbola
(órbita abierta)

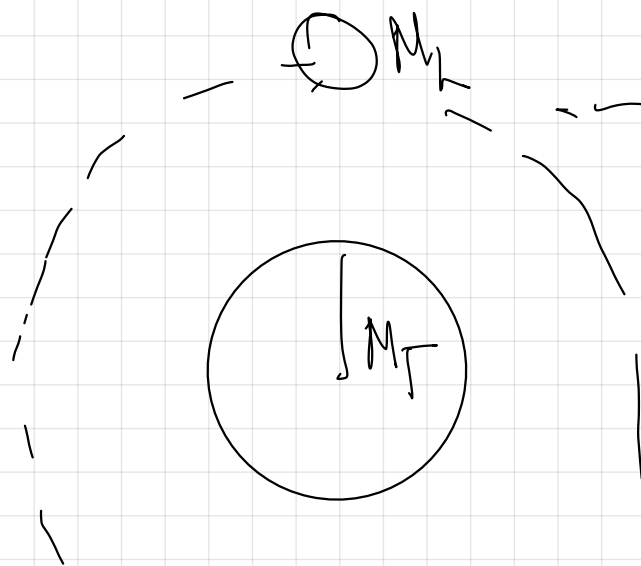


47.- La Luna es un satélite natural de la Tierra con una órbita prácticamente circular.

Razone si las siguientes afirmaciones acerca de ella son verdaderas o falsas

- a) La energía potencial gravitatoria de la Luna es igual, en valor absoluto, a su energía cinética
- b) La energía mecánica de la Luna es positiva
- c) La energía potencial gravitatoria de la Luna es igual, en valor absoluto, al doble de su energía cinética
- d) La energía cinética de la Luna no está relacionada con su energía potencial gravitatoria

a)

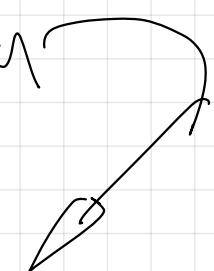


Falsa.

$$|E_p| = E_c \Rightarrow E_m = 0$$

la luna escapa.
(parábola)

b) $E_m > 0$. Falsa, está ligada
al campo gravitatorio tenemos $E_m < 0$.

c) Órbita circular
 $E_c = \frac{1}{2} |E_p|$ 

$$|E_p| = 2E_c.$$

d) Se está relacionada, y en

La data actual se cumple que

$$E \supset \frac{1}{2} |E_p|$$

48.- Un satélite orbita en torno a un planeta con una órbita circular. Razone la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones

- a) Su energía mecánica es cero
- b) Su energía mecánica es igual a menos su energía cinética
- c) Su energía potencial es igual a menos su energía cinética partido dos

a) $E_m > 0$ Falso, escaparía de la influencia del planeta.

$$E_m = -G \frac{M \cdot m}{2r}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \quad v = \sqrt{G \frac{M}{r}}$$
$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot \left(\sqrt{G \frac{M}{r}} \right)^2$$
$$E_c = G \frac{M \cdot m}{2r}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{E_c}{E_m} &= \frac{G \cdot \frac{M \cdot m}{2R}}{-G \frac{M \cdot m}{2R}} \\ \frac{E_c}{E_m} &= -1. \end{aligned}$$

Verdadero. $\rightarrow \left[E_m = E_c \right]$

Q)

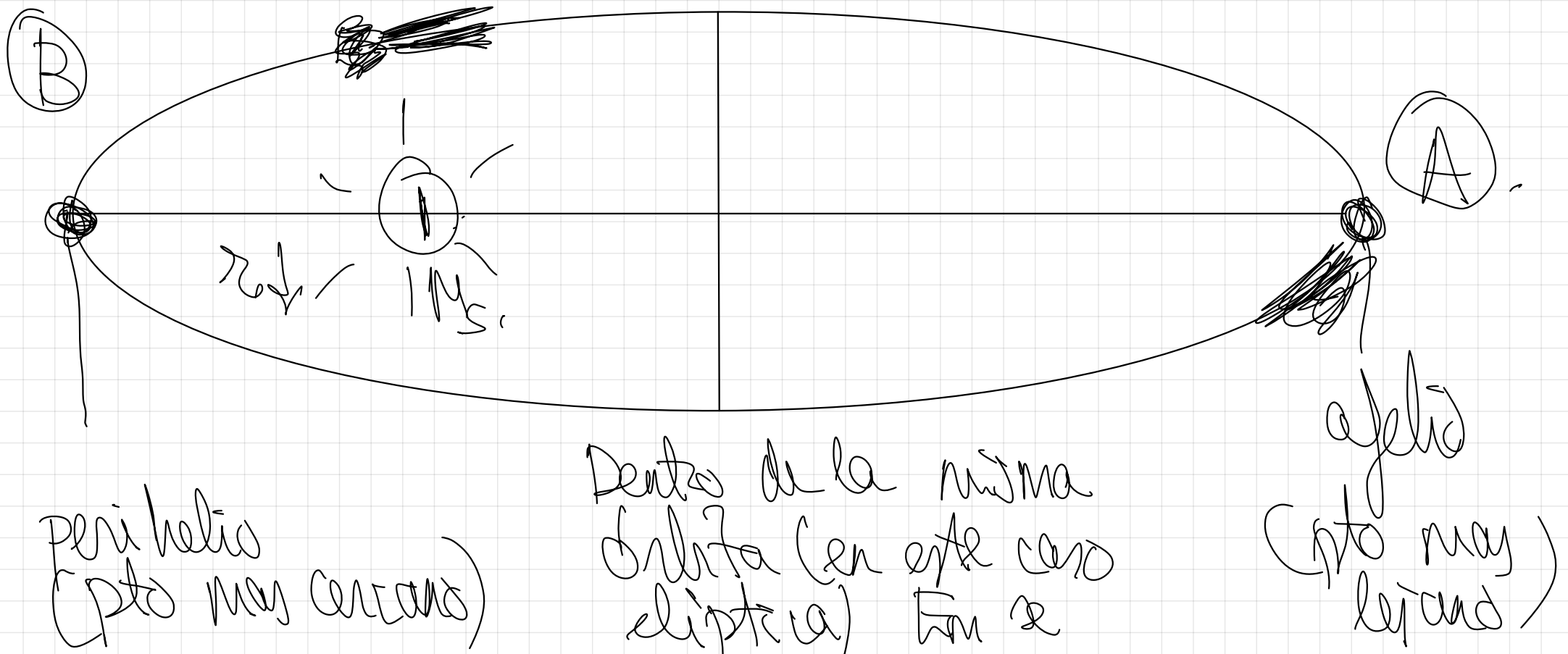
$$E_p = G \frac{M \cdot m}{R}$$

$$\begin{aligned} E_c &= G \frac{M \cdot m}{2R} \quad \left(\rightarrow E_c \right) \\ -G \frac{M \cdot m}{R} &\neq G \frac{M \cdot m}{4R} \quad \rightarrow \end{aligned}$$

hasta B

➤ 44.- Sean A y B dos puntos de la órbita elíptica de un cometa alrededor del Sol, estando A más alejado del Sol que B.

- a) ¿En cuál de los dos puntos es mayor el módulo de la velocidad?, ¿y el de la aceleración?
- b) Comparar los valores de energía cinética y potencial en A y en B



$$E_P = -G \frac{M \cdot m}{r_B}$$

$$E_C = \frac{1}{2} m v_B^2$$

(Solo actúa la F_G).
~~conservación~~

$$r_A > r_B \Rightarrow$$

$$E_A > E_B$$

$$E_P = -G \frac{M \cdot m}{r_A}$$

$$-E_A > E_B$$

$$E_n = \text{cte}$$

$$E_C = \frac{1}{2} m v_A^2$$

$$E_B > E_A$$

$$v_B > v_A$$

$g \Rightarrow$ aceleración. $g = G \cdot \frac{M_s}{r^2}$ ↓

↓
La aceleración es mayor cuanto más
cerca del sol estamos (B).

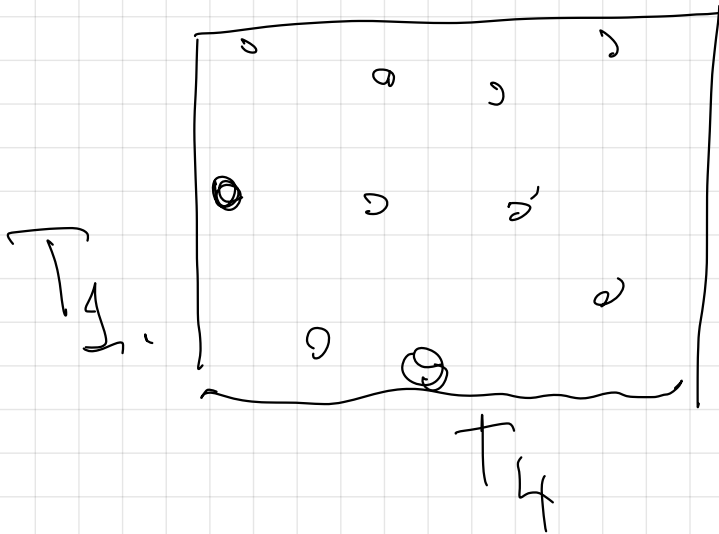
b) Ya hecho.

pag 2

2.- INTERACCIONES A DISTANCIA: CONCEPTO DE CAMPO

Magnitud escalar.

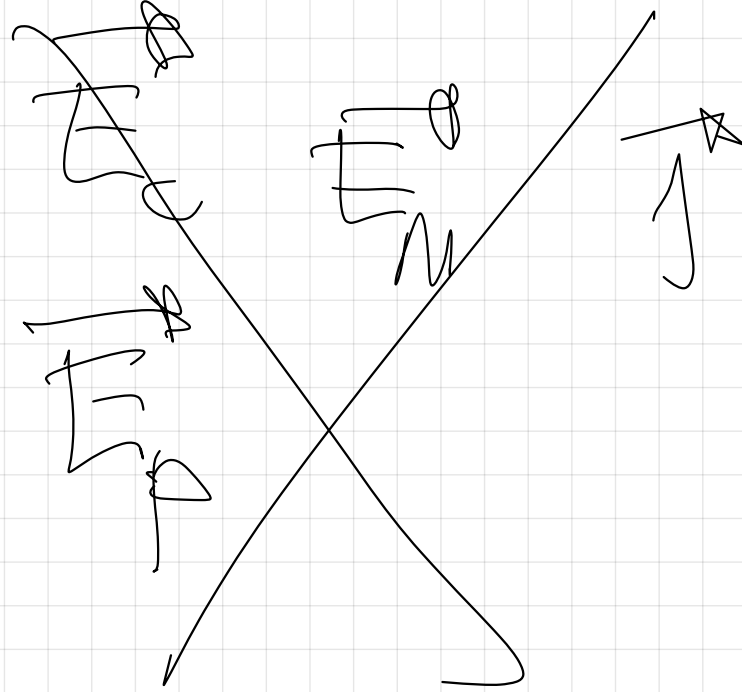
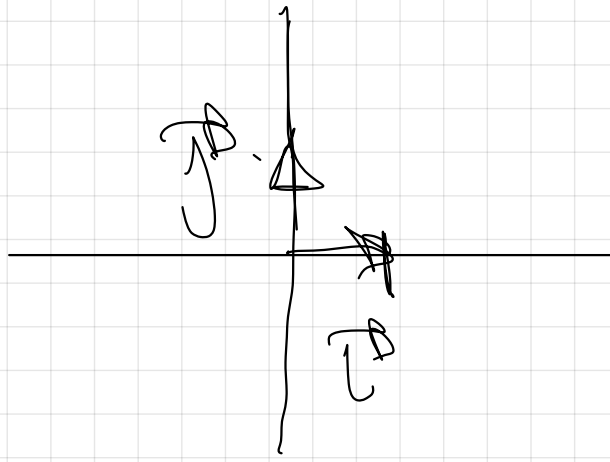
~ No tiene ni dirección
ni sentido

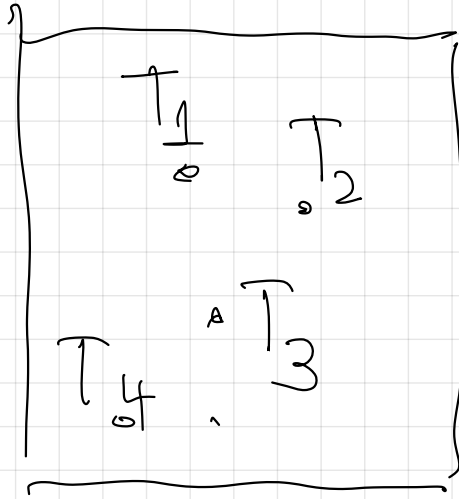


Magnitud vectorial.

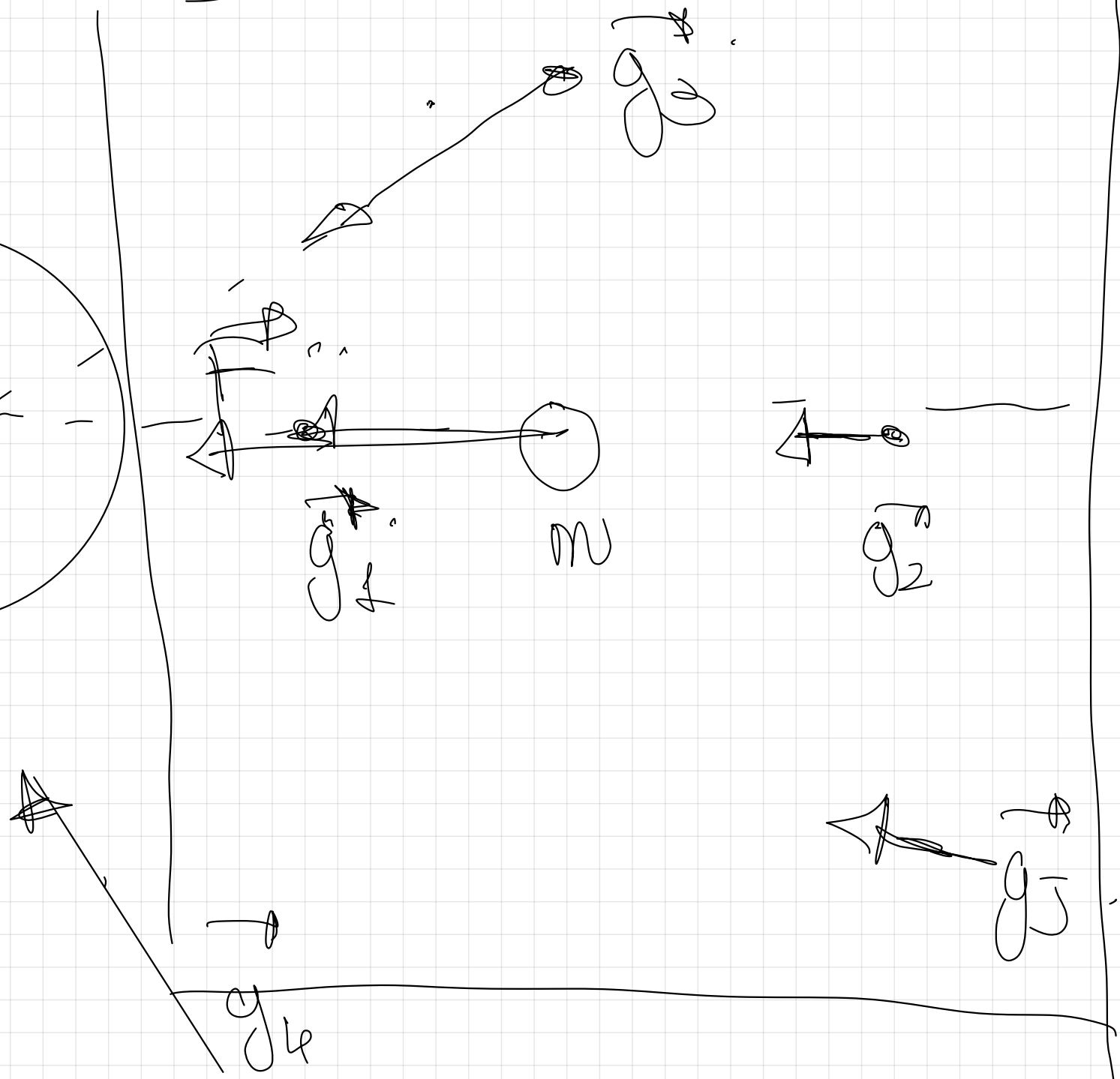
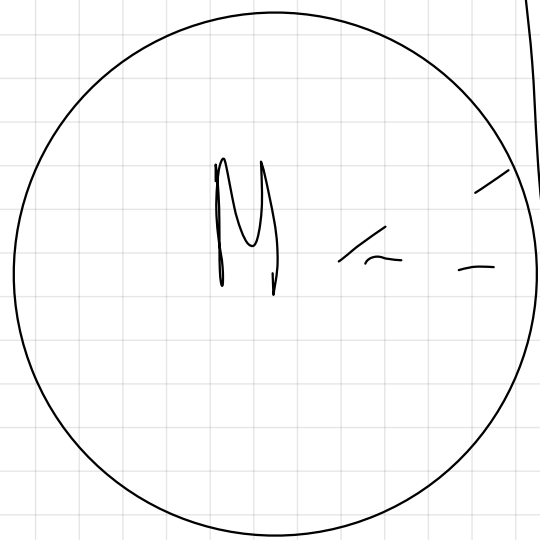
- Módulo (valor)
- Dirección
- Sentido

$$\begin{array}{lcl}
 \uparrow & = & 15 \\
 \downarrow & = & -30
 \end{array}
 \begin{pmatrix} m \\ 5 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix} m \\ 5 \end{pmatrix}$$





$$g = 6 \frac{M}{r^2}$$



Celsius,

Kelvin,

100°C —

373K

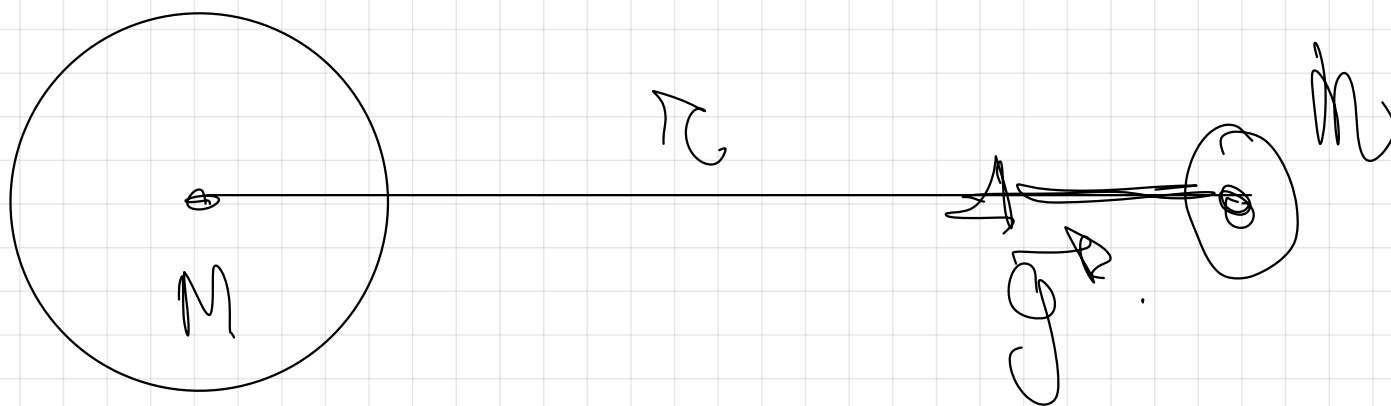
0°C —

273K

-4°C —

-273°C —

0K



$$F = m \cdot |g|$$

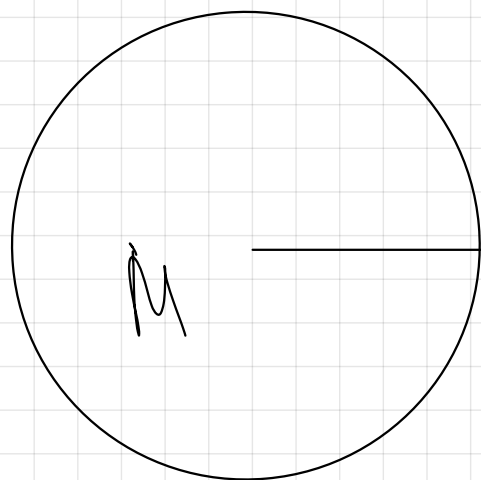
$$g = \frac{F}{m} = \frac{G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}}{m} = \frac{G M}{r^2}$$

$$g = \frac{N}{kg}$$

$$\frac{N}{kg} = \frac{kg \cdot \frac{m}{s^2}}{kg} = \frac{m}{s^2}$$

$$10 \frac{N}{kg}$$

$$g = 10 \frac{m}{s^2}$$

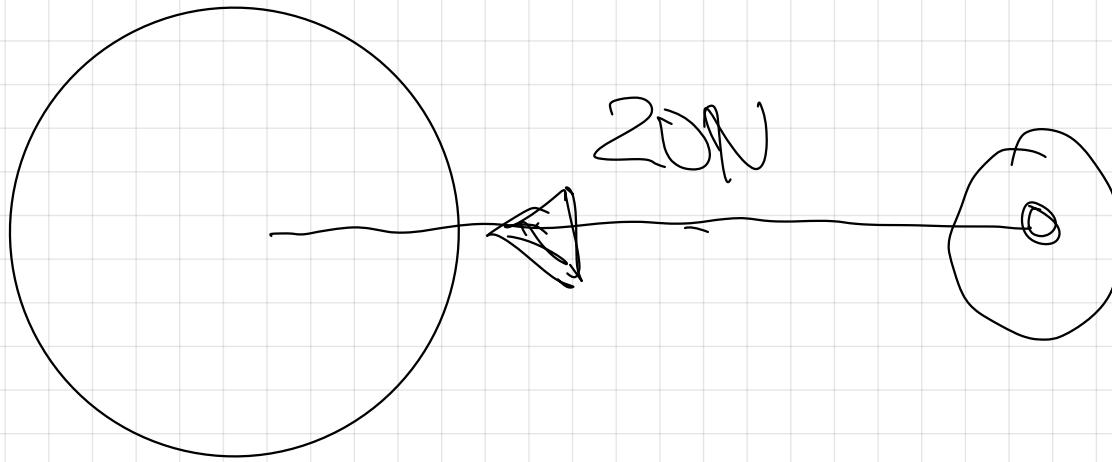


20 N.



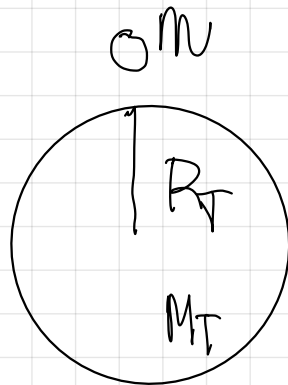
$$g = 10 \frac{N}{kg}$$

$$m = 1 kg$$

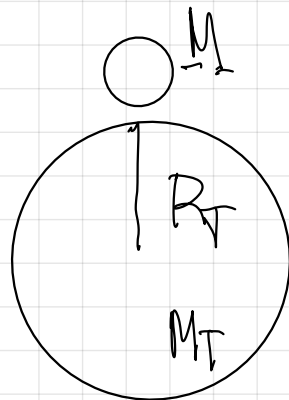


$$g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$
$$m = 2 \text{ kg}$$

10.- Según la Ley de la gravitación, la fuerza que ejerce la Tierra sobre un cuerpo es proporcional a la masa de éste. Si es así, ¿ Porqué no caen más deprisa los cuerpos con mayor masa?



$$F = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T^2}$$



$$F = G \cdot \frac{M_T \cdot M}{R_T^2}$$

$$\vec{F} = m \cdot \vec{g}$$

$$g = \frac{F_m}{m} = \frac{G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T^2}}{m} = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}$$

$$g = \frac{F_M}{M} = \frac{G \cdot \frac{M_T \cdot M}{R_T^2}}{M} = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}$$

La aceleración de caída g es la misma
independientemente de la masa del cuerpo. 

5.- PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN.

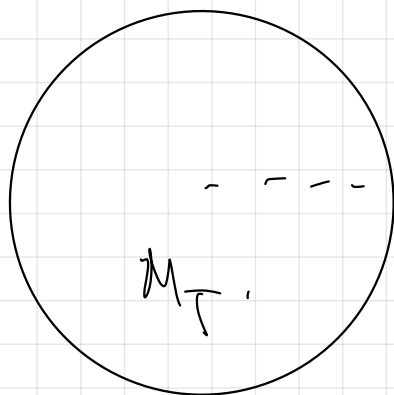
Tanto la fuerza gravitatoria F como la intensidad del campo gravitatorio g son magnitudes vectoriales, es decir, poseen un valor o módulo, una dirección y un sentido. El principio de superposición nos dice que cuando un cuerpo se somete a varias fuerzas, la fuerza resultante es igual a la suma de todas ellas, o sea:

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n$$

La intensidad del campo gravitatorio en ese punto será por tanto:

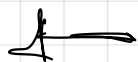
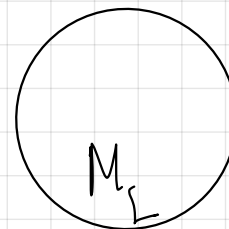
$$\vec{g} = \vec{F}/m = \sum \vec{F}_i/m = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3 + \dots + \vec{g}_n$$

Cumpléndose también para g el principio de superposición



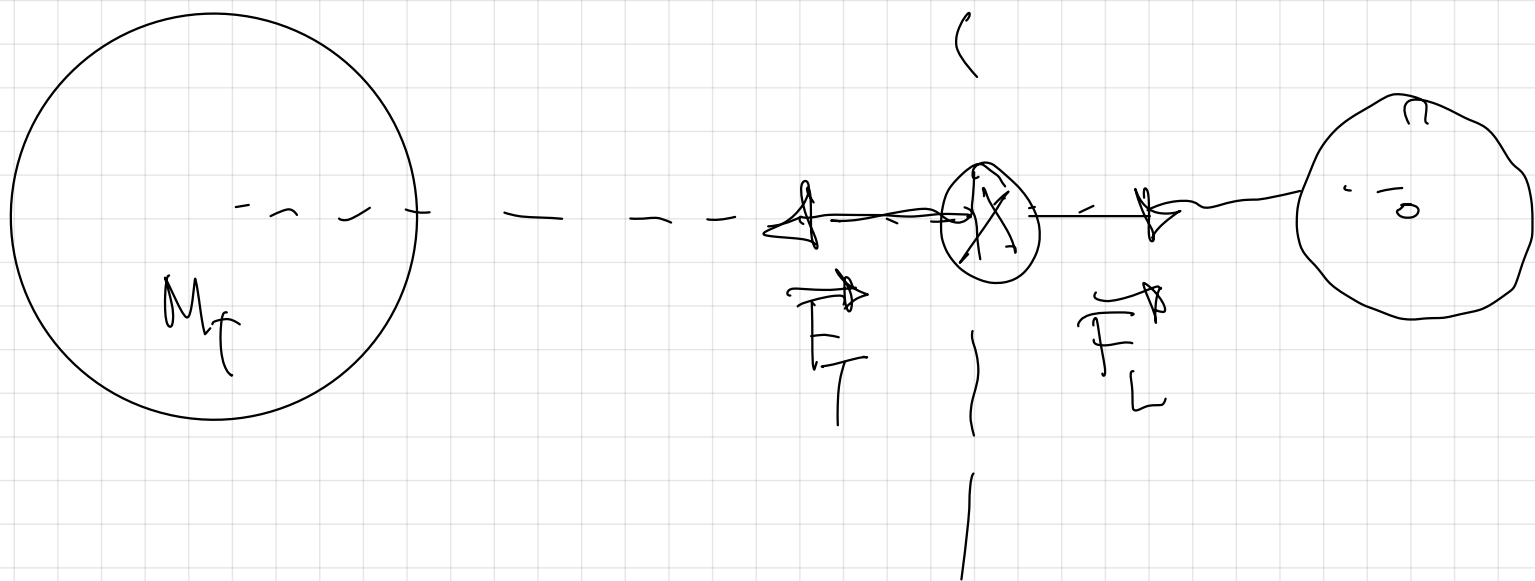
$$g = 98 \frac{m}{s^2}$$

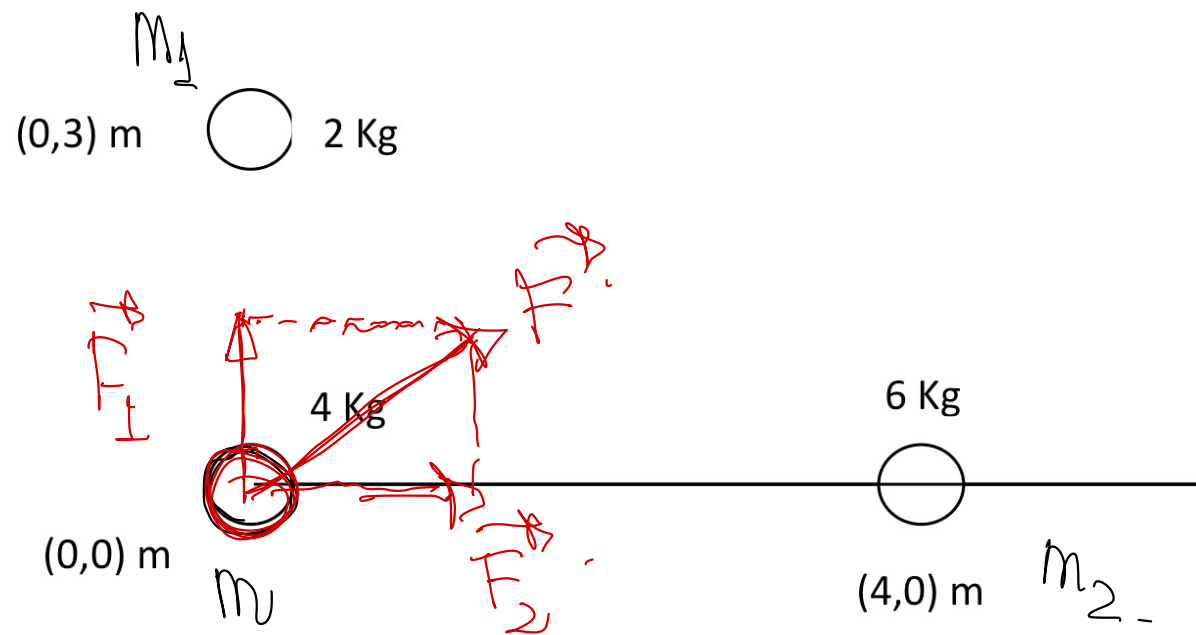
$$g = 1 \frac{m}{s^2}$$



$$g = 8'8 \frac{m}{s^2}$$

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{c} \uparrow \\ \circ \\ \downarrow \end{array} \right] &= \sum \begin{array}{c} \uparrow \\ \circ \\ \downarrow \end{array} \\
 \uparrow \downarrow &= \sum \uparrow \downarrow
 \end{aligned}$$

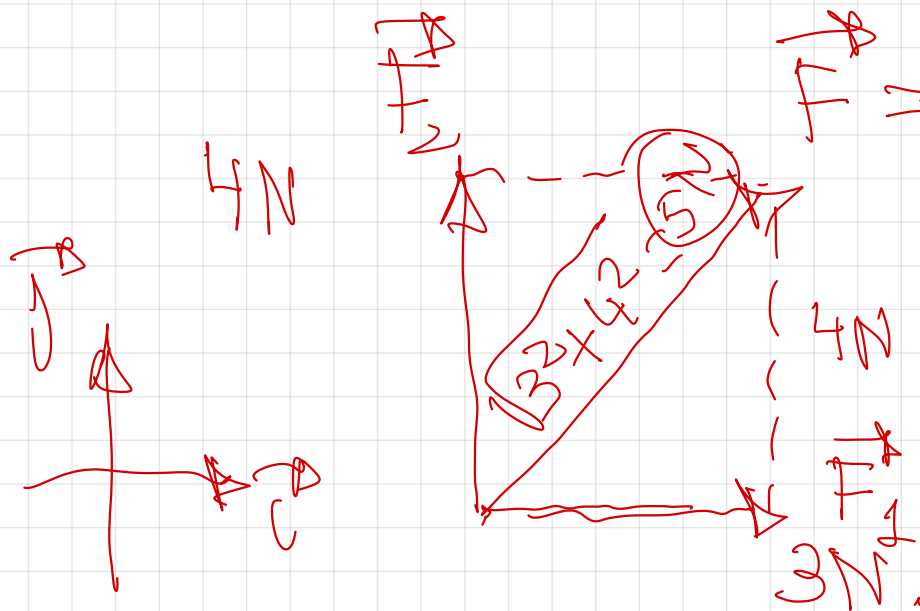




Calcula el vector fuerza gravitatoria resultante sobre la masa de 4Kg, así como su módulo y dibuja en un esquema todas las fuerzas que aparecen
 $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}$

Principio de superposición

$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$



$$\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j} \text{ (N)}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$F = 3\text{N} + 4\text{N} = 7\text{N}$$

$$\vec{F}_1 = +3\vec{i}$$

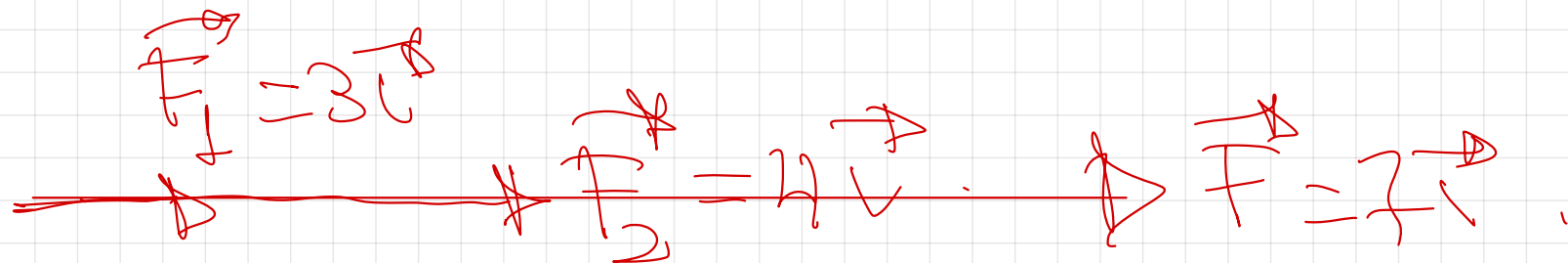
$$\vec{F}_2 = +4\vec{j}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j} \text{ (N)}$$

$$|\vec{F}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$= \sqrt{25} = 5 \text{ N.}$$



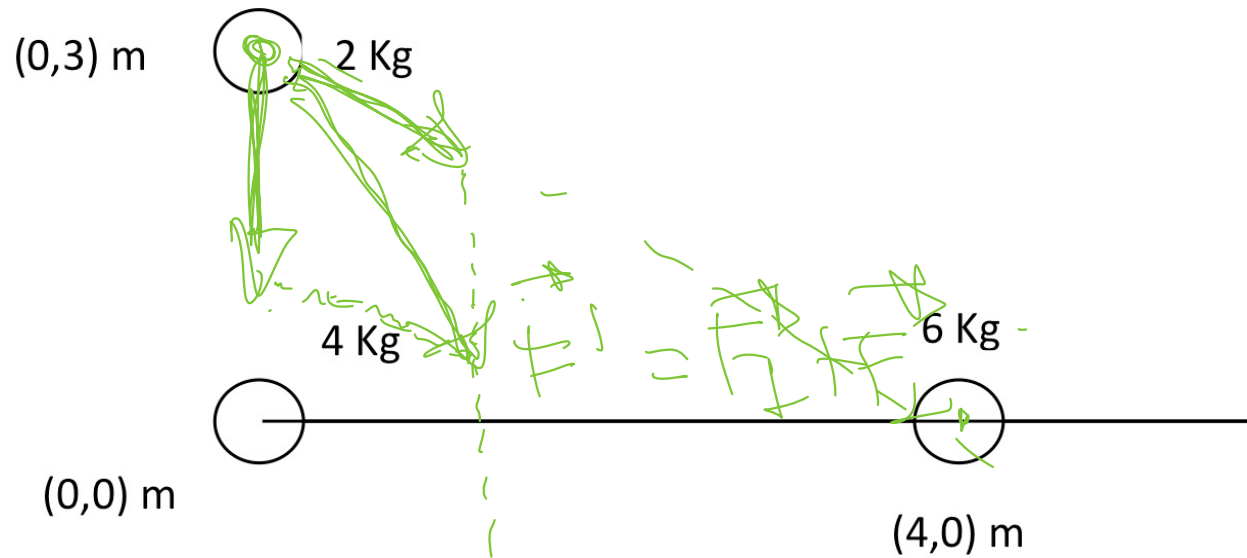
$$\vec{F}_1 = 3\vec{e}_1 \quad \vec{F}_2 = 4\vec{e}_2 \quad \vec{F} = 5\vec{e}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{F} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$$

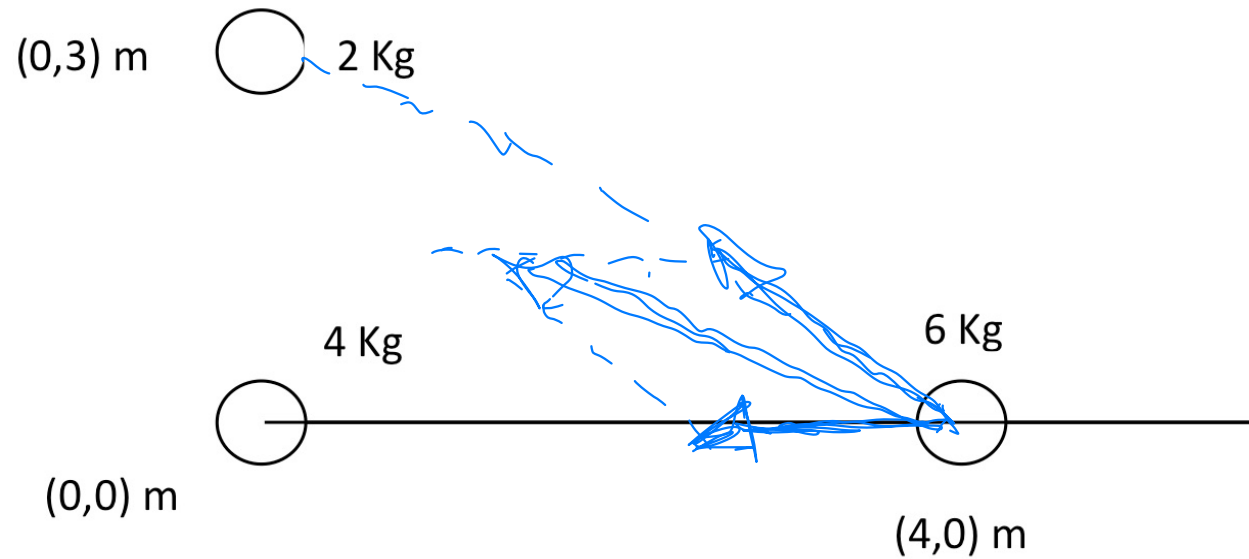
$$|\vec{F}| = 5$$

$$|\vec{F}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{49} = 7 \text{ N}$$

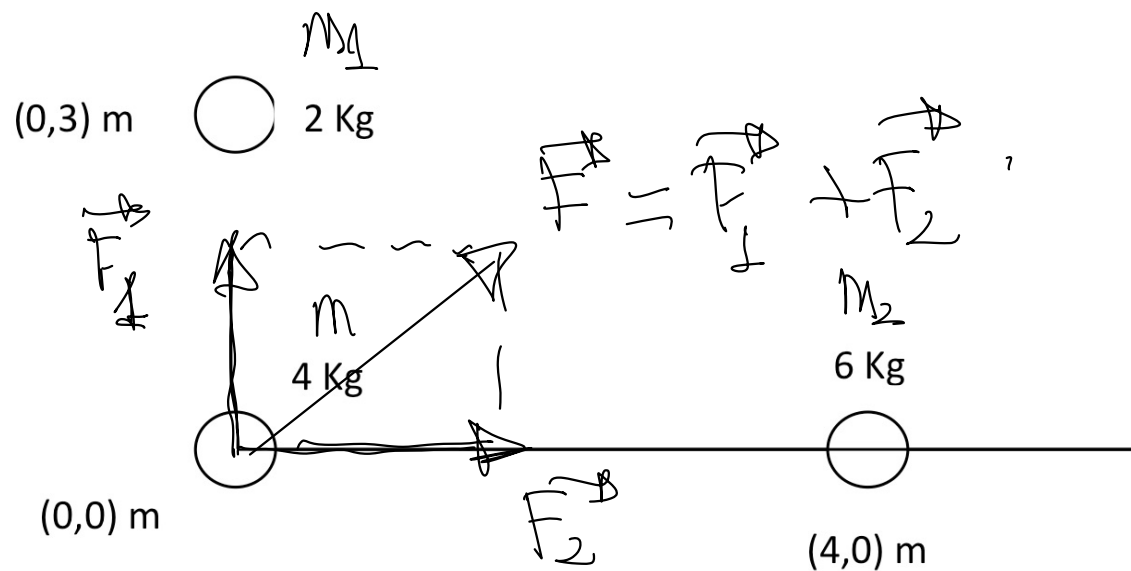


Calcula el vector fuerza gravitatoria resultante sobre la masa de 4Kg, así como su módulo y dibuja en un esquema todas las fuerzas que aparecen

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}$$

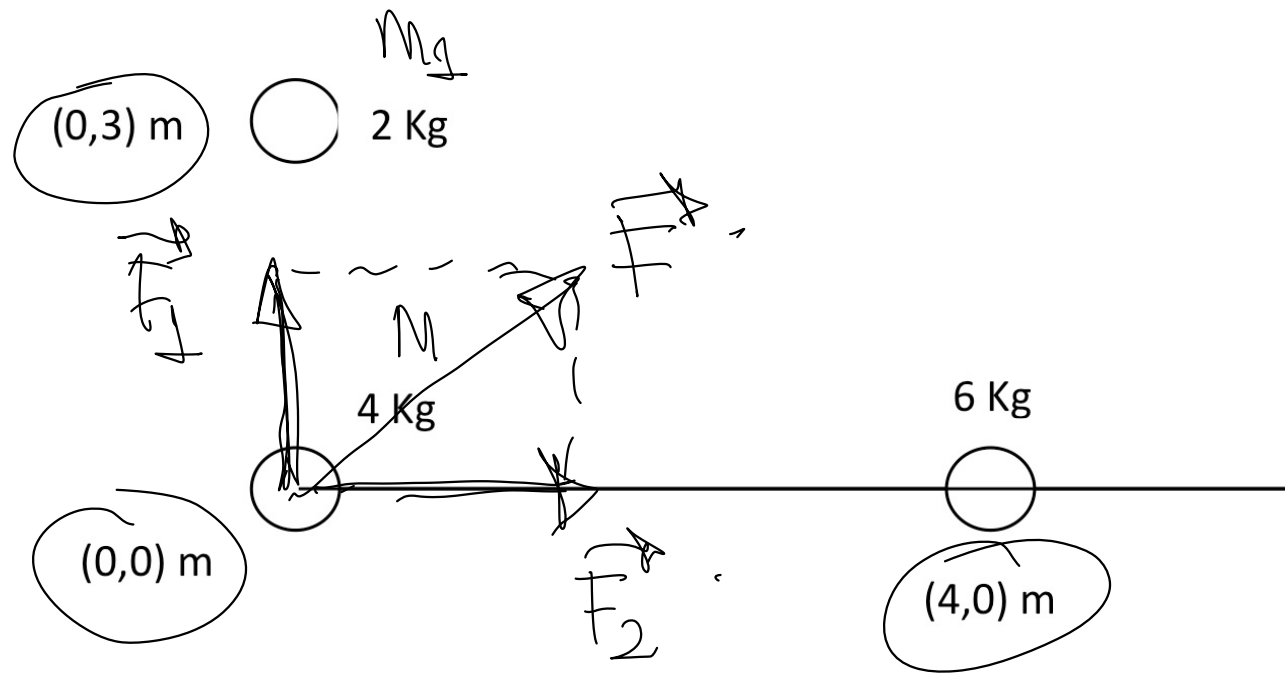


Calcula el vector fuerza gravitatoria resultante sobre la masa de 4Kg, así como su módulo y dibuja en un esquema todas las fuerzas que aparecen
 $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}$



Calcula el vector fuerza gravitatoria resultante sobre la masa de 4Kg, así como su módulo y dibuja en un esquema todas las fuerzas que aparecen
 $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}$

En las magnitudes vectoriales primero hallo el módulo y después le asigno dirección y sentido.



Calcula el vector fuerza gravitatoria resultante sobre la masa de 4Kg, así como su módulo y dibuja en un esquema todas las fuerzas que aparecen

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}$$

$$|F_1| = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{4 \cdot 2}{3^2} = 5,92 \cdot 10^{-11} \text{ N}$$

$$F_1 = + 5,92 \cdot 10^{-11} \text{ N}$$

$$|\vec{F}_2| = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{4 \cdot 6}{4^2} = 1 \cdot 10^{-10} \text{ N.}$$

$$\vec{F}_2 = + 10^{-10} \vec{e} \quad (\text{N})$$

Princípio da superposição-

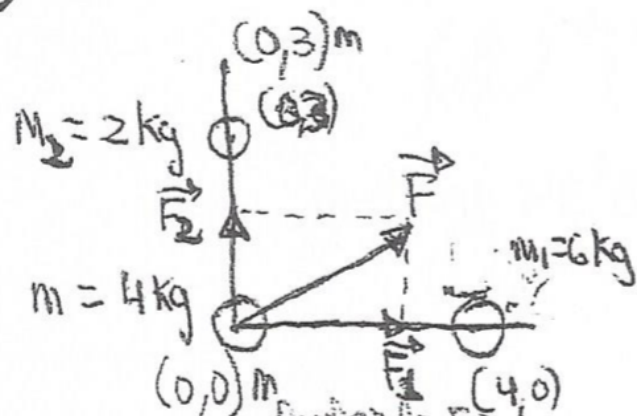
$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 10^{-10} \vec{e} + 5,92 \cdot 10^{-11} \vec{e} \quad (\text{N})$$

$$|\vec{F}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(10^{-10})^2 + (5,92 \cdot 10^{-11})^2}$$

$$|\vec{F}| = 1,16 \cdot 10^{-10} \text{ N.}$$

11

a)



Sola/ nos piden ~~la~~ F_1 aparece en la masa de 4 kg, aunque ~~no~~ todas las F q aparecerían serían

$$|\vec{F}_2| = G \cdot \frac{m_2 \cdot m}{r^2}$$

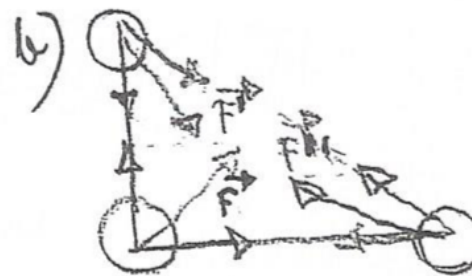
$$|\vec{F}_2| = 667 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} = 5.93 \cdot 10^{-11} \text{ N}$$

$$\vec{F}_2 = 5.93 \cdot 10^{-11} \vec{j} \text{ (N)}$$

$$|\vec{F}_1| = G \cdot \frac{m_1 \cdot m}{r^2}$$

$$|\vec{F}_1| = 667 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6 \cdot 4}{4^2} = 10^{-10} \text{ N}$$

$$\vec{F}_1 = 10^{-10} \vec{i} \text{ (N)}$$



Ppto de superposición

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 10^{-10} \vec{i} + 5.93 \cdot 10^{-11} \vec{j} \text{ (N)} \Rightarrow \text{Vector } \vec{F}$$

$$|\vec{F}| = \sqrt{|\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2} = \sqrt{(10^{-10})^2 + (5.93 \cdot 10^{-11})^2} = 1.16 \cdot 10^{-10} \text{ N}$$

Cuidado $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

~~$F = F_1 + F_2$~~

Problema 12b.

①

En dos puntos A y B de coordenadas $(20, 0)\text{m}$ y $(0, 20)\text{m}$ se sitúan dos masas puntuales de 10 kg cada una.

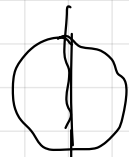
a) Dibuja y calcula el vector campo gravitatorio producido por cada una de estas dos masas y el total en el punto C $(20, 20)\text{m}$

b) Halla la Fuerza sobre una masa puntual de 5 kg situada en el punto C.

$$G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$$

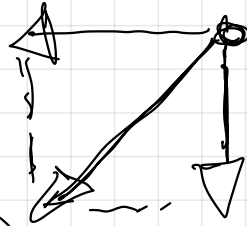
$$m_B = 10 \text{ kg}$$

$$(0, 20) \text{ m}$$



$$\vec{g}_B$$

$$C (20, 20) \text{ m}$$



$$\vec{g}_A$$

$$m_A = 10 \text{ kg}$$



$$(20, 0) \text{ m}$$

Primer halla los módulos:

$$g = G \cdot \frac{M}{r^2}$$

$$|\vec{g}_A| = G \cdot \frac{m_A}{r_A^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{10}{20^2} = 1.66 \cdot 10^{-12} \text{ m/s}^2 \left(\frac{\text{N}}{\text{kg}} \right)$$

$$\vec{g}_A = -1.66 \cdot 10^{-12} \hat{x} \text{ (m/s}^2\text{)}$$

$$|\vec{g}_B| = G \cdot \frac{M_B}{r_B^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{10}{20^2} = 1,66 \cdot 10^{-12} \text{ m/s}^2.$$

$$\vec{g}_B = - 1,66 \cdot 10^{-12} \vec{e} \quad (\text{m/s}^2)$$

Princípio de superposição.

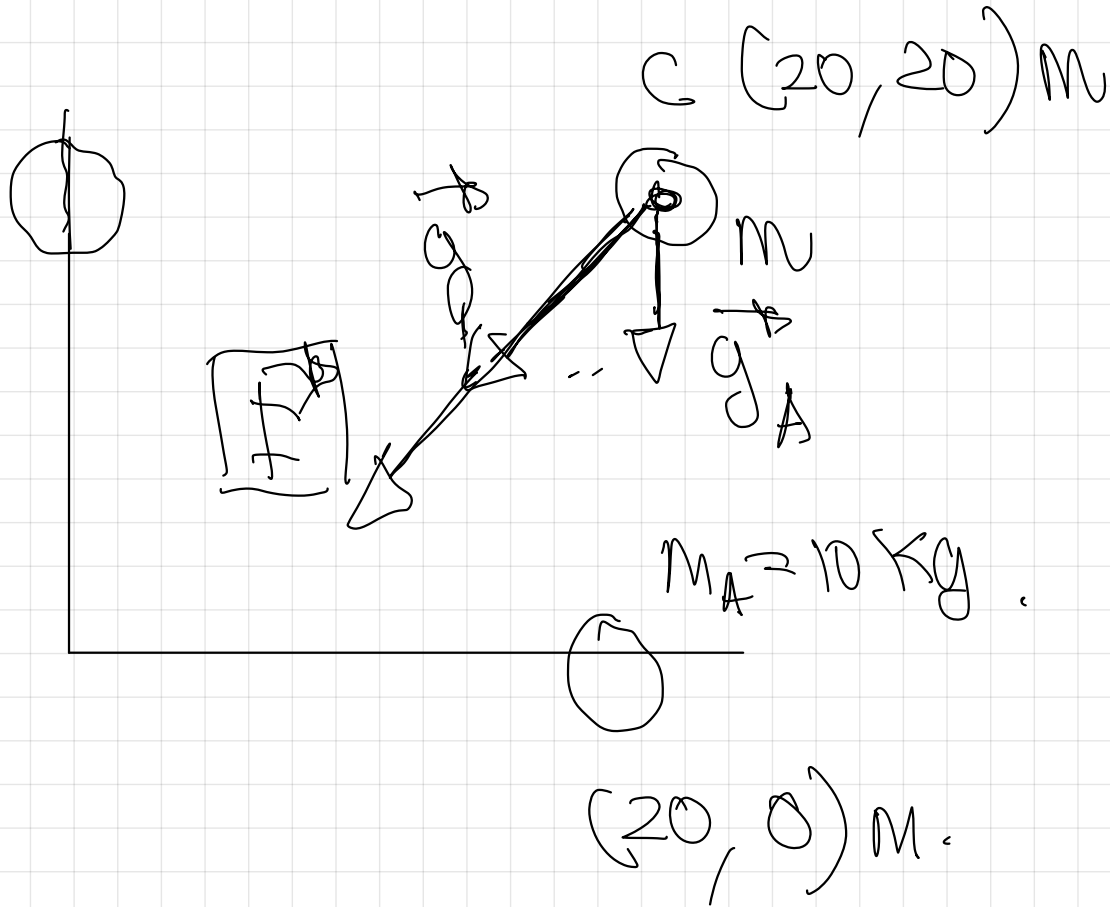
$$\vec{g} = \vec{g}_A + \vec{g}_B$$

$$\vec{g} = - 1,66 \cdot 10^{-12} \vec{e} - 1,66 \cdot 10^{-12} \vec{e} \quad (\text{m/s}^2)$$

$$|\vec{g}| = \sqrt{x^2 + y^2} = 2,34 \cdot 10^{-12} \text{ m/s}^2.$$

$$m_B = 10 \text{ kg}$$

$$(0, 20) \text{ m}$$



N_2
11

$$\vec{F} = m \cdot \vec{g} = 5 \text{ kg} \cdot \left(-1.66 \cdot 10^{-12} \hat{i} - 1.66 \cdot 10^{-12} \hat{j} \right) \text{ N}$$

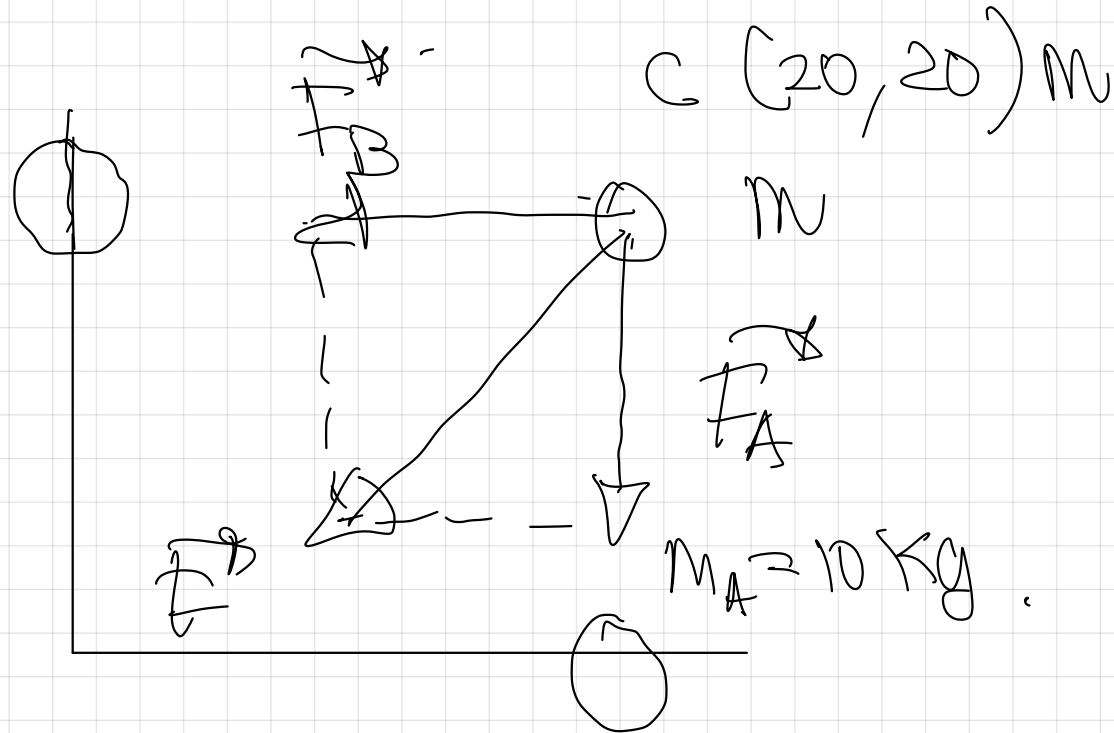
$$\vec{F} = -8.3 \cdot 10^{-12} \hat{i} - 8.3 \cdot 10^{-12} \hat{j} \text{ (N)}$$

$$|\vec{F}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-83 \cdot 10^{-12})^2 + (-813 \cdot 10^{-12})^2}$$

$$|\vec{F}| = 117 \cdot 10^{-11} \text{ N}$$

$$|\vec{F}| = m \cdot |\vec{g}| = 5 \text{ kg} \cdot 2134 \cdot 10^{-2} \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

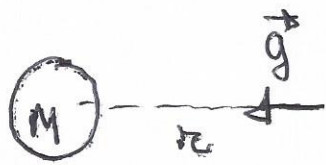
$$|\vec{F}| = 117 \cdot 10^{-11} \text{ N}$$

$$m_B = 10 \text{ kg}$$
$$(0, 2\pi) \text{ m}$$

$$F = F_A + F_B \quad (20 \text{ 0}) \text{ m.}$$

EJERCICIOS CÁLCULO DE MAGNITUDES VECTORIALES CAMPO GRAVITATORIO.

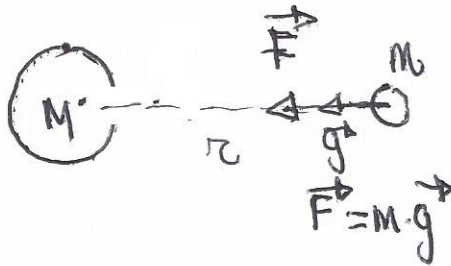
1

$$|\vec{g}| = g = G \cdot \frac{M}{r^2}$$



$\vec{g} \Rightarrow$ campo gravitatorio o intensidad del campo gravitatorio en un punto creado por la Masa M

$$|\vec{F}| = F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$



$\vec{F} \Rightarrow$ Fuerza gravitatoria experimentada por la masa m situada en dicho punto.

EJERCICIOS

①

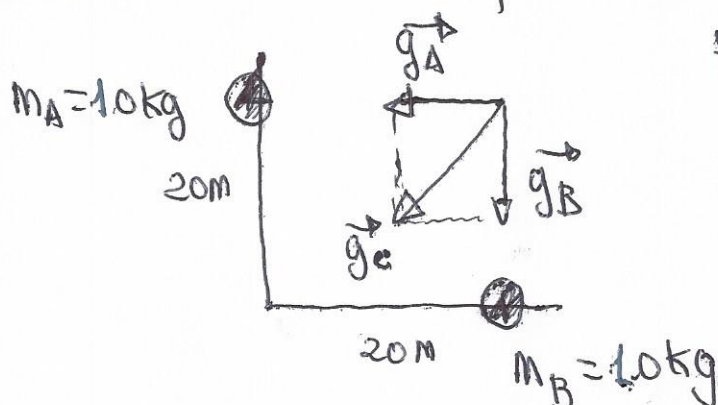
En dos puntos A y B de coordenadas $(20, 0)m$ y $(0, 20)m$ se sitúan dos masas puntuales de 10 kg cada una.

a) Dibuja y calcula el vector campo gravitatorio producido por cada una de estas dos masas y el total en el punto C $(20, 20)m$

b) Halla la Fuerza sobre una masa puntual de 5 kg situada en el punto C.

$$G = 6.7 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$$

Primero realizamos un esquema de la situación.



Principio de superposición.

$$\vec{g}_C = \vec{g}_A + \vec{g}_B$$

a)

$$|\vec{g}_A| = G \cdot \frac{M_A}{r^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{10}{20^2} = 1.7 \cdot 10^{-12} \text{ m/s}^2$$

$$\vec{g}_A = -1.7 \cdot 10^{-12} \vec{i} \text{ (m/s}^2\text{)}$$

$$|\vec{g}_B| = G \cdot \frac{M_B}{r^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{10}{20^2} = 1.7 \cdot 10^{-12} \text{ m/s}^2$$

$$\vec{g}_B = -1.7 \cdot 10^{-12} \vec{j} \text{ (m/s}^2\text{)}$$

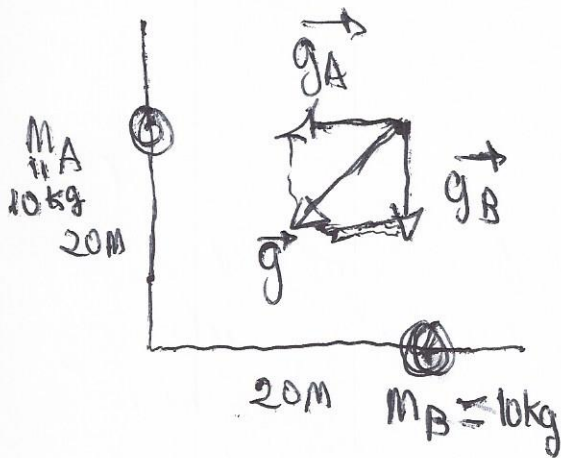
$$\vec{g} = \vec{g}_A + \vec{g}_B$$

$$\vec{g} = -1.7 \cdot 10^{-12} \vec{i} - 1.7 \cdot 10^{-12} \vec{j} \text{ (m/s}^2\text{)}$$

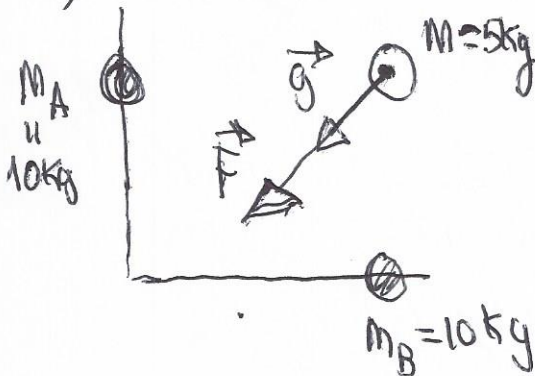
$$|\vec{g}| = g = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ (Módulo)}$$

$$|\vec{g}| = \sqrt{(-1.7 \cdot 10^{-12})^2 + (-1.7 \cdot 10^{-12})^2}$$

$$|\vec{g}| = 2.4 \cdot 10^{-12} \text{ m/s}^2$$



b)



La forma mas corta de hacerlo una vez salida $\vec{g}$.

$$\vec{F} = M \cdot \vec{g}$$

$$\vec{F} = 5 \cdot (-1.7 \cdot 10^{-12} \vec{i} - 1.7 \cdot 10^{-12} \vec{j}) \text{ (N)}$$

$$\vec{F} = -8.5 \cdot 10^{-12} \vec{i} - 8.5 \cdot 10^{-12} \vec{j} \text{ (N)}$$

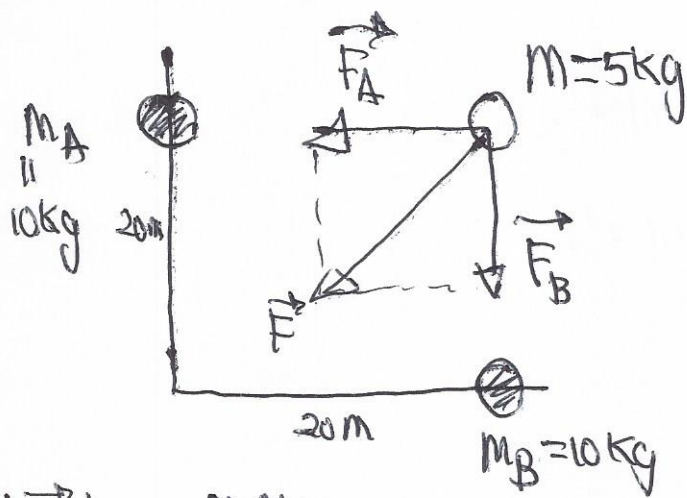
$$|\vec{F}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-8.5 \cdot 10^{-12})^2 + (-8.5 \cdot 10^{-12})^2}$$

$$|\vec{F}| = 1.2 \cdot 10^{-11} \text{ N}$$

Otra forma de hallar el módulo de la Fuerza

$$|\vec{F}| = M \cdot |\vec{g}| = 5 \cdot 2.4 \cdot 10^{-12} = 1.2 \cdot 10^{-11} \text{ N}$$

- ① b) Otra manera de hacerlo si no hubiésemos sabido el valor de g .



Principio de superposición
 $\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B$

$$|\vec{F}_A| = G \cdot \frac{M \cdot m_A}{r^2} \quad \left(\text{Ley de la gravitación universal} \right)$$

$$|\vec{F}_A| = 6.7 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{10 \cdot 5}{20^2}$$

$$|\vec{F}_A| = 8.5 \cdot 10^{-12} \text{ N}$$

$$\vec{F}_A = -8.5 \cdot 10^{-12} \hat{c} \text{ (N)}$$

$$|\vec{F}_B| = G \cdot \frac{M \cdot m_B}{r^2}$$

$$|\vec{F}_B| = 6.7 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5 \cdot 10}{20^2}$$

$$|\vec{F}_B| = 8.5 \cdot 10^{-12} \text{ N}$$

$$\vec{F}_B = -8.5 \cdot 10^{-12} \hat{j} \text{ (N)}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B$$

Principio de Superposición

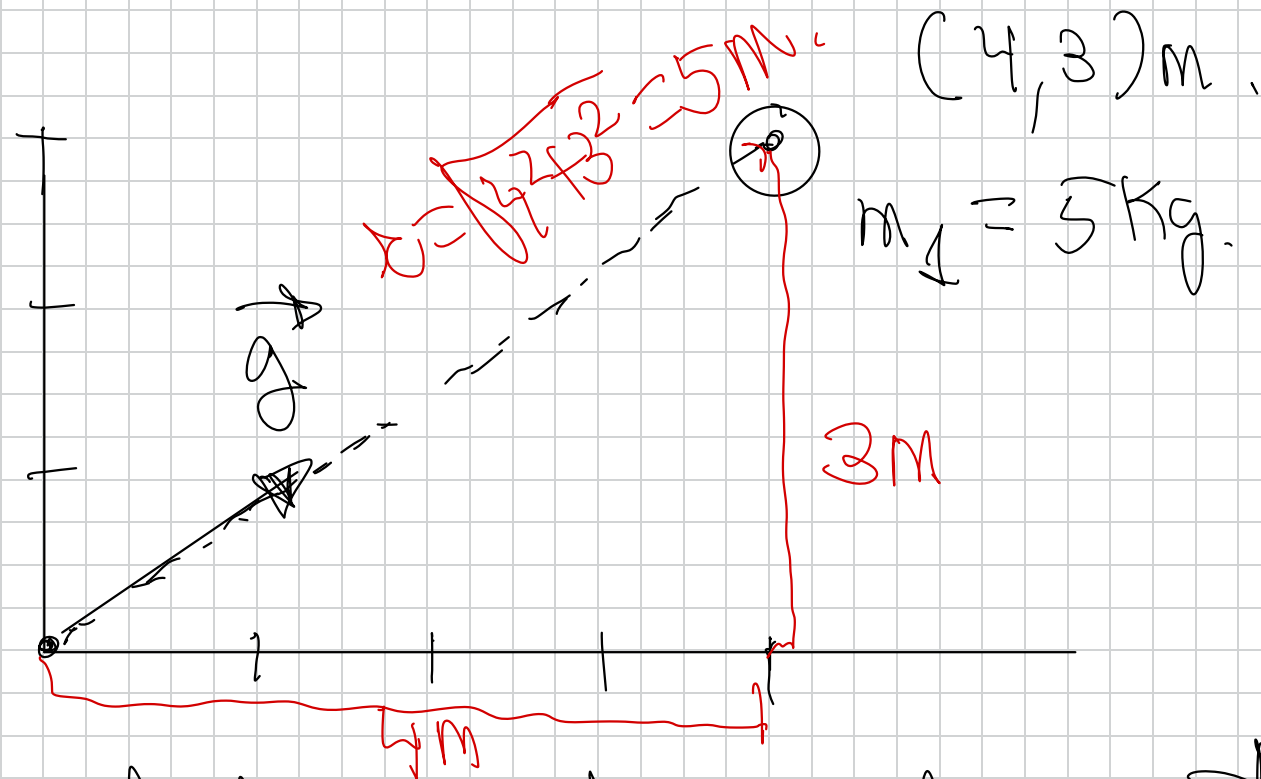
$$\vec{F} = -8.5 \cdot 10^{-12} \hat{c} - 8.5 \cdot 10^{-12} \hat{j} \text{ (N)}$$

$$|\vec{F}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-8.5 \cdot 10^{-12})^2 + (-8.5 \cdot 10^{-12})^2}$$

$$|\vec{F}| = 12 \cdot 10^{-11} \text{ N}$$

②

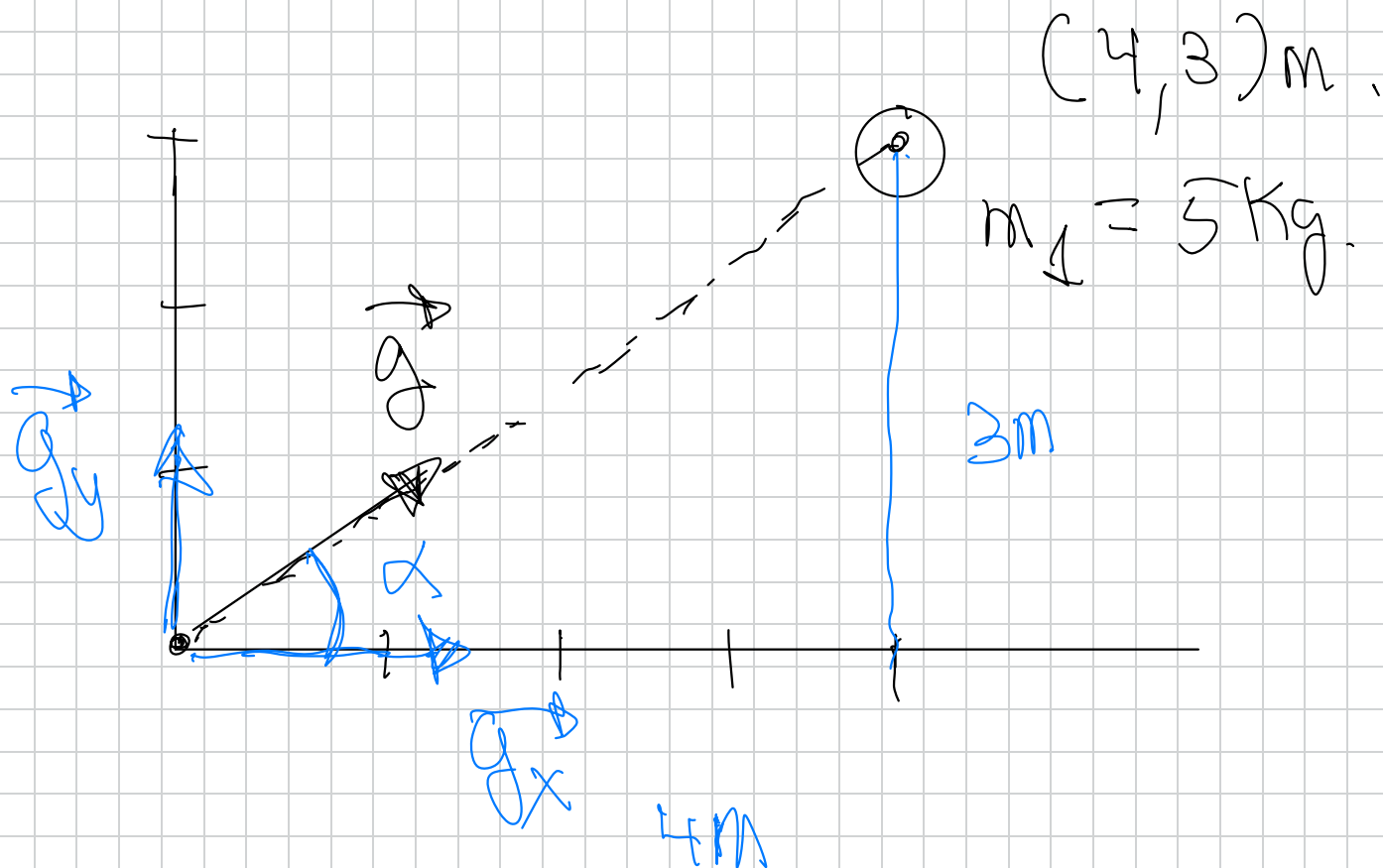
Una masa puntual $m_1 = 5 \text{ kg}$ está en el punto $(4, 3) \text{ m}$. Determina el valor del campo gravitatorio creado por la masa m_1 en el origen de coordenadas.
 $G = 667 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$.



Primero calculamos el módulo de $\vec{g}$.

$$|\vec{g}| = G \cdot \frac{m_1}{r^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5}{5^2} = 1.33 \cdot 10^{-11} \frac{N}{kg}$$

Descompongo $\vec{g}$.



$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa.}}$$

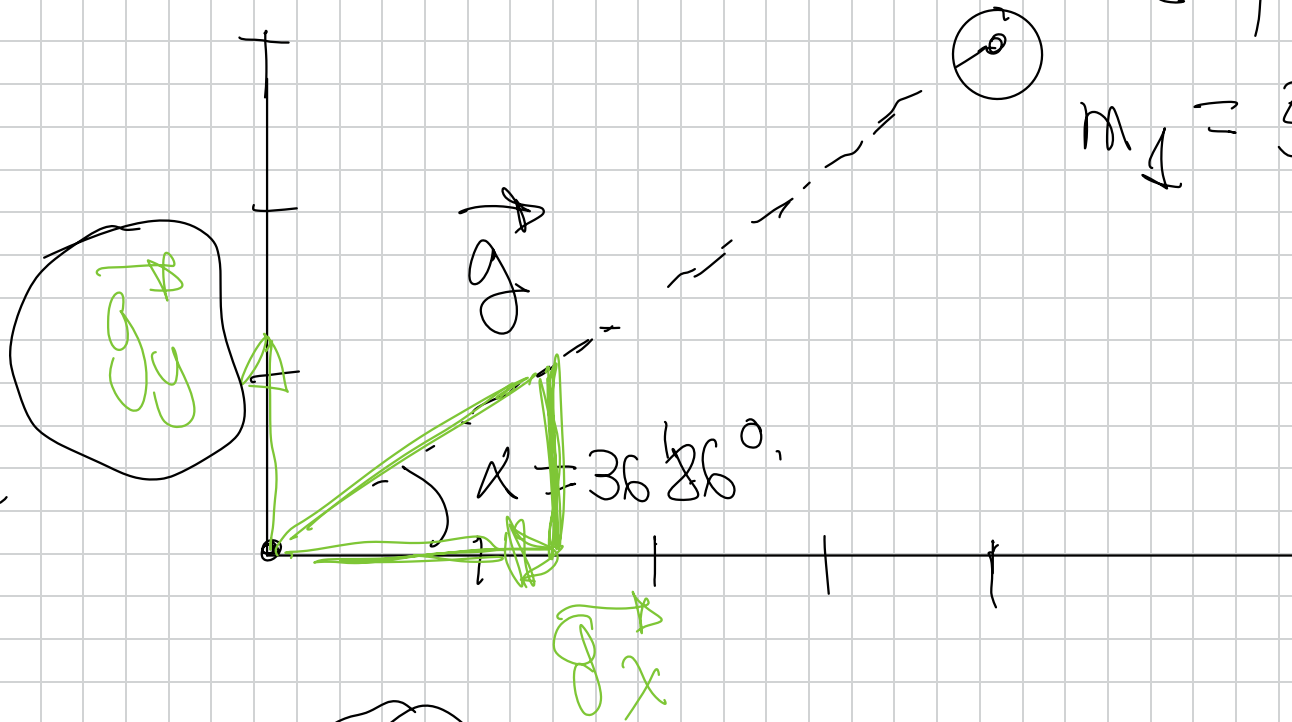
$$\text{sen } \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\alpha = \arcsen \frac{3}{5}$$

$$\alpha = 36.86^\circ.$$

$(4, 3) \text{ m.}$

$m_1 = 5 \text{ Kg.}$



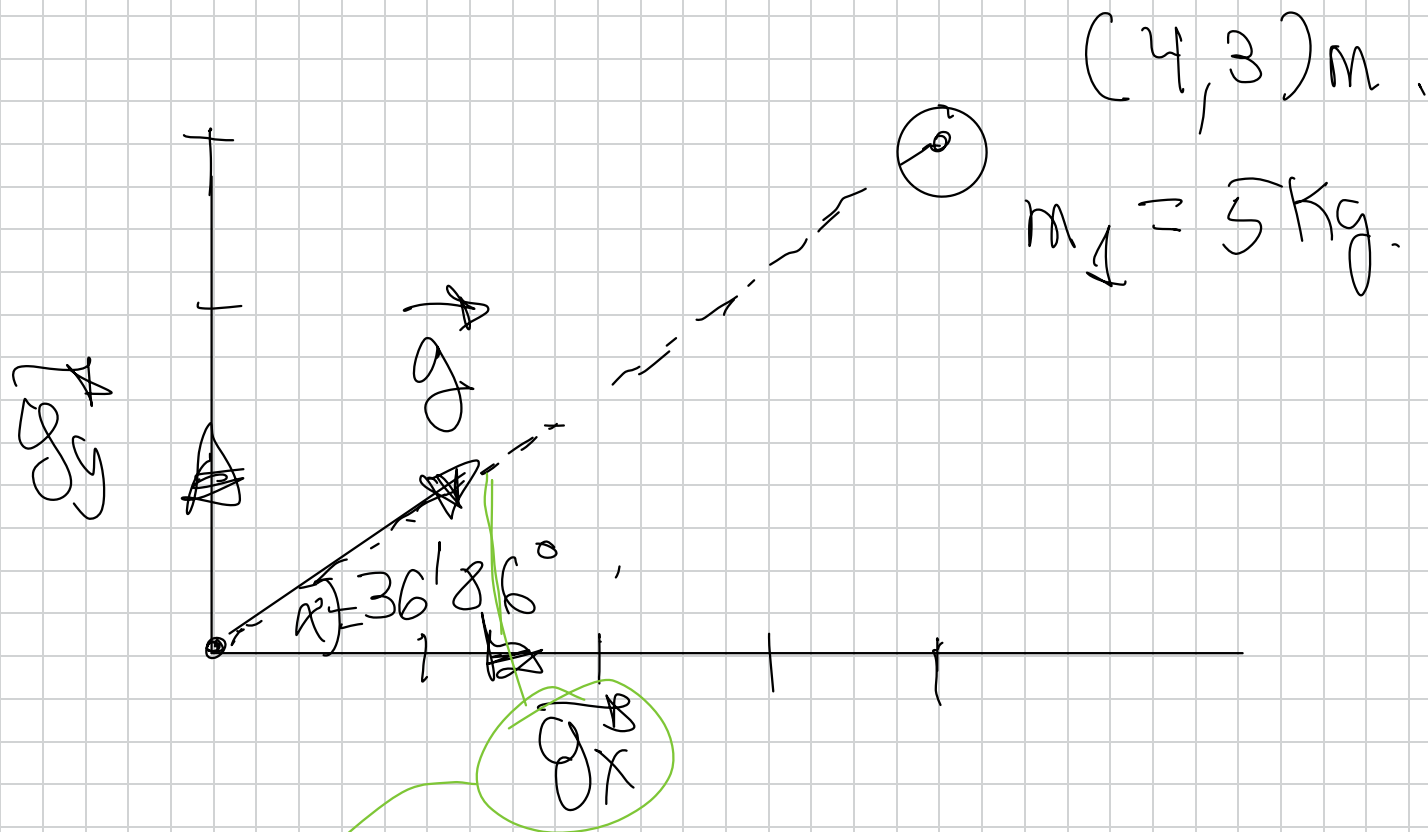
$$\sin \alpha = \frac{|\vec{g}_y|}{|\vec{g}|}$$

$$|\vec{g}_y| = |\vec{g}| \cdot \sin \alpha$$

$$|\vec{g}_y| = 1.33 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot \sin 36.86^\circ$$

$$|\vec{g}_y| = 7198 \cdot 10^{-12} \text{ N/s}^2.$$

$$\vec{g}_y = +7198 \cdot 10^{-12} \vec{j} \left(\frac{\text{N}}{\text{s}^2} \right)$$



$$\cos \alpha = \frac{|\vec{g}_x|}{|\vec{g}|}$$

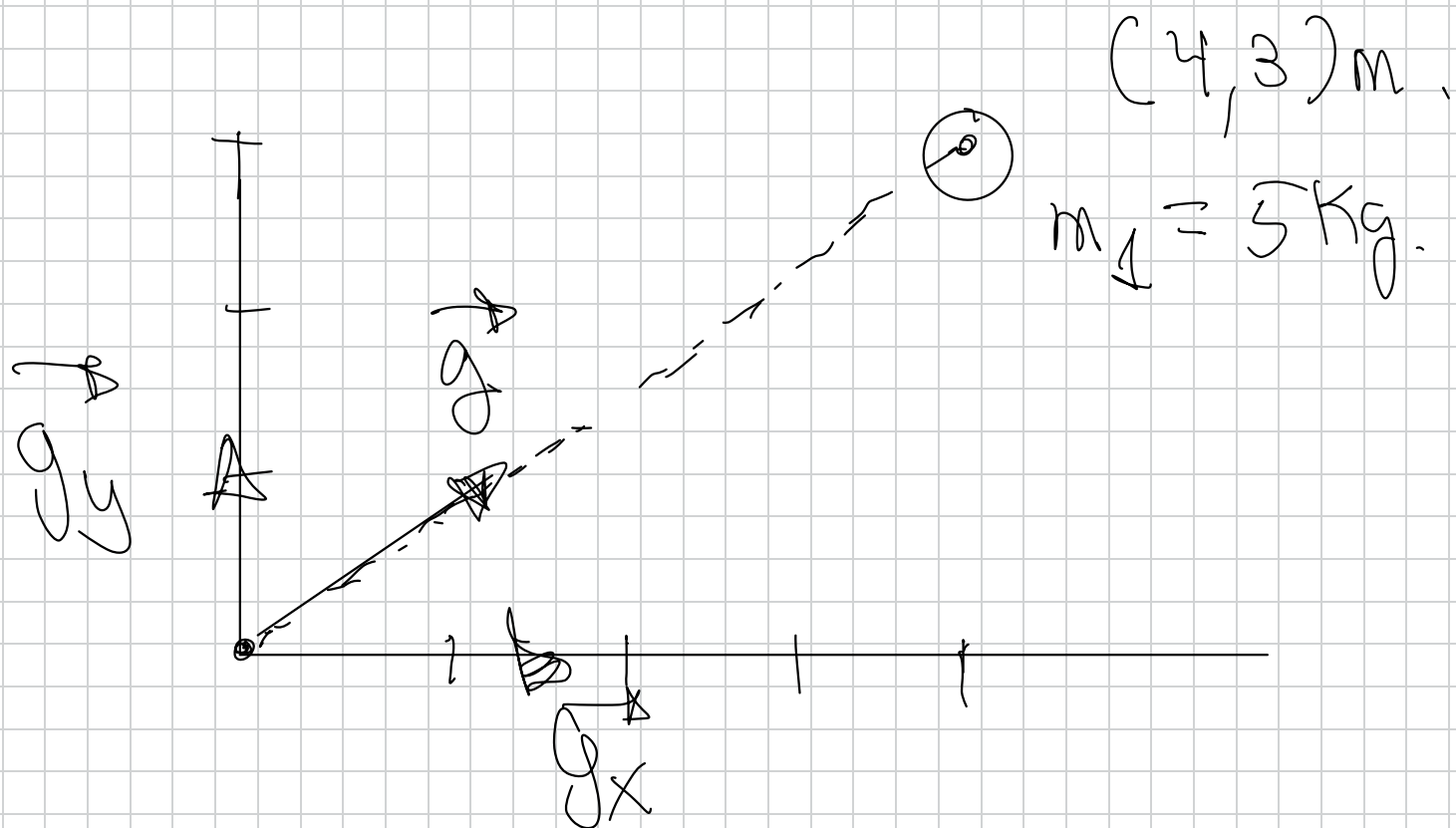
$$|\vec{g}_x| = |\vec{g}| \cdot \cos \alpha$$

$$|\vec{g}_x| = 1.33 \cdot 10^{-11} \cdot \cos 36'86''$$

$$|\vec{g}_x| = 1.06 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$= + 1.06 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$





$$\vec{g} = \vec{g}_x + \vec{g}_y$$

$$\vec{g} = 10 \cdot 1 \cdot \vec{e}_x + 7.98 \cdot 20 \cdot \vec{e}_y \quad \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)$$

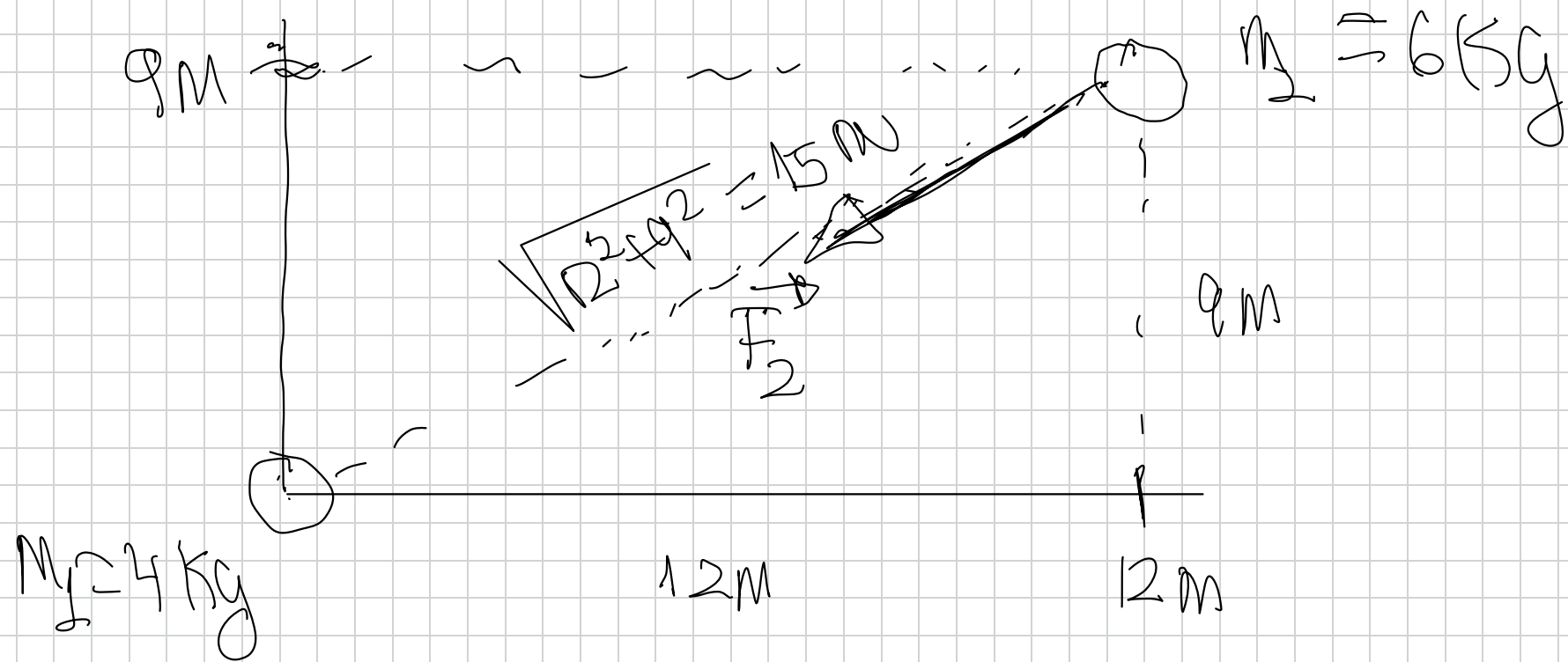
$$|\vec{g}| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1.33 \cdot 10^{-11} \text{ N/s}^2$$

③ Una masa puntual $m_1 = 4 \text{ kg}$ está situada en el origen de coordenadas y otra masa puntual $m_2 = 6 \text{ kg}$ está situada en el punto $(12, 9) \text{ m}$.

a) Calcula el vector Fuerza que aparece sobre la masa m_2 y halla su módulo.

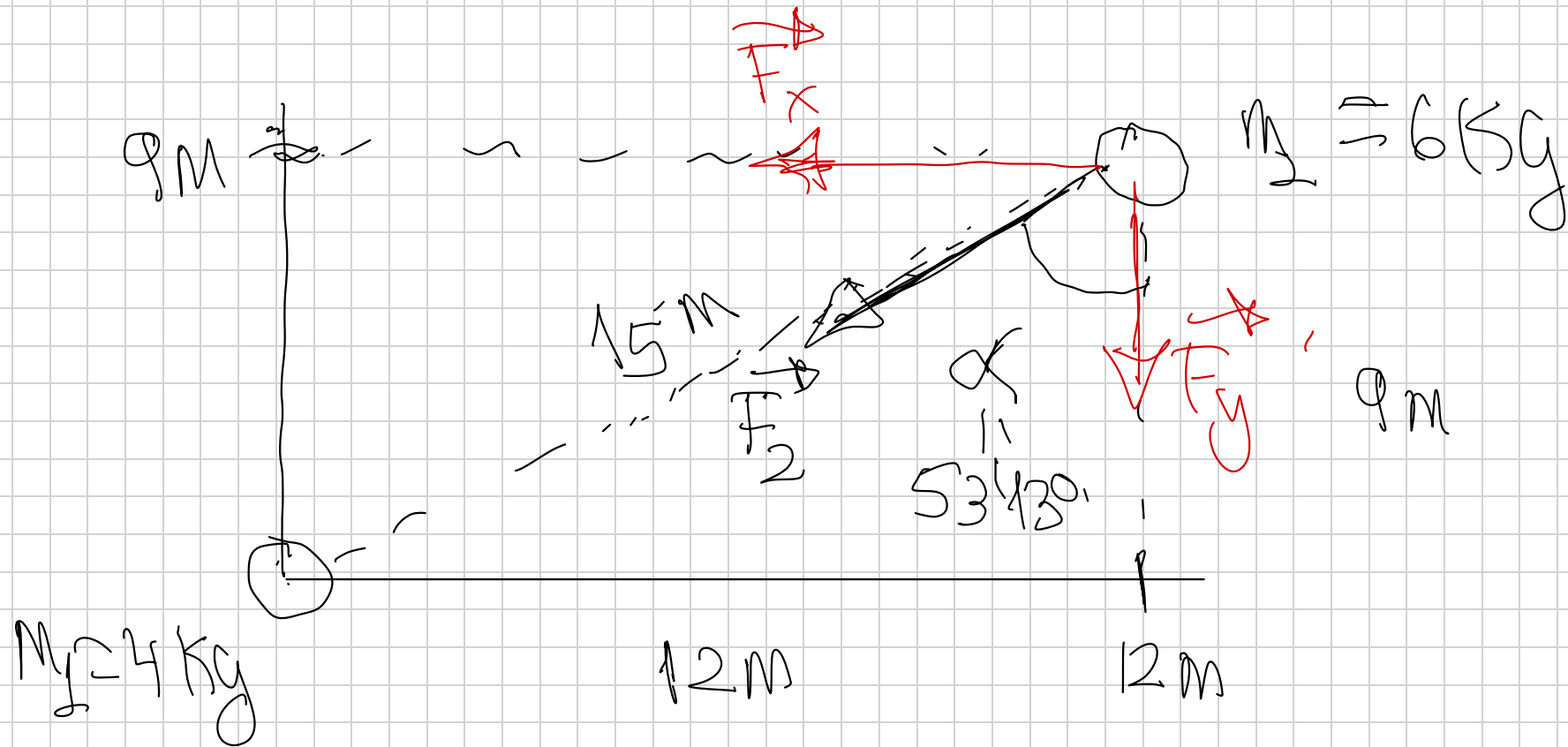
b) Calcula el vector Fuerza que aparece sobre la masa m_1 y halla su módulo.

$$|G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \text{ kg}^{-2}|$$



Ley de la gravitación universal.

$$|\vec{F}_2| = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{4 \cdot 6}{15^2} = 7.11 \cdot 10^{-12} \text{ N}$$

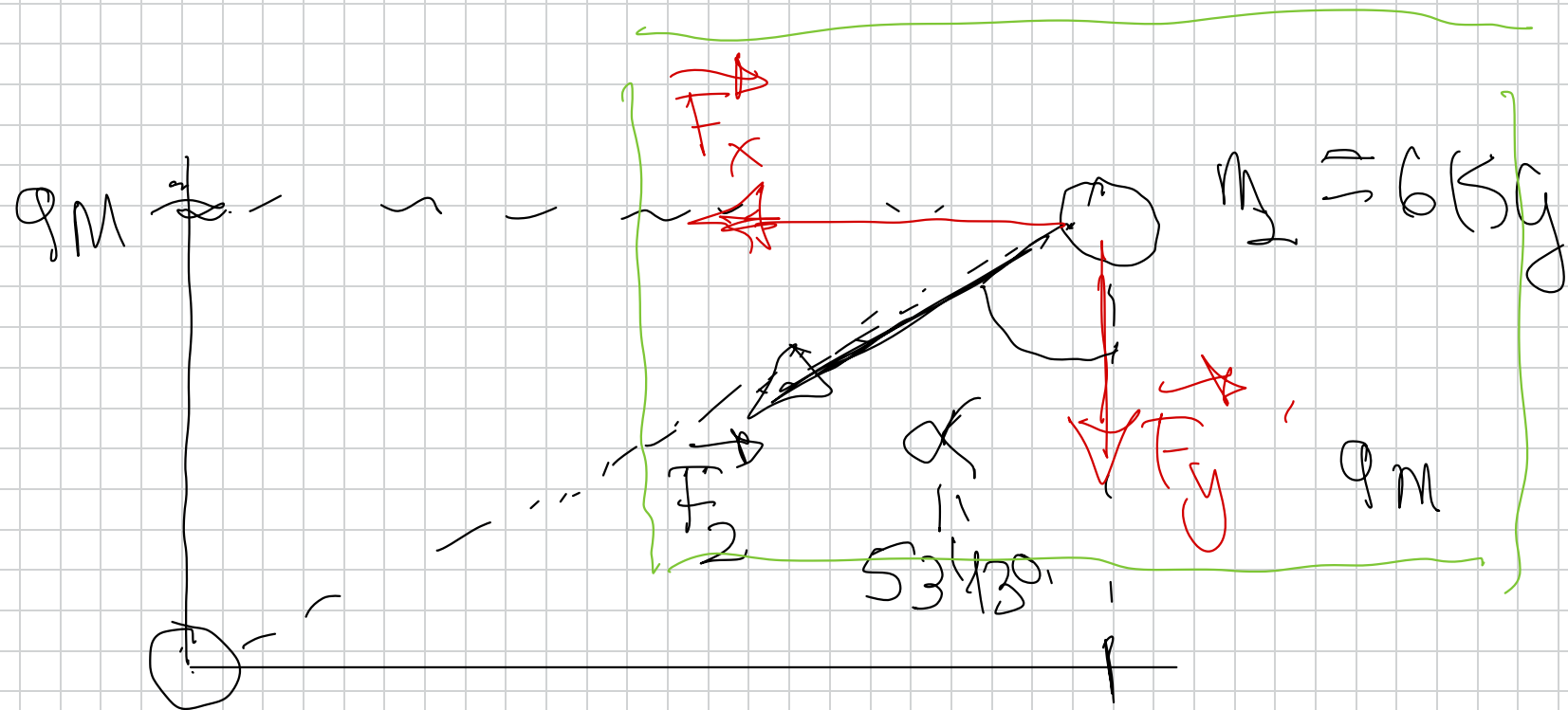


$$\sin \alpha = \frac{\text{cat opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\alpha = \arcsin \frac{12}{15}$$

$$\sin \alpha = \frac{12}{15}$$

$$\alpha = 53^\circ 13'$$



$$m_1 = 4 \text{ kg}$$

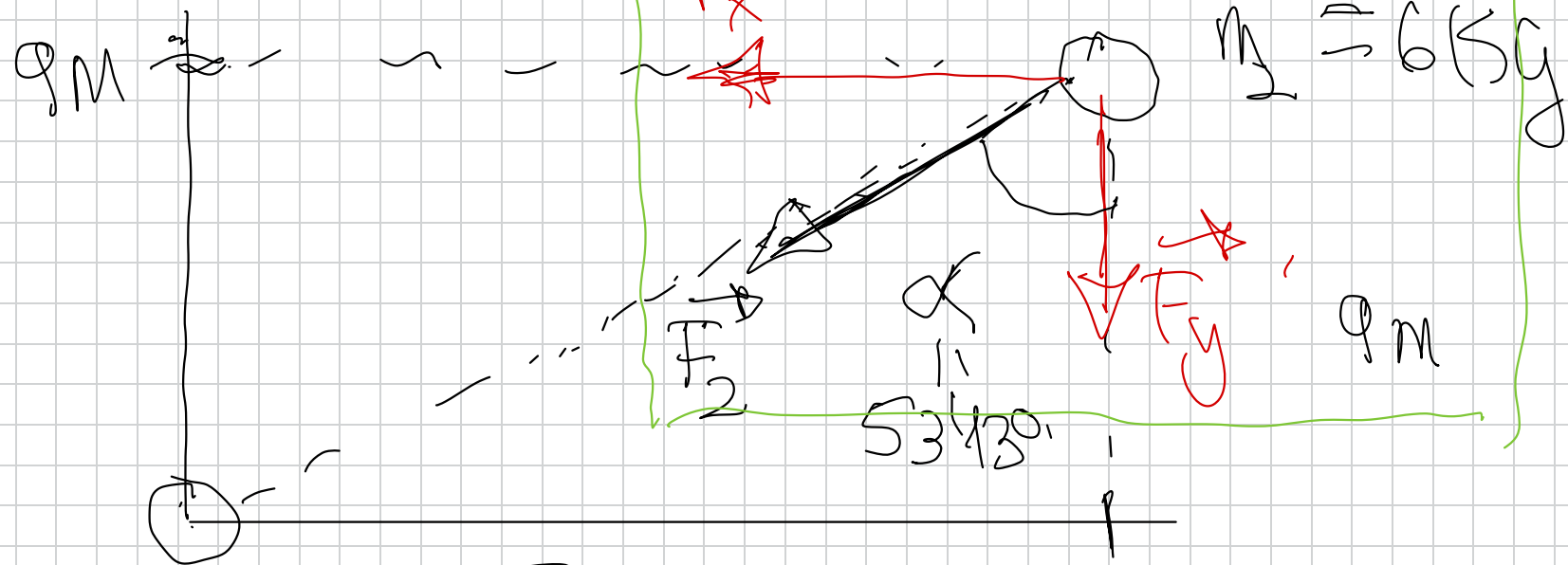
$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F} ?$$

$$F_x = F \cdot \cos \alpha$$

$$F_x = 7.11 \cdot 10^{-12} \cdot \cos 53.13^\circ$$

$$F_x = 5.68 \cdot 10^{-12} \text{ N}$$

$$F_x = 5.68 \cdot 10^{-12} \text{ (N)}$$



$$m_1 = 4 \text{ kg}$$

$$\cos \alpha = \frac{F_y}{F}$$

$$F_y = F \cdot \cos \alpha$$

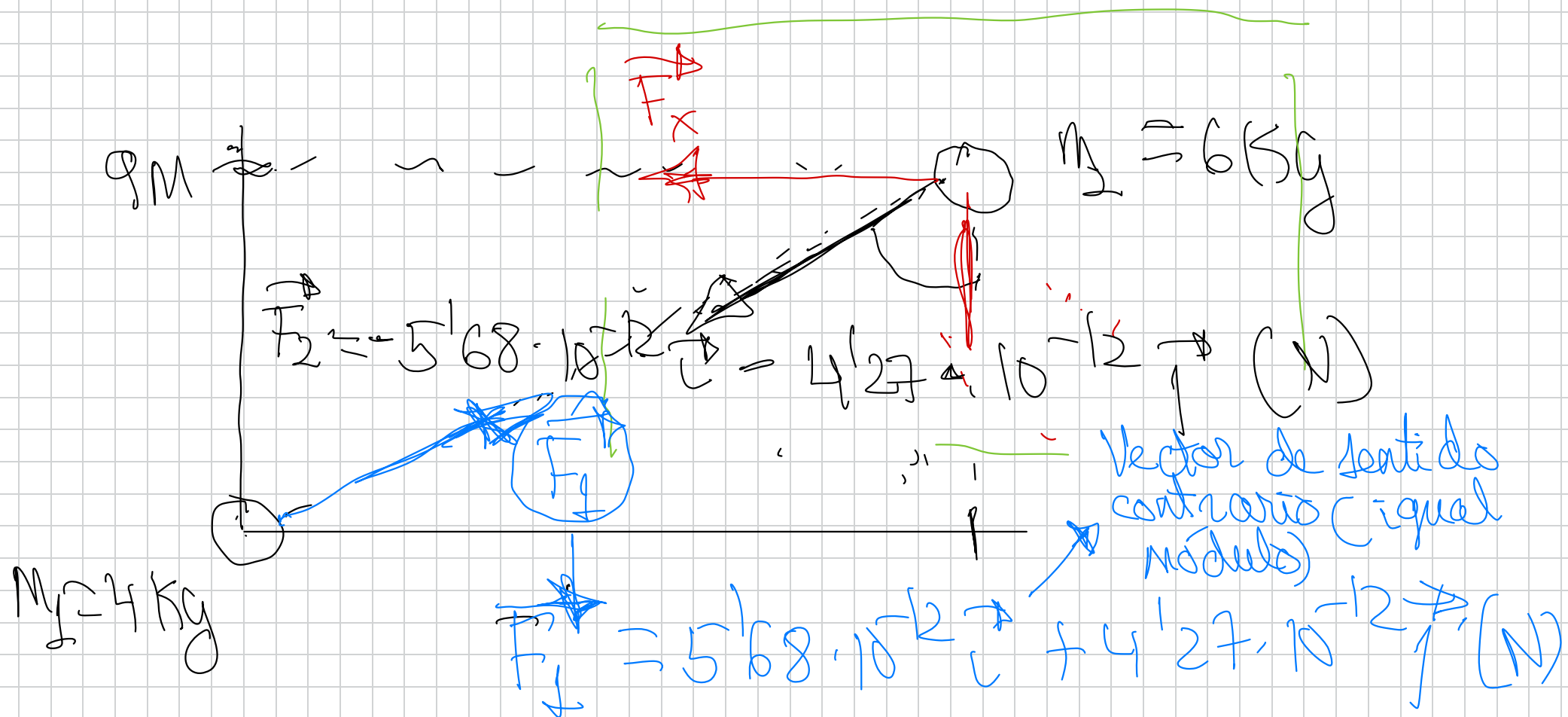
$$F_y = 7.11 \cdot 10^{-12} \cdot \cos 53.13^\circ$$

$$F_y = 4.27 \cdot 10^{-12} \text{ N}$$

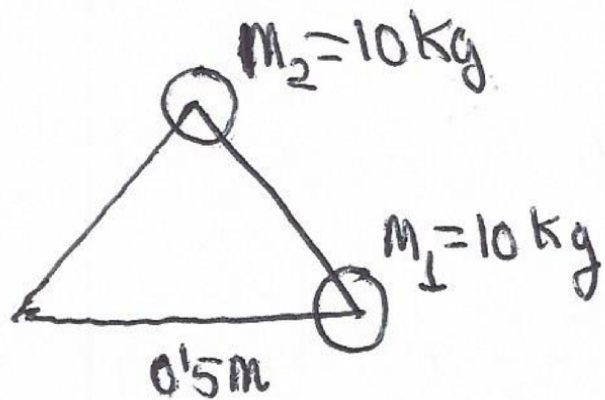
$$F_y = -4.27 \cdot 10^{-12} \text{ N}$$

$$\vec{T} = \vec{T}_x + \vec{T}_y$$

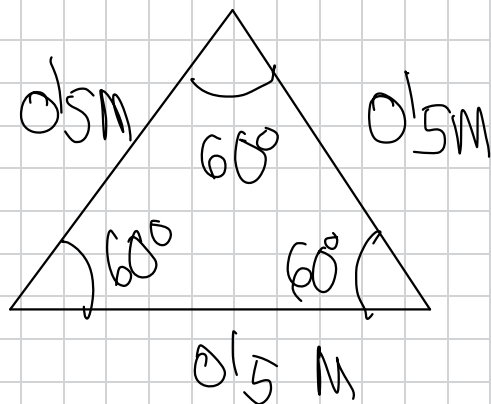
$$\vec{T} = -5'68 \cdot 10^{-12} \vec{e}_x + 4'27 \cdot 10^{-12} \vec{e}_y \quad (N)$$



- ④ Dos cuerpos de 10 kg de masa se encuentran en dos de los vértices ~~de~~ del triángulo equilátero de la figura, que posee 0'5 m de lado.

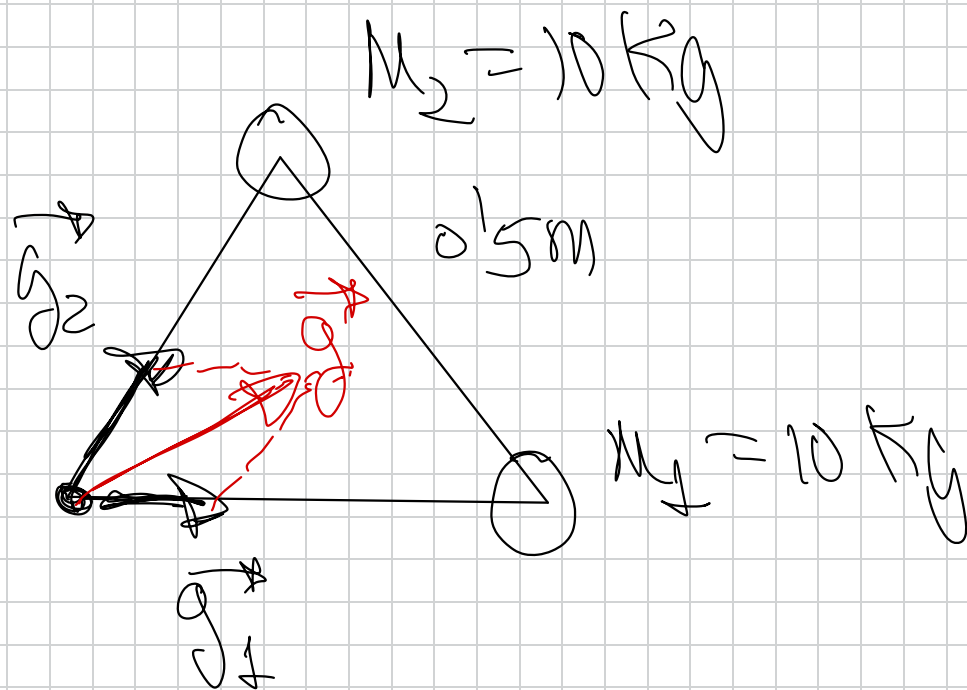


- a) Calcula el campo gravitatorio que estas dos masas generan en el tercer vértice del triángulo $G = 6'67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$.



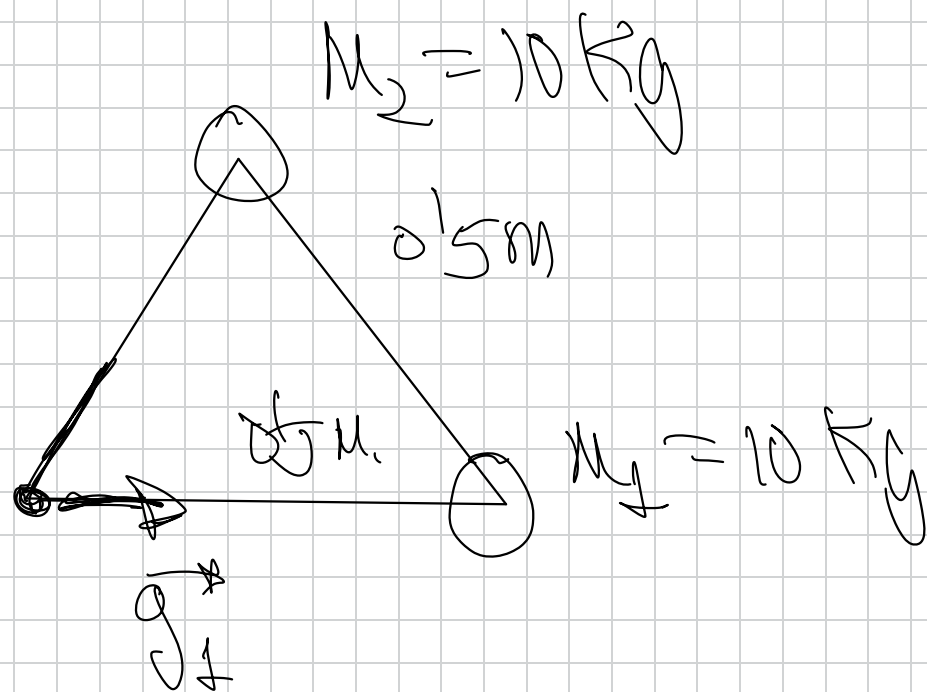
Triángulo equilátero: los tres lados son iguales y los tres ángulos son iguales

$$60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ$$



Princípio de
superposição.

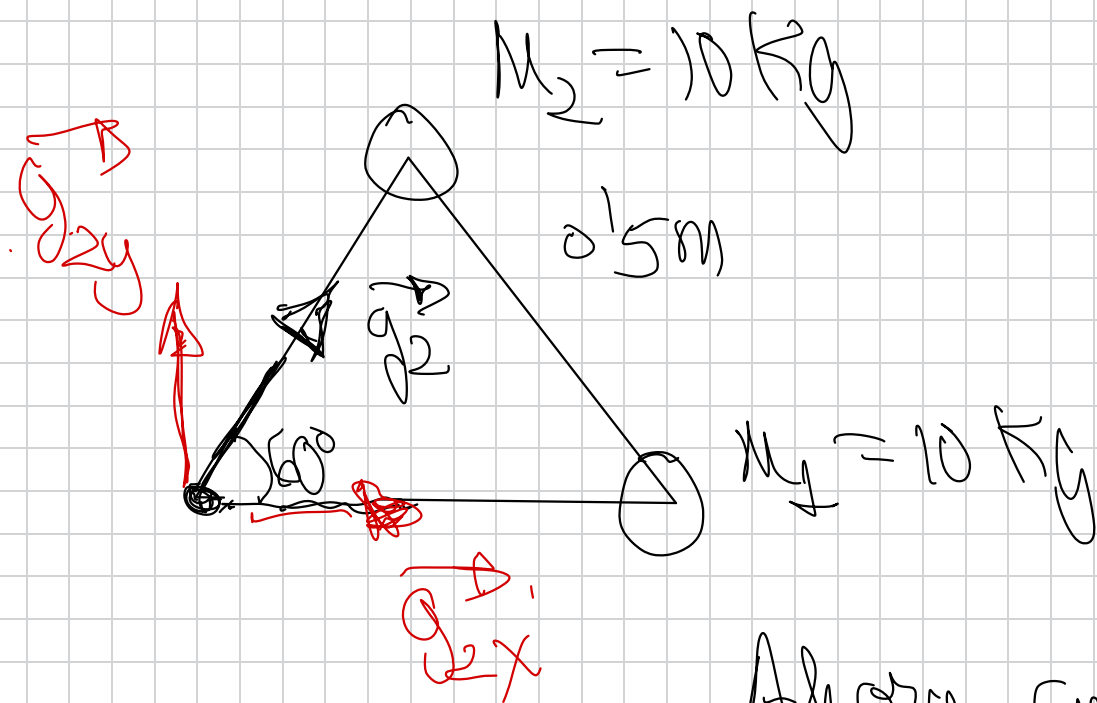
$$g = g_1 + g_2$$



Primeiro $|\vec{g}|$, calculo seu módulo

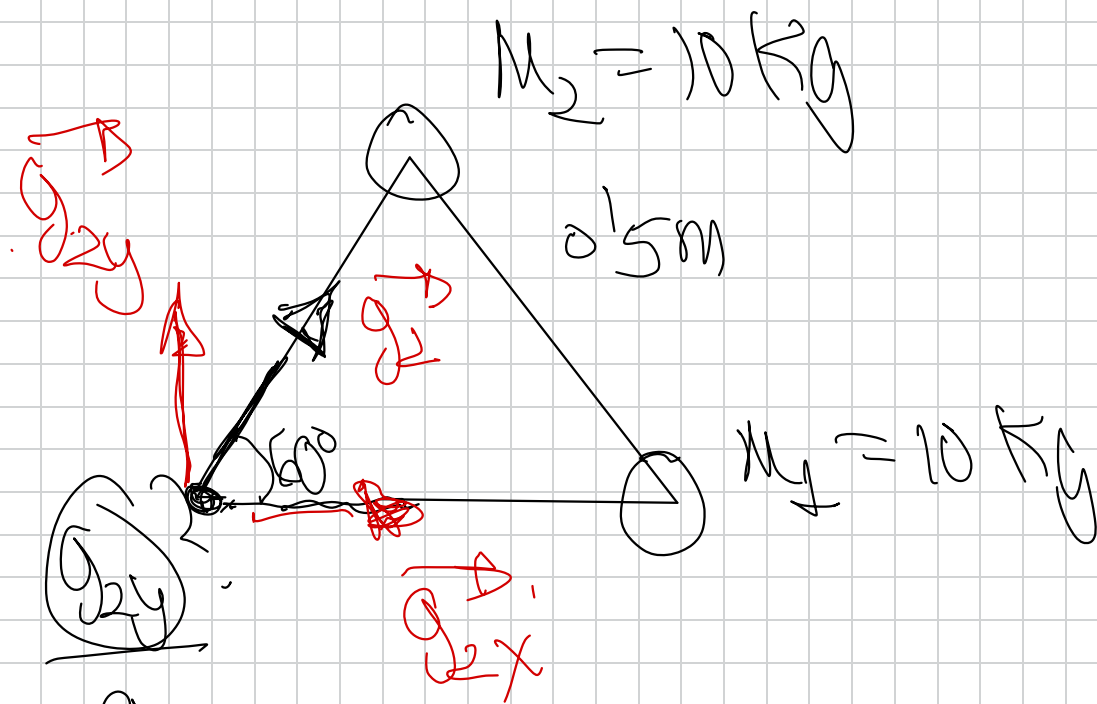
$$|\vec{g}| = G \cdot \frac{M_1}{r^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{10}{(0.5)^2} = 2.67 \cdot 10^{-9} \frac{\text{N}}{\text{s}^2}$$

$$\vec{g} = +2.67 \cdot 10^{-9} \vec{e}_y \quad \left(\frac{\text{N}}{\text{s}^2} \right)$$



Ahora calculo primero el módulo $|\vec{g}_2|$

$$|\vec{g}_2| = G \cdot \frac{m_2}{r^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{10}{(0.5)^2} = 2.67 \cdot 10^{-9} \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$



$$\sin 60^\circ = \frac{g_{2y}}{g_2}$$

$$g_{2y} = g_2 \cdot \sin 60^\circ$$

$$g_2 = 2.67 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$g_{2y} = 2.31 \cdot 10^{-9} \text{ m/s}^2$$

$$g_{2x} = +2.31 \cdot 10^{-9} \text{ m/s}^2$$

Decomposition

$$\cos 60^\circ = \frac{g_{2x}}{g_2}$$

$$g_{2x} = g_2 \cdot \cos 60^\circ$$

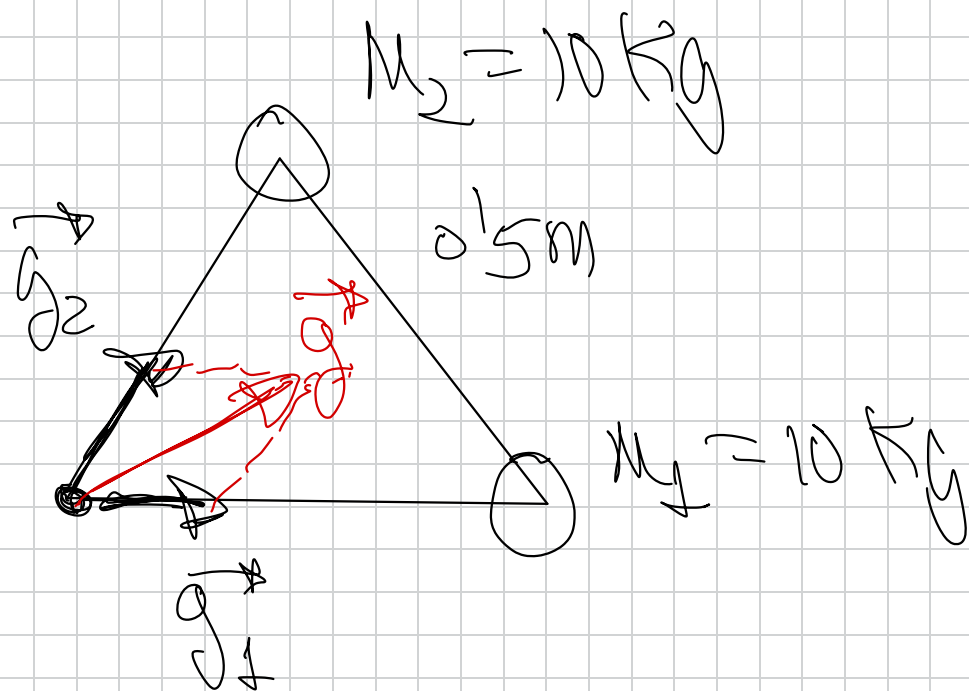
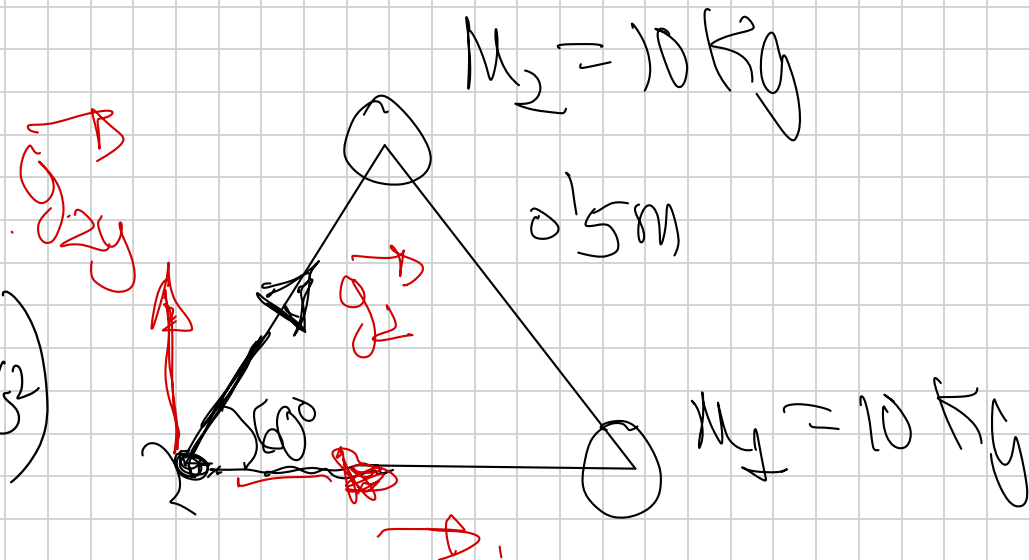
$$g_{2x} = 2.67 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{1}{2}$$

$$g_{2x} = 1.34 \cdot 10^{-9} \text{ m/s}^2$$

$$g_{2x} = +1.34 \cdot 10^{-9} \text{ m/s}^2$$

$$\vec{g} = \vec{g}_x + \vec{g}_y$$

$$\vec{g}_2 = 134 \cdot 10^{-9} \vec{i} + 231 \cdot 10^{-9} \vec{j} \left(\frac{m}{s^2} \right)$$

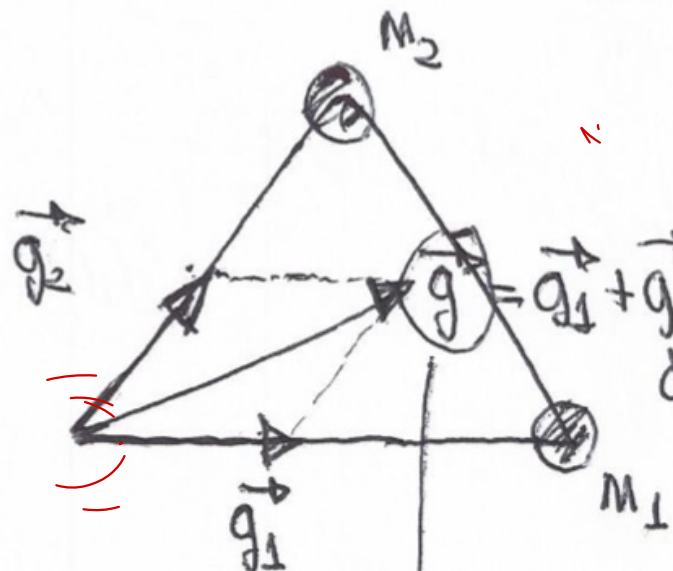


Princípio de
superposição

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$$

Uma vez $\vec{g}_1$ e $\vec{g}_2$ calculados
calcula $\vec{g}$

Situación final



Según habíamos
calculado antes

$$\boxed{\vec{g}_1 = +267 \cdot 10^{-9} \vec{e} \text{ (M/s}^2\text{)}}$$

$$\boxed{\vec{g}_2 = +134 \cdot 10^{-9} \vec{e} + 231 \cdot 10^{-9} \vec{j} \text{ (M/s}^2\text{)}}$$

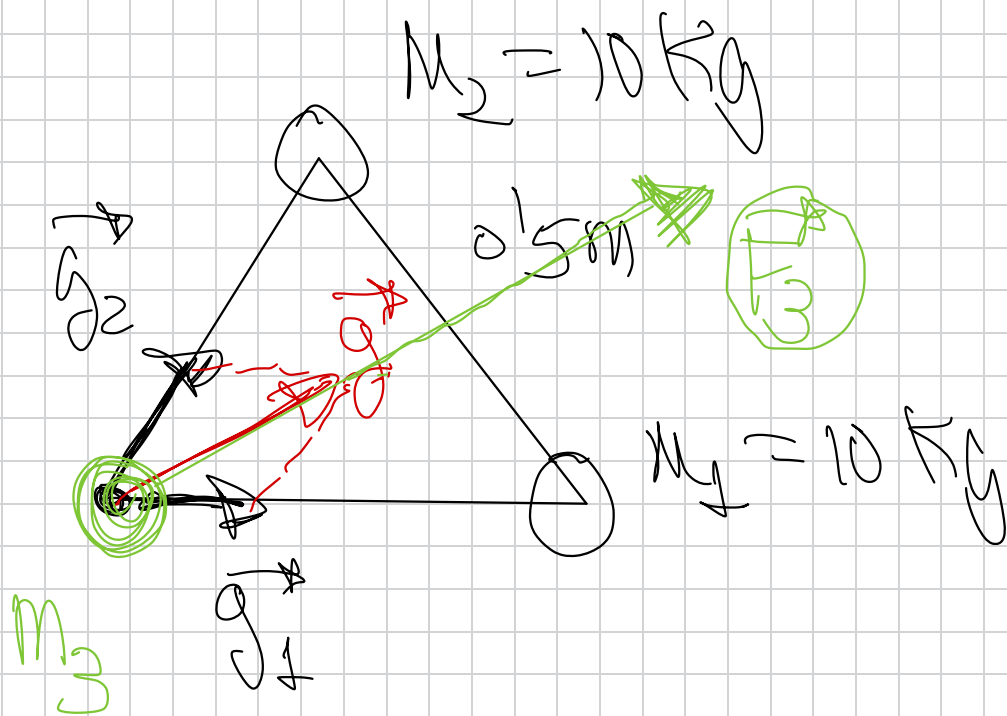
$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = +267 \cdot 10^{-9} \vec{e} + 134 \cdot 10^{-9} \vec{e} + 231 \cdot 10^{-9} \vec{j}$$

$$\boxed{\vec{g} = 401 \cdot 10^{-9} \vec{e} + 231 \cdot 10^{-9} \vec{j} \text{ (M/s}^2\text{)}}$$

Para calcular el módulo de $\vec{g}$ y saber el valor
del campo gravitatorio

$$\boxed{|\vec{g}| = g = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(401 \cdot 10^{-9})^2 + (231 \cdot 10^{-9})^2} = 462 \cdot 10^{-9} \text{ M/s}^2}$$

No lo pide el ejercicio, pero al situar una hipotética tercera masa m_3 en el punto en donde existe $\vec{g}$, experimentaríamos la fuerza $\vec{F}_3$ del dibujo



$$\vec{F}_3 = m_3 \cdot \vec{g}$$

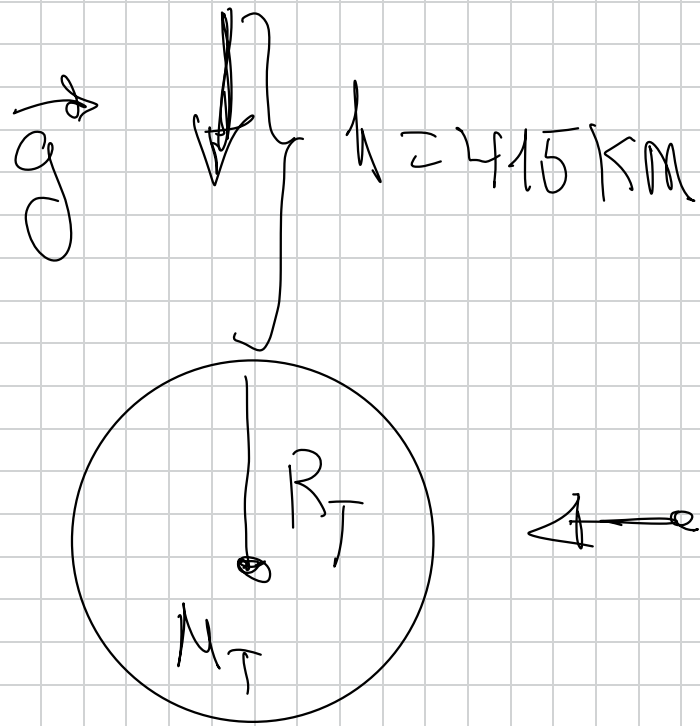
DUDAS DE LOS EJERCICIOS QUE
MANDÉ EL JUEVES

214

(14-R) a) La Estación Espacial Internacional orbita en torno a la Tierra a una distancia de 415 km de su superficie. Calcule el valor del campo gravitatorio que experimenta un astronauta a bordo de la estación.

b) Calcule el periodo orbital de la Estación Espacial Internacional.

$$g = 9,8 \text{ m s}^{-2} ; R_T = 6370 \text{ km}$$



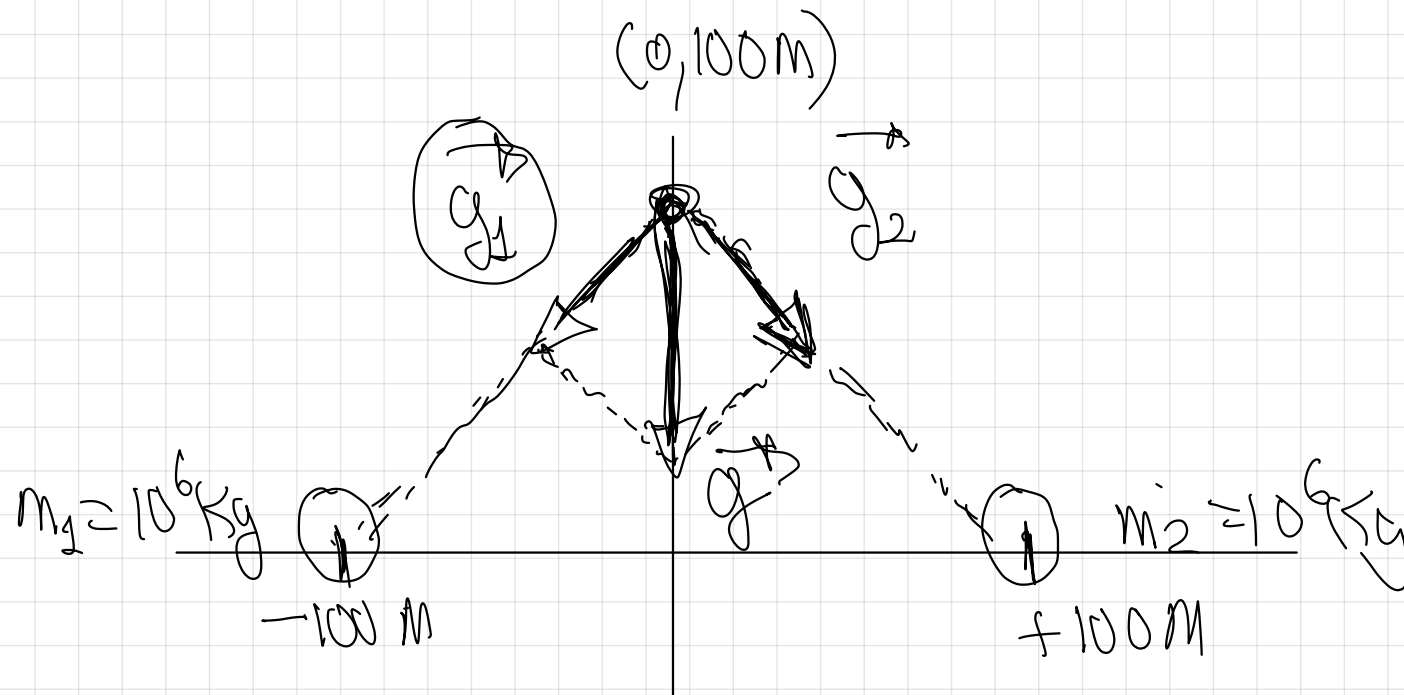
$$|\vec{g}| = g$$

$$g = G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)^2}$$

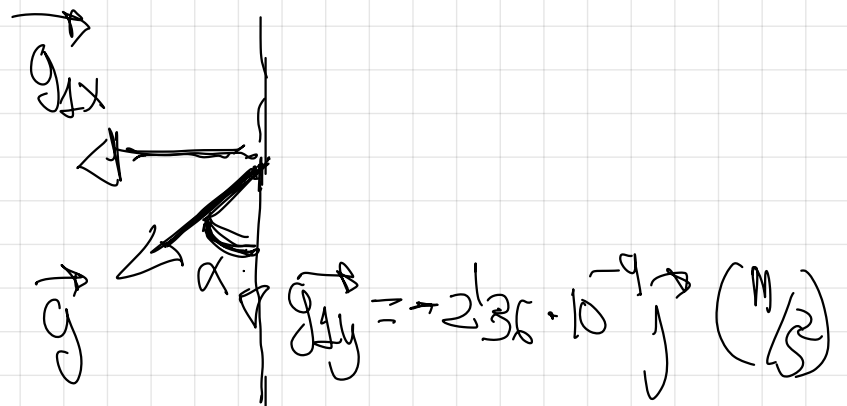
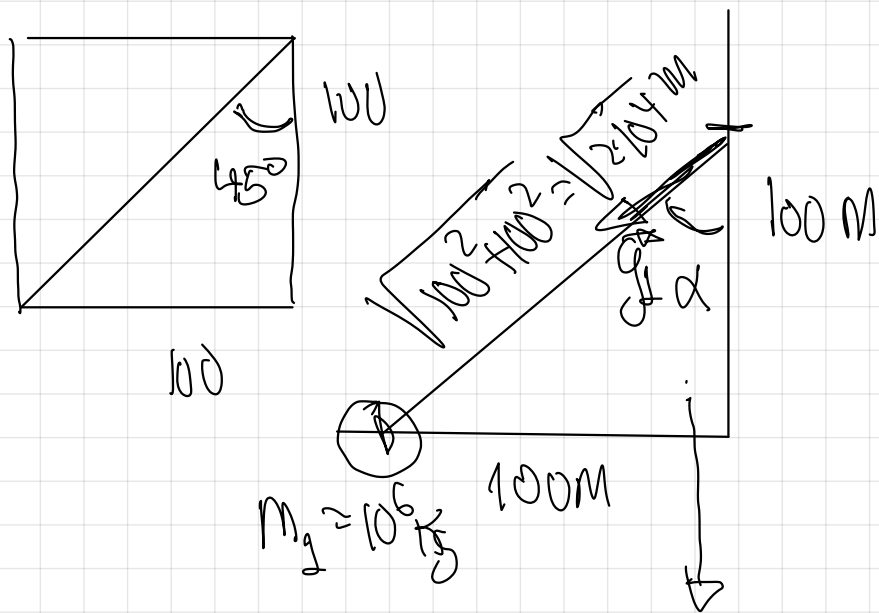
5) Dos masas puntuales de 10^6 kg cada una, se encuentran en los puntos $(-100, 0) \text{ m}$ y $(100, 0) \text{ m}$ respectivamente.

a) Calcula el campo gravitatorio ($\vec{g}$) en el punto $(0, 100) \text{ m}$ y su módulo

b) Si en el punto $(0, 100) \text{ m}$ situásemos una masa de 10 kg , hallar la fuerza (vector y módulo) que experimentaría dicha masa. $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$.



$$|\vec{g}_1| = G \cdot \frac{m_1}{r^2} \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{10^6}{(\sqrt{2} \cdot 10^4)^2} = 3.34 \cdot 10^{-9} \text{ m/s}^2$$



$$\cos 45^\circ = \frac{|\vec{g}_{1y}|}{|\vec{g}_1|}$$

$$\tan \alpha = \frac{100 \text{ m}}{100 \text{ m}} = 1.$$

$$\alpha = \arctan 1 = 45^\circ.$$

$$|\vec{g}_{1y}| = |\vec{g}_1| \cdot \cos 45^\circ = 3.34 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$|\vec{g}_{1y}| = 2.35 \cdot 10^{-9} \text{ m/s}^2$$

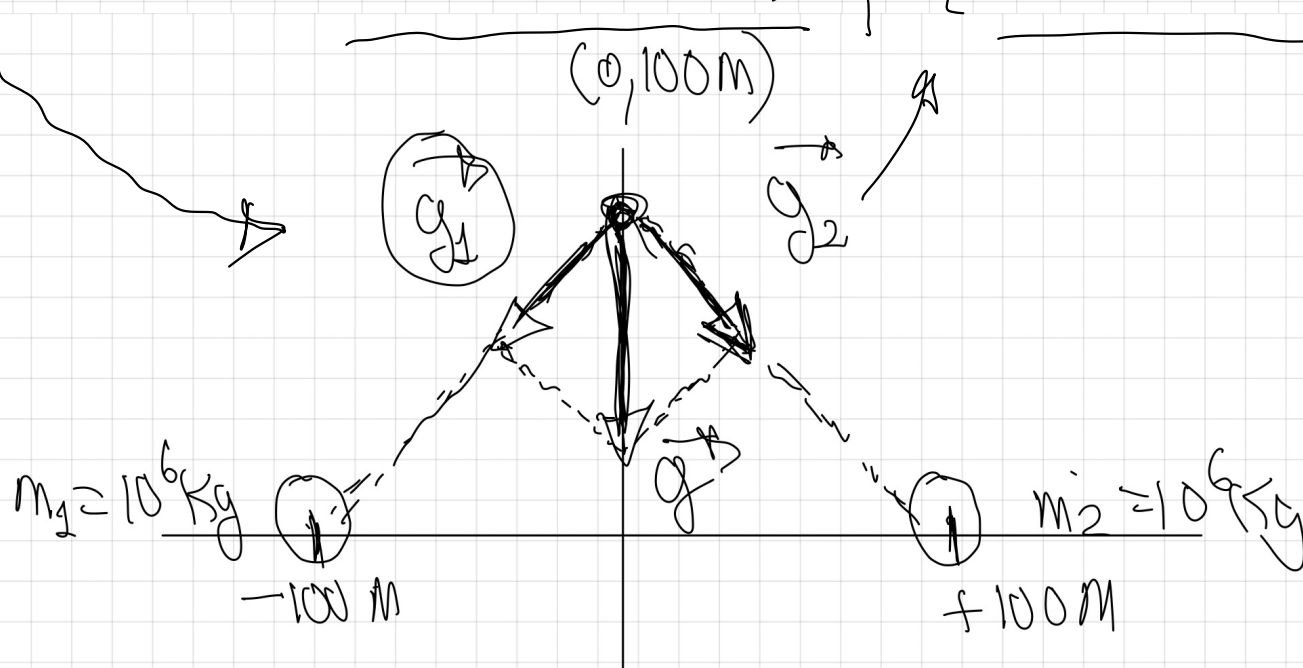
$$\vec{g}_{1x} = -236 \cdot 10^{-9} \vec{i} \quad \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)$$

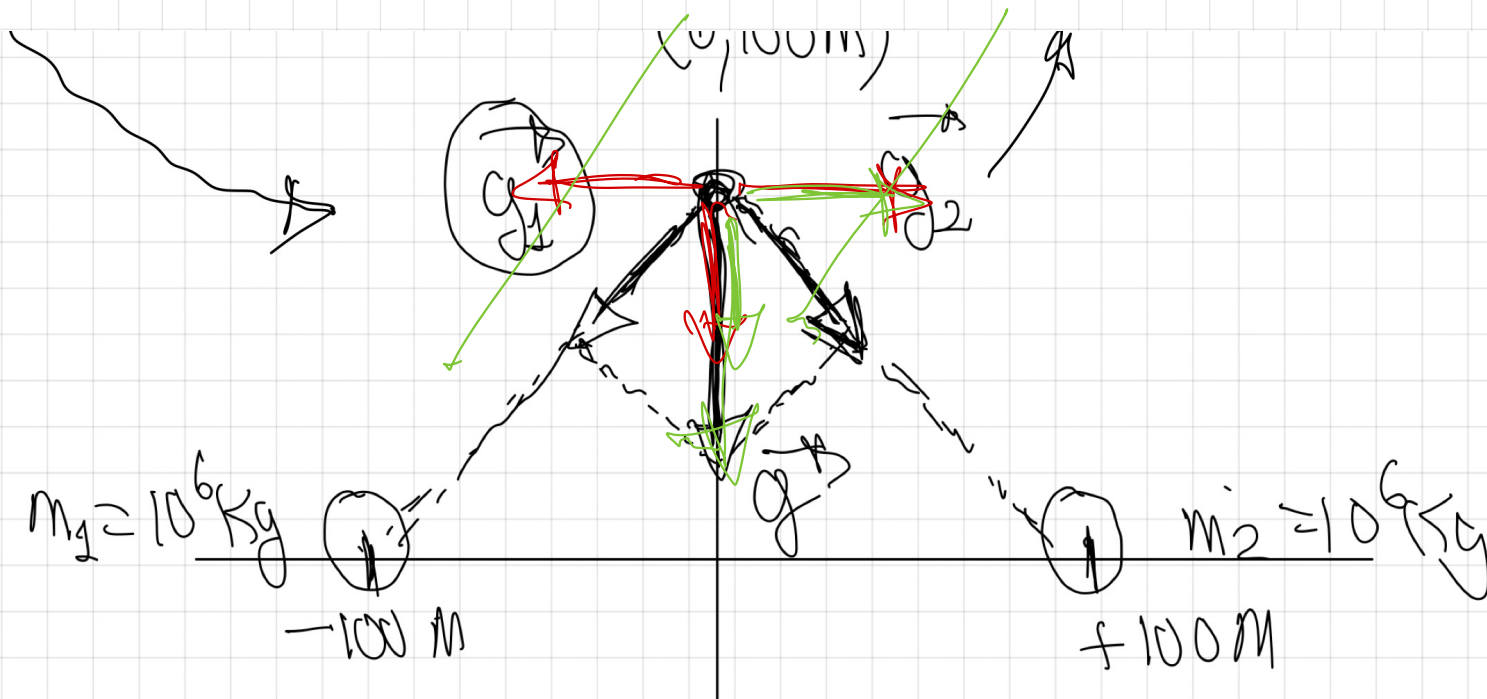


$$\vec{g}_{1y} = -236 \cdot 10^{-9} \vec{j} \quad \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)$$

$$\vec{g}_1 = -236 \cdot 10^{-9} \vec{i} - 236 \cdot 10^{-9} \vec{j} \quad \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)$$

$$\vec{g}_2 = +236 \cdot 10^{-9} \vec{i} - 236 \cdot 10^{-9} \vec{j} \quad \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)$$





$$\vec{g}_1 = -2'36 \cdot 10^{-9} \vec{i} - 2'36 \cdot 10^{-9} \vec{j} \left(\frac{\text{N}}{\text{kg}} \right) \quad \left| \quad \vec{g}_2 = +2'36 \cdot 10^{-9} \vec{i} - 2'36 \cdot 10^{-9} \vec{j} \left(\frac{\text{N}}{\text{kg}} \right) \right.$$

(m m m)

Princípio de superposição -

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = -2'36 \cdot 10^{-9} \vec{i} - 2'36 \cdot 10^{-9} \vec{j} + 2'36 \cdot 10^{-9} \vec{i} - 2'36 \cdot 10^{-9} \vec{j}$$

$$\vec{g} = -4'72 \cdot 10^{-9} \vec{j} \quad \left(\frac{m}{s^2} \right)$$

$$|\vec{g}| = 4'72 \cdot 10^{-9} \quad \left(\frac{m}{s^2} \right)$$

c)

$m = 10 \text{ kg}$

$\vec{g} = -4'72 \cdot 10^{-9} \vec{j} \quad \left(\frac{m}{s^2} \right)$

$\boxed{\vec{F} = m \cdot \vec{g}}$

$\vec{F} = 10 \cdot (-4'72 \cdot 10^{-9} \vec{j})$

$\vec{F} = -4'72 \cdot 10^{-8} \vec{j} \quad (N)$

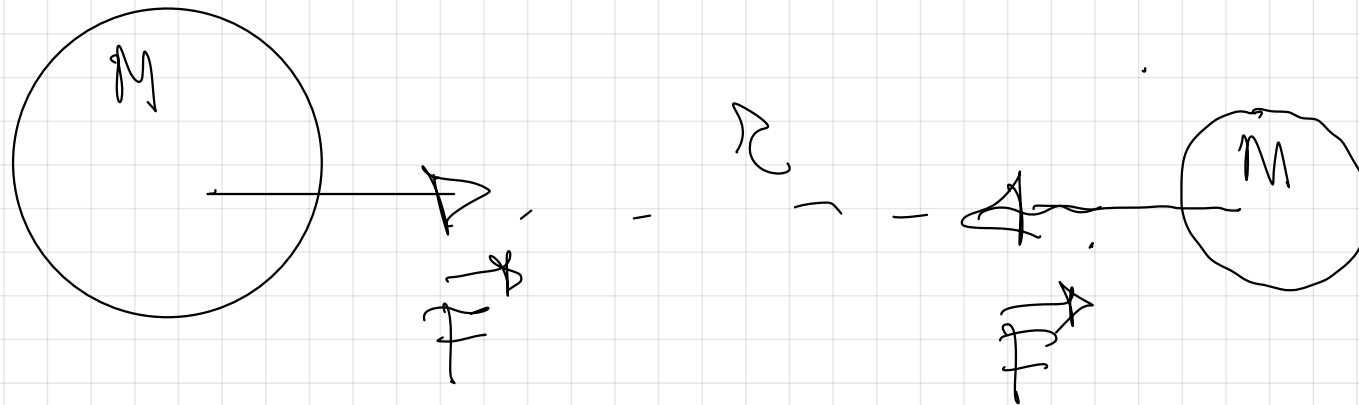
$|\vec{F}| = 4'72 \cdot 10^{-8} N$

$|\vec{F}| = m \cdot |\vec{g}|$

$|\vec{F}| = 10 \cdot 4'72 \cdot 10^{-9}$

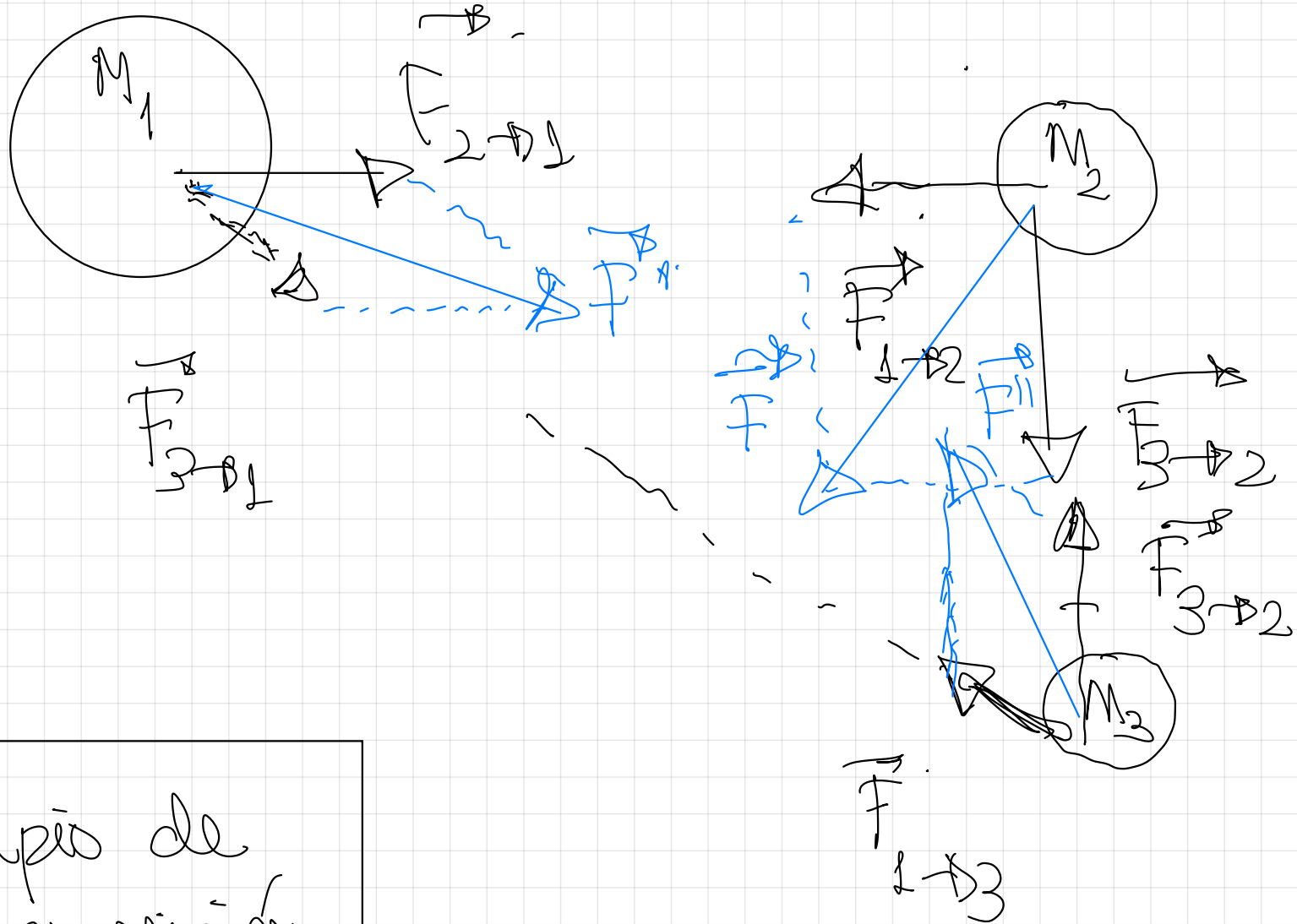
$|\vec{F}| = 4'72 \cdot 10^{-8} N$

- 54.- a) Analice las características de la interacción gravitatoria entre dos masas puntuales
b) ¿Cómo se ve afectada la interacción gravitatoria descrita en el apartado anterior si en las proximidades de las dos masas, se coloca una tercera masa, también puntual?. Haga un esquema de las fuerzas gravitatorias que actúan sobre la tercera masa.



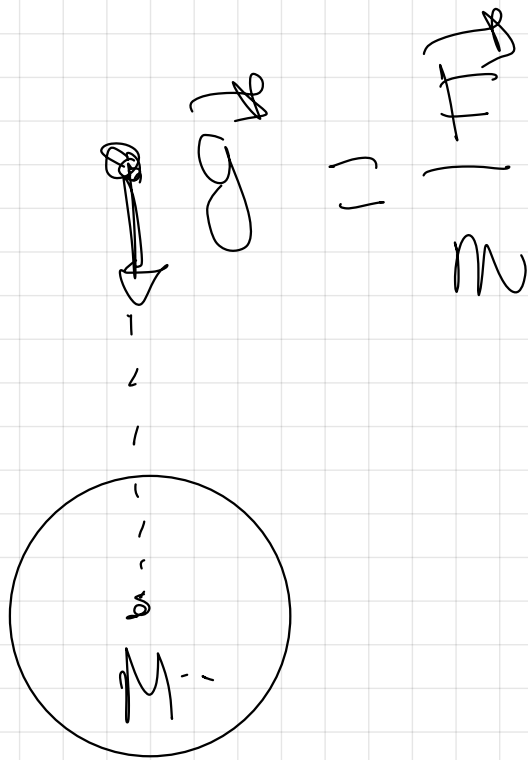
$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$

b)

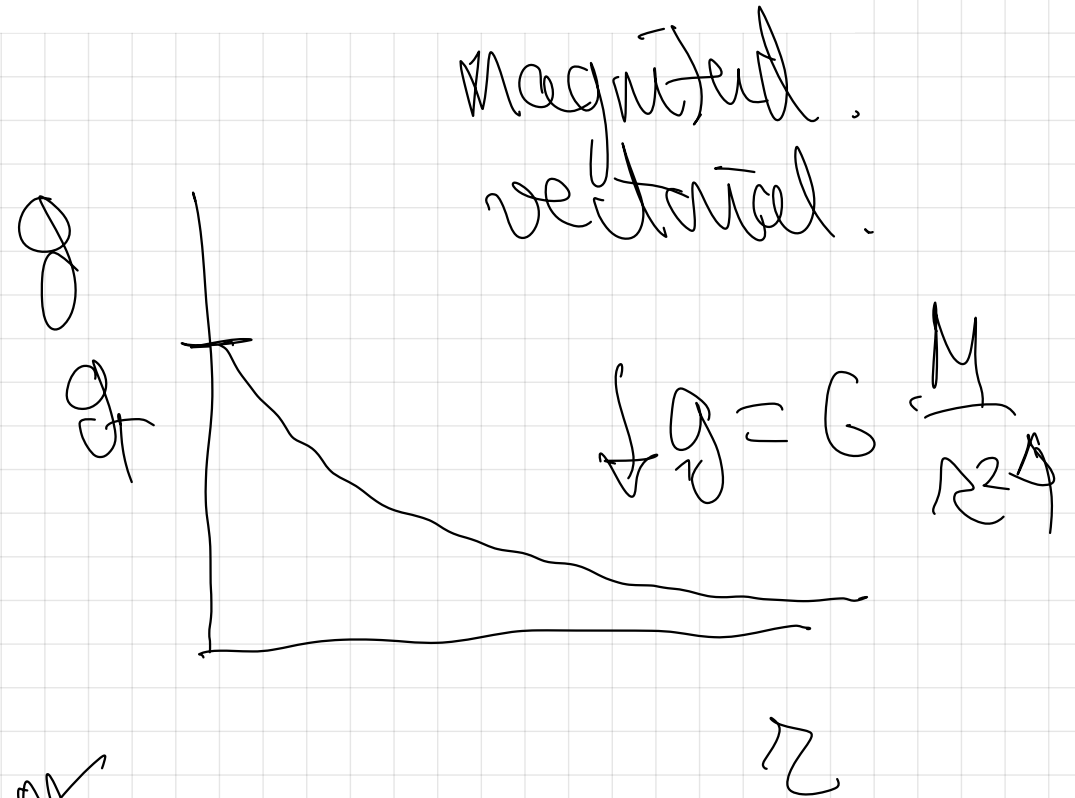


Princípio de
superposição

- 55.- a) Explique las características del campo gravitatorio creado por una masa puntual
 b) Dos partículas de masas m y $2m$ están separadas una cierta distancia. Explique qué fuerza actúa sobre cada una de ellas y cuál es la aceleración de dichas partículas

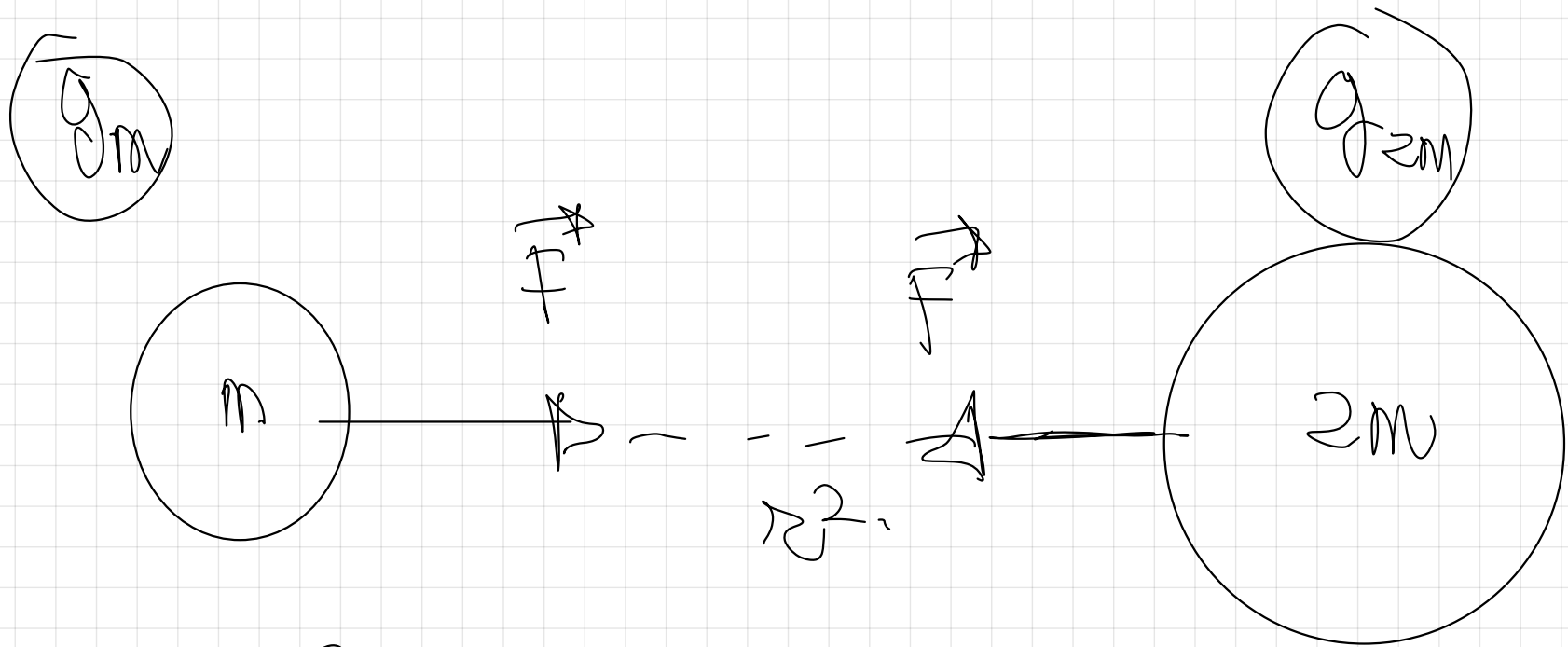


$$= \frac{F}{m}$$



$$g = \frac{G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}}{m} = \left[G \frac{M}{r^2} \right] \left(\frac{m}{m} = \frac{m}{1} \right)$$

- 55.- a) Explique las características del campo gravitatorio creado por una masa puntual
b) Dos partículas de masas m y $2m$ están separadas una cierta distancia. Explique qué fuerza actúa sobre cada una de ellas y cuál es la aceleración de dichas partículas



$$F = G \cdot \frac{m \cdot 2m}{r^2}$$

$$F = G \cdot \frac{2m^2}{r^2}$$

$$F = G \cdot \frac{m \cdot 2m}{r^2}$$

$$F = G \cdot \frac{2m^2}{r^2}$$

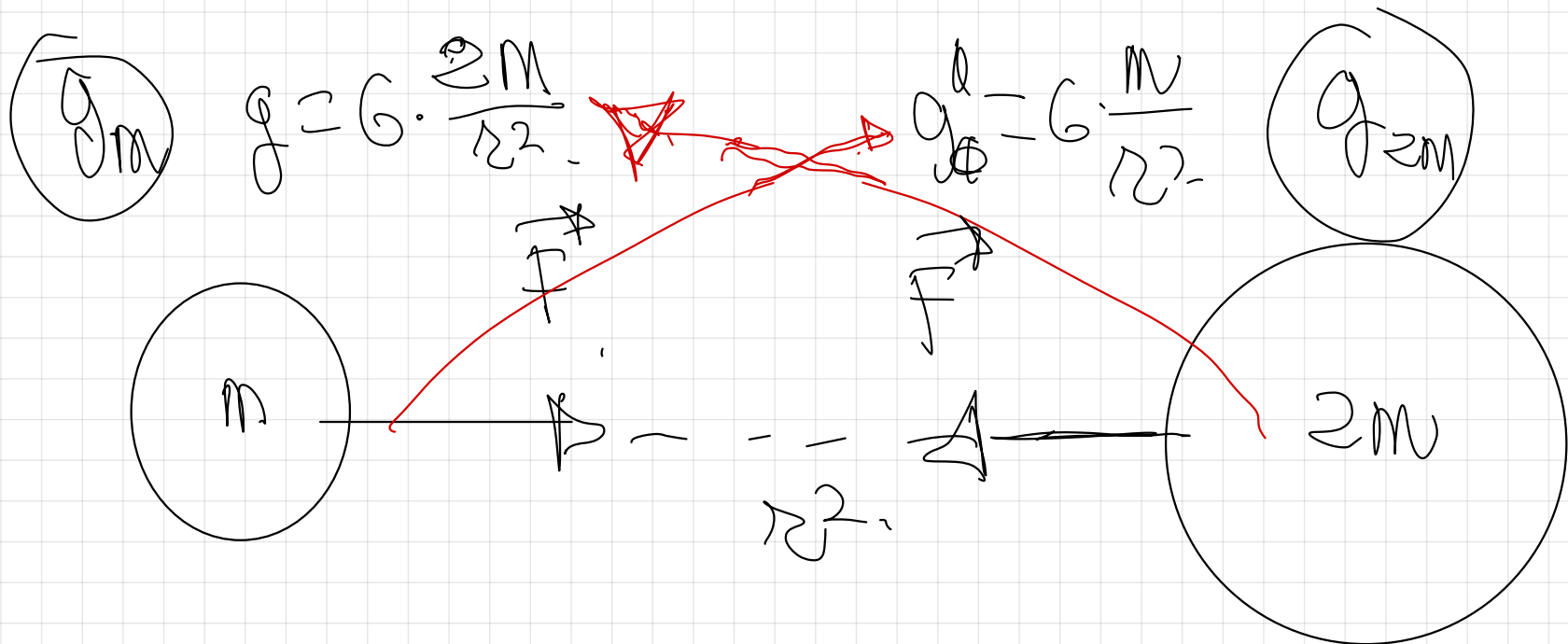
$$g_m = \frac{F}{m} = \frac{G \cdot \frac{2m^2}{r^2}}{m}$$

$$g_{2m} = \frac{F}{2m} = \frac{G \cdot \frac{2m^2}{r^2}}{2m}$$

$$g_m = G \cdot \frac{2M}{r^2}$$

~~acceleration of both~~

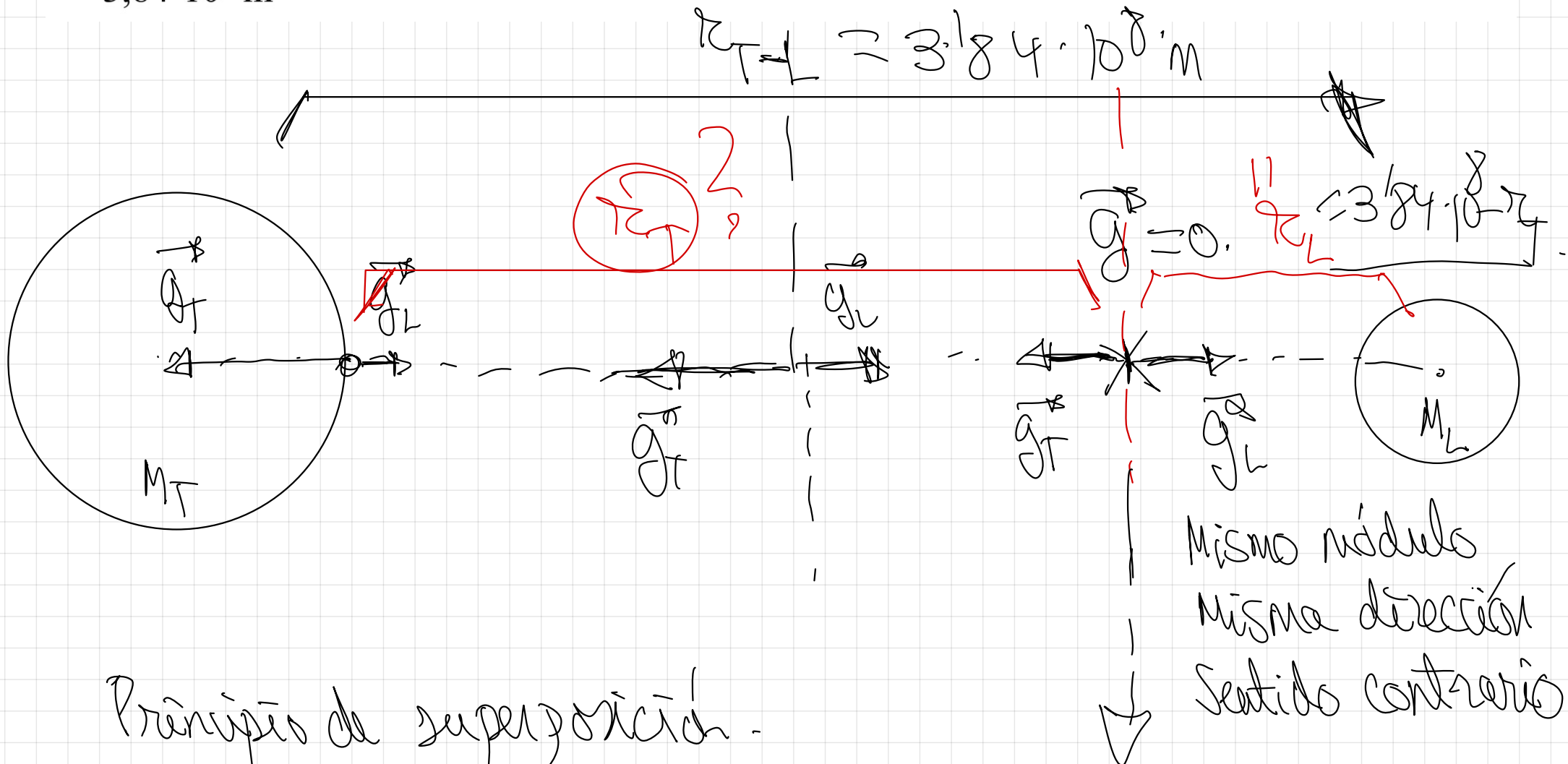
$$g_{2m} = G \cdot \frac{M}{r^2}$$



$$g = G \cdot \frac{M}{r^2}$$

56.- ¿A qué distancia del centro de la Tierra se compensaría el campo gravitatorio terrestre con el Lunar?

$M_T = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ Kg}$, $M_L = 7,35 \cdot 10^{22} \text{ Kg}$. Distancia Tierra-Luna (centro a centro) es de $3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$



$$\vec{g} = \vec{g}_T + \vec{g}_L \rightarrow 0$$

$$|\vec{g}_T| = |\vec{g}_L|$$

$$G \cdot \frac{M_T}{r_T^2} = G \cdot \frac{M_L}{r_L^2}$$

$$\cancel{G} \cdot \frac{M_T}{r_T^2} = \cancel{G} \cdot \frac{M_L}{(3.84 \cdot 10^8 - r_T)^2} \quad r_T^2$$

$$\sqrt{\frac{M_T}{r_T^2}} = \sqrt{\frac{M_L}{(3.84 \cdot 10^8 - r_T)^2}}$$

$$\frac{\sqrt{M_T}}{r_T} = \frac{\sqrt{M_L}}{(3.84 \cdot 10^8 - r_T)}$$

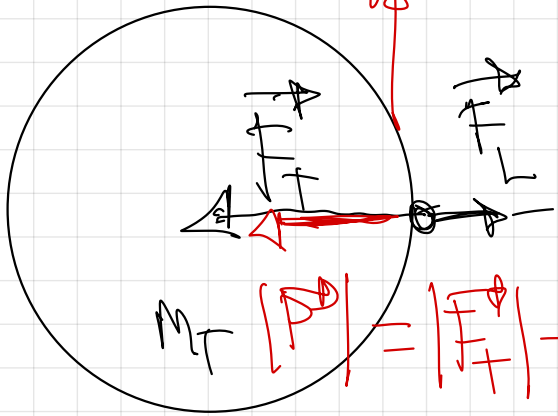
$$r_T = 3.46 \cdot 10^8 \text{ m}$$

pag 28.

A esa distancia desde el pto al centro de la tierra se cumple que $\vec{g} = 0$,

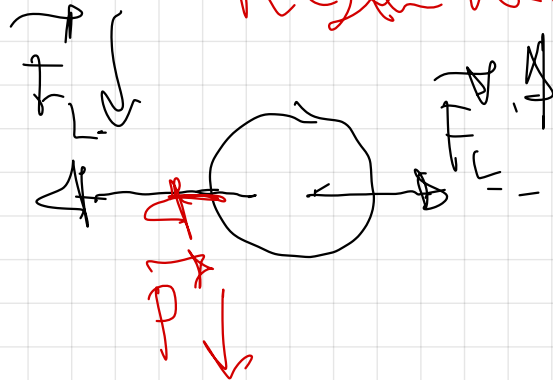
- > **23.-** Describir cualitativamente el cambio de peso que sufre una nave espacial de masa m en un viaje de la Tierra a la Luna. Suponer que la Tierra y la Luna se encuentran en reposo y que la nave se mueve según la dirección que une sus centros.

El peso es
máxima



$$M_T |P| = |F_T| + |F_L|$$

al aumentar el
peso disminuye
hasta donde
es

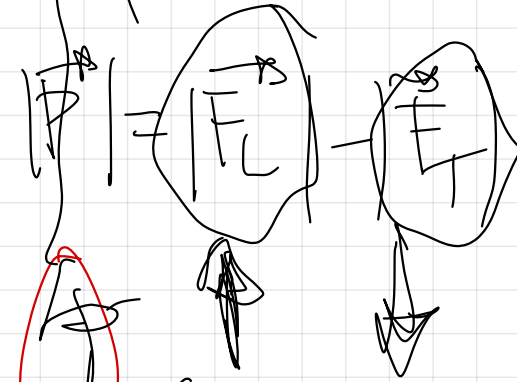
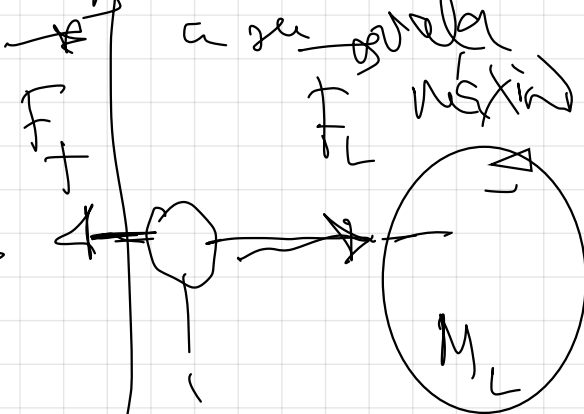


$$P = 0$$

$$P = F_T - F_L$$

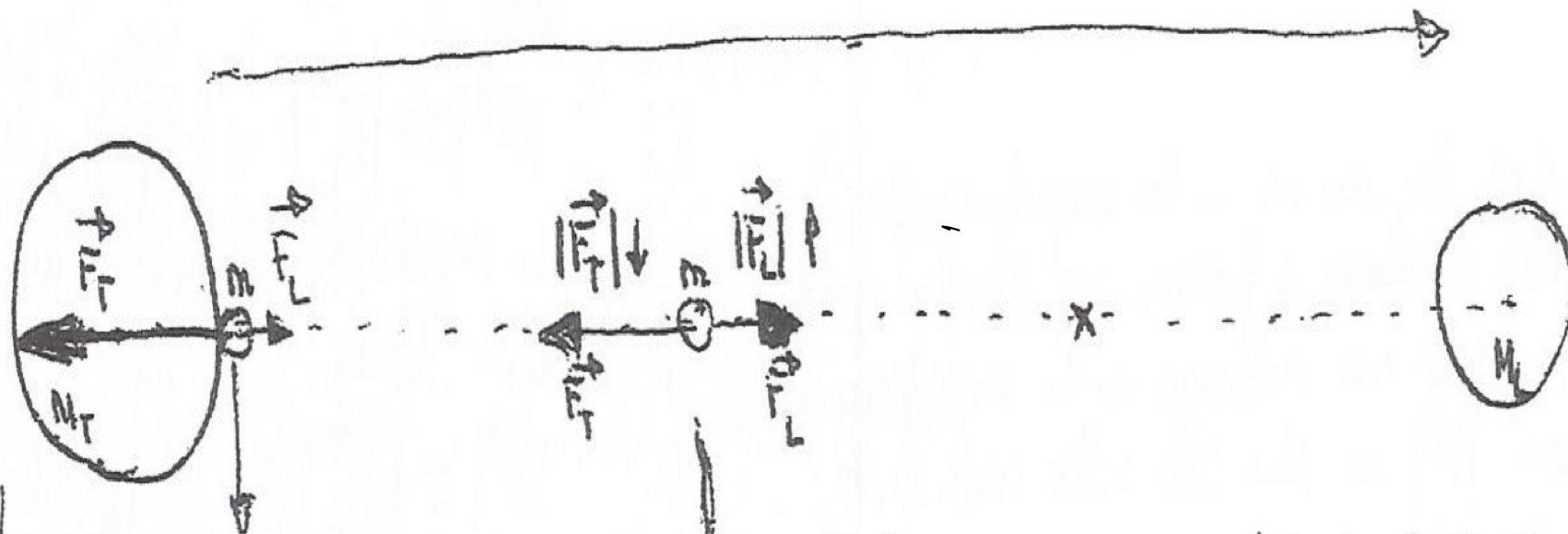
$$S \text{ igual} - \uparrow G \cdot \frac{M \cdot M}{2}$$

El peso vuelve a
aumentar sin llegar
a su valor
máximo



$$|P| = |F_T| - |F_L|$$

23



$$F = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

⇒ En la superficie terrestre
 $|\vec{F}_T| > |\vec{F}_L|$, ya que
 $M_T > M_L$ y está mas cercano
 a la Tierra (r menor), siendo
 su peso máximo en este caso

$$|\vec{F}| = |\vec{F}_T| - |\vec{F}_L|$$

⇒ Conforme nos vamos alejando de la Tierra,
 $|\vec{F}_T|$ disminuye al ser mayor la distancia a
 la Tierra, mientras que $|\vec{F}_L|$ aumenta
 al ser menor la distancia a la Luna,
 $|\vec{F}_T|$ sigue siendo mayor que $|\vec{F}_L|$ pero
 el peso total sería menor que en el caso
 anterior: $|\vec{F}| = |\vec{F}_T| \downarrow - |\vec{F}_L| \uparrow = \text{menor}$

(23) (continuación)



$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$



Conforme nos alejamos de la Tierra y nos acercamos a la luna $|\vec{F}_T|$ sigue disminuyendo y $|\vec{F}_L|$ sigue aumentando, hasta que se llegue a un punto más cercano a la luna en donde $|\vec{F}_T| = |\vec{F}_L|$ (igual dirección y sentido contrario los dos vectores), en dicho punto, el peso o fuerza resultante sobre la masa m será cero

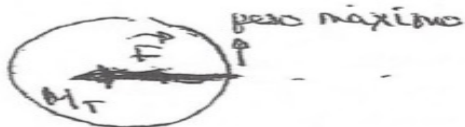
$$|\vec{F}| = |\vec{F}_T| - |\vec{F}_L| = 0$$



$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$

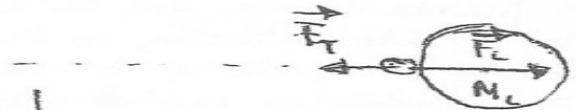


Hasta llegar de nuevo a la superficie de la luna el peso ~~se hace~~ o fuerza resultante vuelve a aumentar, pero sin embargo en la superficie de la luna el peso $|\vec{F}|$ no será tan alto como en la superficie terrestre.



Resumiendo el peso total:

$\vec{F}$ disminuye hasta hacerse cero
disminuye

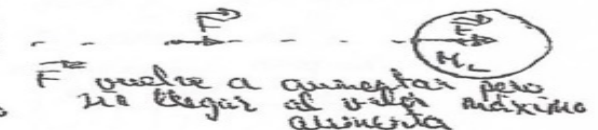


A partir de este punto, seguimos acercándonos a la luna y alejándonos de la Tierra, luego $|\vec{F}_T|$ sigue disminuyendo y $|\vec{F}_L|$ sigue aumentando, en este caso ya ocurre que $|\vec{F}_L| > |\vec{F}_T|$, luego el peso resultante en este caso será

$$|\vec{F}| = |\vec{F}_L| - |\vec{F}_T|$$

De aquí hasta llegar a la superficie de la luna

$|\vec{F}| = |\vec{F}_L| \uparrow - |\vec{F}_T| \downarrow$, luego el peso total aumenta.



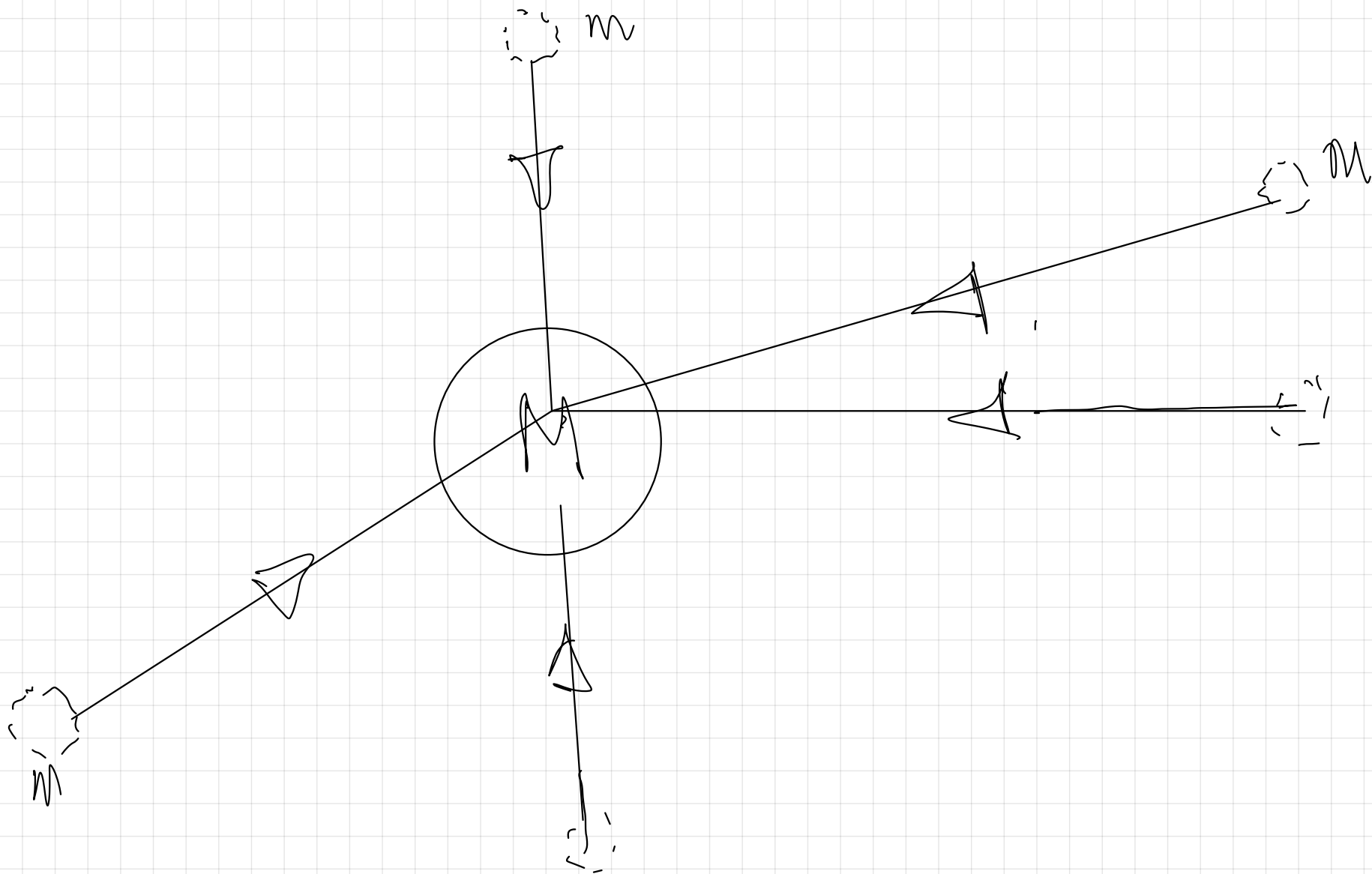
$\vec{F}$ vuelve a aumentar al valor máximo

pag 4 del libro.

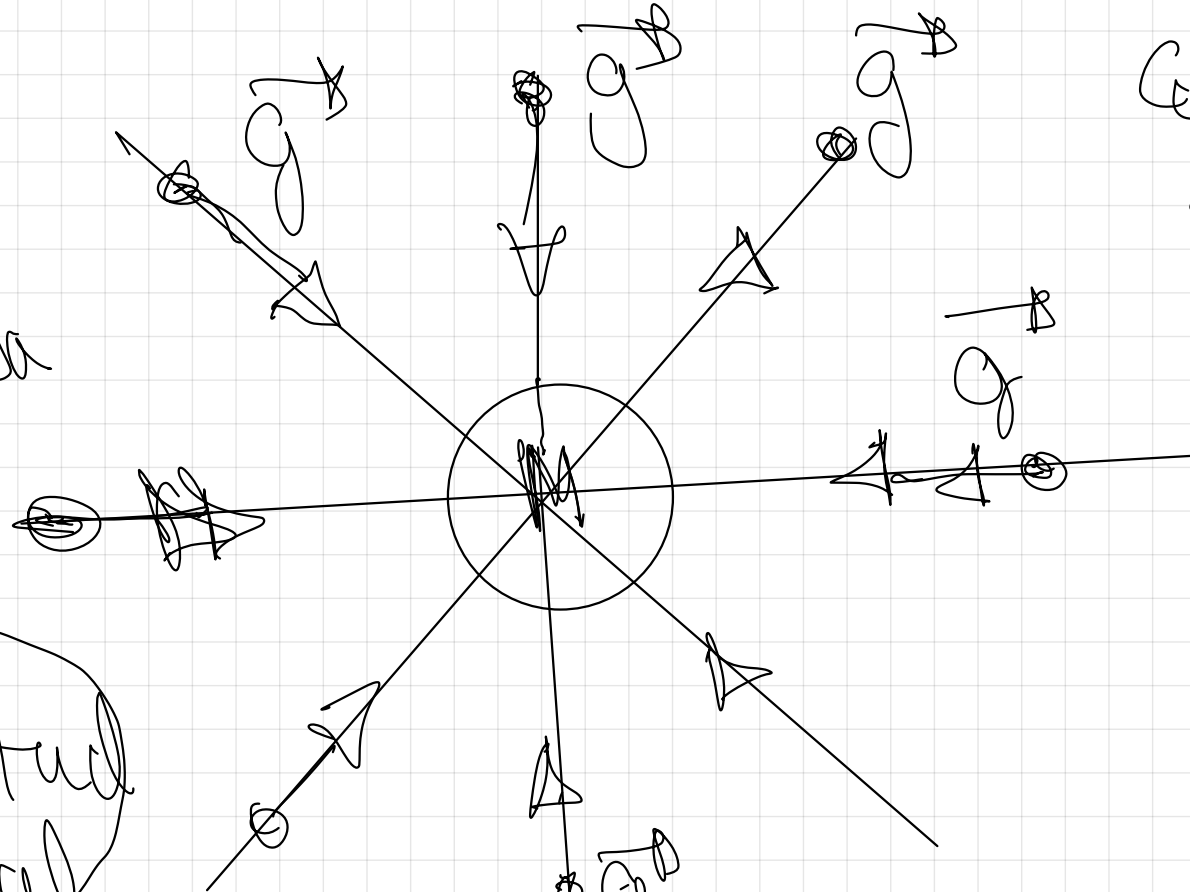
Campo gravitatorio creado por una masa puntual.

Concepto muy importante:

Las líneas de campo son las hipotéticas trayectorias que seguiría una masa m abandonada en reposo en el interior (en el seno) de un campo gravitatorio.



líneas de campo creado por una masa M



Campo gravitatorio $\vec{g}$ creado por una masa puntual M

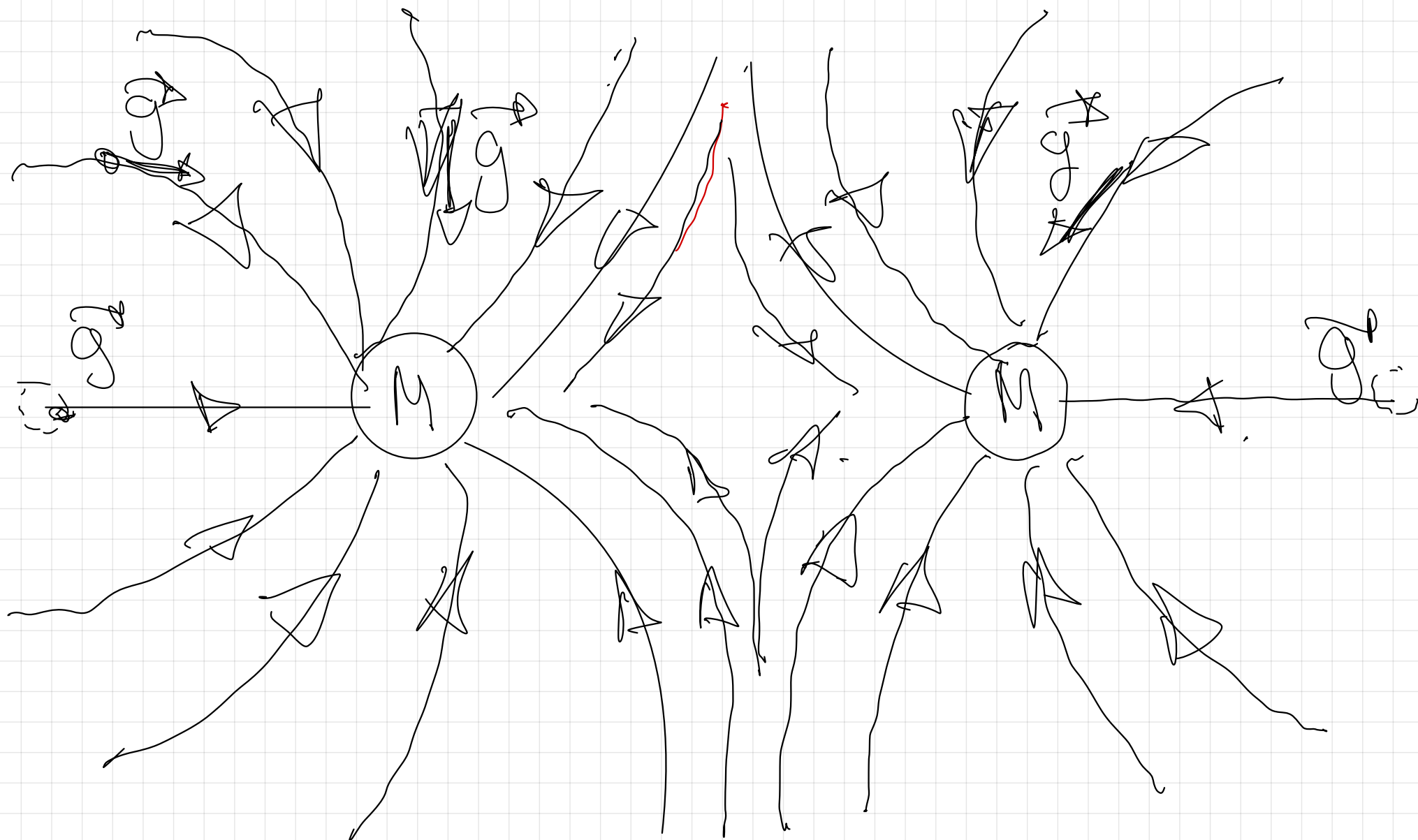
$\vec{g}$ magnitud vectorial

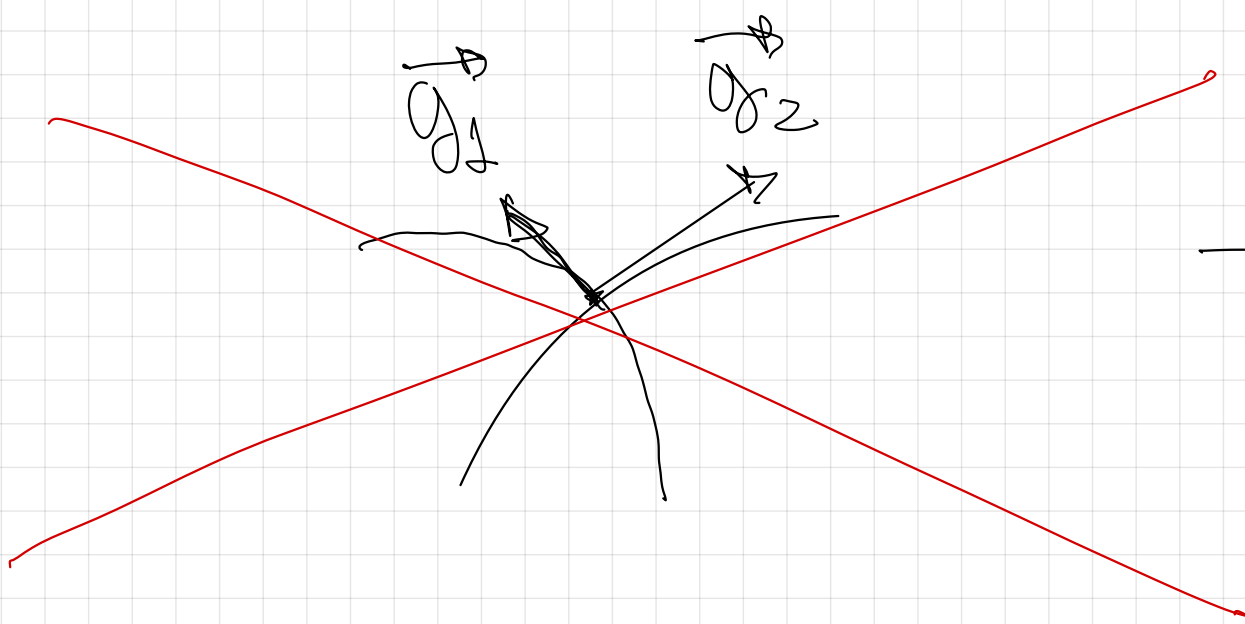
módulo $\Rightarrow$

$$|\vec{g}| = \frac{F}{m} = \frac{G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}}{m} = G \cdot \frac{M}{r^2} \left(\frac{r}{r} \cdot \frac{m}{m} \right)$$

dirección $\Rightarrow$ tangente en cada punto a las líneas de campo

sentido $\Rightarrow$ el de las líneas de campo.





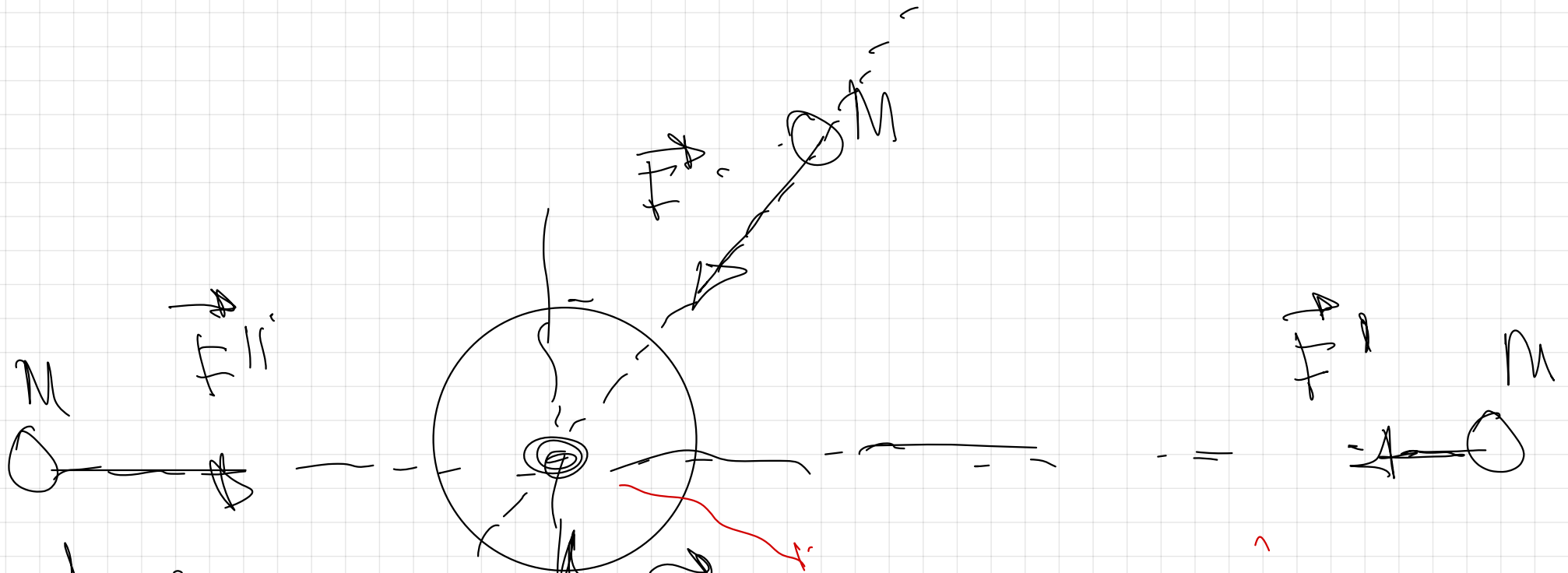
→ Las líneas de campo no pueden cortarse nunca ya que en un único punto de esa región (campo vectorial, solo puede existir un único valor de $\vec{g}$.

Principio de superposición

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$$

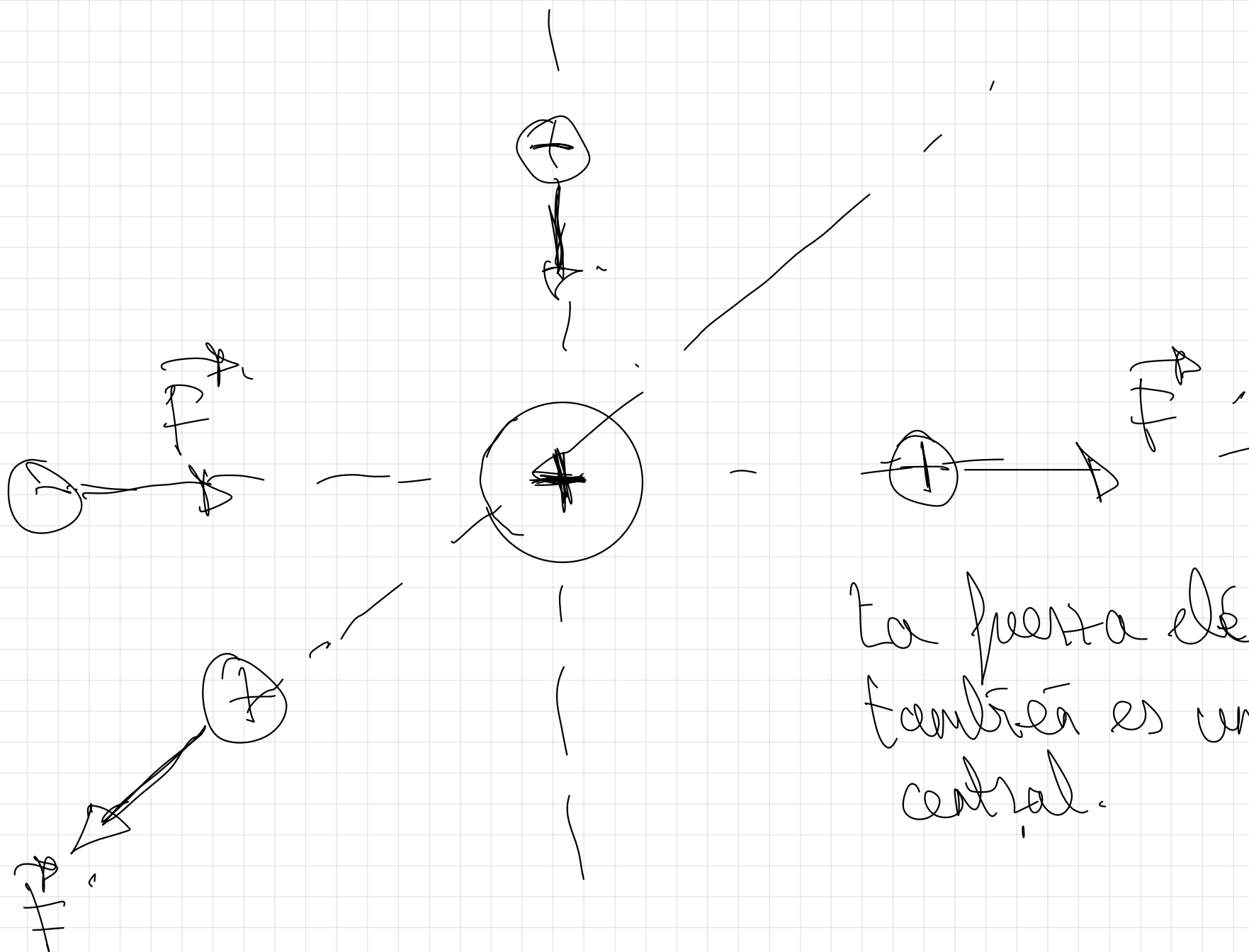
pag 5.

Fuerza Central.

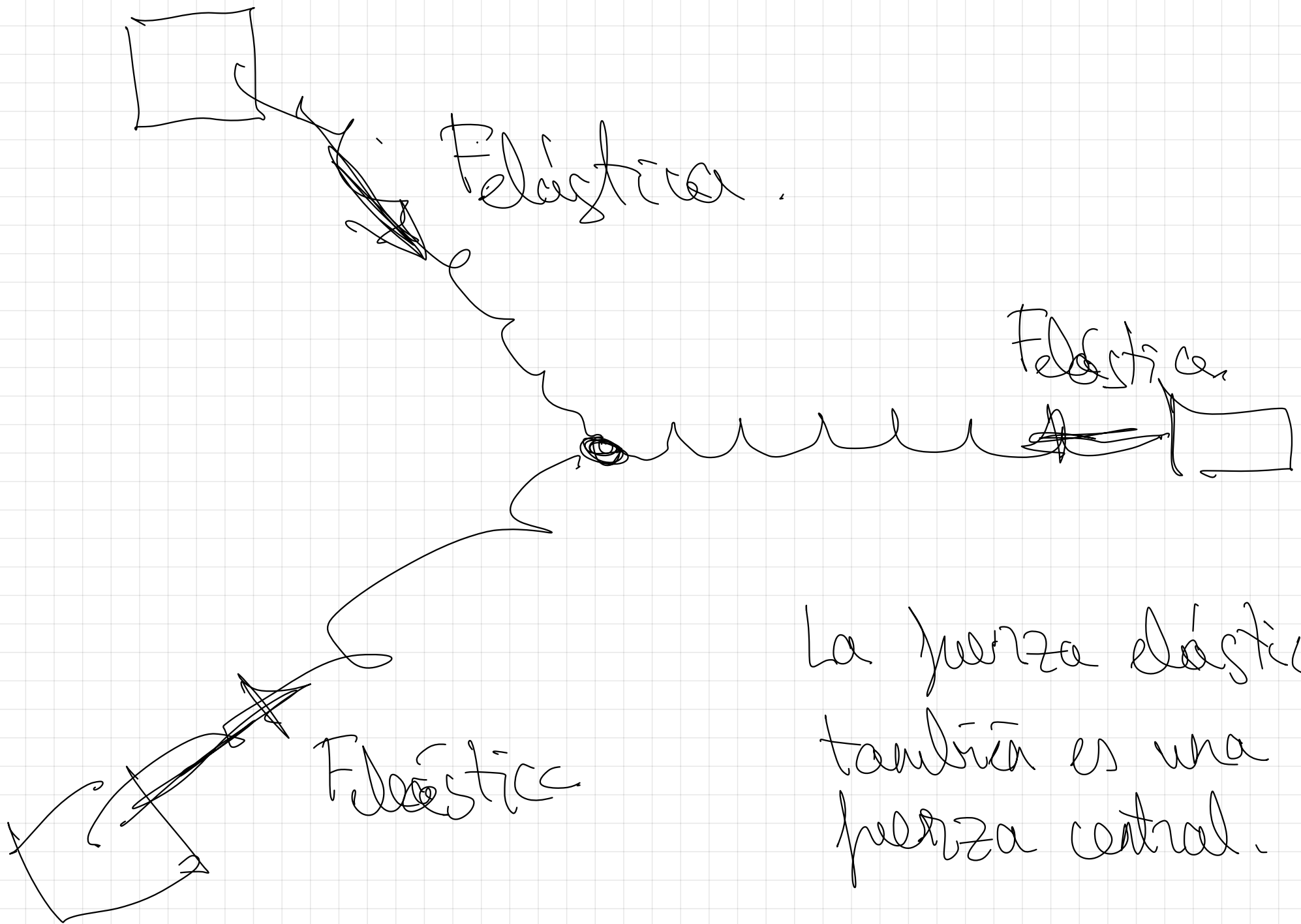


La fuerza
gravitatoria
es una fuerza central $\odot M$

Fuerzas centrales son
aquellas cuya dirección pasa
por un mismo punto.

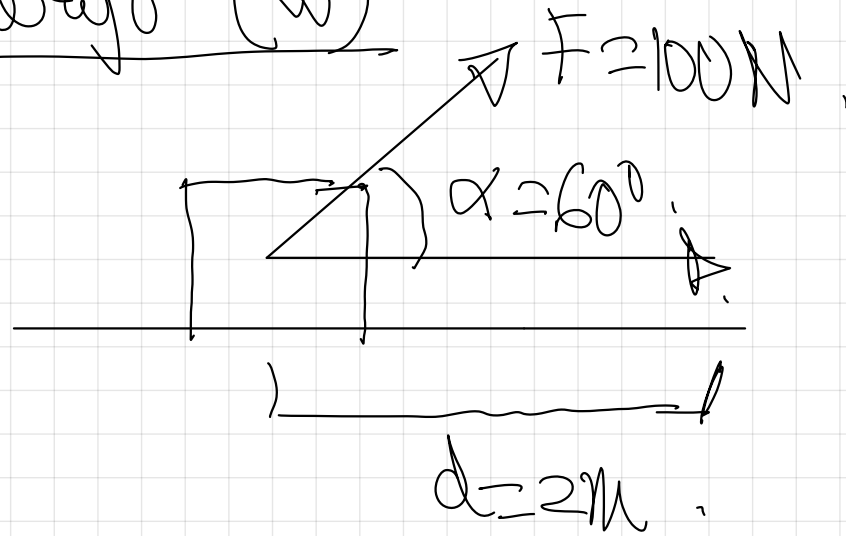
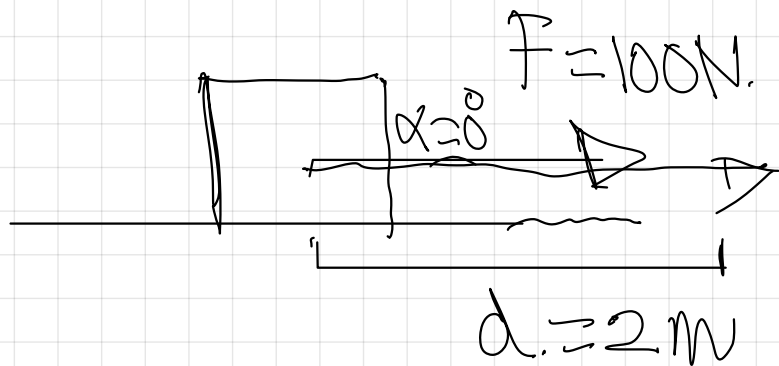


La fuerza eléctrica
también es una fuerza
central.



La fuerza elástica,
también es una
fuerza central.

Trabajo (W)



$$W = F \cdot d \cdot \cos \alpha$$

$$W_{\text{max}} = F \cdot d \cdot \cos 0^\circ$$

$$W_{\text{max}} = F \cdot d$$

$$W_{\text{max}} = 100\text{ N} \cdot 2\text{ m}$$

$$W_{\text{max}} = 200\text{ J}$$

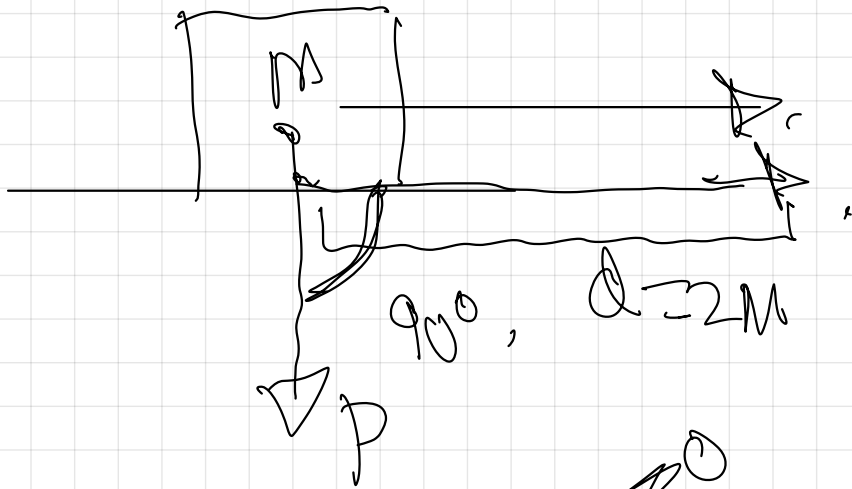
$$W = F \cdot d \cdot \cos \alpha$$

$$W_{\text{menor}} = F \cdot d \cdot \cos 60^\circ$$

$$W_{\text{menor}} = F \cdot d \cdot \frac{1}{2}$$

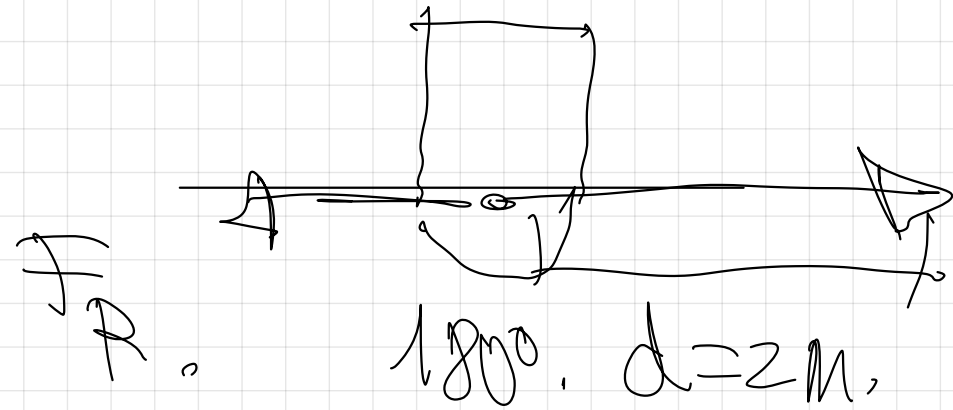
$$W_{\text{menor}} = 100\text{ N} \cdot 2\text{ m} \cdot \frac{1}{2}$$

$$W_{\text{menor}} = 100\text{ J}$$



$$W = F \cdot d \cdot \cos 90^\circ = 0$$

$$W = 0 \text{ J}$$



$$W = F \cdot d \cdot \cos 180^\circ$$

$$W = F_R \cdot d \cdot (-1)$$

$$W = -F_R \cdot d$$

Trabalho resistente.

$$W = F \cdot d \quad \angle \quad \text{---}$$

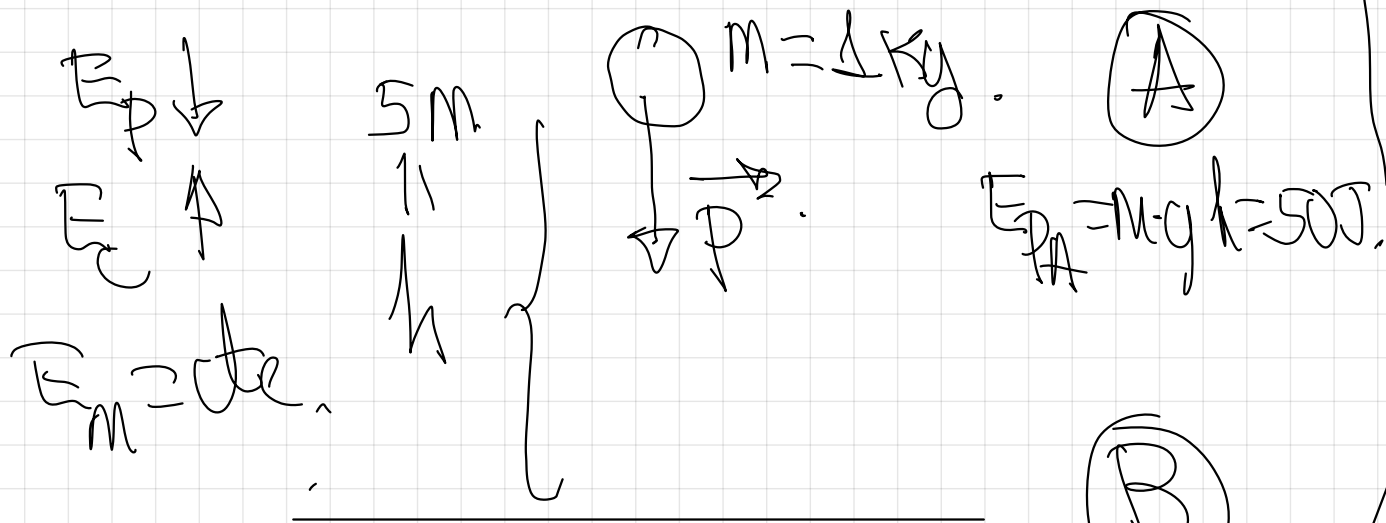
$$W = |F| \cdot |d| \cdot \cos \angle$$

$$W = 100 \text{ N} \cdot 2 \text{ m} \cdot \cos 180^\circ$$

$$W = -200 \text{ J}$$

Fuerza conservativa.

Fuerza bajo cuya exclusiva acción se conserva la E_m .



$$-\Delta E_p = W = \Delta E_c$$

(B)
 $E_{pB} = 0 \text{ J}$

Existe una disminución de E_p que por medio del trabajo

Solo las fuerzas conservativas llevan asociada una E_p

realizado por el peso (fuerza conservativa) para incrementar la E_c

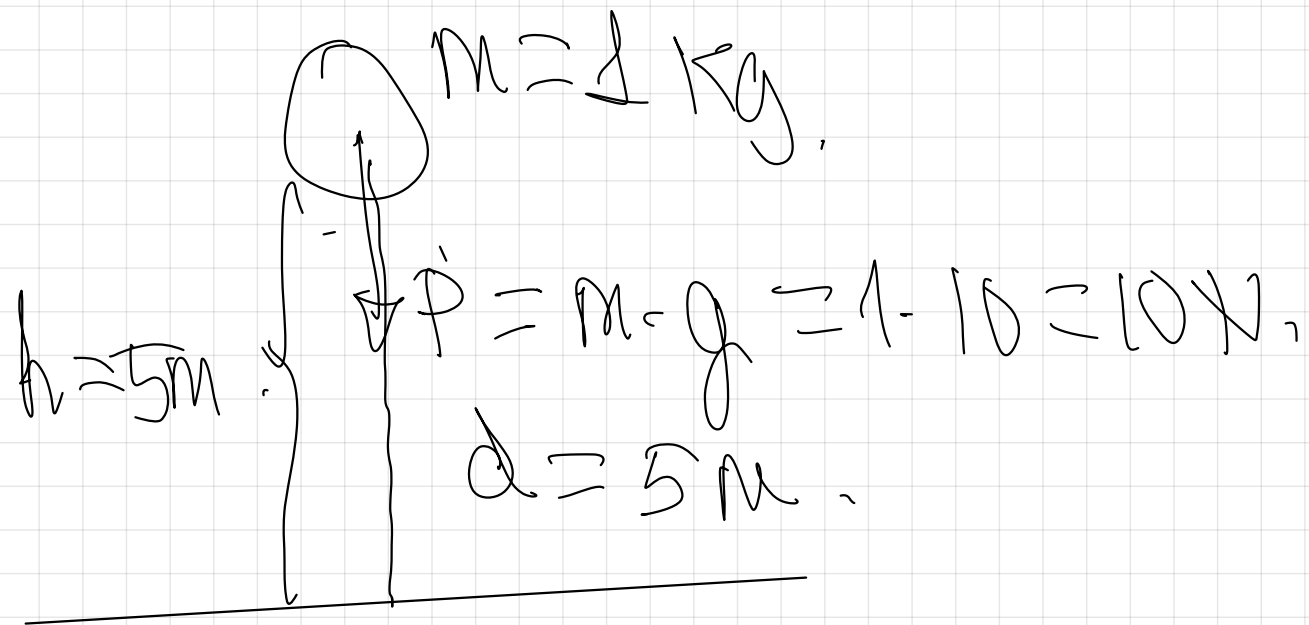
$$-(E_{PB} - E_{PA}) = W_{A \rightarrow B} = \Delta E_{c \text{ A} \rightarrow \text{B}}$$

$$E_{PA} - E_{PB} = W_{A \rightarrow B} = \Delta E_{c \text{ A} \rightarrow \text{B}}$$

$$50\text{J} - 0\text{J} = W$$

$$\textcircled{50\text{J}} = W = \textcircled{\Delta E_c}$$

↓



$$W_p = P \cdot d \cdot \cos 0^\circ = 10 \text{ N} \cdot 5 \text{ m} = 50 \text{ J}$$

$$- \Delta E_p = W = \Delta E_c$$

$$\rightarrow \Delta E_p = \Delta E_c$$

$$0 = \Delta E_p + \Delta E_c$$

$$0 = \Delta E_m \quad \text{la } E_m \text{ no varía bajo la acción exclusiva de la fuerza conservativa (peso o fuerza gravitatoria)}$$

$$\Delta E_m = 0 \Rightarrow$$

$$E_{PA} = mgh$$

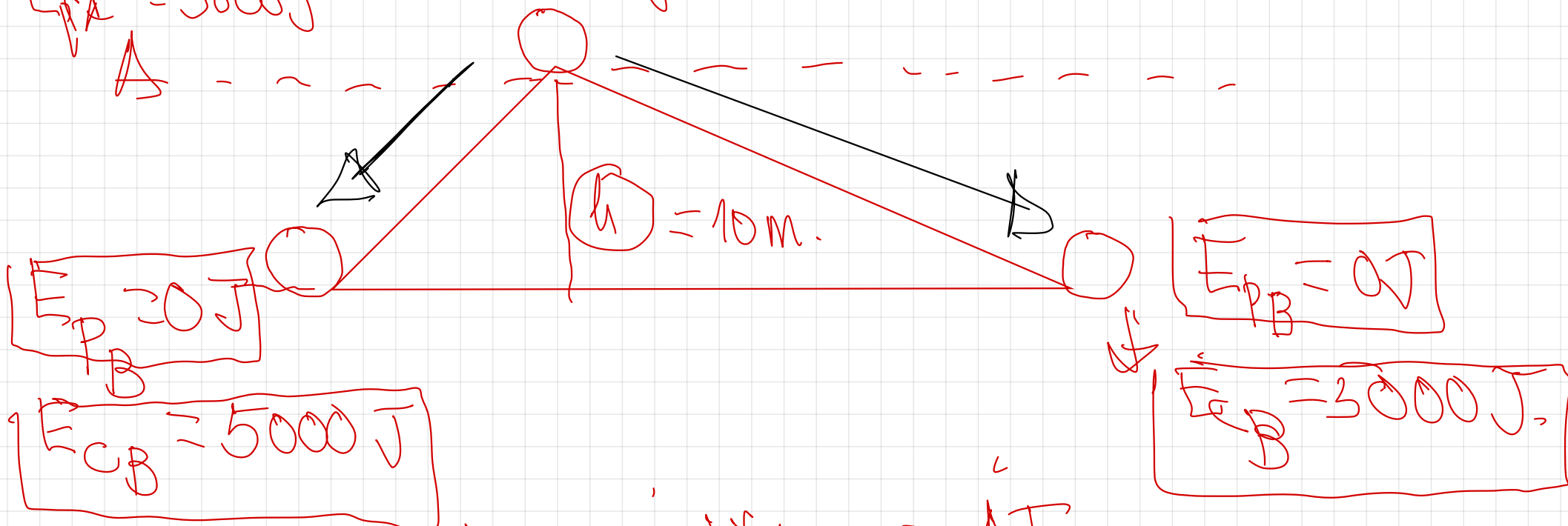
$$E_{PA} = 50 \cdot 10 \cdot 10$$

$$E_{PA} = 5000 \text{ J}$$

$$E_{PA} = 5000 \text{ J}$$

50 kg

$$E_{CA} = 0$$



$$\Delta E_{PA \rightarrow B} = W_{A \rightarrow B} = \Delta E_{CA \rightarrow B}$$

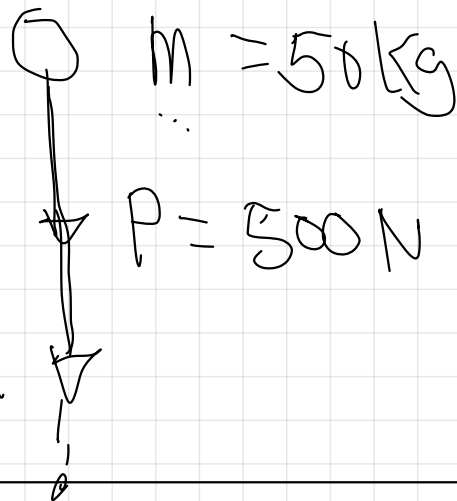
$$-(E_{PB} - E_{PA}) = W_{A \rightarrow B} = \Delta E_{CA \rightarrow B}$$

$$-(0 - 5000 \text{ J}) = W_{A \rightarrow B} = \Delta E_{CA \rightarrow B}$$

$$5000 \text{ J} = W_{A \rightarrow B} = \Delta E_{CA \rightarrow B}$$

$$W > 0$$

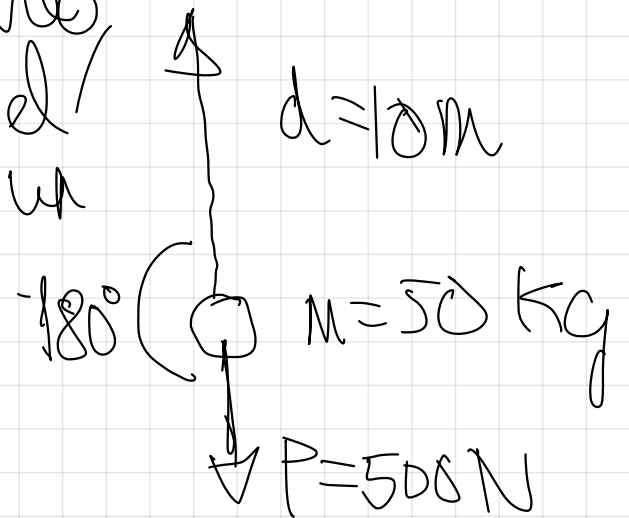
Significa que el trabajo lo realiza espontáneamente la fuerza conservativa (peso), por ejemplo, dejar caer un cuerpo



$$W = P \cdot d \cdot \cos 0^\circ = 5000 \text{ J}$$

$$W < 0$$

Significa que ese trabajo no lo realiza espontáneamente la fuerza conservativa (peso) hace falta una fuerza externa al campo para realizarlo, por ejemplo el ascenso de un cuerpo



$$W = P \cdot d \cdot \cos 180^\circ = -5000 \text{ J}$$

Todas las Fuerzas Centrales (como la gravitatoria) son conservativas, y ello implica que:

- El trabajo que realizan no depende de la trayectoria, sino únicamente de las posiciones inicial y final.
- Llevan asociada una Energía potencial.
- Bajo su exclusiva acción se conserva la Energía Mecánica.

JUEVES 02/10/25

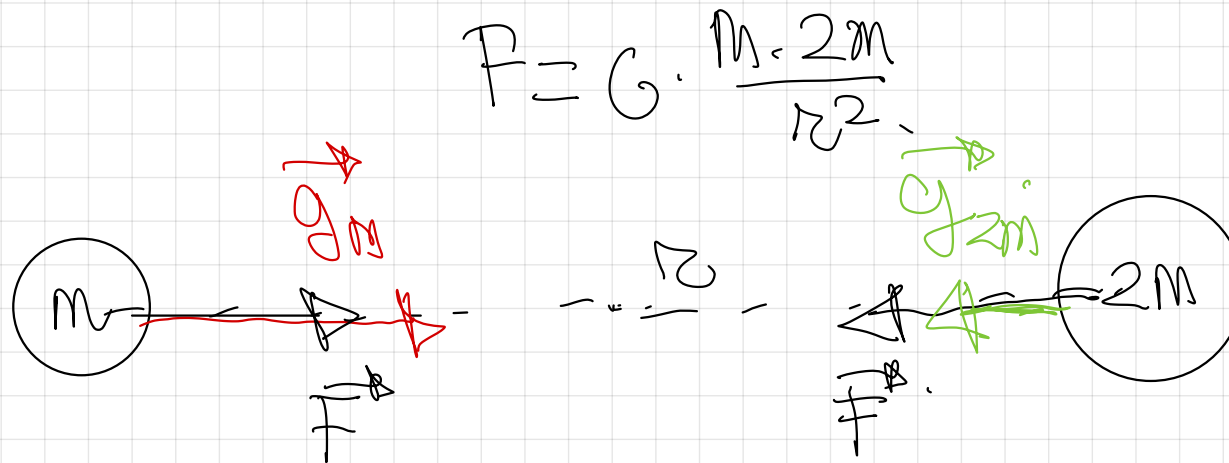
LOS EJERCICIOS QUE SE HAN HECHO DURANTE ESTA CLASE SON PARTE DE LOS QUE OS ENCARGARÉ EN LA PRÓXIMA TANDA DE UAU GRAVITATORIO (IV), SON DE REPASO DE LO QUE SE HA VISTO. LAS DUDAS SE RESOLVERÁN JUNTO EL RESTO DE LA CLASE CUANDO OS HAGA EL ENCARGO

TAMBIÉN EN ESTA CLASE ME HA PREGUNTADO DUDAS VUESTRA COMPAÑERA SILVIA.

Resolución de dudas de Silvia.

- 55.-** a) Explique las características del campo gravitatorio creado por una masa puntual
b) Dos partículas de masas m y $2m$ están separadas una cierta distancia. Explique qué fuerza actúa sobre cada una de ellas y cuál es la aceleración de dichas partículas

$$g = \frac{F}{m}$$



$$F = G \cdot \frac{m \cdot 2m}{r^2}$$

$$F = G \cdot \frac{m \cdot 2m}{r^2}$$

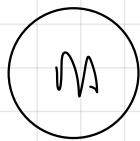
$$F = G \cdot \frac{m \cdot 2m}{r^2}$$

$$g_m = \frac{F}{m} = \frac{G \cdot \cancel{m} \cdot 2M}{r^2 \cancel{m}}$$

$$g_m = G \cdot \frac{2M}{r^2}$$

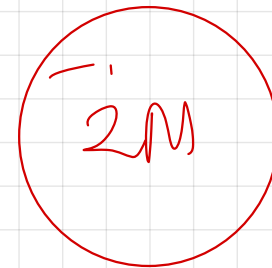
$$g_{2M} = \frac{F}{2M} = \frac{G \cdot \cancel{M} \cdot 2M}{r^2 \cancel{2M}}$$

$$g_{2M} = G \cdot \frac{M}{r^2}$$



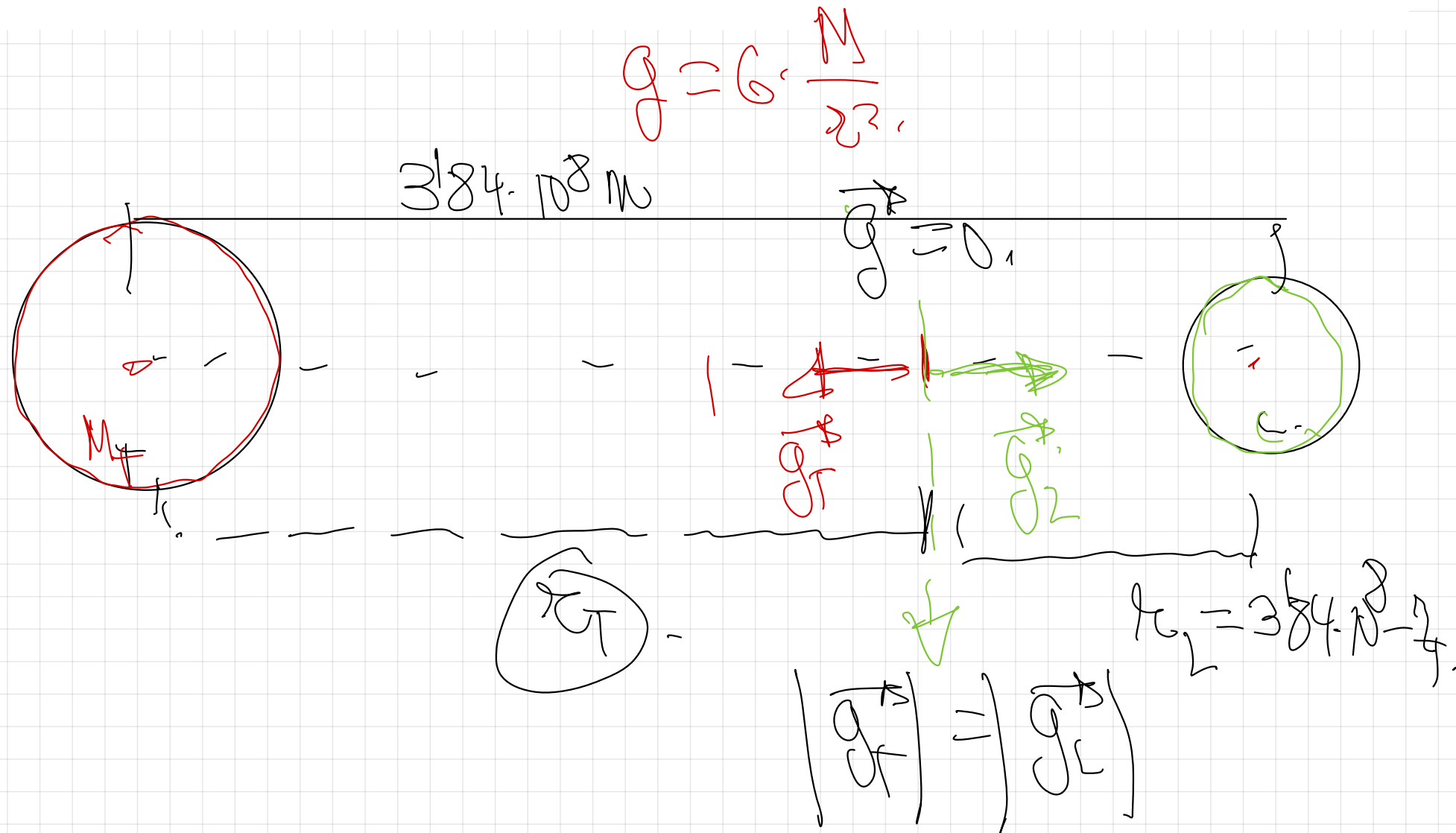
$$g_1 = G \cdot \frac{2M}{r^2}$$

$$g = G \cdot \frac{M}{r^2}$$



56.- ¿A qué distancia del centro de la Tierra se compensaría el campo gravitatorio terrestre con el Lunar?

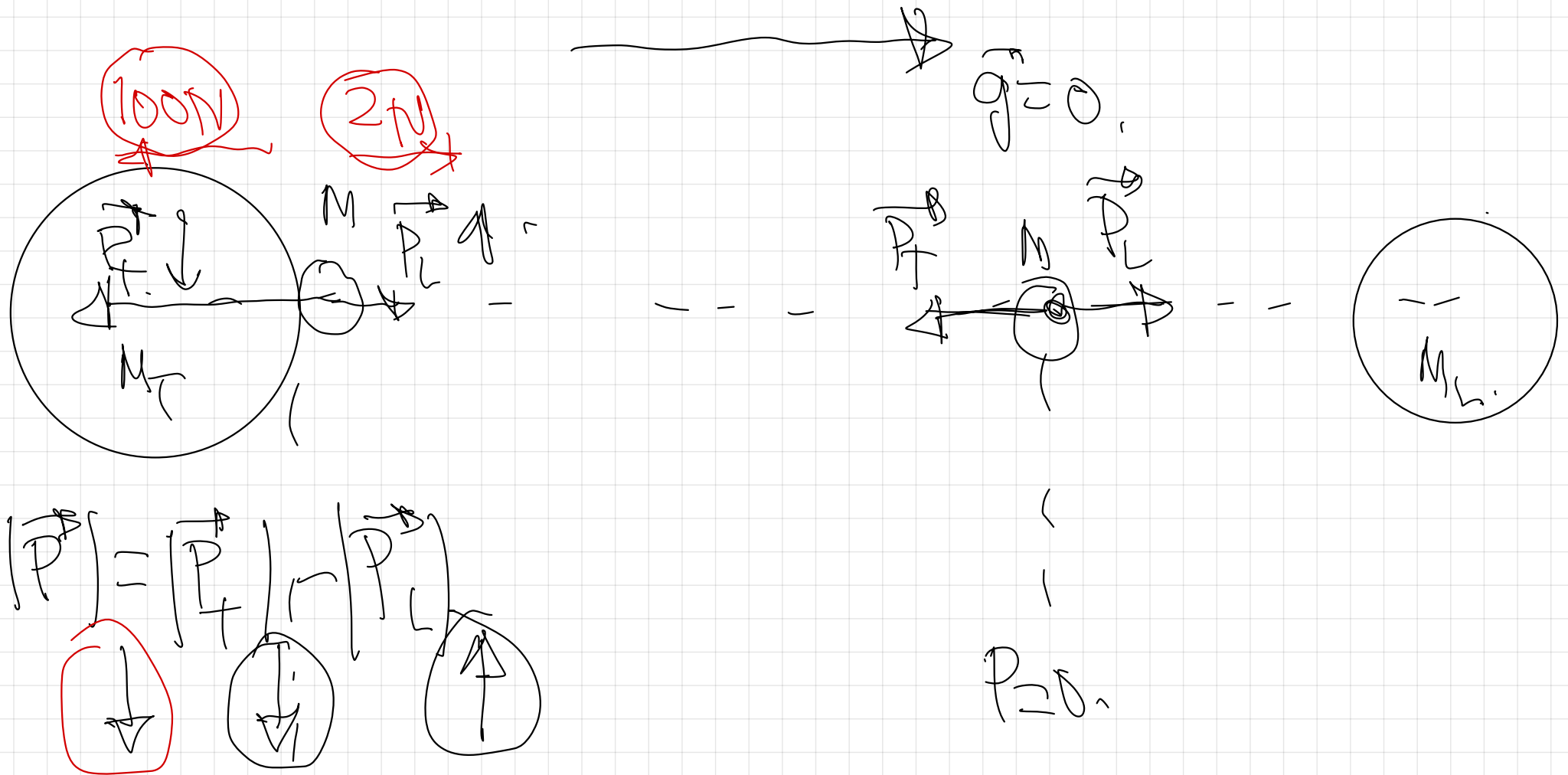
$M_T = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ Kg}$, $M_L = 7,35 \cdot 10^{22} \text{ Kg}$. Distancia Tierra-Luna (centro a centro) es de $3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$



$$\cancel{G} \cdot \frac{M_I}{r_T^2} = \cancel{G} \cdot \frac{M_L}{(384 \cdot 10^8 - r_T)^2}$$

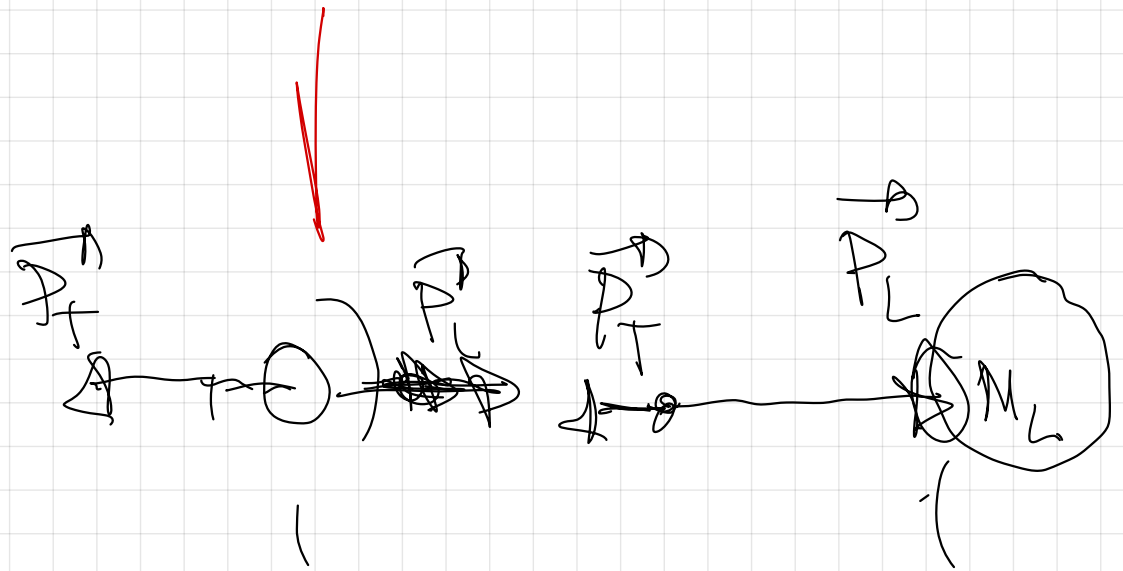
$$\sqrt{\frac{M_I}{M_L}} = \sqrt{\frac{r_T^2}{(384 - r_T)^2}}$$

- 23.- Describir cualitativamente el cambio de peso que sufre una nave espacial de masa m en un viaje de la Tierra a la Luna. Suponer que la Tierra y la Luna se encuentran en reposo y que la nave se mueve según la dirección que une sus centros.



P_{max}

$P \downarrow$ have hence $0 \Rightarrow$



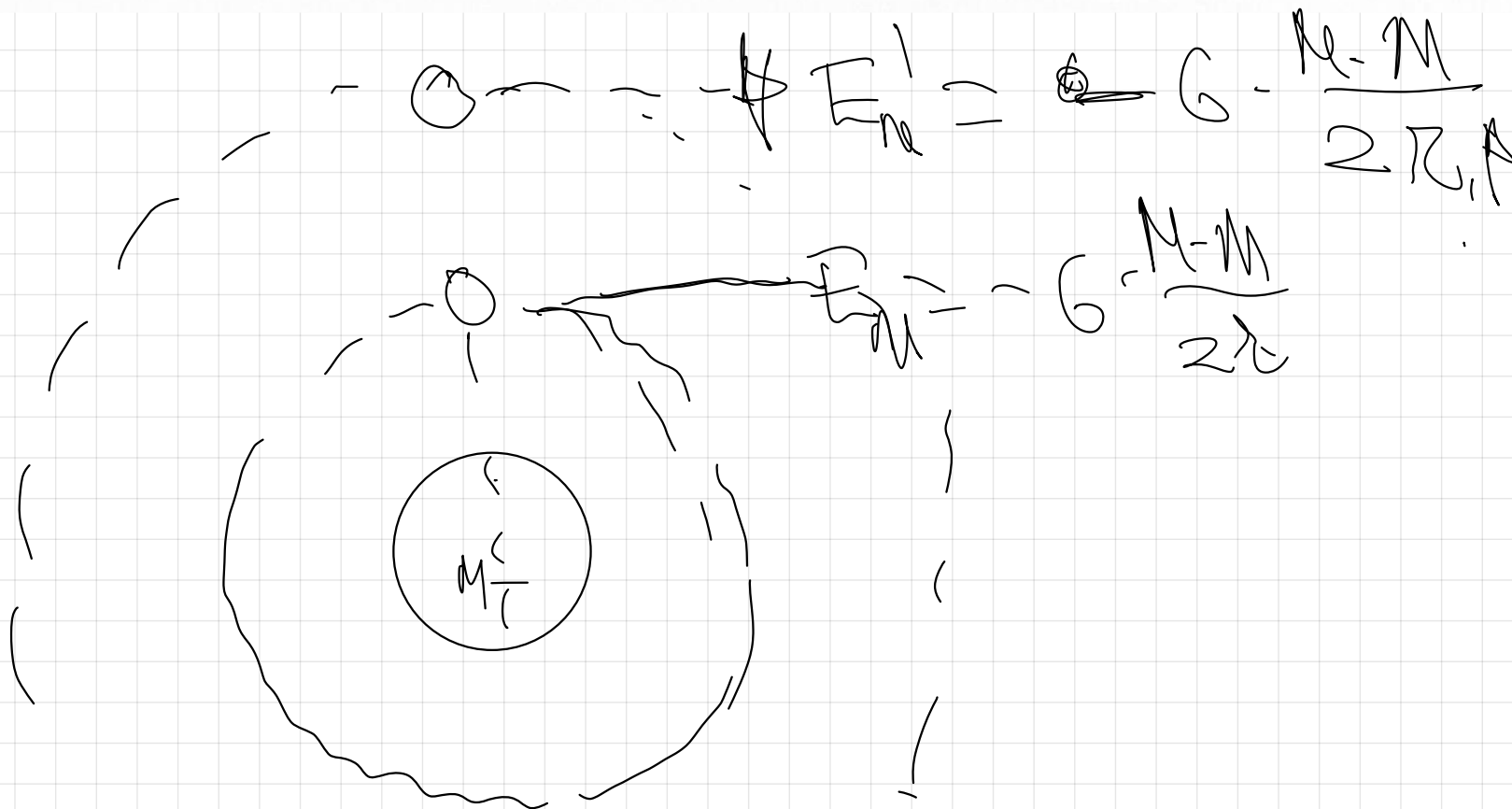
comment

$$|P_T| = |P_L| - |P_T|$$

130 (99-R) Un satélite se encuentra a una altura de 600 Km sobre la superficie de la Tierra, describiendo una órbita circular.

- Calcule el tiempo que tarda en dar una vuelta completa, razonando la estrategia seguida para dicho cálculo.
- Si la velocidad orbital disminuyera, explique si el satélite se acercaría o se alejaría de la Tierra, e indique que variaciones experimentarían la energía potencial, la energía cinética y la energía mecánica del satélite.

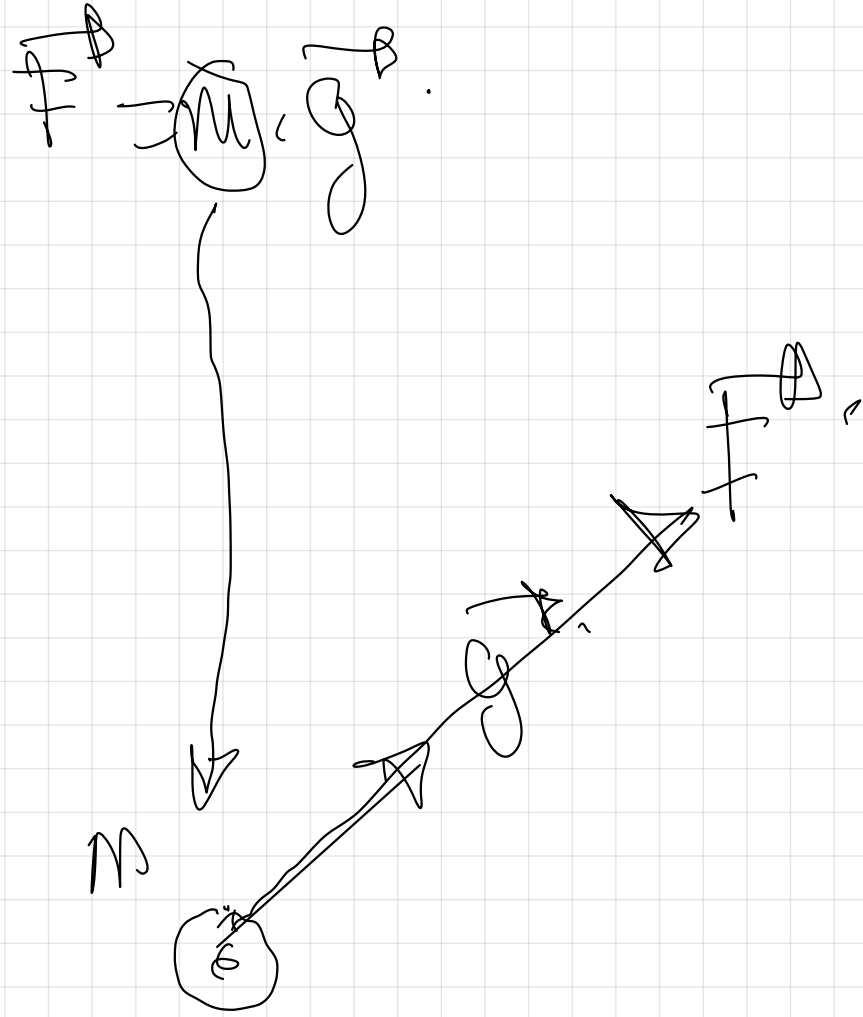
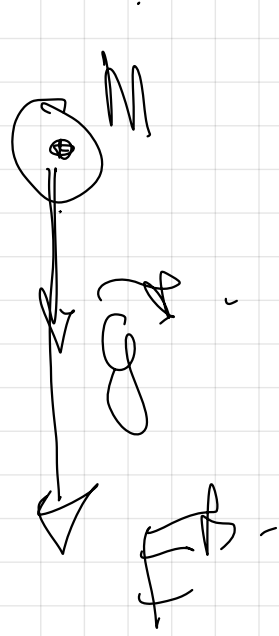
$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2} \quad M_T = 6 \times 10^{24} \text{ kg.} \quad R_T = 6400 \text{ km.}$$

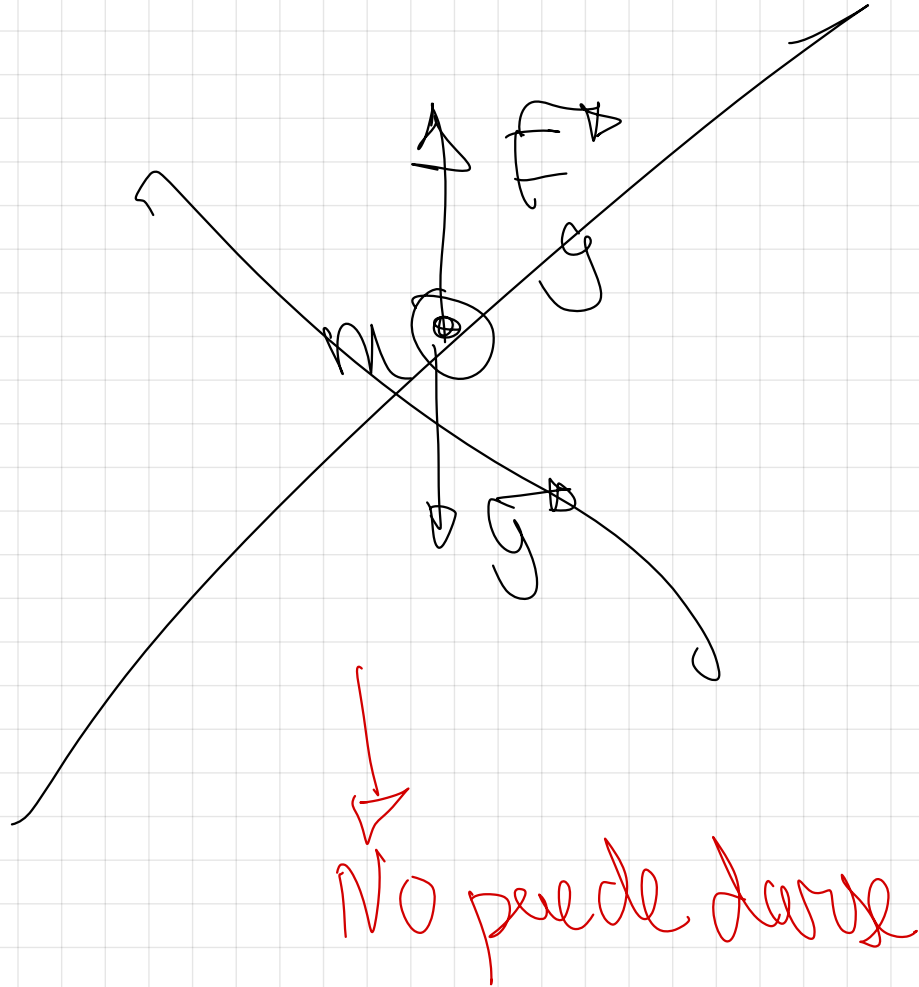


$$\vec{E}_m = -G \cdot \frac{M \cdot m}{2R^2}$$

$$\vec{E}_\phi = -G \cdot \frac{M \cdot m}{2R^2}$$

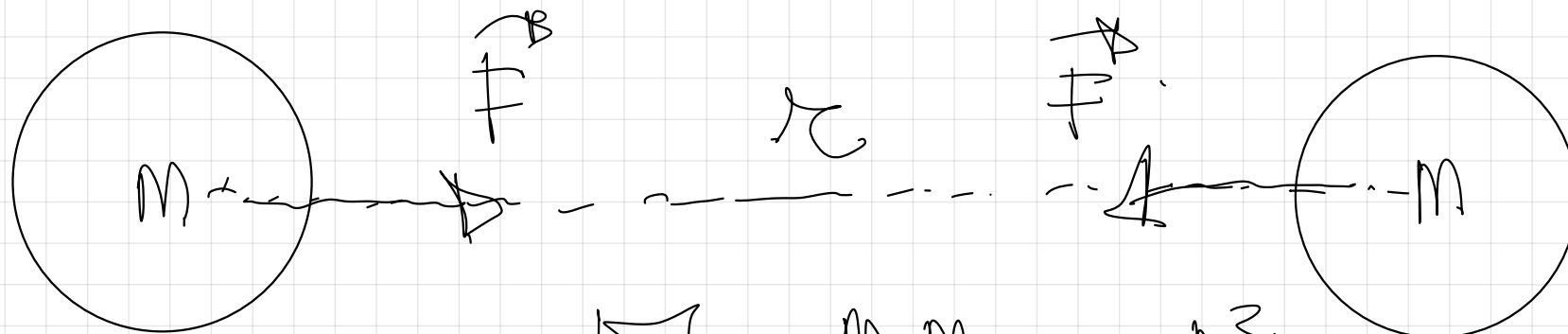
$$\vec{E}_r = \frac{1}{2} \kappa \left(\frac{2}{R} \right)$$





$$F = m \cdot g$$

- partículas.
- b) Dos partículas puntuales de masa m están separadas una distancia r . Al cabo de un cierto tiempo la masa de la primera se ha reducido a la mitad y la de la segunda a la octava parte. Para que la fuerza de atracción entre ellas tenga igual valor que el inicial, ¿es necesario acercarlas o alejarlas? Razone la respuesta.



$$F = G \cdot \frac{M \cdot M}{r^2} = G \cdot \frac{M^2}{r^2}$$



$$F = G \cdot \frac{\frac{M}{2} \cdot \frac{M}{8}}{r^2} \quad ?$$

Porque que la fuerza sea igual

$$\cancel{6} \frac{\cancel{16}}{r^2} = \cancel{6} \frac{\frac{\cancel{16}}{2} \cdot \frac{\cancel{16}}{8}}{r^2}$$

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1/16}{r^2}$$

$$r'^2 = \frac{1}{16} r^2$$

$$\sqrt{r'^2} = \sqrt{\frac{1}{16} r^2}$$

$$\boxed{r' = \frac{1}{4} r}$$

$$F = G \cdot \frac{M \cdot M}{r^2} = G \frac{M^2}{r^2}$$

$$F = G \cdot \frac{\frac{M}{2} \cdot \frac{M}{8}}{\left(\frac{1}{4}r\right)^2} = G \cdot \frac{\frac{M^2}{16}}{\frac{1}{16}r^2} = G \cdot \frac{M^2}{r^2}$$

- 4) (14-R) a) Enuncie la ley de gravitación universal y comente el significado físico de las magnitudes que intervienen en ella.
- b) Suponga que el planeta Tierra duplicase su radio. ¿En qué factor debería variar su masa para que el campo gravitatorio en su superficie se mantuviera constante? Razone la respuesta.

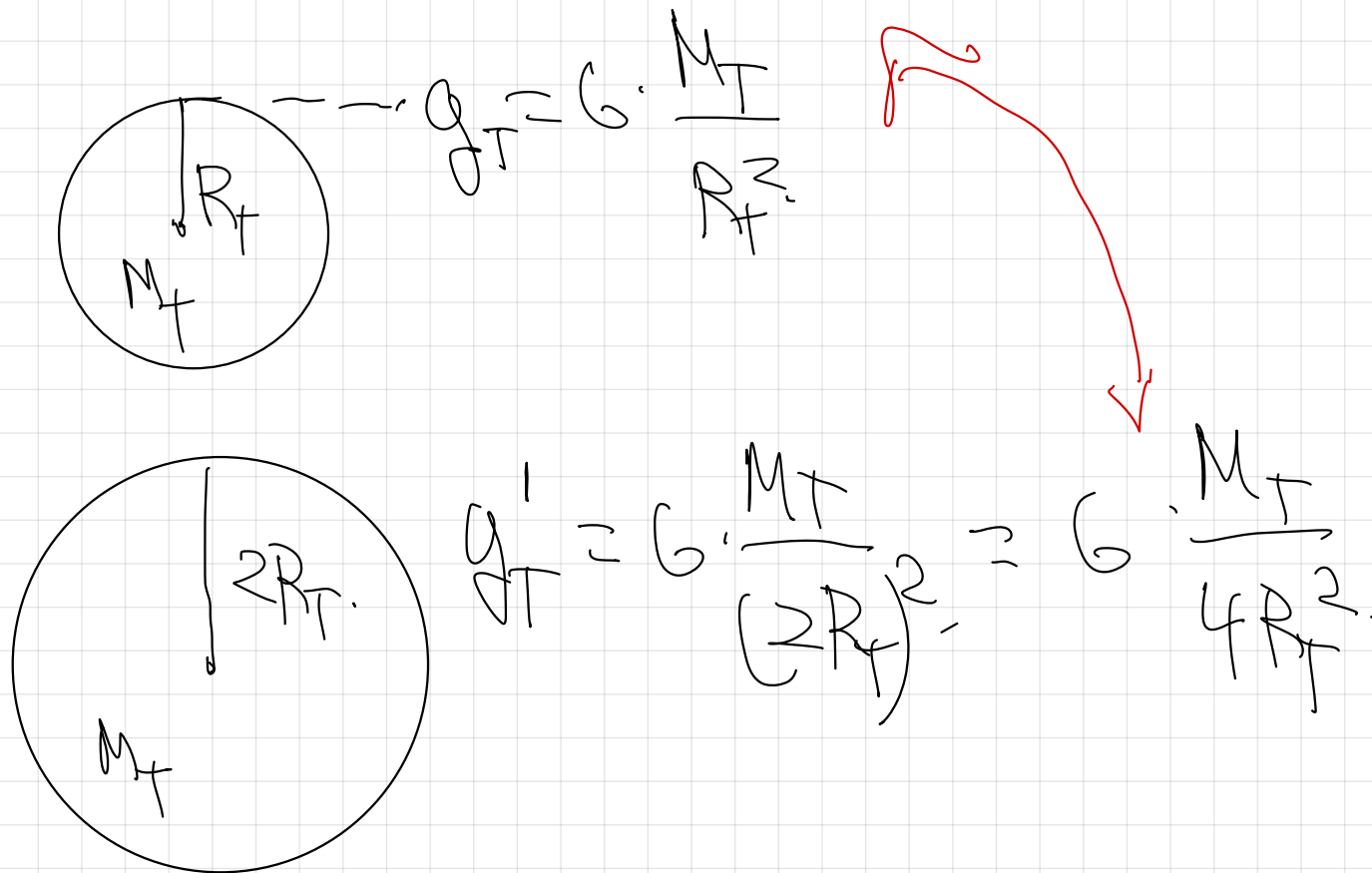


Diagram illustrating the change in gravitational field strength when the radius of the Earth is doubled while the mass remains constant.

Top circle (Initial state): Radius R_T , Mass M_T .

Bottom circle (Final state): Radius $2R_T$, Mass M_T .

Initial gravitational field strength:

$$g_T = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}$$

Final gravitational field strength:

$$g'_T = G \cdot \frac{M_T}{(2R_T)^2} = G \cdot \frac{M_T}{4R_T^2}$$

$$g_T = g_T'$$

$$\cancel{G} \cdot \frac{M_T}{R_T^2} = \cancel{G} \cdot \frac{M_T'}{4R_T^2}$$

Mos piden que el campo gravitatorio sea igual.

también preguntan como tendrá que cambiar la masa para que se cumpla esa condición

$$M_T' = 4 M_T$$

La masa de la Tierra

tendrá que ser

4 veces mayor

para que g sea la misma

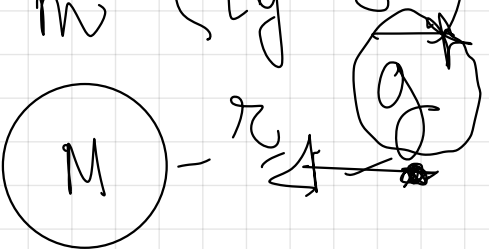
CAMPO GRAVITATORIO

Magnitudes vectoriales

$\vec{F}$ (N) Fuerza

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$

$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} \left(\frac{\text{N}}{\text{kg}} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)$ Campo gravitatorio



$$g = \frac{F}{m} = \frac{G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}}{m} = G \frac{M}{r^2}$$

$$\vec{F} = m \cdot \vec{g}$$

Magnitudes escalares

E_p (J) Energía potencial

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

$V = \frac{E_p}{m} \left(\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right)$ Potencial gravitatorio



$$V = \frac{E_p}{m} = \frac{-G \cdot \frac{M \cdot m}{r}}{m} = -G \frac{M}{r}$$

$$E_p = m \cdot V$$

Trabajo.

$$- \Delta E = W_{A \rightarrow B} = \Delta E_{A \rightarrow B}$$

Trabajo (J)

$$W_{A \rightarrow B} = \Delta E_{A \rightarrow B}$$

$$W_{A \rightarrow B} = (E_B - E_A)$$

$$W_{A \rightarrow B} = E_B - E_A$$

$$E_p = m \cdot V$$

$$W_{A \rightarrow B} = m \cdot V_A - m \cdot V_B$$

$$W_{A \rightarrow B} = n(V_A - V_B)$$

$W_{A \rightarrow B} \rightarrow 0$ Spontaneous

$W_{A \rightarrow B} < 0$ NO Spontaneous

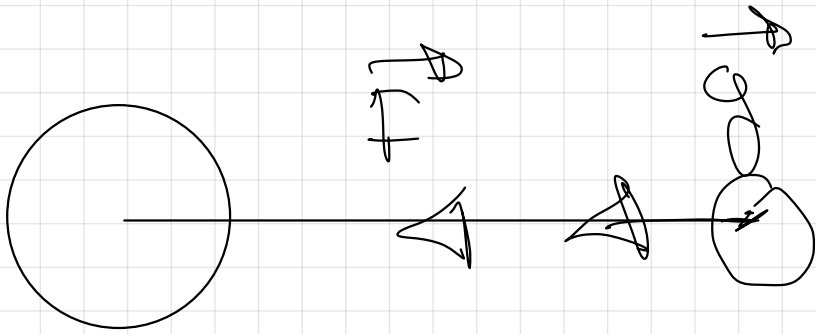
Princípio de superposição.

$$f = \sum f_c$$

$$G = \sum G_c$$

$$f_p = \sum f_{p_i}$$

$$V = \sum V_c$$



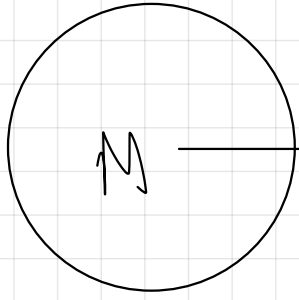
$$m = 2 \text{ kg}$$

$$g = 5 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

$$F = m \cdot g$$

$$F = 2 \text{ kg} \cdot 5 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

$$= 10 \text{ N}$$



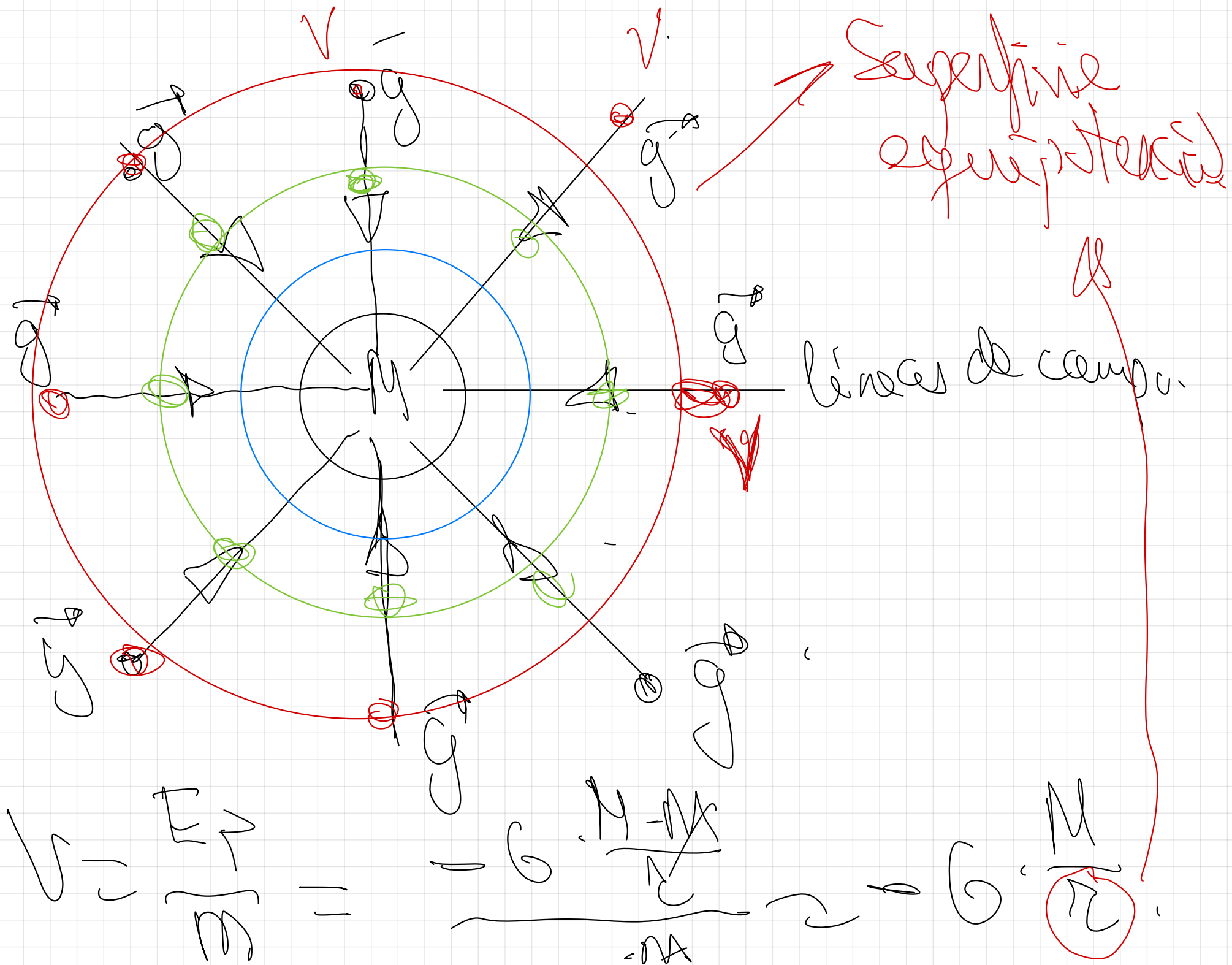
$$M = 2 \text{ Kg.}$$

$$E_p = m \cdot V.$$

$$E_p = 2 \text{ Kg.} \cdot (-4 \frac{\text{J}}{\text{Kg}})$$

$$E_p = -8 \text{ J.}$$

$$V = -4 \frac{\text{J}}{\text{Kg.}}$$



Curvas de campo L a las
superficies equipotenciales.

7

— —

1

16.- Dos masas puntuales $m_1 = 9 \text{ Kg}$ y $m_2 = 9 \text{ Kg}$ se sitúan en los puntos $(0,0) \text{ m}$ y $(4,0) \text{ m}$.

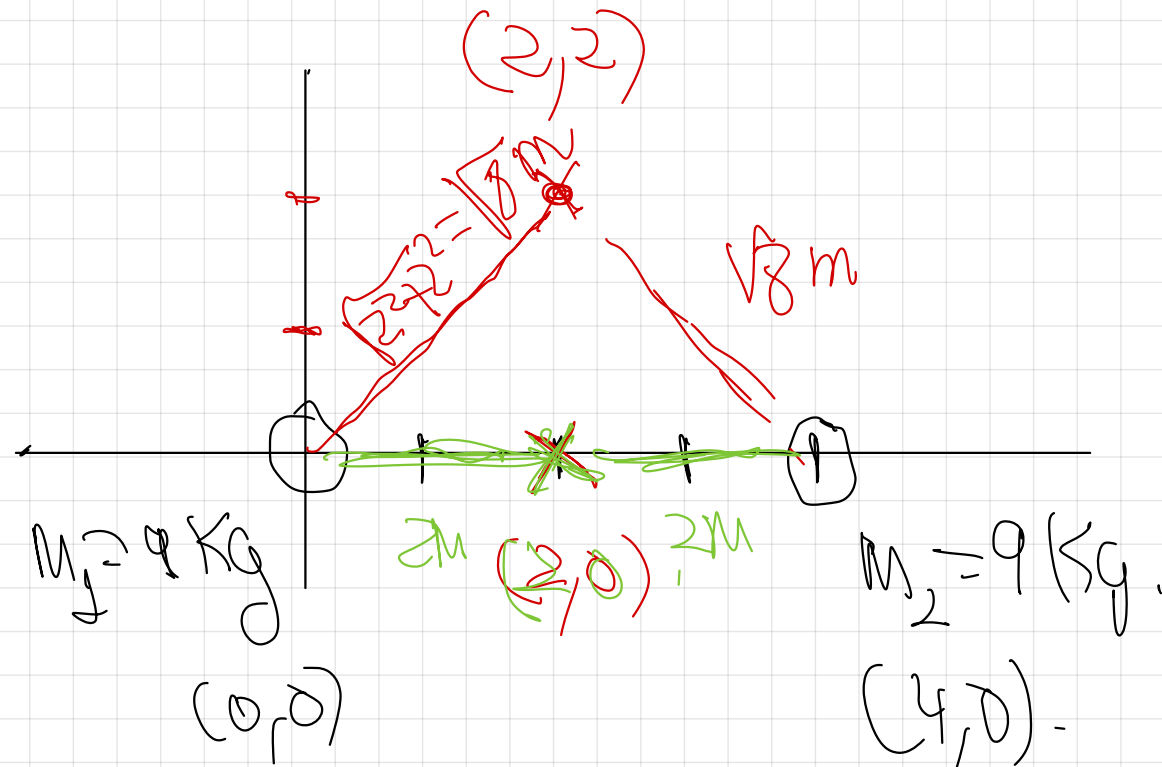
~~a) Calcular el campo gravitatorio en los puntos $(2,0) \text{ m}$ y $(9,0) \text{ m}$~~

b) Calcular el potencial gravitatorio en los puntos $(2,0) \text{ m}$ y $(2,2) \text{ m}$

c) Calcular la Energía potencial gravitatoria si situamos una masa de $2 \cdot 10^{-3} \text{ Kg}$ en el punto $(2,2) \text{ m}$

d) Calcular el trabajo realizado al desplazarse la masa $m = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Kg}$ desde el punto $(2,2) \text{ m}$ hasta el punto $(2,0) \text{ m}$.

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}$$



Princípio da superposição:

$$V_{(2,2)u} = V_{1(2,2)u} + V_{2(2,2)u}$$

$$V_{(2,2)u} = -G \cdot \frac{m_1}{r_1} + \left(-G \frac{m_2}{r_2} \right)$$

$$V_{(2,2)u} = -6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{9}{\sqrt{8}} - 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{9}{\sqrt{8}}$$

$$V_{(2,2)u} = -4,24 \cdot 10^{-10} \frac{J}{Kg}$$

Princípio de superposição-

$$V(z,0)_M = V_1(z,0)_M + V_2(z,0)_M.$$

$$V(z,0)_M = -G \cdot \frac{M_1}{r_1} + \left(-G \cdot \frac{M_2}{r_2} \right)$$

$$V(z,0)_M = -6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{9}{2} - 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{9}{2}.$$

$$V(z,0)_M = -6 \cdot 10^{-10} \text{ J/kg}.$$

16.- Dos masas puntuales $m_1 = 9 \text{ Kg}$ y $m_2 = 9 \text{ Kg}$ se sitúan en los puntos $(0,0) \text{ m}$ y $(4,0) \text{ m}$.

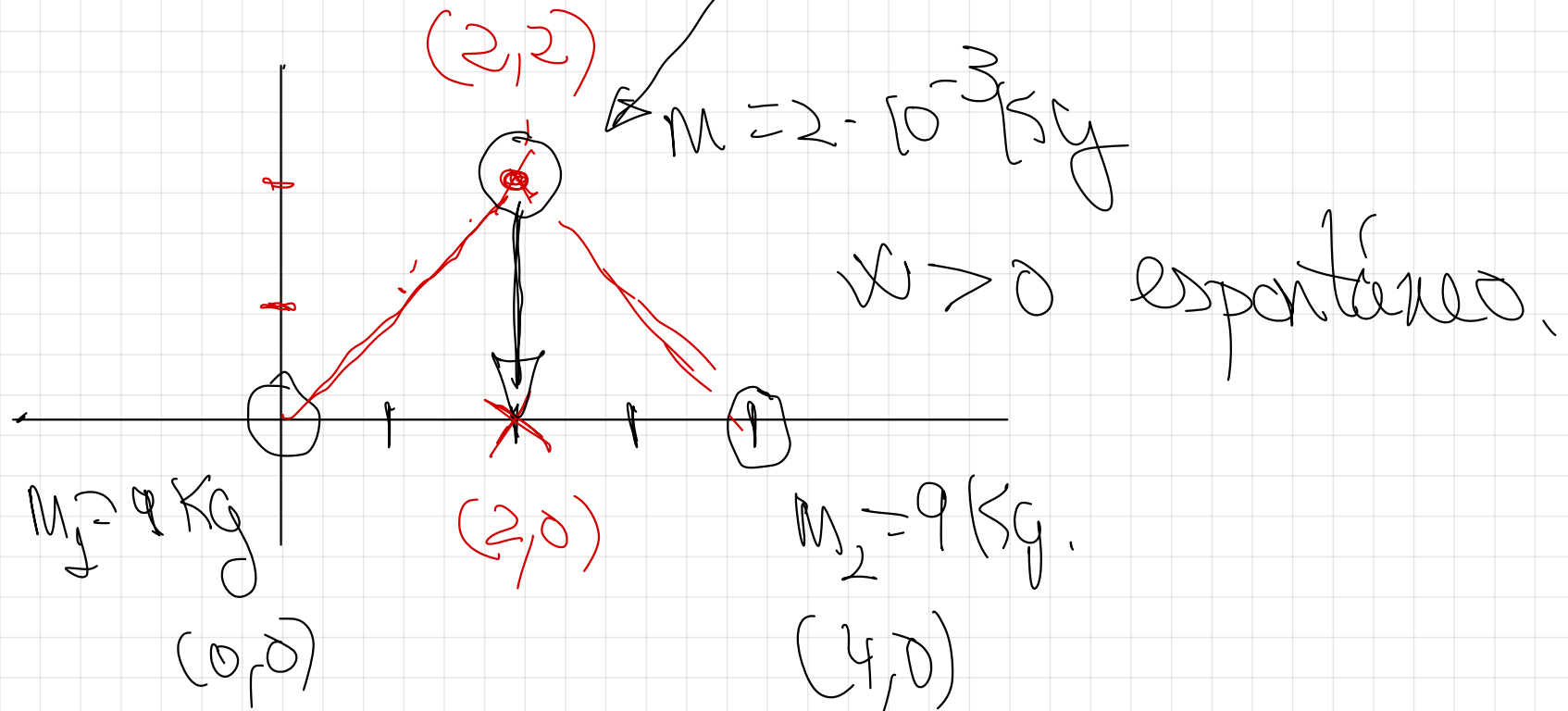
a) Calcular el campo gravitatorio en los puntos $(2,0) \text{ m}$ y $(9,0) \text{ m}$

b) Calcular el potencial gravitatorio en los puntos $(2,0) \text{ m}$ y $(2,2) \text{ m}$

c) Calcular la Energía potencial gravitatoria si situamos una masa de $2 \cdot 10^{-3} \text{ Kg}$ en el punto $(2,2) \text{ m}$

d) Calcular el trabajo realizado al desplazarse la masa $m = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Kg}$ desde el punto $(2,2) \text{ m}$ hasta el punto $(2,0) \text{ m}$.

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}$$

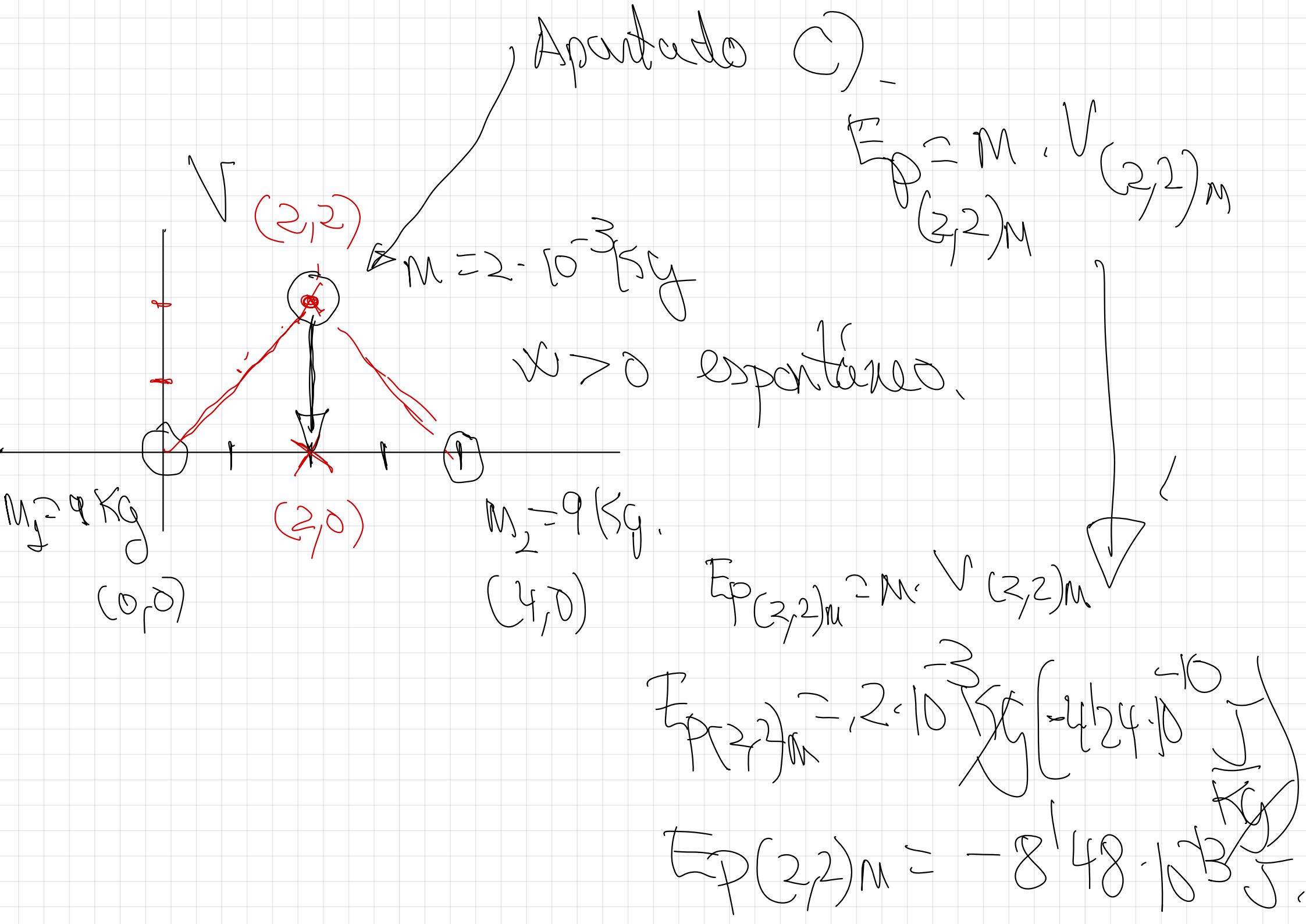


$$W_{A \rightarrow B} = m \cdot (V_A - V_B)$$

$$W_{(2,2) \rightarrow (2,0)} = m \cdot (V_{(2,2)} - V_{(2,0)})$$

$$W_{(2,2) \rightarrow (2,0)} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \left(\frac{-4124 \cdot 10^{-10} \text{ J}}{\text{kg}} - \left(-6 \cdot 10^{-10} \frac{\text{J}}{\text{kg}} \right) \right)$$

$$W_{(2,2) \rightarrow (2,0)} = 352 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$



outra forma,

Princípio de superposição aplicado
à energia potencial.

$$E_p = \sum E_{pi}$$

$$E_p = -G \cdot \frac{M_1 \cdot M}{r} + \left(-G \cdot \frac{M_2 \cdot M}{r} \right)$$

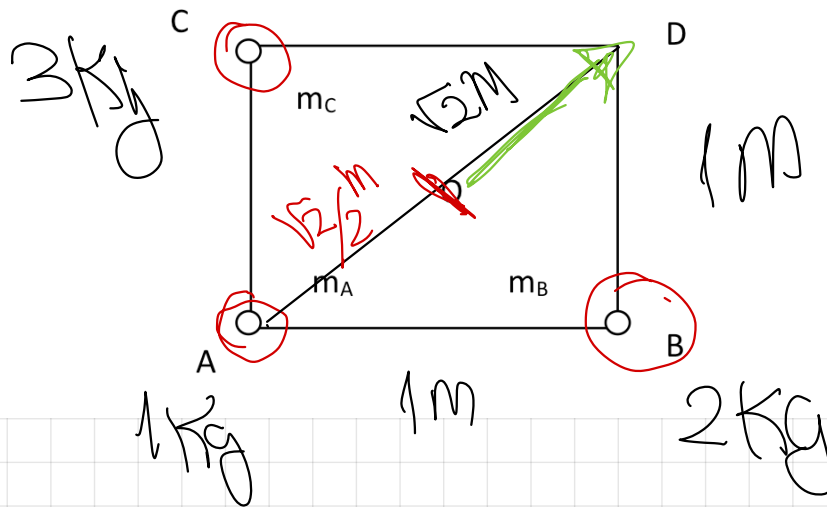
$$E_p = -8,48 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

pag 27.

17.- Dadas tres masas puntuales de valores $m_a=1\text{Kg}$, $m_b=2\text{Kg}$, $m_c=3\text{Kg}$ situadas en los tres vértices A,B y C de un cuadrado de lado $l=1\text{m}$.

- Calcular el potencial gravitatorio en el centro del cuadrado O y en el cuarto vértice D.
- Calcular la Energía potencial gravitatoria de una hipotética masa $m=10^{-4}\text{Kg}$ en caso de que estuviese situada en el punto O y en caso de que estuviese situada en el punto D.
- Calcular el trabajo necesario para desplazar la masa $m=10^{-4}\text{Kg}$ desde el punto O hasta el punto D.

$$G=6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}$$



$$V = -G \frac{M}{r}$$

$$V_O = V_A + V_B + V_C$$

$$V_O = -G \cdot \frac{M_A}{r_{OA}} + \left(-G \frac{M_B}{r_{OB}} \right) + \left(-G \frac{M_C}{r_{OC}} \right)$$

$$V_0 = -667 \cdot 10^{11} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 667 \cdot 10^{11} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} - 667 \cdot 10^{11} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$V_0 = -566 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

$$V_D = V'_A + V'_B + V'_C$$

$$V_D = -G \cdot \frac{M_A}{r_A} + \left(-G \frac{M_B}{r_B} \right) + \left(-G \frac{M_B}{r_C} \right)$$

$$V_D = -6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1}{2} - 6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{2}{1} - 6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{3}{1}$$

$$V_D = -3'81 \cdot 10^{-10} \text{ J/Kg,}$$

b) Se podría hacer aplicando el principio de superposición a la E_g , pero sería mas largo

$$E_{p0} = E_{p_{A,M}} + E_{p_{B,M}} + E_{p_{C,M}} = -G \cdot \frac{m_A \cdot m}{r_{A,M}} - G \frac{m_B \cdot m}{r_{B,M}} - G \frac{m_C \cdot m}{r_{C,M}}$$

$$E_C = E'_{p_{A,M}} + E'_{p_{B,M}} + E'_{p_{C,M}} = -G \cdot \frac{m_A m}{r'_{A,M}} - G \frac{m_B m}{r'_{B,M}} - G \frac{m_C m}{r'_{C,M}}$$

b) Sabiendo los potenciales gravitatorios en cada punto es mas corto hacerlo de la siguiente forma.

$$V = \frac{E_p}{m} \Rightarrow E_p = m \cdot V$$

$$E_{p0} = m \cdot V_0 = 10^{-3} \text{ kg} \cdot (-5.56 \cdot 10^{-10} \text{ J/kg})$$

$$E_{p0} = -556 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

$$E_{pD} = m \cdot v_D = 10^{-3} \text{ kg} \cdot (-381 \cdot 10^5 \text{ J/kg})$$

$$E_{pD} = -381 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

c) $W = -\Delta E_p$

$$W_{0 \rightarrow D} = -(E_{pD} - E_{p0})$$

$$W_{0 \rightarrow D} = E_{p0} - E_{pD}$$

$$W_{0 \rightarrow D} = m \cdot V_0 - m \cdot V_D$$

$$W_{0 \rightarrow D} = m \cdot (V_0 - V_D) =$$

$$= 10^{-3} \text{ Kg} \left(\frac{-5.56 \cdot 10^{-10} \text{ J}}{\text{Kg}} - \left(\frac{-3.81 \cdot 10^{-10} \text{ J}}{\text{Kg}} \right) \right)$$

$$= \textcircled{+} 1.85 \cdot 10^{-14} \text{ J}$$

$W < 0 \Rightarrow$ No espontánea

La fuerza gravitatoria no alejaría espontáneamente la masa m de las otras tres

$$W = -\Delta E_p$$

$$-1.85 \cdot 10^{11} \text{ J} = -\Delta E_p$$

$$\boxed{\Delta E_p = 1.85 \cdot 10^{11} \text{ J}}$$



Sería necesaria la actuación de una fuerza externa al campo para realizar ese desplazamiento e incrementar la E_p gravitatoria en $1.85 \cdot 10^{11} \text{ J}$

pag 33, para mañana.

$5,84 \cdot 10^{-11}$

57.- Sean dos masas puntuales $m_1=10$ Kg situada en (0,0) m y $m_2= 5$ Kg situada en (2,4)m

a) Calcular el campo gravitatorio en (0,4)m

b) Calcular el potencial gravitatorio (1,2)m y en (0,4)m

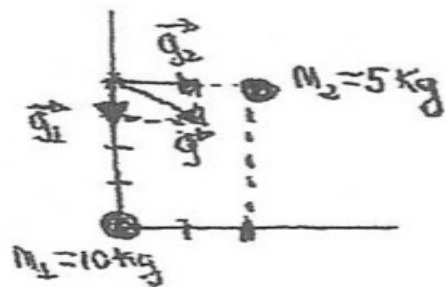
c) Calcular la energía potencial gravitatoria de una masa de 0,2 Kg en (1,2)m y en (0,4)m

d) Calcular el trabajo para desplazar la masa de 0,2 kg desde (1,2)m hasta (0,4)m

e) Calcular la fuerza que experimentaría una masa de 0,2 Kg si estuviese situada en (2,0) m

$$G= 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}$$

57) a) $\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$ (Principio de superposición) Campo gravitatorio es la intensidad del campo gravitatorio $\vec{g}$



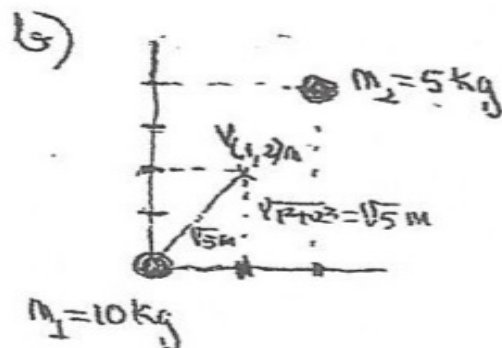
$$g_1 = G \cdot \frac{m_1}{r_1^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{10}{4^2} = 4.17 \cdot 10^{-11} \frac{N}{kg} \quad \vec{g}_1 = -4.17 \cdot 10^{-11} \hat{j} \left(\frac{N}{kg} \right) \text{ (ver dibujo)}$$

$$g_2 = G \cdot \frac{m_2}{r_2^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5}{5^2} = 8.34 \cdot 10^{-12} \frac{N}{kg}$$

$$\vec{g}_2 = 8.34 \cdot 10^{-12} \hat{r} \left(\frac{N}{kg} \right)$$

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = 8.34 \cdot 10^{-12} \hat{r} - 4.17 \cdot 10^{-11} \hat{j} \left(\frac{N}{kg} \right)$$

$$g = \sqrt{(8.34 \cdot 10^{-12})^2 + (-4.17 \cdot 10^{-11})^2} = \sqrt{8.69 \cdot 10^{-21}} = 9.32 \cdot 10^{-11} \frac{N}{kg}$$

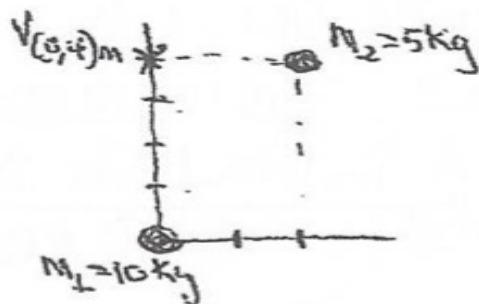


$$V_{(1,2)u} = V_1 + V_2 \text{ (Principio de superposición)}$$

$$V_{(1,2)u} = -G \cdot \frac{m_1}{r_1} + \left(-G \cdot \frac{m_2}{r_2} \right)$$

$$V_{(1,2)u} = -6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{10}{\sqrt{5}} - 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5}{5}$$

$$V_{(1,2)u} = -4.47 \cdot 10^{-10} \frac{J}{kg}$$



$$V_{(0,4)u} = V_1 + V_2 \text{ (Principio de superposición)}$$

$$V_{(0,4)u} = -G \cdot \frac{m_1}{r_1} + \left(-G \cdot \frac{m_2}{r_2} \right)$$

$$V_{(0,4)u} = -6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{10}{4} - 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5}{5}$$

$$V_{(0,4)u} = -3.34 \cdot 10^{-10} \frac{J}{kg}$$

c) $V = \frac{E_p}{m} \Rightarrow E_p = m \cdot V$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{p(1,2)u} = m \cdot V_{(1,2)u} = 0.2 \text{ kg} \cdot (-4.47 \cdot 10^{-10} \frac{J}{kg}) = -8.94 \cdot 10^{-11} \text{ J} \\ E_{p(0,4)u} = m \cdot V_{(0,4)u} = 0.2 \text{ kg} \cdot (-3.34 \cdot 10^{-10} \frac{J}{kg}) = -6.68 \cdot 10^{-11} \text{ J} \end{array} \right.$$

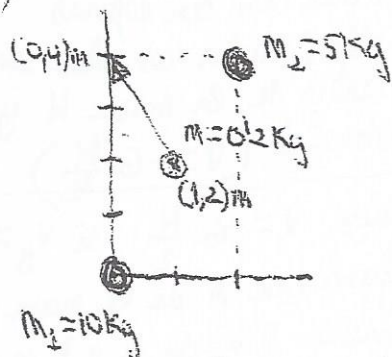
el apartado c) también se podría haber hecho aplicando el principio de superposición a la energía potencial en cada uno de los puntos

continuación:

$$E_{p(1,2)m} = E_{p_{1,2m}} + E_{p_{2,1,2)m}}$$

$$E_{p(3,4)m} = E_{p_{3,4)m}} + E_{p_{4,3)m}}$$

d)



masa que se traslada

$$W_{(1,2)m \rightarrow (0,4)m} = m \cdot (V_{(1,2)m} - V_{(0,4)m})$$

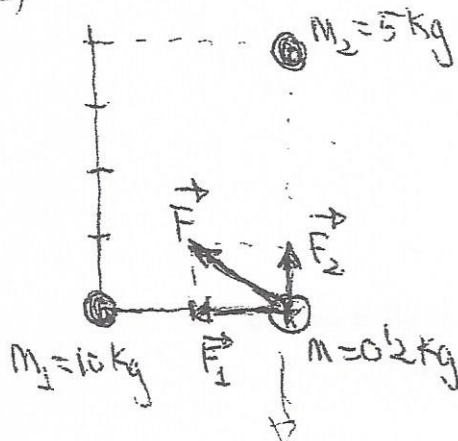
$$W_{(1,2)m \rightarrow (0,4)m} = 0,2 \cdot (-4'47 \cdot 10^{-10} - (-3'34 \cdot 10^{-10}))$$

$$W_{(1,2)m \rightarrow (0,4)m} = -2'26 \cdot 10^{-11} \text{ J}$$

Como era de esperar, al alejar la masa $m = 0,2 \text{ kg}$ de las otras dos, no nos saldría un trabajo positivo o espontáneo, es decir, que espontáneamente las fuerzas del campo gravitatorio no alejarán la masa $m = 0,2 \text{ kg}$ de las otras dos, por ello será necesaria una fuerza externa que realice un trabajo externo de $2'26 \cdot 10^{-11} \text{ J}$ que pasará a incrementar la E_p gravitatoria en $2'26 \cdot 10^{-11} \text{ J}$ (podría comprobarse con los resultados de c)).

Si el trabajo hubiera sido espontáneo, como por ejemplo en el desplazamiento al contrario que este, habría sido la fuerza gravitatoria la que lo hubiera hecho haciendo disminuir la E_p gravitatoria.

e)



$$F_1 = G \cdot \frac{M_1 \cdot m}{r_1^2} = 6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{10 \cdot 0,2}{2^2} = 3'33 \cdot 10^{-11} \text{ N}$$

$$\vec{F}_1 = -3'33 \cdot 10^{-11} \vec{i} \text{ (N)}$$

$$F_2 = G \cdot \frac{M_2 \cdot m}{r_2^2} = 6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5 \cdot 0,2}{4^2} = 4'17 \cdot 10^{-12} \text{ N}$$

$$\vec{F}_2 = 4'17 \cdot 10^{-12} \vec{j} \text{ (N)}$$

Otra forma de hacerlo sería calcular el campo gravitatorio $\vec{g}$ en ese pto y luego multiplicarlo por la masa m

$$\vec{F} = m \cdot \vec{g}$$

Nos saldría el mismo vector $\vec{F}$ y calcularíamos su módulo

Principio de superposición $\Rightarrow \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

$$\vec{F} = -3'33 \cdot 10^{-11} \vec{i} + 4'17 \cdot 10^{-12} \vec{j} \text{ (N)}$$

$$|\vec{F}| = \sqrt{(-3'33 \cdot 10^{-11})^2 + (4'17 \cdot 10^{-12})^2} = 3'34 \cdot 10^{-11} \text{ N}$$

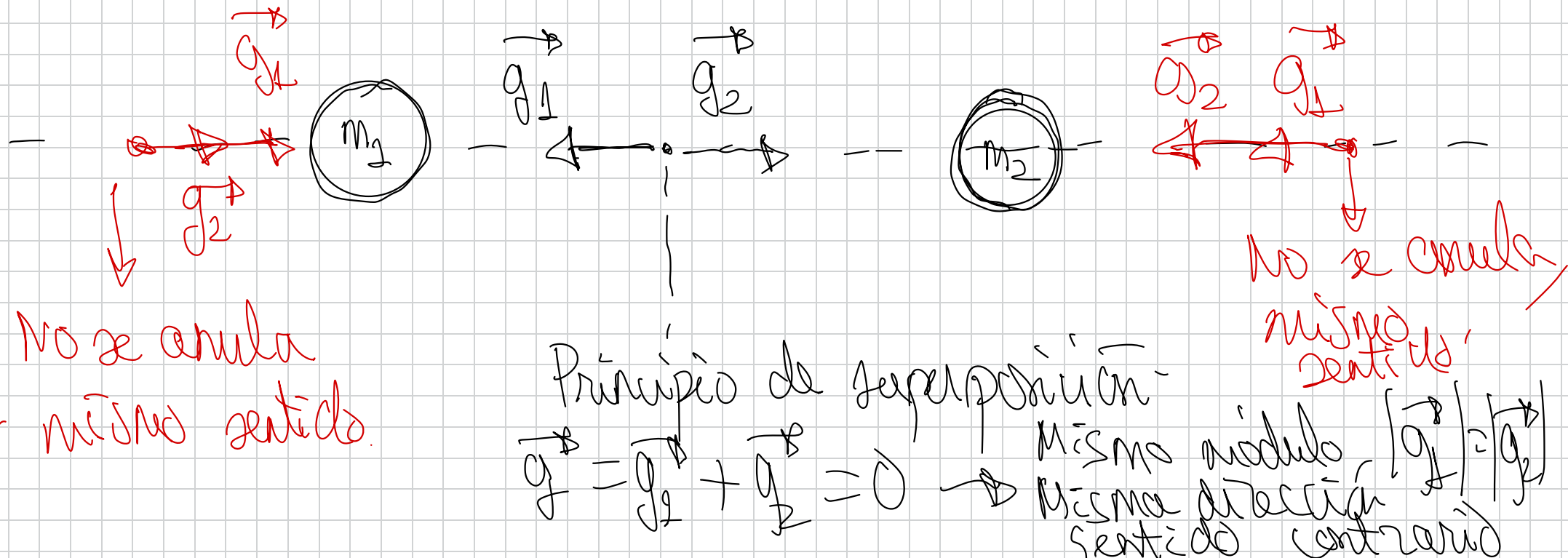
24.- Si tenemos dos masas puntuales y de igual valor separadas por una distancia d

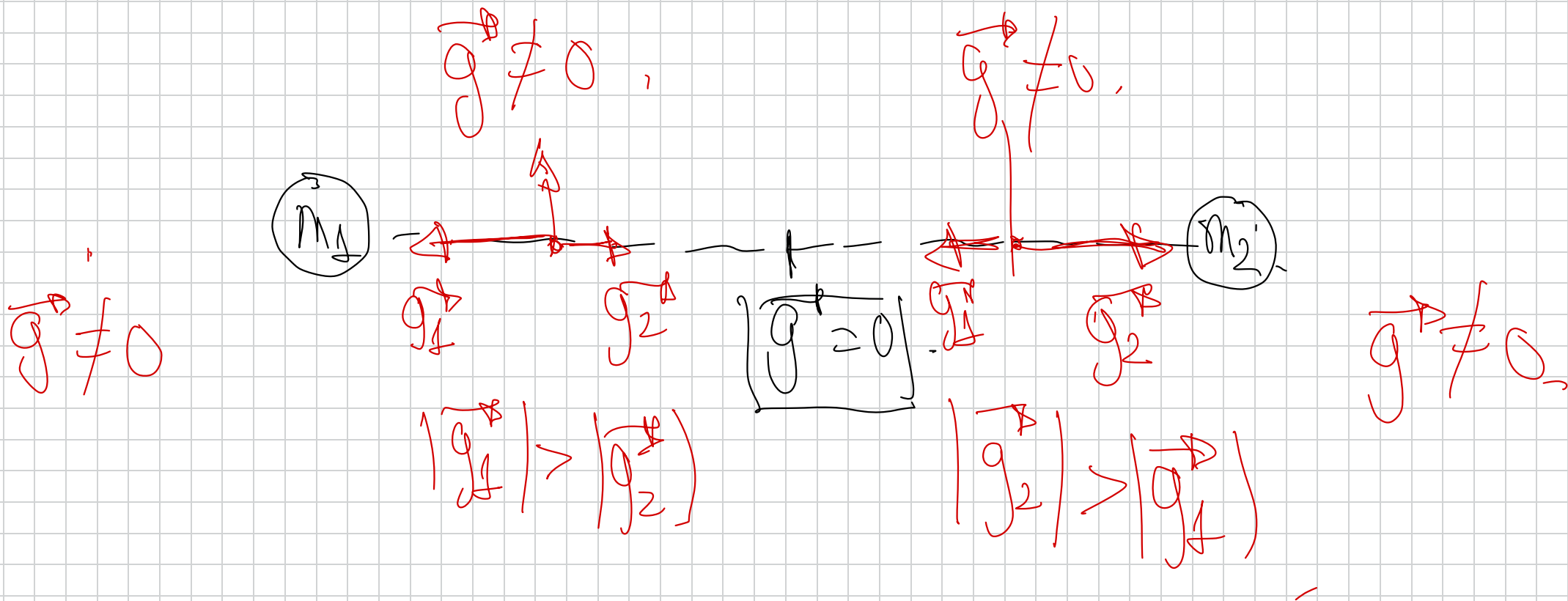
a) ¿Existe algún punto en donde el campo gravitatorio sea nulo?. En caso afirmativo, indica dónde

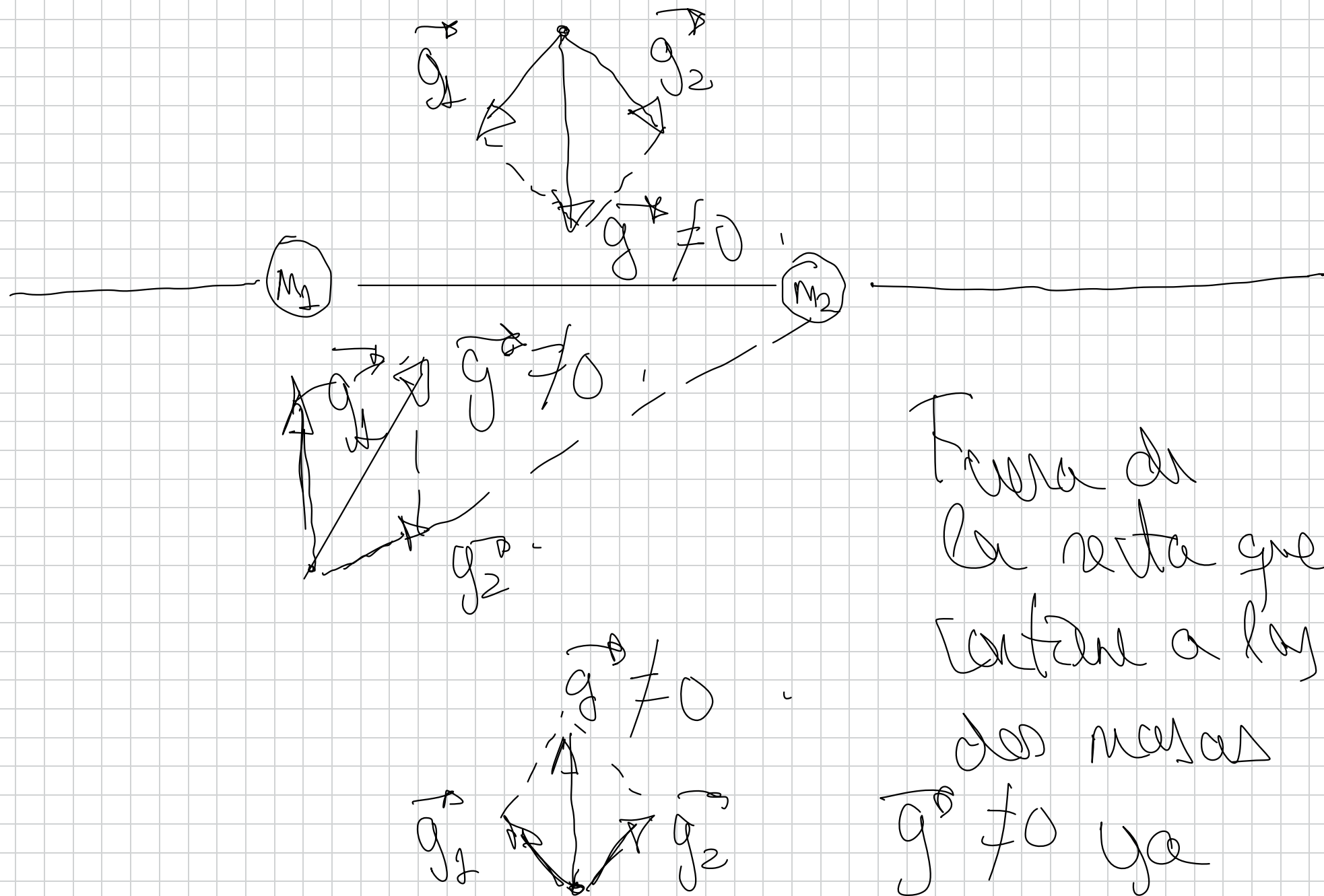
b) ¿Existe algún punto en donde el potencial gravitatorio sea nulo?. En caso afirmativo, indica dónde

$$m_1 = m_2$$

$$g = G \cdot \frac{M}{r^2}$$



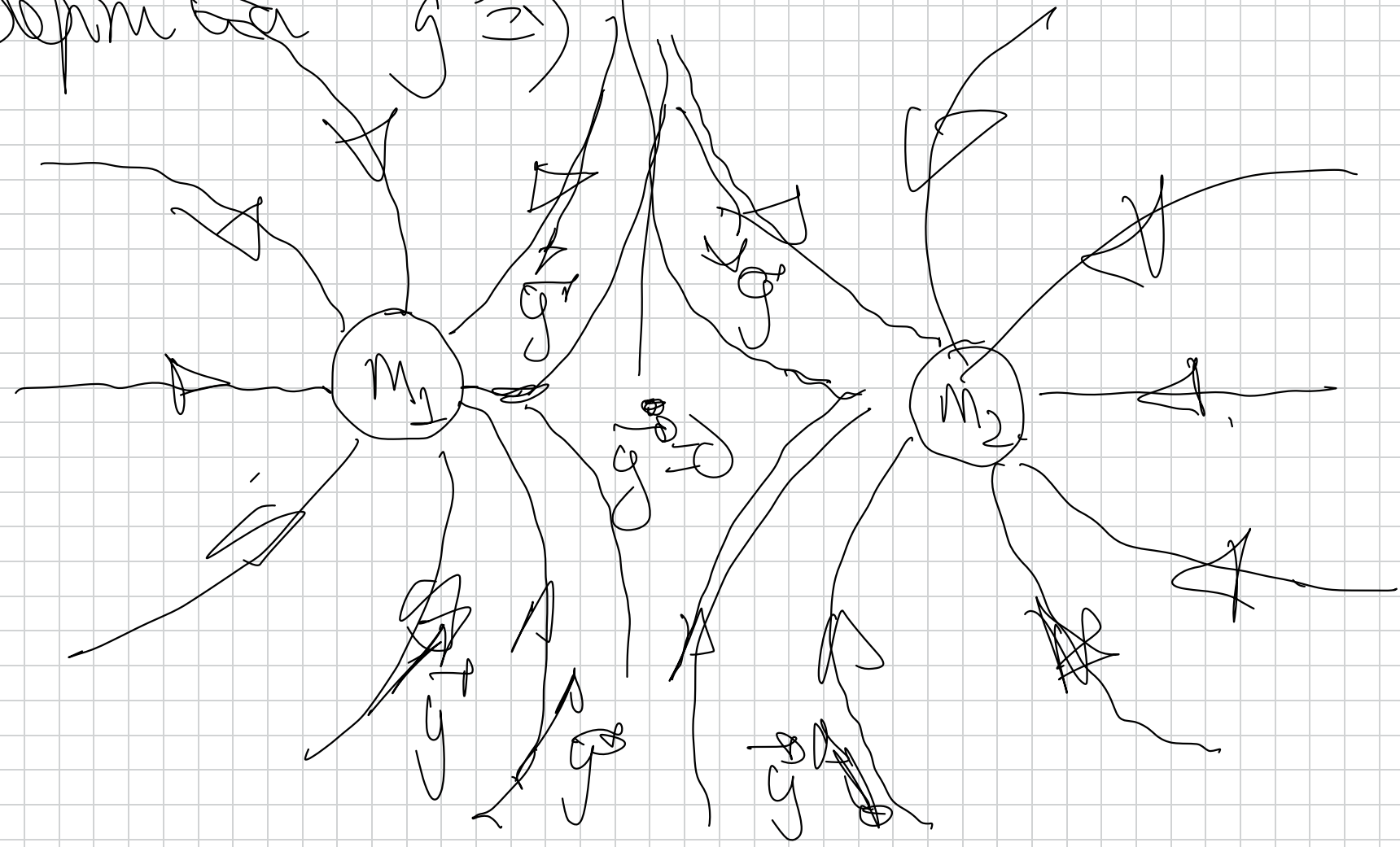




que $\vec{g}_1$ y $\vec{g}_2$

Solo se anula en este pto.
(salvo en el ∞ donde por
definición $\vec{g} = 0$)

posee distinta
dirección.



b)

No se anula en ningún
 punto en el 2^{do} lado de V por
 definición es nulo



Principio de superposición

$$V = V_1 + V_2,$$

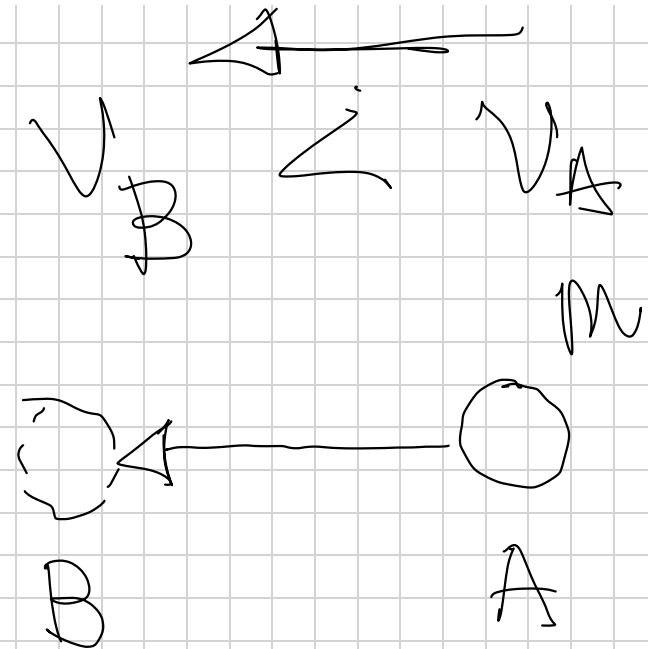
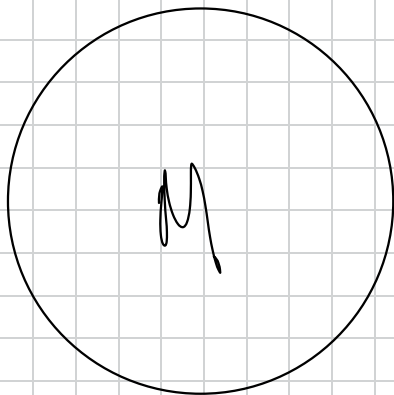
$$V = -G \frac{m_1}{r_1} - G \frac{m_2}{r_2} \neq 0.$$

pag 31.

43.- Una partícula de masa m se mueve desde un punto A hasta un punto B bajo la acción de un campo gravitatorio creado por una masa M , hacia la que se acerca

- Indicar cuál de los dos puntos estará a un menor potencial gravitatorio
- Indicar cómo variarán sus energías potencial, cinética y mecánica al pasar desde A hasta B

a)

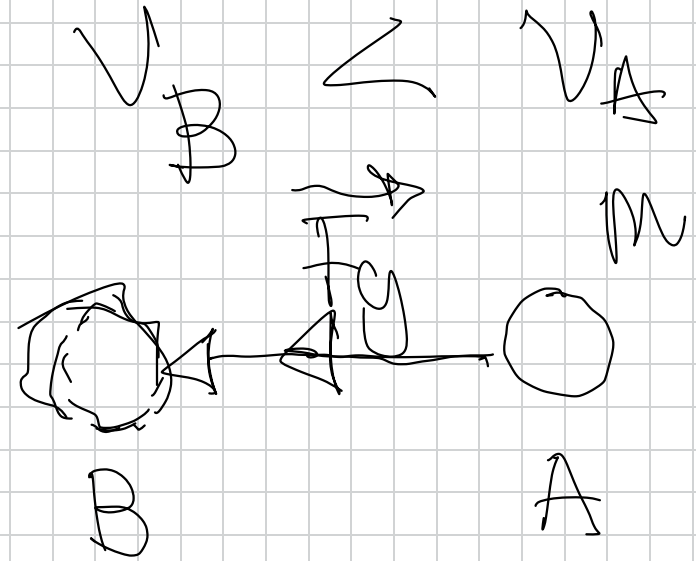
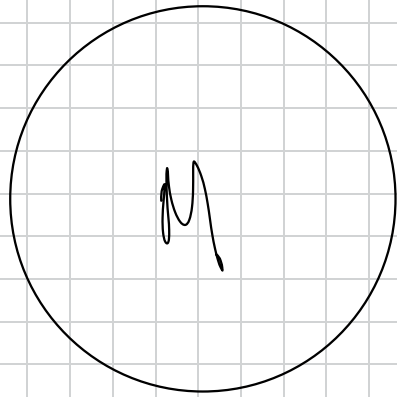


$$V = -G \frac{M}{r}$$

$$r_A > r_B$$

$$|V_A > V_B|$$

menos
negativo



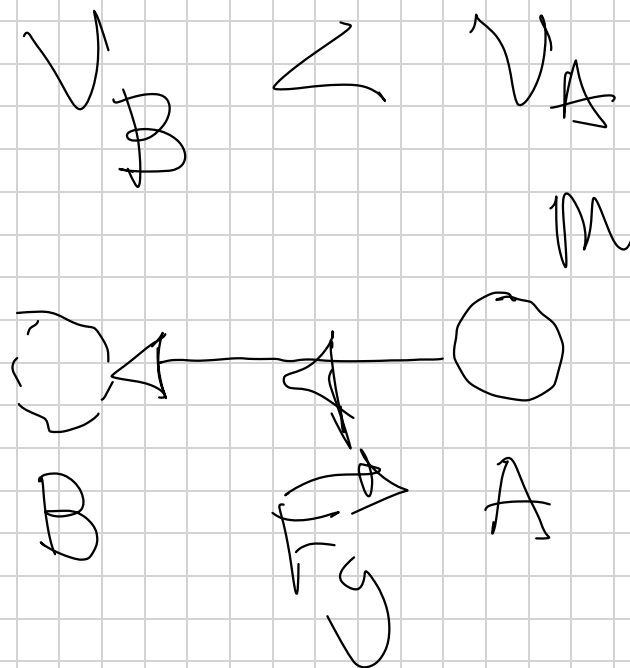
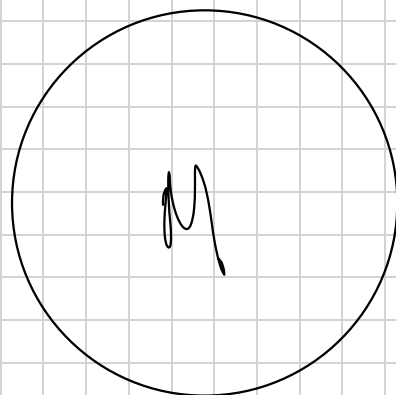
$$W_{A \rightarrow B} = m \left(V_A - V_B \right) > 0$$

$$V_A - V_B > 0$$

$$\boxed{V_A > V_B}$$

→
 Aceleración
 masas es espontánea

b)



$$E_m \supset E_p + E_c.$$

$$\rightarrow \Delta E_p = W_{Fg} = \Delta E_c$$

$A \rightarrow B$
 $A \rightarrow B$
 $A \rightarrow B$

Spontane

$$W_{Fg} > 0$$

$$-(E_p - E_{pA}) > 0$$

$$\Delta E_c > 0$$

$A \rightarrow B$

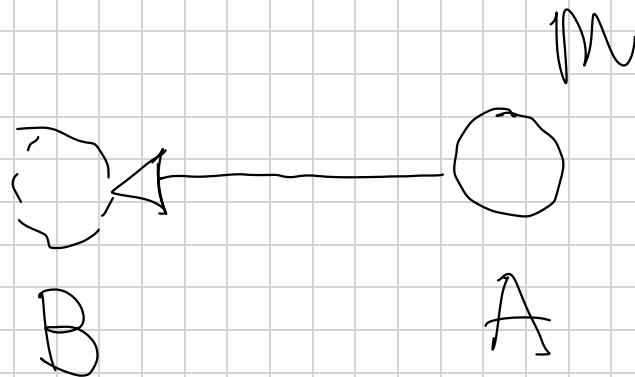
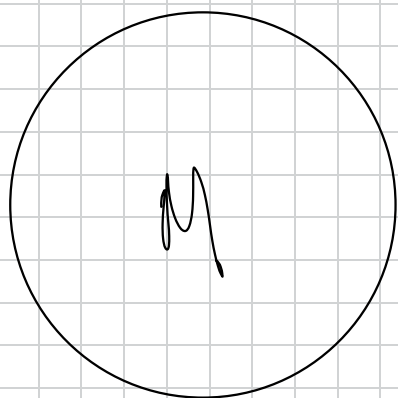
$$E_c \uparrow$$

$$E_{pA} - E_{pB} > 0$$

$$E_{pA} > E_p \rightarrow \text{ca } E_{pA}$$

1

Bajo la exclusiva acción
de la F_g (conservativa)
la E_m permanece de



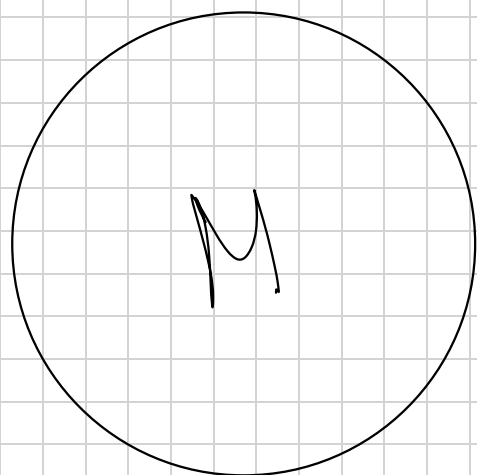
$$\downarrow \quad \mathbb{F}_p \supseteq G \xrightarrow{M, M} \downarrow$$

$$a_i \in p \downarrow,$$

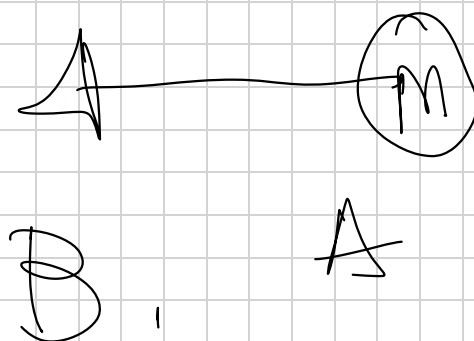
$$- \mathbb{F}_p = \mathbb{W} = \Delta \mathbb{F}_p.$$

$$- \Delta E_p = \Delta E_c$$

La E_c $\uparrow$ (coincide
con la disminución
de E_p)



$$V_B < V_A$$



$$m - V_B < m - V_A$$

$$E_B < E_A$$

$$E_{PA} > E_{PB}$$

$$\hookrightarrow E_{PD}$$

$$\hookrightarrow E_C, E_m = 0$$

$$v_0 = 0$$

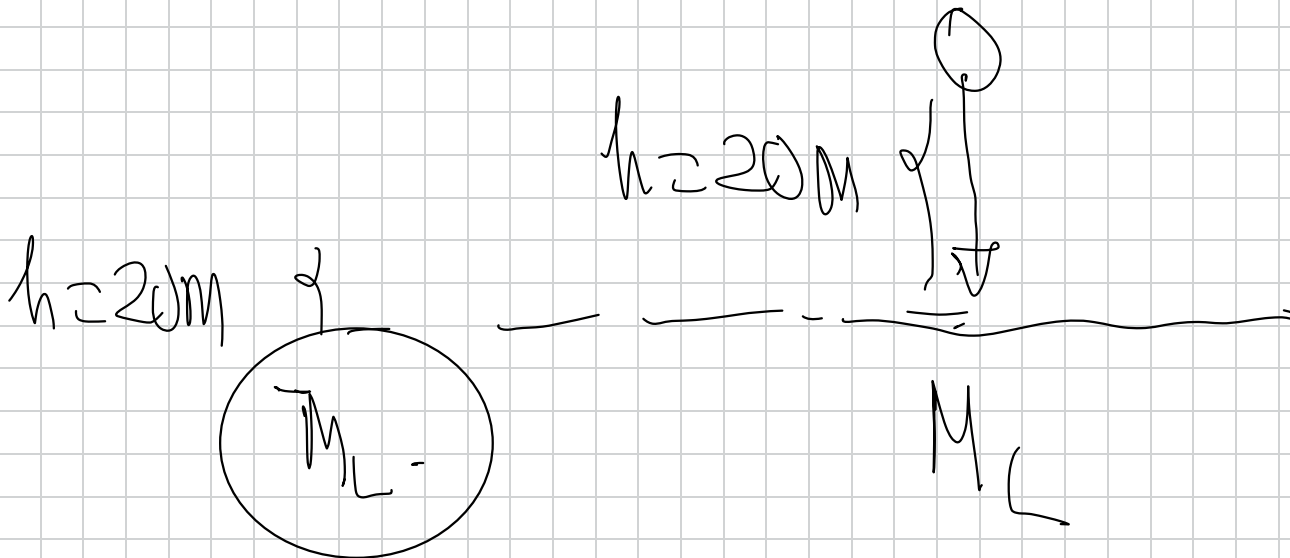
53.- Se deja caer desde 20 m de altura sobre la superficie lunar un cuerpo.

a) Calcular el tiempo que tardará en tocar el suelo

b) Si desde el suelo volvemos a lanzar el cuerpo con una velocidad de 5 m/s, calcular la altura máxima que alcanzará, así como el tiempo que tardará en alcanzar dicha altura máxima.

$$M_L = 7,36 \cdot 10^{22} \text{ Kg} \quad R_L = 1740 \text{ Km} \quad G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}$$

a)



El tiempo solo
es posible
calcularlo con
cinética,
[MRVA]

$$h = \frac{1}{2} g_L t^2$$

$$2h = g_L t^2$$

$$t^2 = \frac{2h}{g_L}$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g_L}}$$

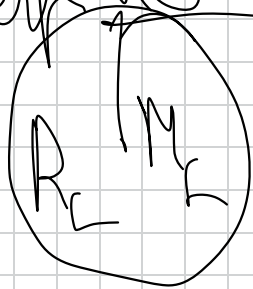
1) $v = v_0 + g \cdot t$

2) $h = \cancel{v_0} \cdot t + \frac{1}{2} g t^2$

3) $v^2 = v_0^2 - 2g_L h$

Tous en la superficie lunar

$g_L = G \cdot \frac{M_L}{R_L^2}$



$$g_L = 667 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{736 \cdot 10^{22}}{(174 \cdot 10^3)^2}$$

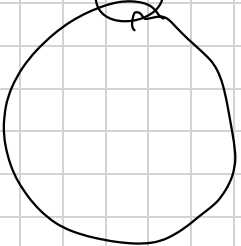
$$g_L = 162 \text{ m/s}^2.$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{162}} = 4197 \text{ s}.$$

2a) $v = 0$

$h_{\text{max}} = ?$

$v_0 = 5 \text{ m/s}$



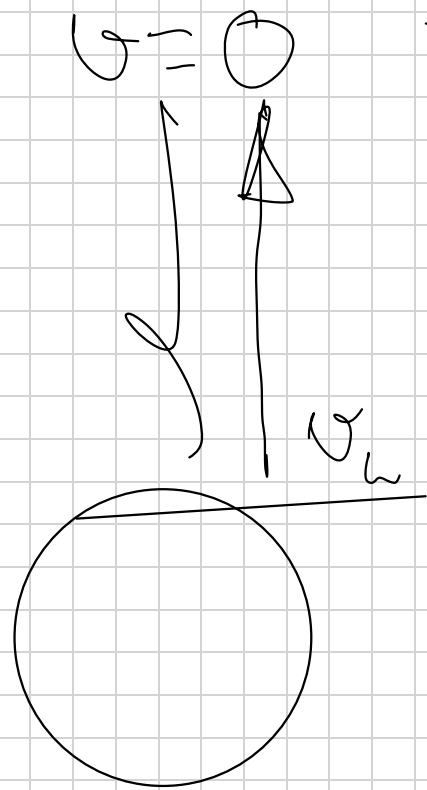
$$v^2 = v_0^2 - 2g_L h$$
~~$$v^2 = v_0^2 - 2g_L h_{\text{max}}$$~~

$$2g h_{\max} = v_0^2 -$$

$$h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{5^2}{2 \cdot 10} =$$

$$h_{\max} = 1.25 \text{ m}$$

Para calcular la $h_{\max}$ se puede hacer
por cinemática o por energía.
Preferentemente se hace por energía.

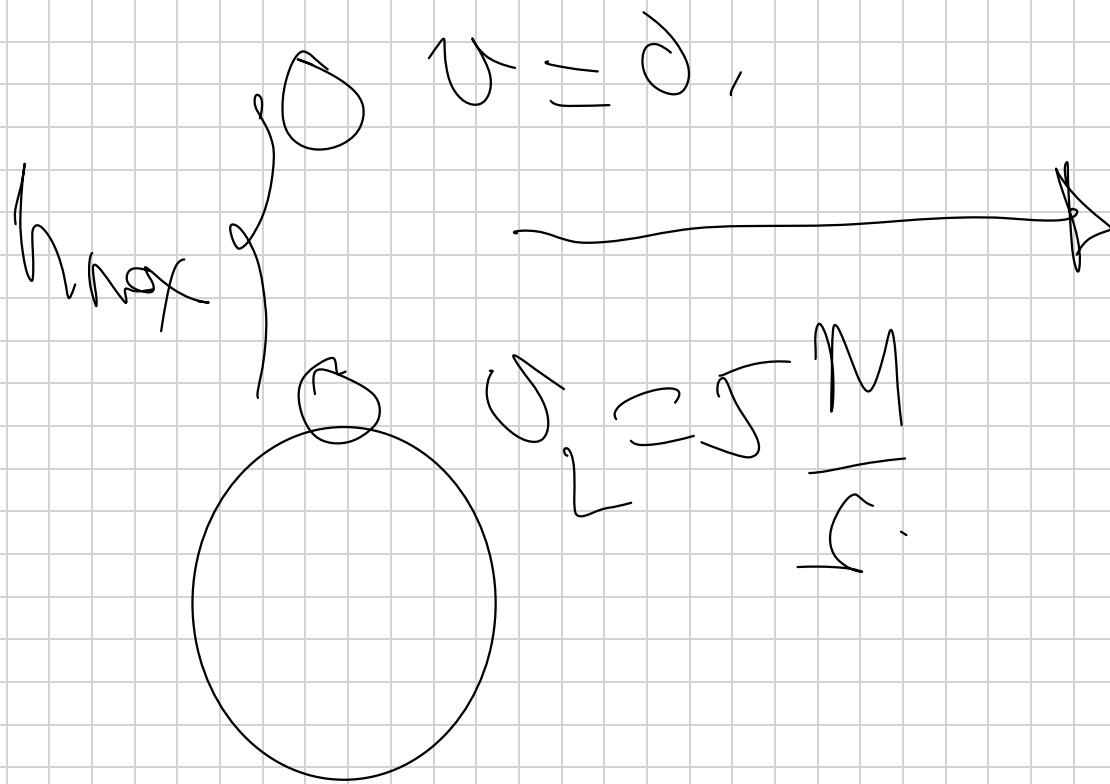


$$E_p = m g \cdot h_{\text{max}} \quad E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

$$E_p = m g \cdot h + E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

$$0 + \frac{1}{2} m v^2 = m g \cdot h_{\text{max}}$$

$$h_{\text{max}} = \frac{v^2}{2g} = 7.71 \text{ m}$$



~~$$v = u_0 - g \cdot t$$~~

$$g \cdot t = u_0$$

$$t = \frac{u_0}{g} = \frac{5 \frac{m}{s}}{16.2 \frac{m}{s^2}} \approx 0.31$$

71.- Un astronauta aterriza sobre un planeta de radio $0,71R_T$ y mide la gravedad, que resulta ser de $6,32 \text{ m/s}^2$

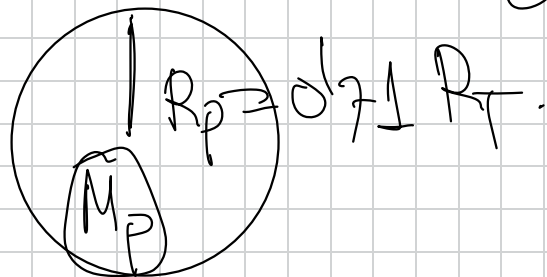
a) Expresa la relación entre la masa del planeta y la masa de la Tierra

b) Si en la Tierra, y cargando con el mismo equipo que en el planeta, el astronauta alcanzaba una altura de 20 cm al saltar verticalmente hacia arriba, ¿Qué altura alcanzará en dicho planeta?

$g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

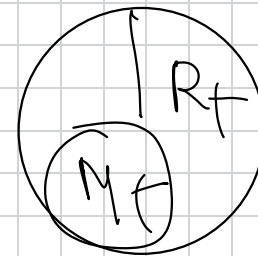
pag 35.

$$g_p = 6,32 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



$$g_p = G \cdot \frac{M_p}{(0,71 R_T)^2}$$

$$g_T = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



$$g_T = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}$$

$$\frac{g_P}{g_T} = \frac{\cancel{G} \cdot \frac{M_P}{(0.71)^2 \cdot \cancel{R^2}}}{\cancel{G} \cdot \frac{M_T}{\cancel{R^2}}}$$

$$\frac{g_P}{g_T} = \frac{\cancel{M_P}}{(0.71)^2 M_T}$$

$$\frac{M_P}{M_T} = (0.71)^2 \frac{g_P}{g_T}$$

$$\frac{M_p}{M_T} = (0.71)^2 = \frac{6.32}{9.8}$$

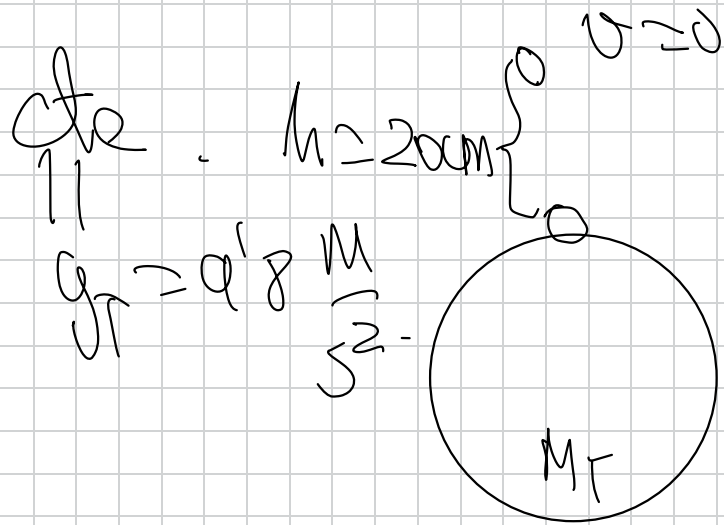
$$M_p = 0.325 M_T$$

71.- Un astronauta aterriza sobre un planeta de radio $0,71R_T$ y mide la gravedad, que resulta ser de $6,32 \text{ m/s}^2$

- Expresa la relación entre la masa del planeta y la masa de la Tierra
- Si en la Tierra, y cargando con el mismo equipo que en el planeta, el astronauta alcanzaba una altura de 20 cm al saltar verticalmente hacia arriba, ¿Qué altura alcanzará en dicho planeta?

$$g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

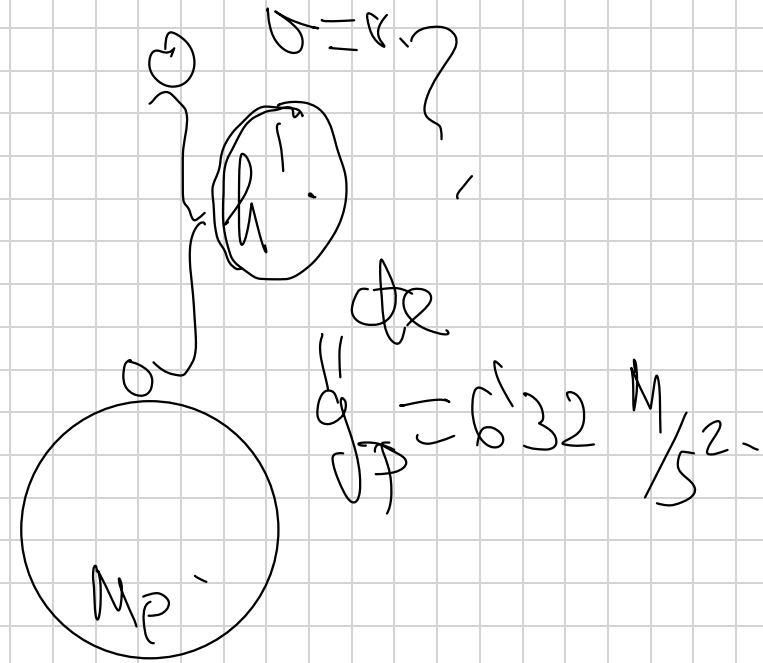
h por cinética o energía, preferentemente por E



Conservación E_M

$$E_{p_T} + E_c = E_{p_h} + E_{c_h}$$

$$m g_T \cdot h + E_c = m g_T \cdot h + \frac{1}{2} m v^2$$



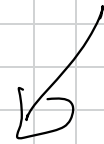
Conservación de E_M

$$E_{p_P} + E_c = E_{p_h} + E_{c_h}$$

$$m g_P \cdot h + E_c = m g_P \cdot h + \frac{1}{2} m v^2$$

$$E_c = m \cdot g_T \cdot h$$

$$E_c = m \cdot g_P \cdot h'$$



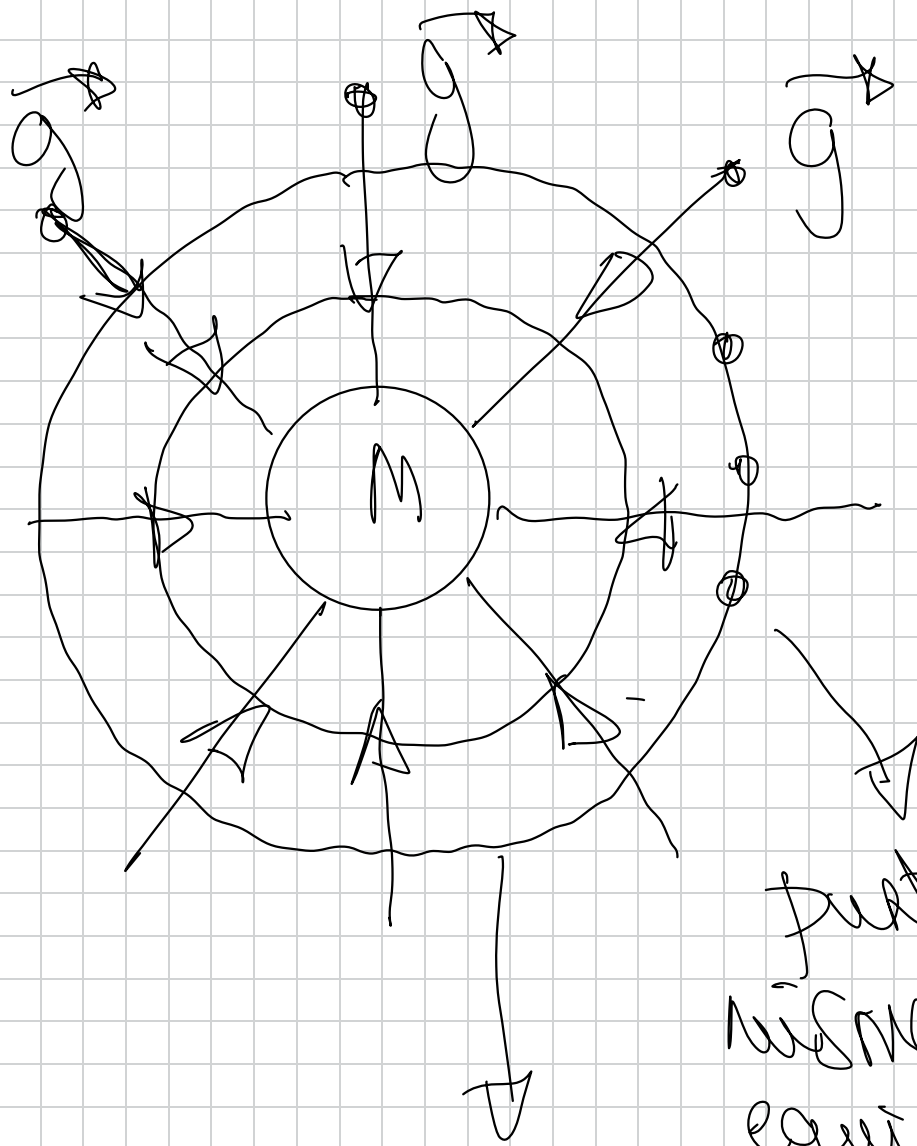
La E_c suministrada es
la misma:

$$\leq 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m}$$

~~$$m \cdot g_T \cdot h = m \cdot g_P \cdot h'$$~~

$$h' = \frac{g_T \cdot h}{g_P} = \frac{9.8 \cdot 0.2}{6.38} = 0.31 \text{ m}$$

0.31 m = 31 cm al dar el mismo salto
alcanza una altura mayor en ese planeta
de gravedad menor.



$$V = \frac{E_p}{m}$$

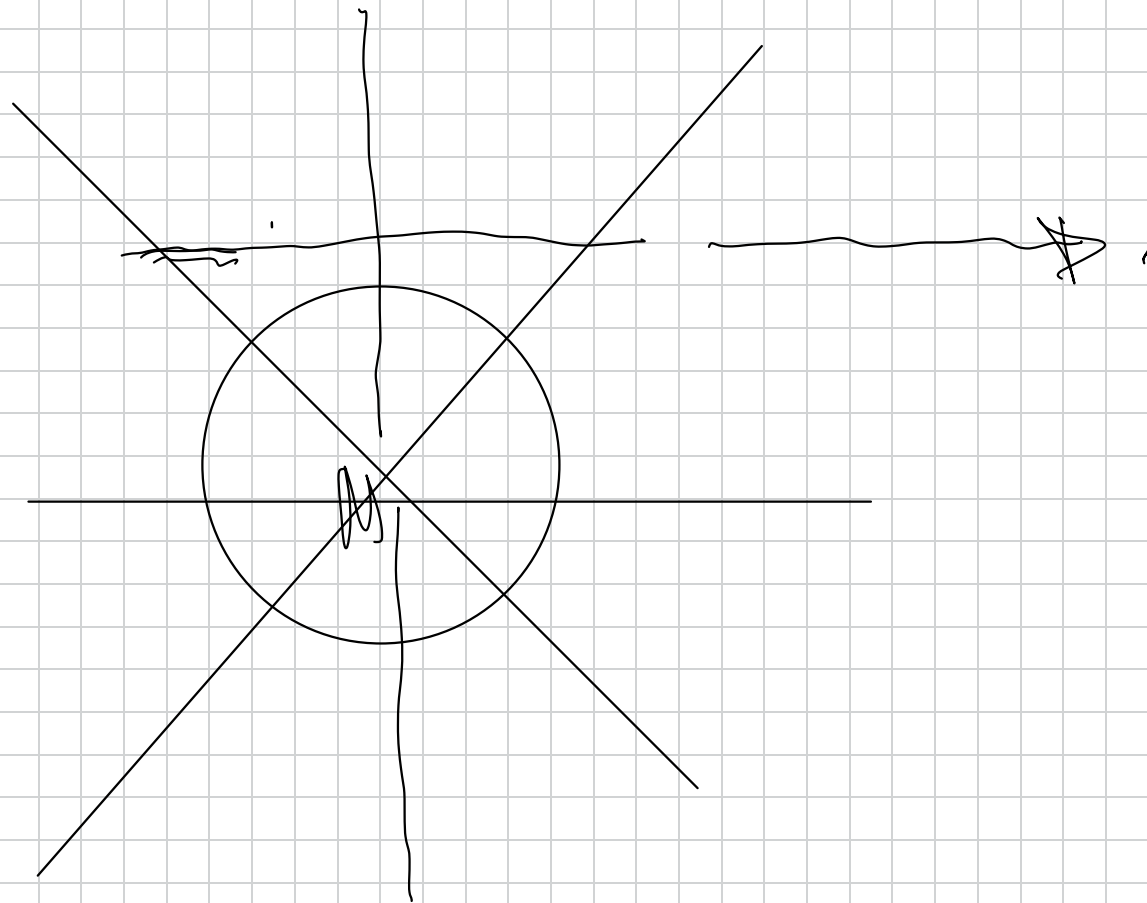
$$V = \frac{-G \cdot \frac{M \cdot m}{r}}{m}$$

$$V = -G \cdot \frac{M}{r}$$

punto de la
misma superficie
equidistante de la masa M

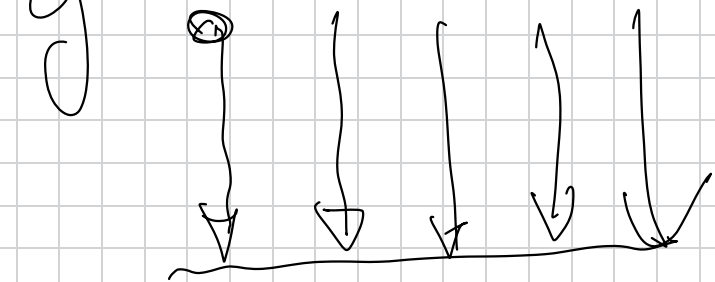
Superficies equipotenciales son
perpendiculares a las líneas de campo
y en todos los puntos el potencial

es el mismo.



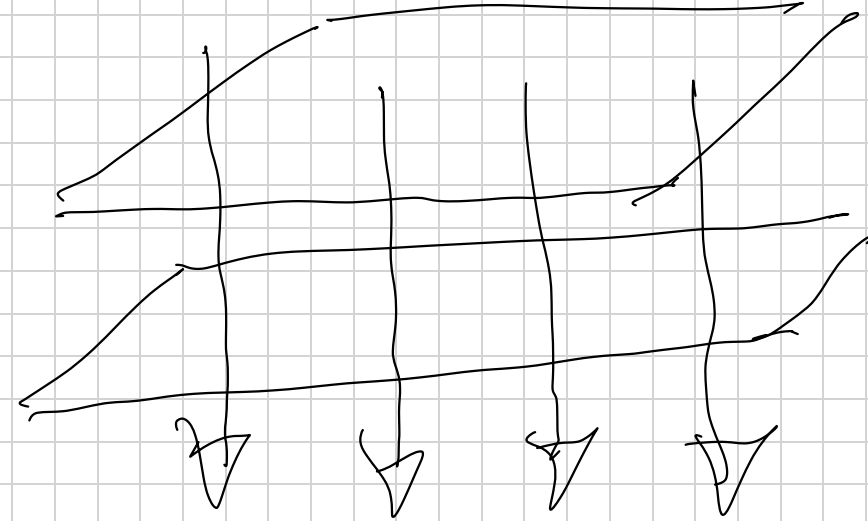
Cuando represento
líneas de campo
paralelas, significa
que en esa zona
 g es cte .

$g = cte$.

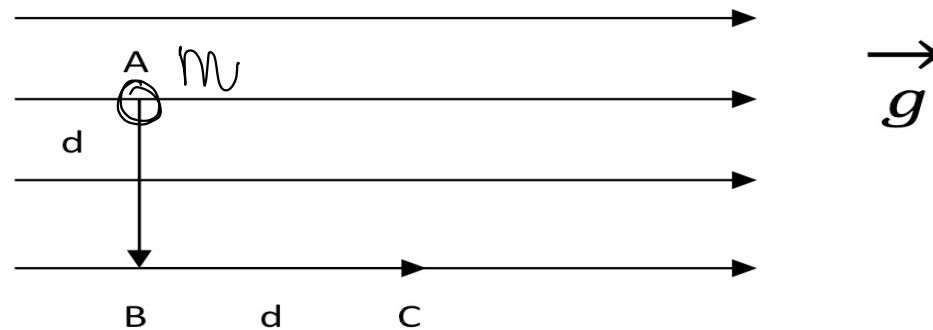


$$g = a \frac{M}{r^2} \cdot M_T$$

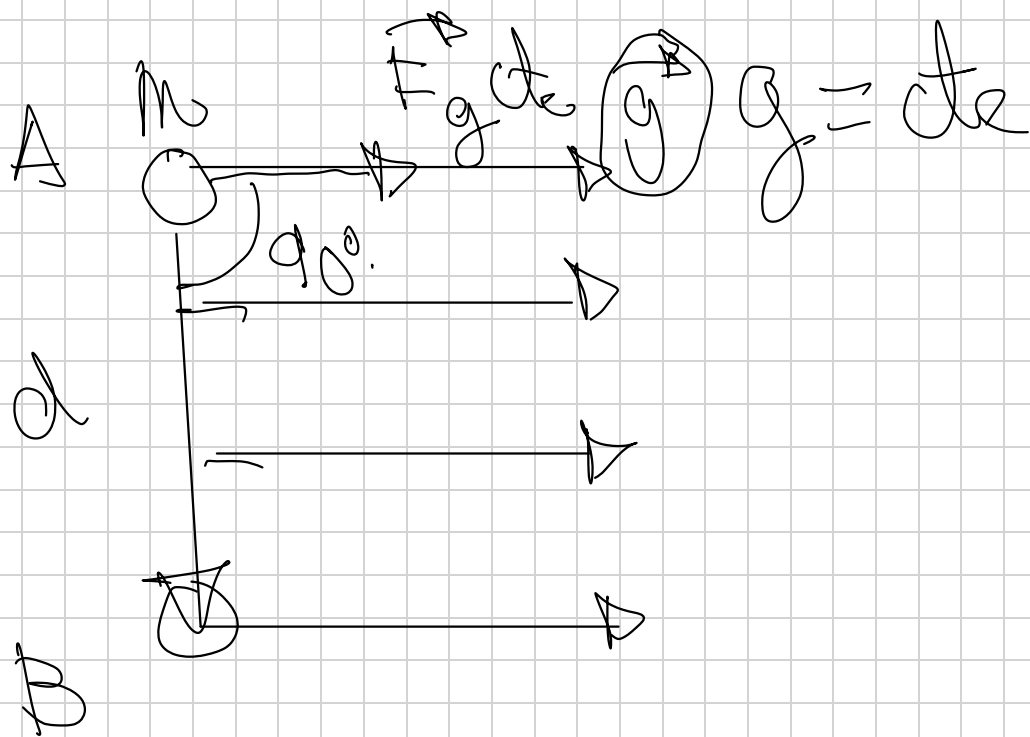
Superficies equipotenciales
perpendiculares a las
líneas de campo



14.- En una región del espacio existe un hipotético campo gravitatorio uniforme de intensidad g , representado en la figura por sus líneas de campo.



a) ¿Qué trabajo se realizará para trasladar una masa m desde el punto A hasta el punto B?. ¿Cómo varía la energía potencial?



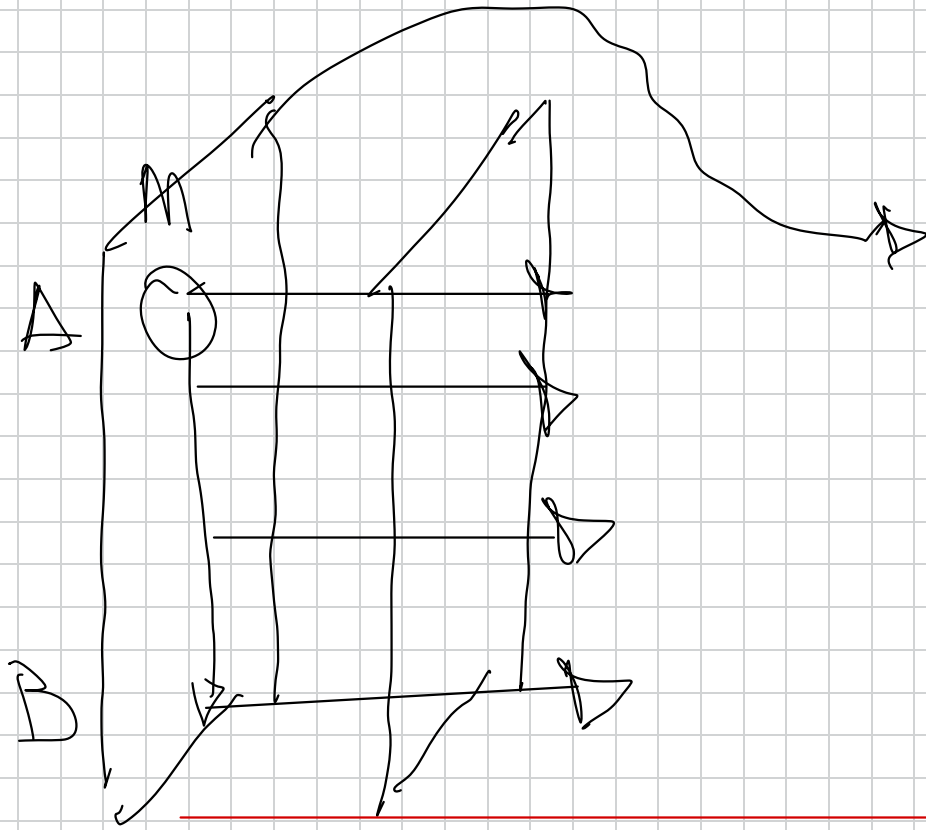
$$F_g = m \cdot g$$

$$W = F \cdot d \cdot \cos 90^\circ$$

A-B

$$W_{A \rightarrow B} = m \cdot g \cdot d \cdot 0$$

$$W_{A \rightarrow B} = 0$$

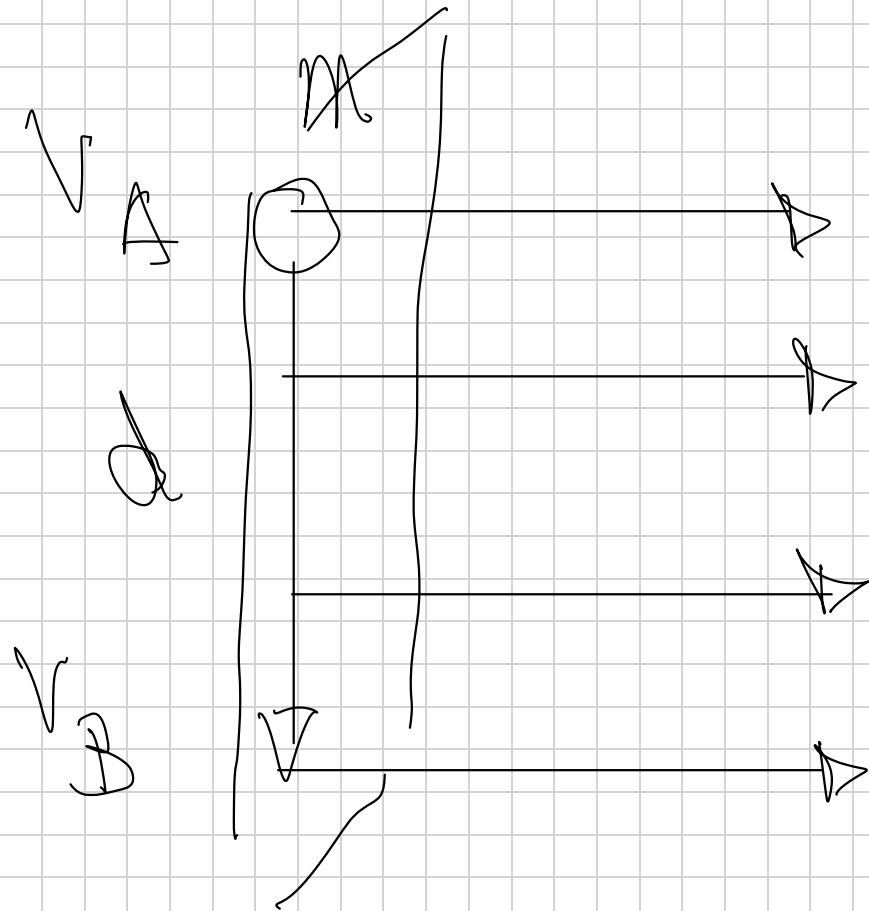


Superficies equipotenciales
 ⊥ a las líneas de campo.

$$V_A = V_B$$

$$W_{A \rightarrow B} = m \cdot (v_A - v_B) = 0,$$

$v_A = v_B$



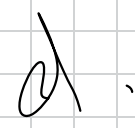
$$E_P = m \cdot v_A$$

$$E_P = m \cdot v_B$$

$$v_A = v_B$$

$$E_P = E_B$$

No conflict



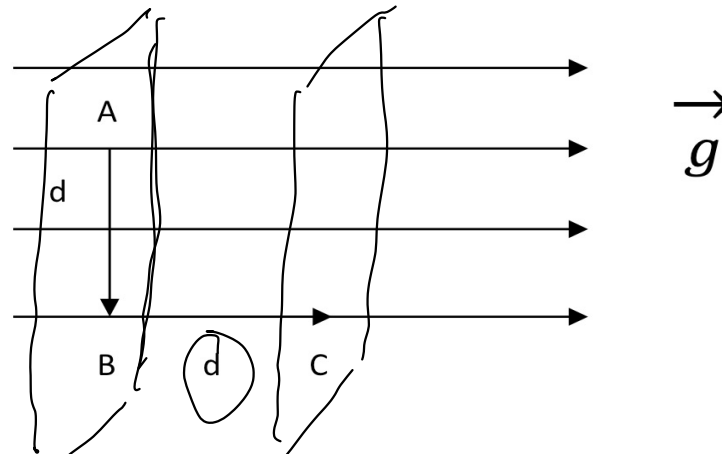
↑ cancer rates,

$$0 = \neg \exists x (A \rightarrow B)$$

$$\Delta \vdash P \rightarrow B \quad \Rightarrow \quad \circ$$

I_p no varía, es la misma

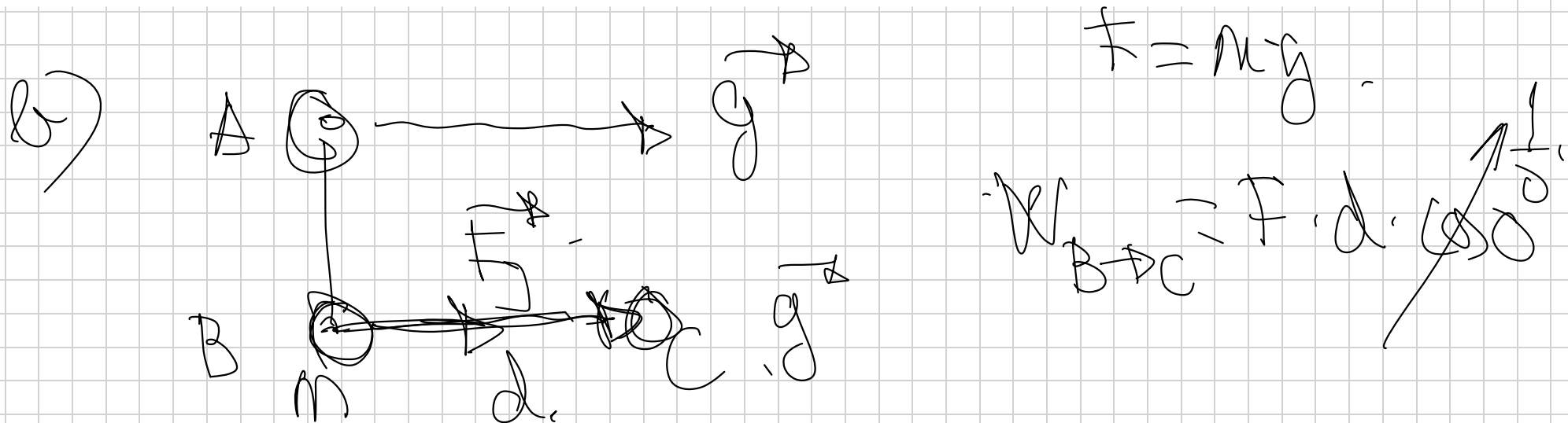
14.- En una region del espacio existe un hipotético campo gravitatorio uniforme de intensidad g , representado en la figura por sus líneas de campo.



a) ¿Qué trabajo se realizará para trasladar una masa m desde el punto A hasta el punto B?. ¿Cómo varía la energía potencial?

b) ¿Qué trabajo se realizará para trasladar una masa m desde el punto B hasta el punto C?. ¿Aumentará o disminuirá su Energía potencial gravitatoria?.

c) ¿Qué trabajo se realizará para llevar la masa m desde C hasta A?, ¿cómo varía su energía potencial?



$$W_{B \rightarrow C} = m \cdot g \cdot d$$

$$W_{B \rightarrow C} = -\Delta E_{p_{B \rightarrow C}}$$

$$m \cdot g \cdot d = \Delta E_{p_{B \rightarrow C}}$$

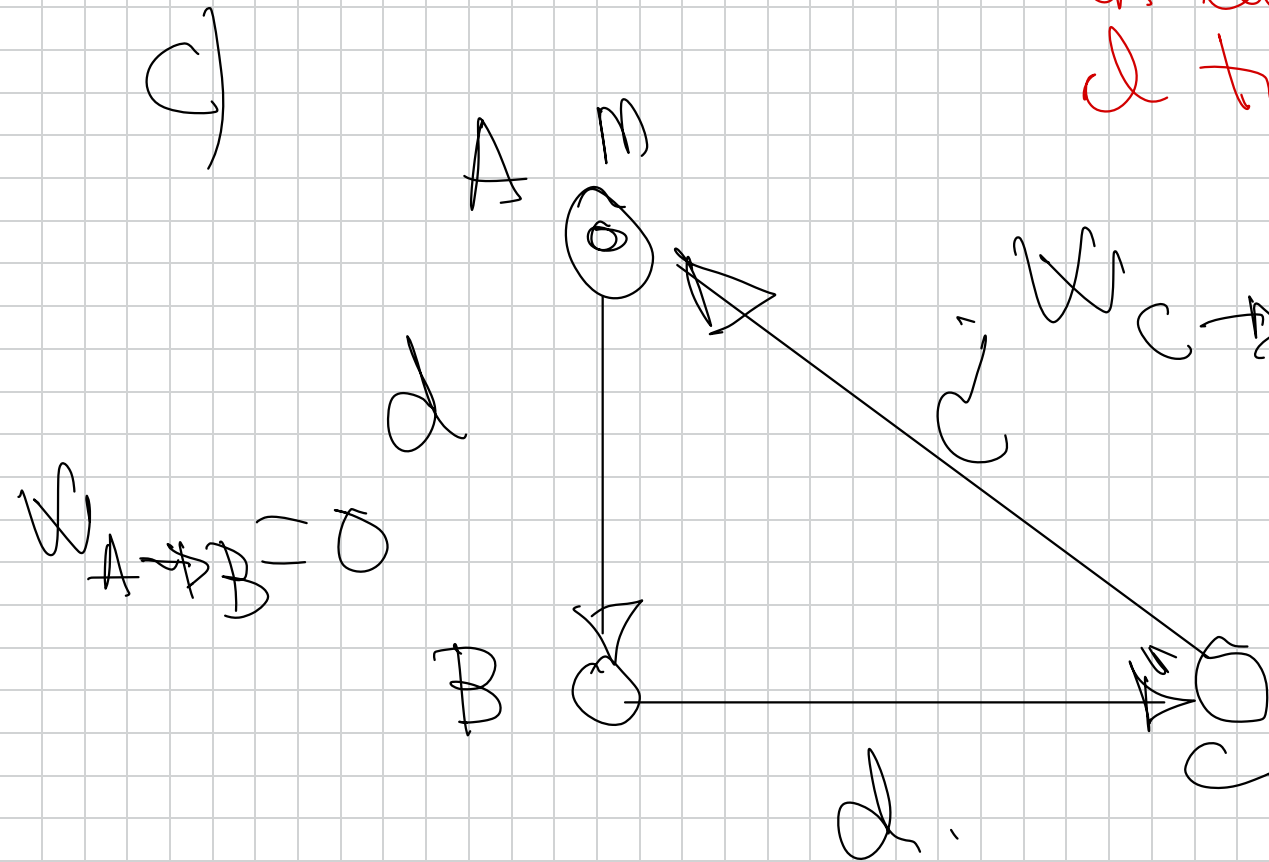
$$\Delta E_{p_{B \rightarrow C}} = -m \cdot g \cdot d$$

↓
Disminuye la E_p .

$$W_{B \rightarrow C} > 0$$

→
El desplazamiento
será espontáneo

En la trayectoria cerrada el trabajo es nulo.



$$W_{A \rightarrow B} = 0$$

$$W_{C \rightarrow A} = ?$$

$$W_{A \rightarrow A} = M \cdot (V_A - V_A)$$

$$W_{A \rightarrow A} = 0$$

El trabajo realizado por la fuerza conservativa es independiente de la trayectoria seguida.

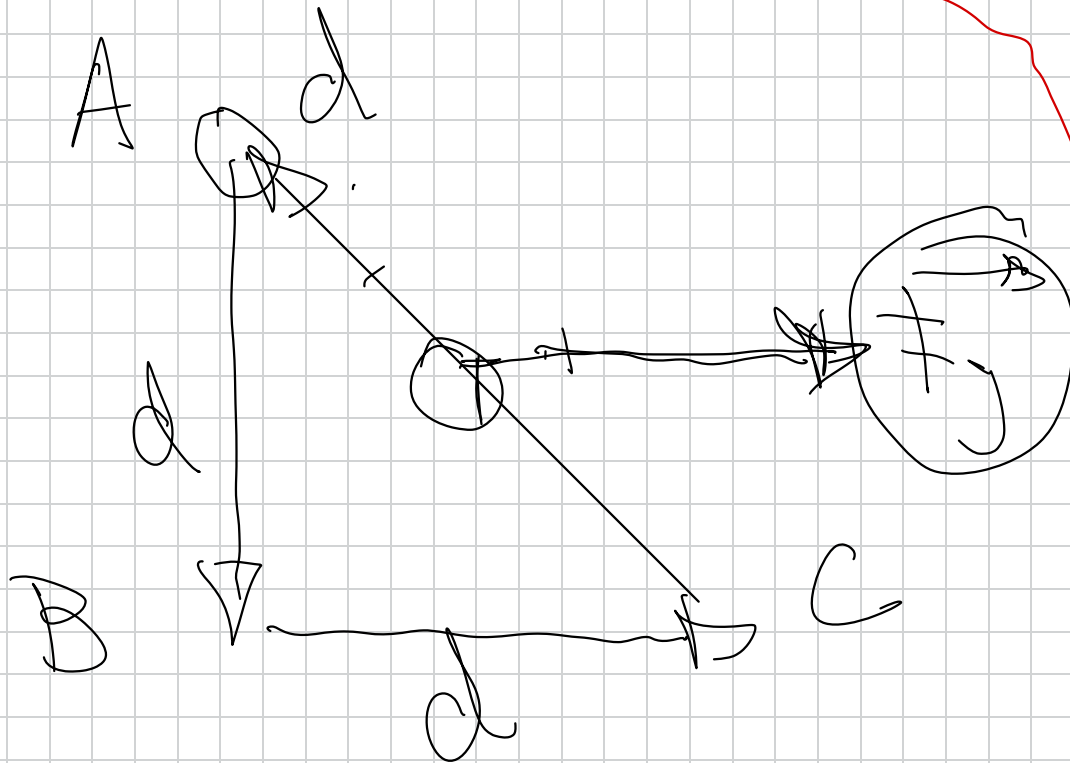
$$W_{B \rightarrow C} = m \cdot g \cdot d$$

0. ~~$W_{A \rightarrow A}$~~ = ~~$W_{A \rightarrow B}$~~ + ~~$W_{B \rightarrow C}$~~ + ~~$W_{C \rightarrow A}$~~

Las fuerzas conservativas realizan un trabajo nulo en una trayectoria cerrada.

$$\Delta \text{---} 0 = 0 + m \cdot g \cdot d + W_{C \rightarrow A}$$

$$W_{C \rightarrow A} = -m \cdot g \cdot d$$



$$W_{C \rightarrow A} = -\Delta E_{p_{C \rightarrow A}}$$

$$-m \cdot g \cdot d = -\Delta E_{p_{C \rightarrow A}}$$

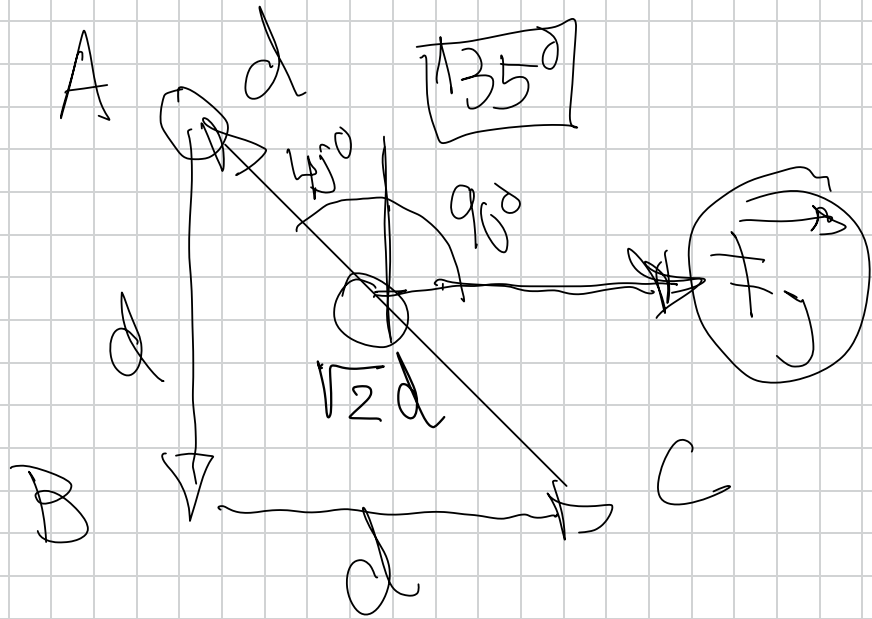
$$\Delta E_{p_{C \rightarrow A}} = m \cdot g \cdot d$$

La E_p aumenta

$W < 0$, no realiza un trabajo

espontáneos por parte de la fuerza del campo,
 sería necesaria la actuación de una
 fuerza externa al campo para realitarlo.
 la E_p aumentaría.

Otra forma de pensar: $F = m \cdot g$.



$$W_{C \rightarrow A} = F \cdot \sqrt{(d^2 + d^2)} \cdot \cos 135^\circ$$

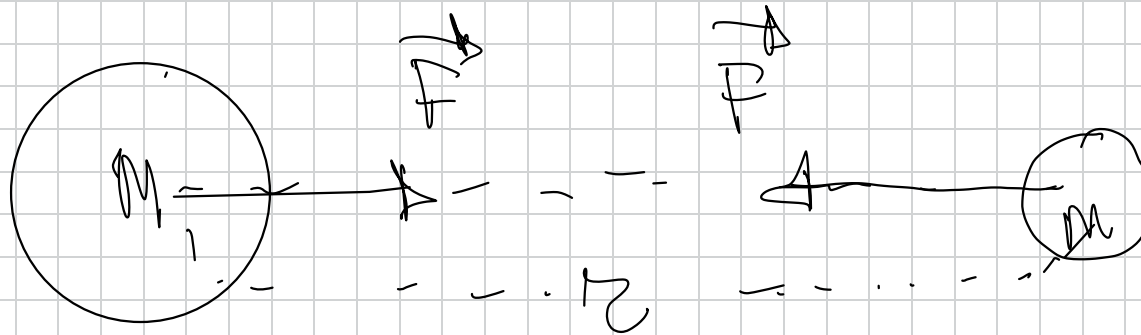
$$W_{C \rightarrow A} = m \cdot g \sqrt{2d^2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$W_{C \rightarrow A} = m \cdot g \sqrt{2} \cdot d \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$W_{C \rightarrow A} = -m \cdot g \cdot d$$

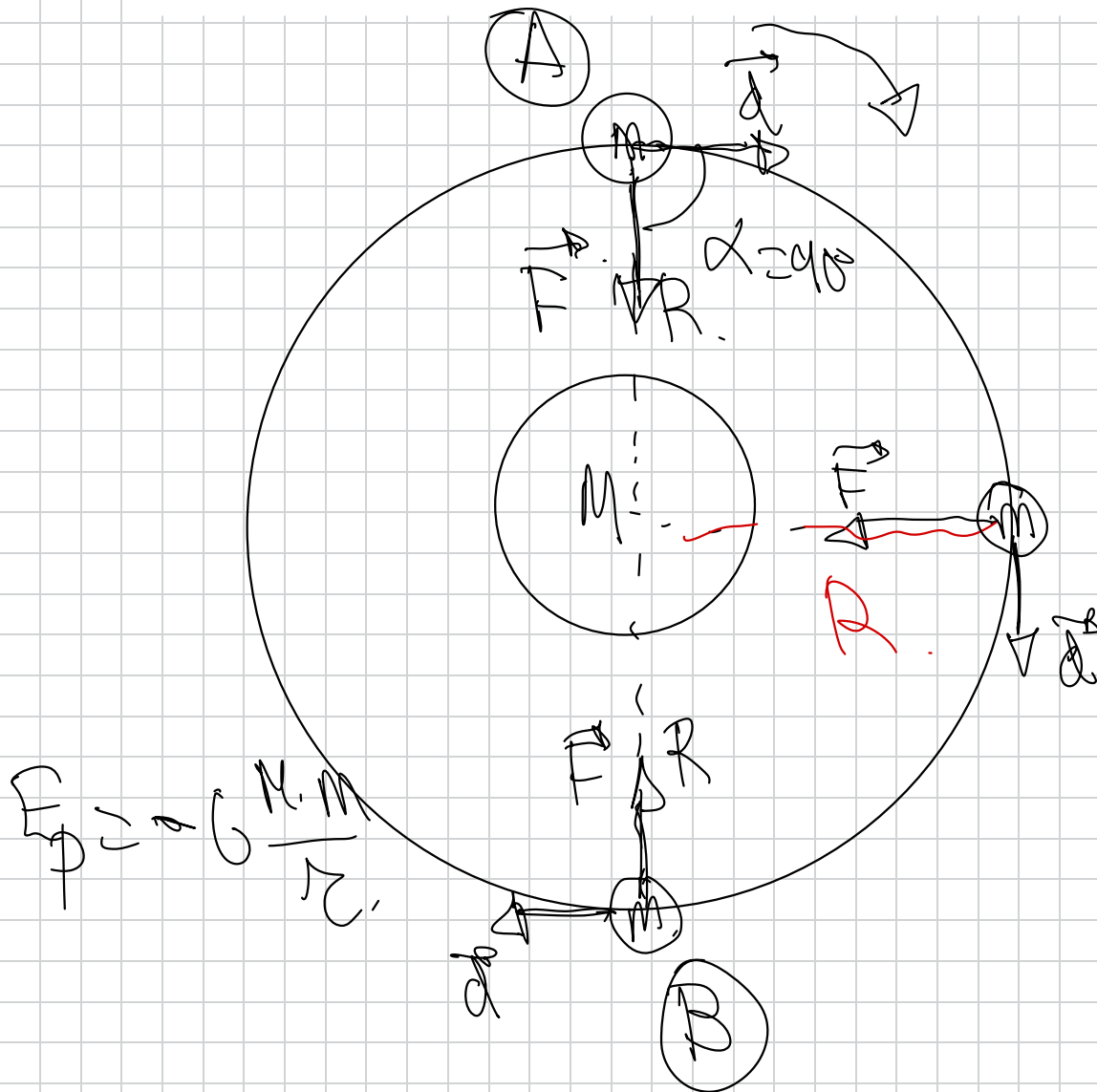
- 66.-a) Explique las características de la interacción gravitatoria entre dos masas puntuales
b) ¿Qué trabajo realiza la fuerza que actúa sobre una de las dos masas puntuales al describir media órbita circular de radio R alrededor de la otra?, ¿Y si se desplazara desde esa distancia R hasta el infinito?. Razone las respuestas.

a) Se explican las fuerzas que se ejercen entre si ambas masas segun la ley de la gravitacion Universal, explicando los parametros que aparecen en ella



$$F = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

- 66.-a) Explique las características de la interacción gravitatoria entre dos masas puntuales
 b) ¿Qué trabajo realiza la fuerza que actúa sobre una de las dos masas puntuales al describir media órbita circular de radio R alrededor de la otra?, ¿Y si se desplazara desde esa distancia R hasta el infinito?. Razone las respuestas.



$$W = F \cdot d \cdot \cos 90^\circ = 0.$$

$A \rightarrow B$, otra forma.

$$W_{A \rightarrow B} = -\Delta E_{PA \rightarrow B}$$

$$E_{PA} = E_{PB},$$

$$W_{A \rightarrow B} = 0.$$

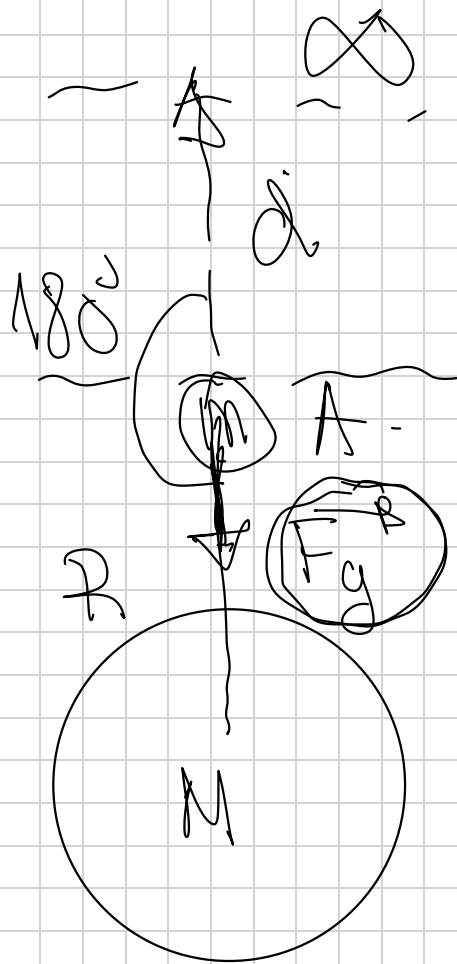
$$W_{A \rightarrow B} = m \cdot (V_A - V_B)$$

$$V_A = V_B$$

$$W_{A \rightarrow B} = 0$$

$$W_{A \rightarrow B} = \Delta E_{A \rightarrow B} = 0$$

$$V = -G \frac{M}{r}$$



$$W = F \cdot d \cdot \cos 180^\circ$$

~~$A \rightarrow B$~~

Con este caso no es la F_g de, y la expresión no la podemos utilizar

$F = G \cdot M \cdot m$
 ~~$F = G \cdot M \cdot m$~~ $\rightarrow$ No es la misma.
 No es la misma.

$$W_{A \rightarrow B} = - \Delta E_{P_{A \rightarrow B}}$$

~~$A \rightarrow B$~~

$$W_{A \rightarrow \infty} = - (E_{\infty} - E_{PA})$$

$$W_{A \rightarrow \infty} = - (0 - E_{PA})$$

$$W_{A \rightarrow \infty} = E_{PA}$$

→ Otra definición
de E_P

La E_P también
se define como el
trabajo necesario
para llevar a

$$W_{A \rightarrow \infty} = G \cdot \frac{M \cdot m}{R}$$

Trabajo negativo
o no espontáneo

La masa m
desde ese pto
hasta el ∞

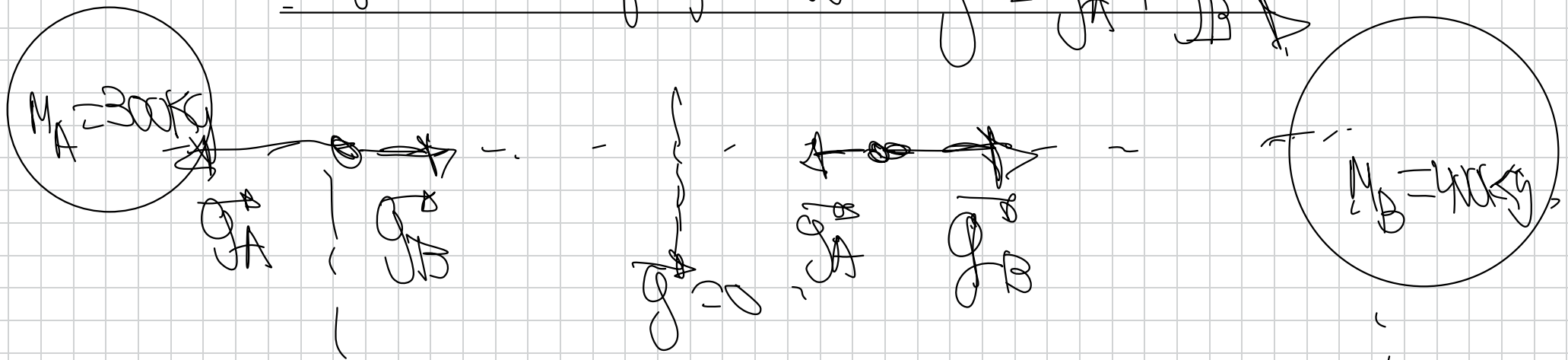
45.- Si tenemos una masa $M_A = 300 \text{ Kg}$ en $(0,0) \text{ m}$ y otra masa $M_B = 400 \text{ Kg}$ en $(4,0) \text{ m}$

a) Describir cualitativamente la variación que experimentará el campo gravitatorio al pasar de M_A a M_b

$$g = G \cdot \frac{M}{r^2}$$

Principio de superposición

$$\vec{g} = \vec{g}_A + \vec{g}_B$$



$$|\vec{g}| = |\vec{g}_A| - |\vec{g}_B|$$

disminuye hasta hacerse cero

$$|\vec{g}| = |\vec{g}_B| - |\vec{g}_A|$$

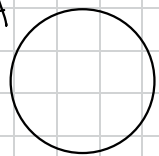
aumenta hasta hacerse máximo.

b) Calcular los potenciales gravitatorios en los puntos (5,0)m y (6,0)m

c) Calcular la velocidad con la que una partícula, partiendo desde el reposo en (6,0) m llegaría al punto (5,0) m

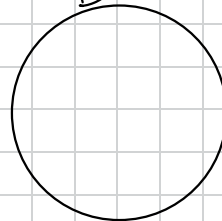
$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}$$

$$m_A = 300 \text{ Kg.}$$



(0,0)

$$m_B = 400 \text{ Kg}$$



(4,0)m



(5,0)m



(6,0)m

Princípio de superposição.

$$V_{(5,0)M} = V_A + V_B = -G \cdot \frac{M_A}{r_A} - G \cdot \frac{M_B}{r_B}$$

$$V_{(5,0)M} = -667 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{300}{5} - 667 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{400}{1} = -3 \cdot 10^8 \frac{J}{kg}$$

$$V_{(6,0)M} = V_A' + V_B' = -G \frac{M_A}{r_A'} - G \cdot \frac{M_B}{r_B'}$$

$$V_{(6,0)M} = -667 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{300}{6} - 667 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{400}{2} = -16 \cdot 10^8 \frac{J}{kg}$$

c)

b) Calcular los potenciales gravitatorios en los puntos (5,0)m y (6,0)m

c) Calcular la velocidad con la que una partícula, partiendo desde el reposo en (6,0) m llegaría al punto (5,0) m

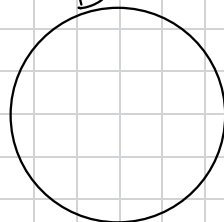
$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}$$

$$m_A = 300 \text{ Kg.}$$



(0,0)

$$m_B = 400 \text{ Kg}$$



(4,0)m



(5,0)m



(6,0)m

~~$$W = F \cdot d \cdot \cos \theta$$~~

No sirve la fuerza
no es etc.

~~$$v^2 = v_0^2 + 2 a \cdot s$$~~

No sirve -
a no es etc.

$$W_{A \rightarrow B} = E_{CA \rightarrow B}$$

$$m \cdot (V_A - V_B) = E_C - E_{CA}$$

$$\cancel{m} (V_{(6,0)} - V_{(5,0)}) = \frac{1}{2} \cancel{m} v_{(5,0)}^2 - \frac{1}{2} m \cdot \cancel{v_{(6,0)}^2}$$

parte
del $v_{(6,0)}^2$

$$2 (V_{(6,0)} - V_{(5,0)}) = v_{(5,0)}^2$$

$$v_{(5,0)} = \sqrt{2 (V_{(6,0)} - V_{(5,0)})}$$

$$v_{(5p)} = \sqrt{2 \cdot (-16 \cdot 10^8 - (-3 \cdot 10^8))}$$

$$v_{(5p)} = 167 \cdot 10^4 \text{ m/s.}$$

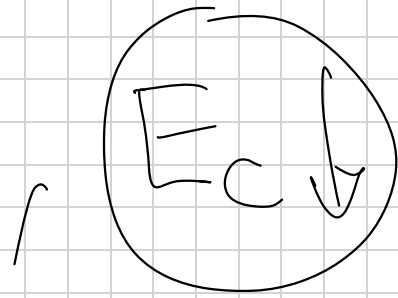
► **36.-** Se lanza un cohete desde la superficie de la Tierra tal que escapa a la atracción gravitatoria terrestre.

a) Realizar un análisis energético de dicho proceso

b) ¿Dependerá la energía cinética que es preciso comunicar al cohete del origen de energía potencial tomado?

QJ a)

Diagram illustrating the energy analysis of a rocket launch from the Earth's surface. The diagram shows a rocket being launched upwards, with the potential energy $E_p = 0$ at the surface. The kinetic energy $E_k = \frac{1}{2} m v_e^2 = 7100 \text{ J}$ is shown, indicating that the energy decreases as the rocket moves away from the surface. The gravitational potential energy $E_g = 0$ is also indicated. The text "aumentar" (increase) is written near the launch point, and "disminuye" (decreases) is written near the kinetic energy box. The text "E_p = -G \cdot \frac{M_T \cdot M}{R_T}" is shown in a box, representing the gravitational potential energy at the surface. A red arrow points from the kinetic energy box to the potential energy box. The text "~1000" is written in red at the bottom left.



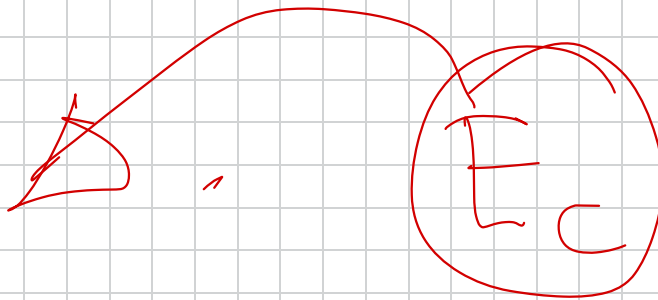
no hay pérdidas
 → energías por
 rozamiento
 $E_m = \text{cte}$

b)

100 J.

0 J

∞



$$E_P + E_G = E_{P\infty} + E_{C\infty}$$

$$E_{CT}$$

$$E_{P\infty} - E_{PT}$$

La E_{CT} resultante
no depende
del origen de
 E_P .

Esta diferencia se
mantiene independientemente
de donde situemos el
origen de E_P .

pag 27

15.- Si hipotéticamente colocásemos el cero de energía potencial gravitatoria de una partícula de masa m en la superficie de la Tierra, ¿Cuál sería el valor de la energía potencial gravitatoria de la partícula cuando ésta se encontrase a una distancia infinita de la Tierra?

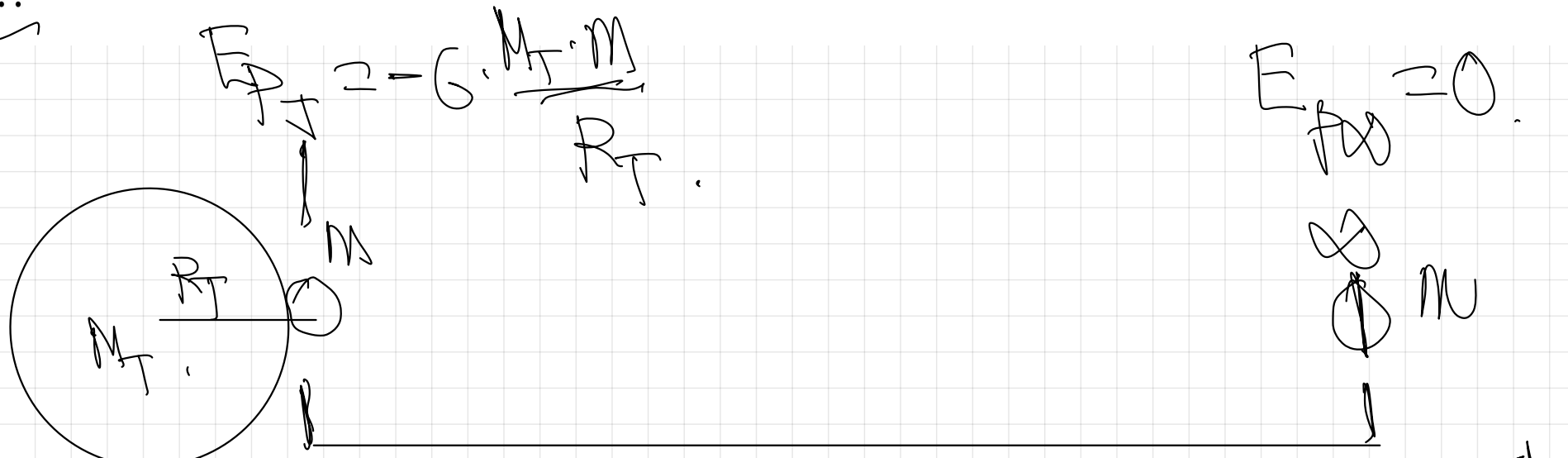


Diagram illustrating the gravitational potential energy calculation:

Left side (Surface of Earth):

$$E_T = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T}$$

Right side (Infinite distance):

$$E_{\infty} = 0$$

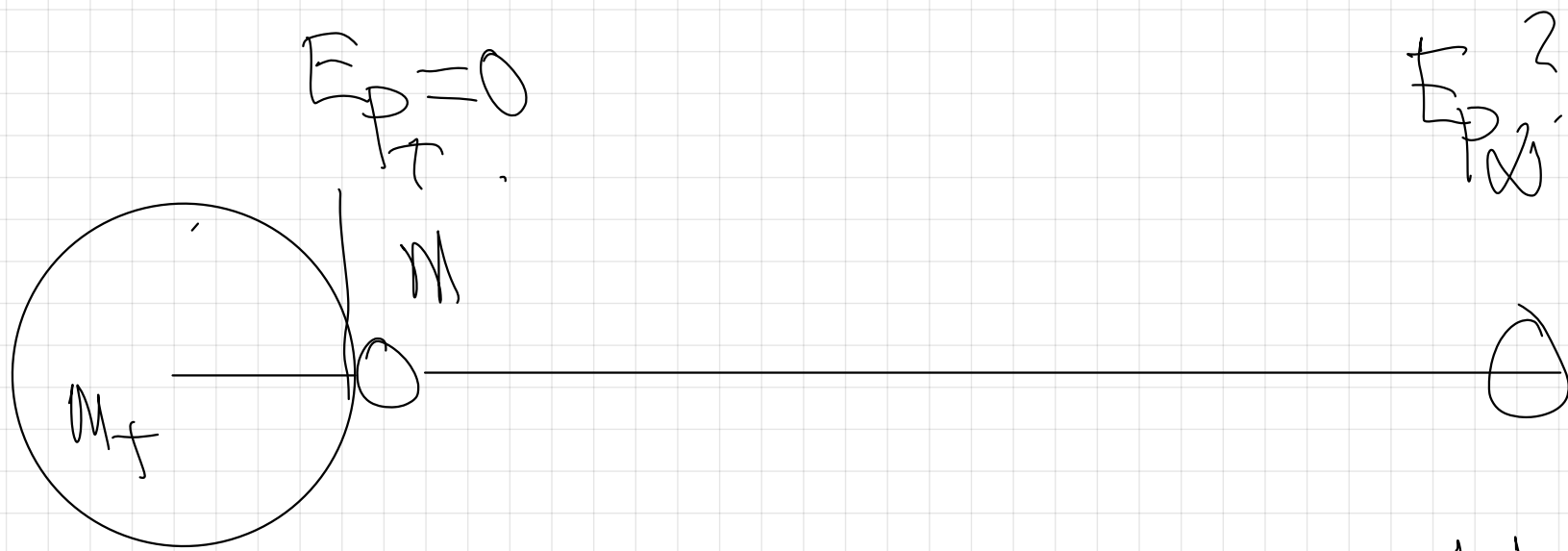
Calculation of the difference in potential energy:

$$(E_{\infty} - E_T) = 0 - \left(-G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T} \right) = \left[G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T} \right]$$

Final result:

$$-100 \text{ J}$$

0



0 J

Será la mesma que antes. $\pm 100 J$.

$$E_{P\infty} - E_P = G \frac{M_f \cdot m}{R_T}$$

$$E_{P\infty} = 0 = G \frac{M_f \cdot m}{R_T}$$

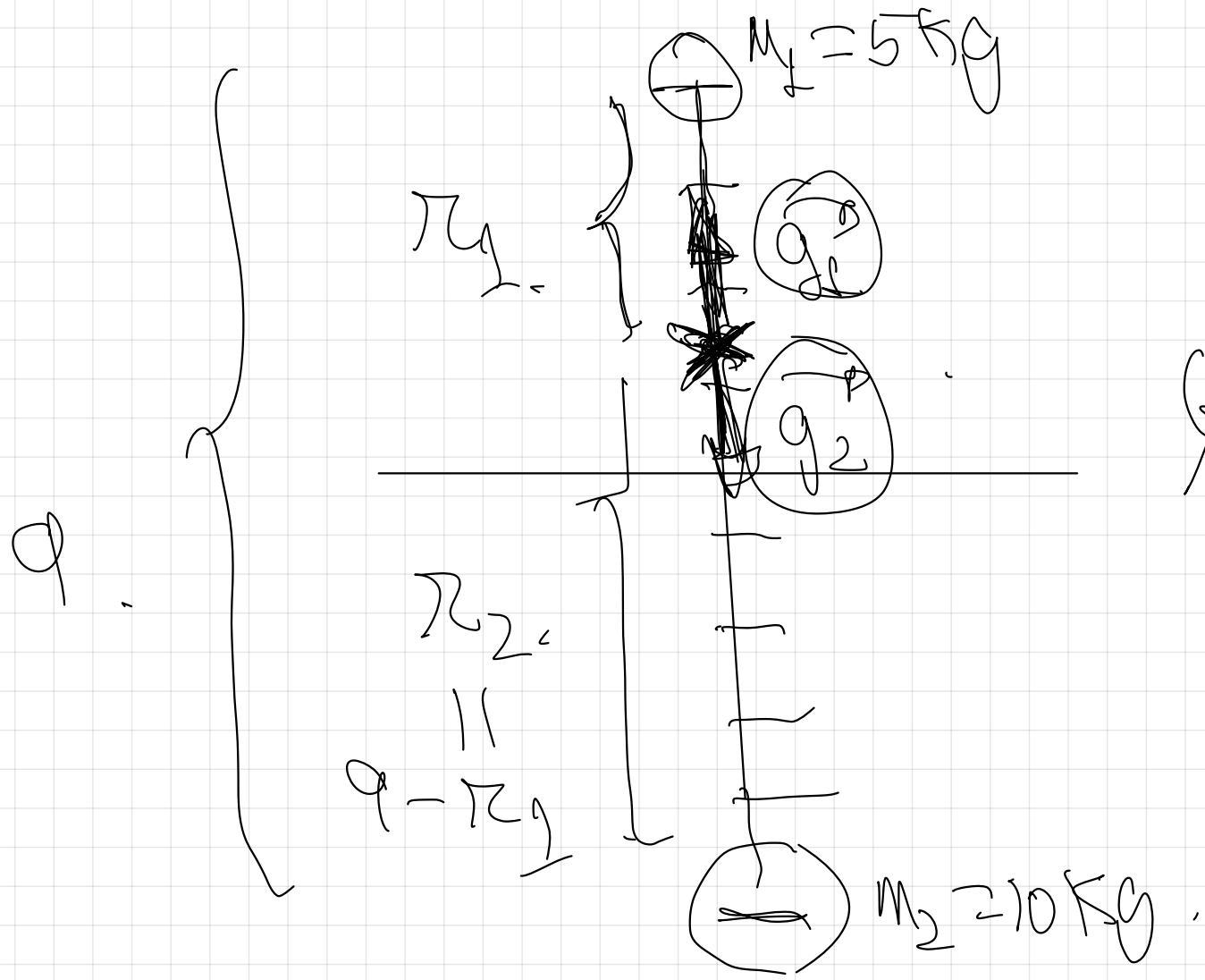
$$E_{\text{Ro}} = + G \cdot \frac{M-m}{R_T}$$

68, 52, 42, 73

213

(14-R) Considere dos masas puntuales de 5 y 10 kg situadas en los puntos (0,4) y (0,-5) m respectivamente.

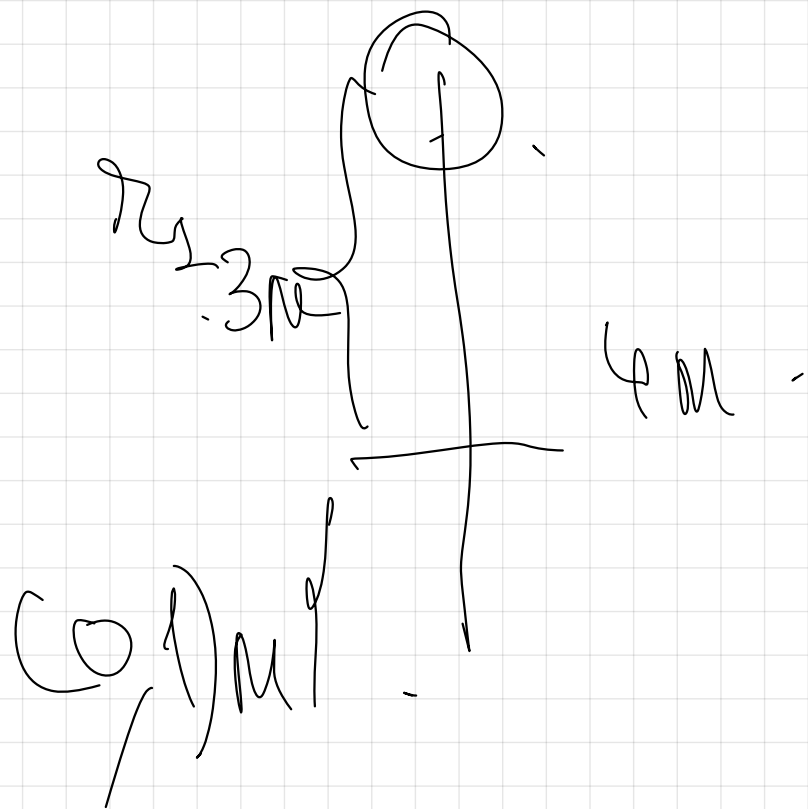
a) Aplique el principio de superposición y determine en qué punto el campo resultante es cero.



$$|g_1| = |g_2|$$

$$G \cdot \frac{m_1}{r_1^2} = G \cdot \frac{m_2}{(q - r_1)^2}$$

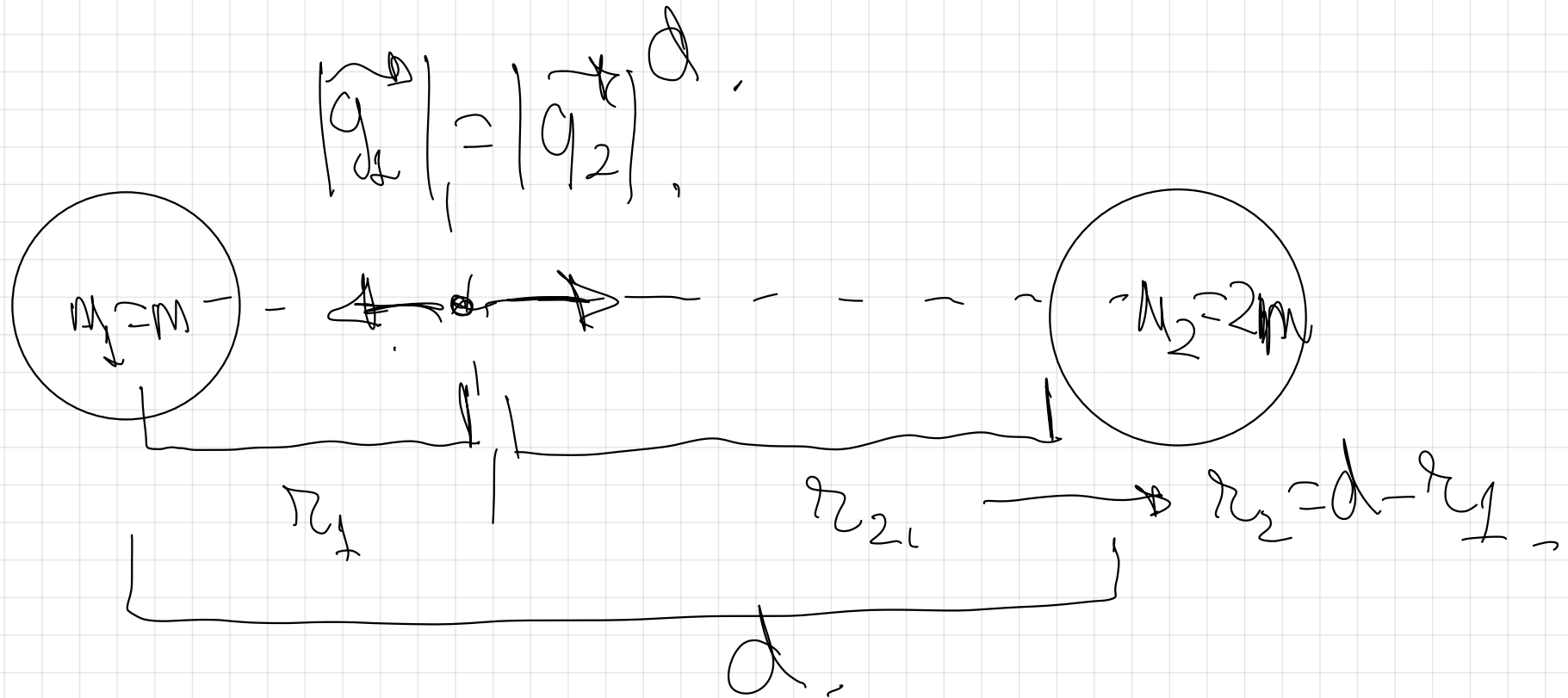
$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_1^2}{(q - r_1)^2}$$



$$\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = \frac{r_1}{q - r_1}$$

(17-E) a) Dos partículas, de masas m y $2m$, se encuentran situadas en dos puntos del espacio separados una distancia d . ¿Es nulo el campo gravitatorio en algún punto cercano a las dos masas? ¿Y el potencial gravitatorio? Justifique las respuestas.

b) Dos masas de 10 kg se encuentran situadas respectivamente en los puntos $(0, 0) \text{ m}$ y



$$|g_1| = |g_2|$$

$$G \cdot \frac{m}{r_1^2} = G \cdot \frac{2m}{(d - r_1)^2}$$

$$(d - r_1)^2 = 2 \cdot r_1^2.$$

$$d - r_1 = \sqrt{2} \, r_1,$$

$$d = r_1 + \sqrt{2} \, r_1.$$

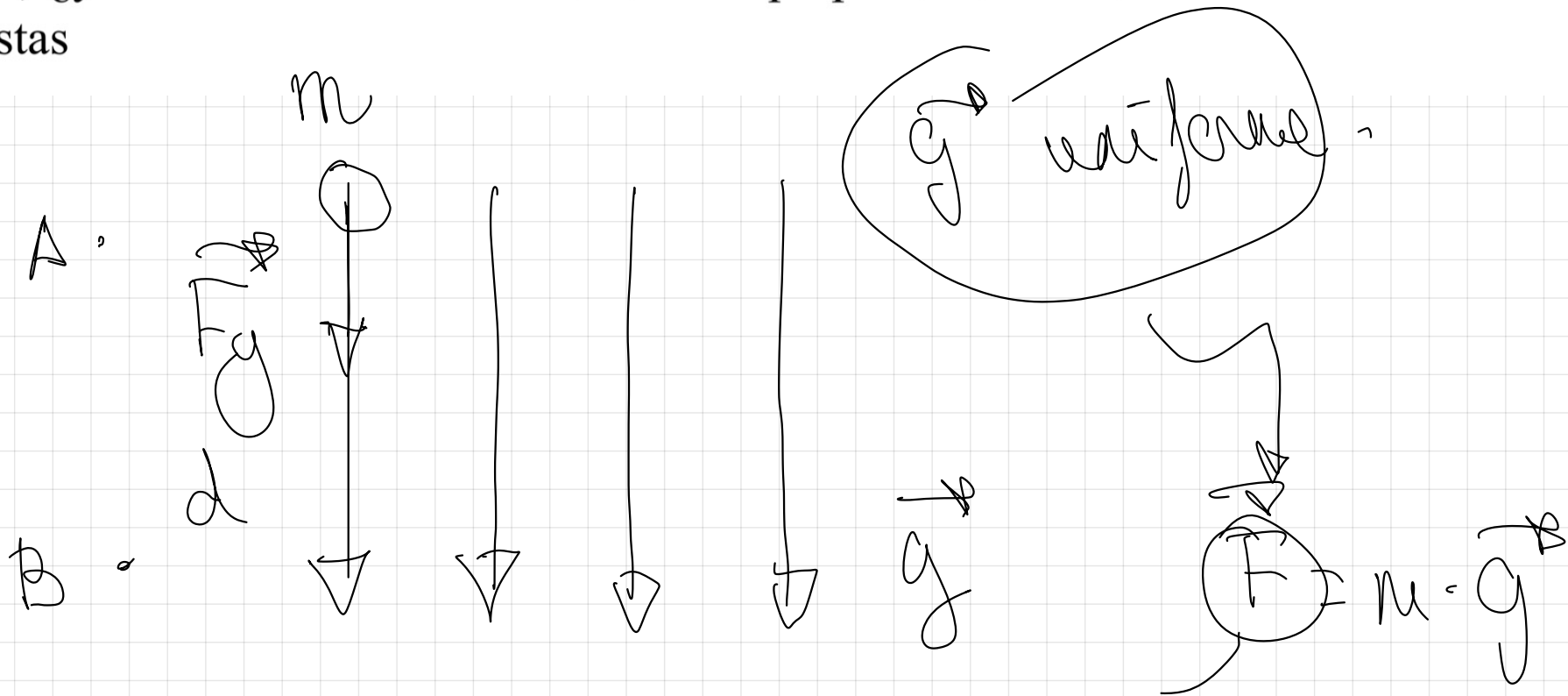
$$d = r_1 (1 + \sqrt{2}).$$

$$r_1 = \frac{d}{(1 + \sqrt{2})}$$

$$V = V_{\oplus} + V_{\ominus} \neq 0.$$

pag 35

- 68.- Una partícula se mueve en un campo gravitatorio uniforme, ¿aumenta o disminuye su energía potencial al moverse en la dirección y el sentido de la fuerza ejercida por el campo?, ¿y si se moviera en una dirección perpendicular a dicha fuerza?. Razone las respuestas



$$W_{A \rightarrow B} = F_g \cdot d \cdot \cos \alpha > 0, \quad \text{uniforme.}$$

$$\rightarrow F_g \text{ est } F \text{ conservative}$$

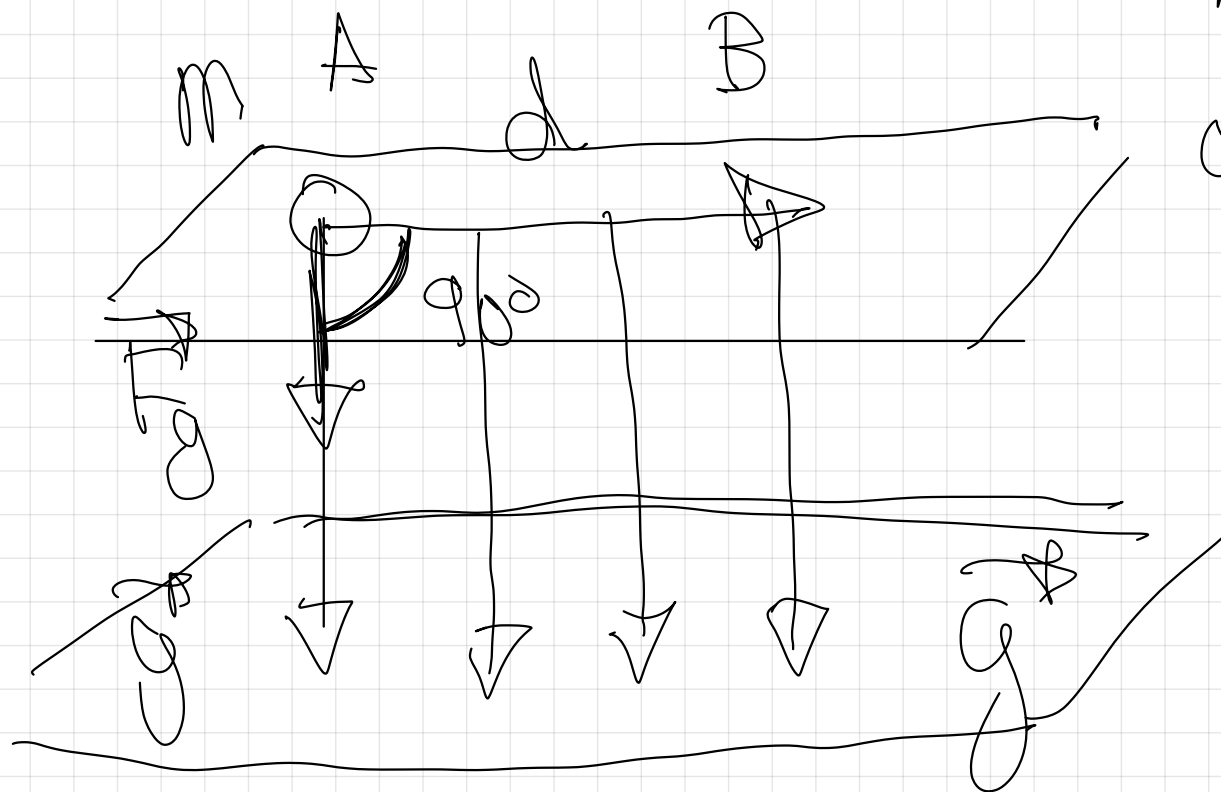
$$- \Delta E_p = W_{A \rightarrow B} > 0,$$

$$\rightarrow \Delta E_{p_{A \rightarrow B}} > 0,$$

$$\rightarrow (E_{p_B} - E_{p_A}) > 0,$$

$$E_{p_A} > E_{p_B} \rightarrow \text{la } E_p \text{ diminue.}$$

G)



$$W_{A \rightarrow B} = F \cdot d \cdot \cos 90^\circ$$

cho

$$W_{A \rightarrow B} = 0$$

$$W_{A \rightarrow B} = \sim \Delta E_p$$

$$0 = -(\Delta E_p)$$

$$E_{pA} = E_{pB}$$

$$E_{pA} = E_{pB}$$

no varia E_p

Sup. equipotencial

$$V_A = V_B$$

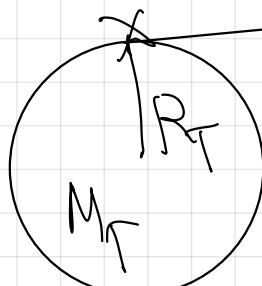
$$m \cdot V_A = m \cdot V_B$$

$$\begin{aligned} V_{A \rightarrow B} &= -DE_{A \rightarrow B} \\ V_{A \rightarrow B} &= m \cdot (V_A - V_B) \end{aligned} \left| \begin{array}{l} \text{válido con} \\ \text{F cto y no} \\ \text{cto.} \end{array} \right.$$

$$V_{A \rightarrow B} = \textcircled{F} \cdot d \cdot \cos \alpha$$

↓ Solo cuando F es cto.

52.- ¿A qué altura sobre la superficie de la Tierra la gravedad terrestre se reduce a la tercera parte?. $R_T = 6370 \text{ Km}$

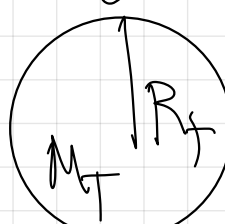


$$g_T = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}$$

ω ST

$$\frac{a_h}{g_T} =$$

$$\frac{G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)^2}}{G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}}$$

$$g_h = \left[\frac{g_T}{3} \right] = G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)^2}$$


↓
?

$$\frac{\cancel{g_T/3}}{\cancel{g_T}} = \frac{\cancel{g_T} \cdot \frac{M_T}{(R_T+h)^2}}{\cancel{g_T} \cdot \frac{M_T}{R_T^2}},$$

$$\frac{1}{3} = \frac{R_T^2}{(R_T+h)^2},$$

$$\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{R_T^2}{(R_T+h)^2}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{R_T}{R_T + h}$$

$$R_T + h = \sqrt{3} R_T$$

$$h = \sqrt{3} R_T - R_T$$

$$h = R_T (\sqrt{3} - 1)$$

$$h = 637 \cdot 10^6 (\sqrt{3} - 1) = 4165 \cdot 10^6 \text{ m}$$

65, 51, 238, 42, 22 b) , 61, 63, 73

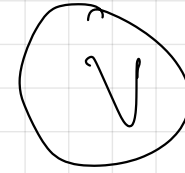
> **65.-** Relación entre el campo y el potencial gravitatorios

65.- Relación entre el campo y el potencial gravitatorios



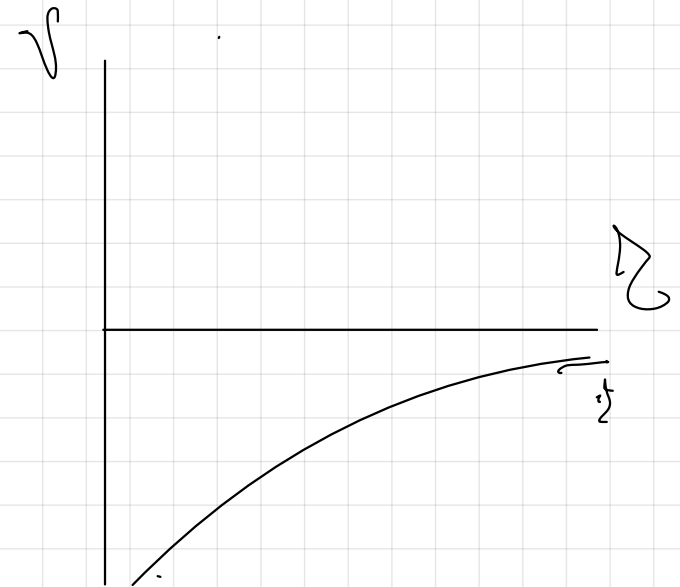
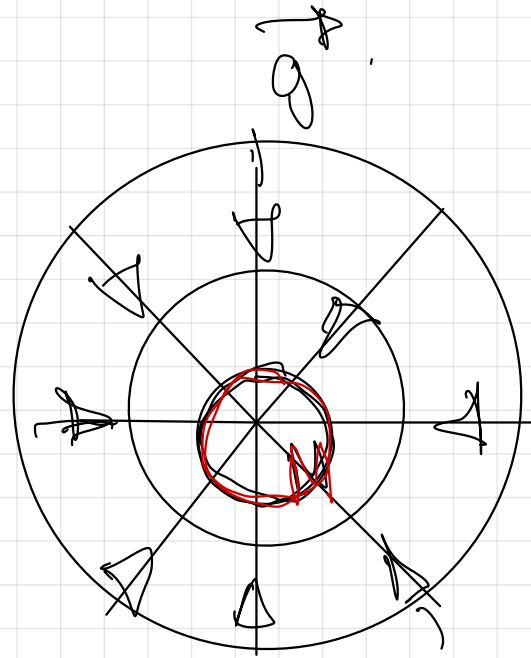
Magnitud
vectorial

$$|\vec{g}| = \frac{F}{m} = \frac{G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}}{m} = G \cdot \frac{M}{r^2}$$



Magnitud
escalar

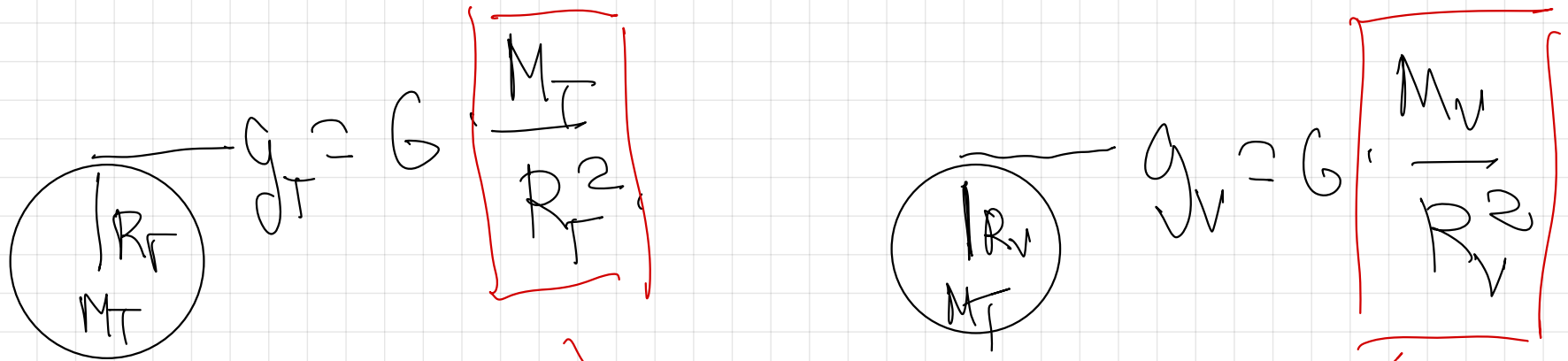
$$V = \frac{F_p}{m} = \frac{-G \cdot \frac{M \cdot m}{r}}{m} = -G \frac{M}{r}$$



→ Superficies equipotenciales
son ~~la~~ a las
líneas de
campo.

Al alejarnos de la masa M que crea
el campo, el campo gravitatorio decrece
y el potencial gravitatorio aumenta.

51.- Justifique si es verdadera o falsa la siguiente afirmación: “la gravedad en la superficie de Venus es el 90% de la gravedad en la superficie de la Tierra, y en consecuencia, si midiésemos en Venus la constante de gravitación universal G , el valor obtenido sería el 90% del medido en la Tierra.



The diagram shows two circles representing Earth and Venus. The Earth circle on the left contains the radius R_T and mass M_T . A line points from it to the formula $g_T = G \left[\frac{M_T}{R_T^2} \right]$. The Venus circle on the right contains the radius R_V and mass M_V . A line points from it to the formula $g_V = G \left[\frac{M_V}{R_V^2} \right]$. Red lines from the brackets in these formulas point down to the handwritten text below.

Se la gravedad en Venus es distinta a la de la Tierra ($g_V = 0.9 g_T$) x

debe a que la relación M/R^2 es
distinta en ambos planetas / y no
se debe al valor de G que es
una cte universal (no varía
independientemente del medio)

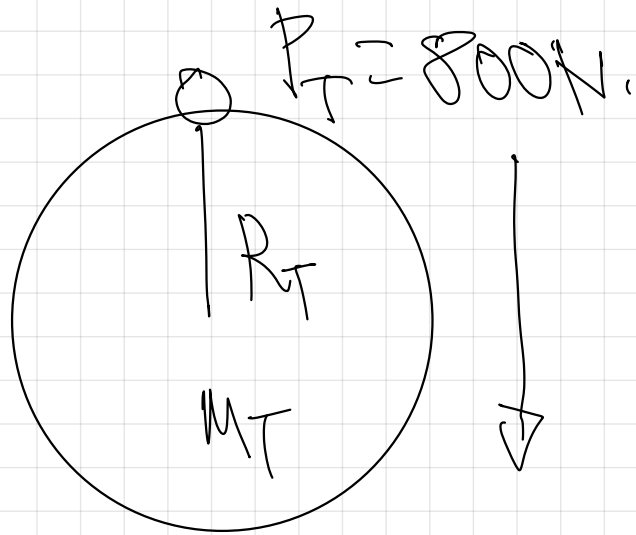
42.- La masa de la Luna es 0,01 veces la masa de la Tierra y su radio es 0,25 veces el radio terrestre. Un cuerpo, cuyo peso en la Tierra es de 800 N, cae de una altura de 50 m sobre la superficie lunar.

- Determinar la masa del cuerpo y su peso en la Luna.
- Realizar el balance de energía en el movimiento de caída y calcular la velocidad con la que el cuerpo llega a la superficie.

$$g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

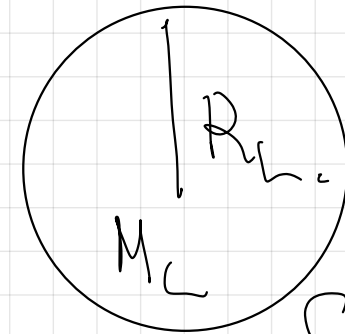
$$M_L = 0.10 M_T$$

$$R_T = 0.25 R_T$$



$$P_T = M \cdot g_T$$

$$m = \frac{P_T}{g_T} = \frac{800 \text{ N}}{10 \text{ N/kg}} = 80 \text{ kg}$$



$$P_L ?$$

Este peso
es la fuerza

$$P_L = M \cdot g_L$$

$$P_L = M \cdot 0.16 g_T$$

$$P_L = 80 \cdot 0.16 \cdot 10$$

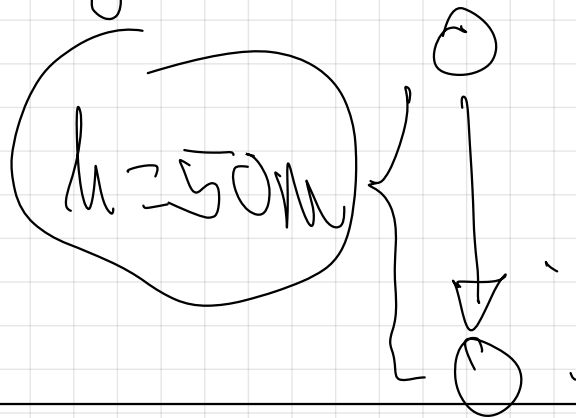
$$P_L = 128 \text{ N}$$

$$\frac{g_T}{g_L} = \frac{G \cdot \frac{M}{R_T^2}}{G \cdot \frac{0.01 M}{(0.25 R_T)^2}}$$

$$g_L = 0.16 g_T$$

$$g_L = 0.16 \cdot 10 = 1.6 \frac{m}{s^2}$$

Se puede usar
 $E_p = m g h$



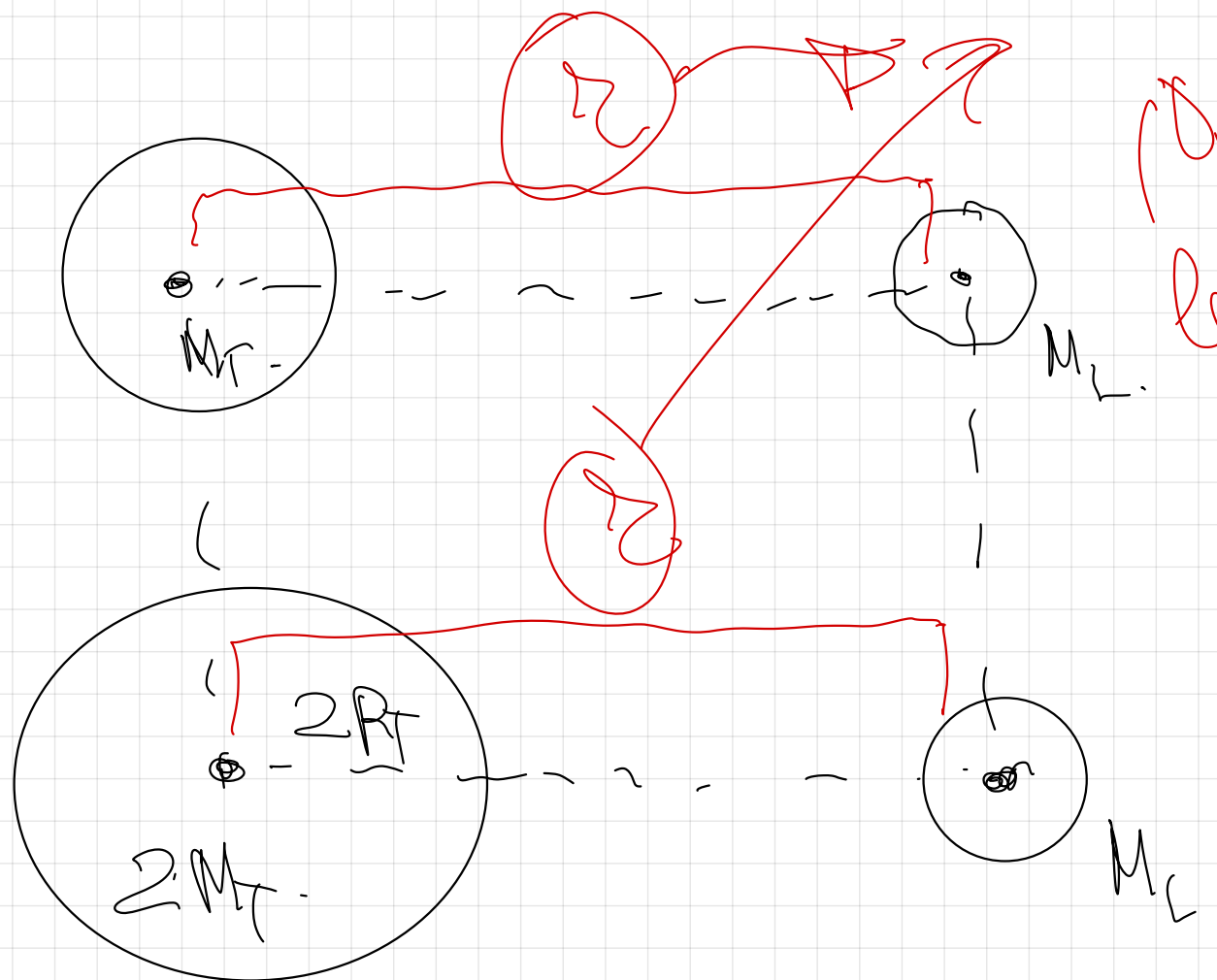
$$E_{mh} = E_{\text{superficie lunar}}$$

SELECTIVIDAD 2018

23) (18-E) a) Si la masa y el radio de la Tierra se duplican, razone si las siguientes afirmaciones son correctas: (i) El periodo orbital de la Luna se duplica; (ii) su velocidad orbital permanece constante.

b) La masa de Marte es aproximadamente la décima parte de la masa de la Tierra y su radio la mitad del radio terrestre. Calcule cuál sería la masa y el peso en la superficie de Marte de una persona que en la superficie terrestre tuviera un peso de 700 N.

$$g_T = 9,8 \text{ m s}^{-2}$$



NO!
la distancia
Centro-Centro
se no
varía.

Condition de orbitation

$$F_g = F_n$$

$$G \cdot \frac{M_T \cdot M_L}{r^2} = M_L \cdot \frac{v^2}{r}$$

$$G \cdot \frac{M_T}{r} = \left(\frac{2\pi r}{T} \right)^2$$

$$G \cdot \frac{M_T}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$$

$$G \cdot M_T \cdot r^2 = 4\pi^2 r^3$$

¡¡¡¡¡ la misma.

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{G \cdot M_T}}$$

$$T' = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{G \cdot 2M_T}}$$

$$\frac{T'}{T} = \frac{\sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{G \cdot 2M_T}}}{\sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{G \cdot M_T}}}$$

$$\frac{T'}{T} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

↓
 a afirmação é
 falsa.

Condição de equilíbrio

$$F_g = F_n$$

$$G = \frac{I \cdot \cancel{N}}{r^2} = \cancel{N} = \frac{v_0^2}{r}$$

$$v_0 = \sqrt{G \frac{M}{r}}$$

$$v_0' = \sqrt{G \frac{2M}{r}}$$

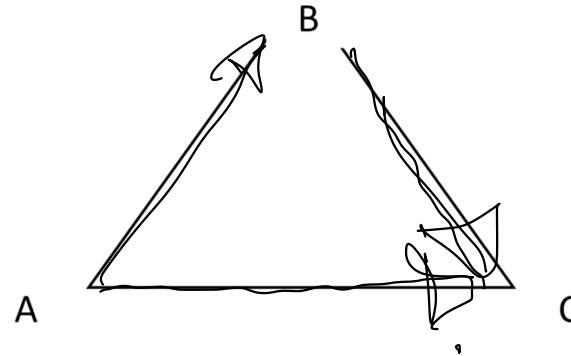
↑
 $\frac{v_0'}{v_0} = \sqrt{2}$
 ratio

$$\frac{v_0'}{v_0} = \frac{\sqrt{G \frac{2M}{r}}}{\sqrt{G \frac{M}{r}}} \Rightarrow v_0' = \sqrt{2} v_0$$

➤ 63.- Una masa M se mueve desde el punto A hasta el punto B de la figura y posteriormente desciende hasta el C. Compare el trabajo mecánico realizado en el desplazamiento A-B-C con el que se hubiera realizado en un desplazamiento horizontal desde A hasta C

- a) Si no hay rozamiento
- b) En presencia de rozamiento

Justifique las respuestas



a) Si no hay rozamiento y actúa únicamente una fuerza conservativa el trabajo es el mismo (no depende de la trayectoria)

$$W_{A \rightarrow B \rightarrow C} = W_{A \rightarrow C}$$

$$m \cdot (v_A - v_C) = m \cdot (v_A - v_C)$$

b) Si hay rozamiento, la pérdida energética $A \rightarrow B \rightarrow C$ es mayor, y por ello para llevar a cabo ese desplazamiento se necesita un mayor $W_{A \rightarrow B \rightarrow C}$.

73.- Razonar dónde será la velocidad de escape mayor, si en la Tierra o en la Luna



$$E_{pT} + E_{cT} = E_{p\infty} + E_{c\infty}$$

$$-G \frac{M_T \cdot m}{R_T} + \frac{1}{2} m v_e^2 = 0 + 0$$

$$E_{pL} + E_{cL} = E_{p\infty} + E_{c\infty}$$

$$-G \frac{M_L \cdot m}{R_L} + \frac{1}{2} m v_e^2 = 0 + 0$$

$$\frac{1}{2} m v_e^2 = G \cdot \frac{M_T \cdot \cancel{M_T}}{R_T}$$

$$v_e^2 \uparrow \quad \sqrt{2GM_T} \uparrow \quad R_T \uparrow$$

$$g_T = \frac{GM_T}{R_T^2}$$

Con esta expresión
comparar.

$$\frac{1}{2} m v_e^2 = G \cdot \frac{M_L \cdot \cancel{M_L}}{R_L}$$

$$v_e^2 \downarrow \quad \sqrt{2GM_L} \downarrow \quad R_L \downarrow$$

$$g_L = \frac{GM_L}{R_L^2}$$

$$v_{eT} = \sqrt{\frac{2g_T R_T^2}{R_T}}$$

$$v_{eL} = \sqrt{\frac{2g_L R_L^2}{R_L}}$$

$$v_{eT} = \sqrt{2g_T R_T}$$

$$\rightarrow v_{eL} = \sqrt{2g_L R_L}$$

$$g_T > g_L$$

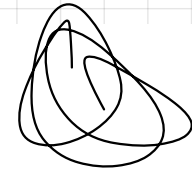
$$R_T > R_L$$

So diameter
ex:-



$$v_{eT} > v_{eL}$$

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}$$



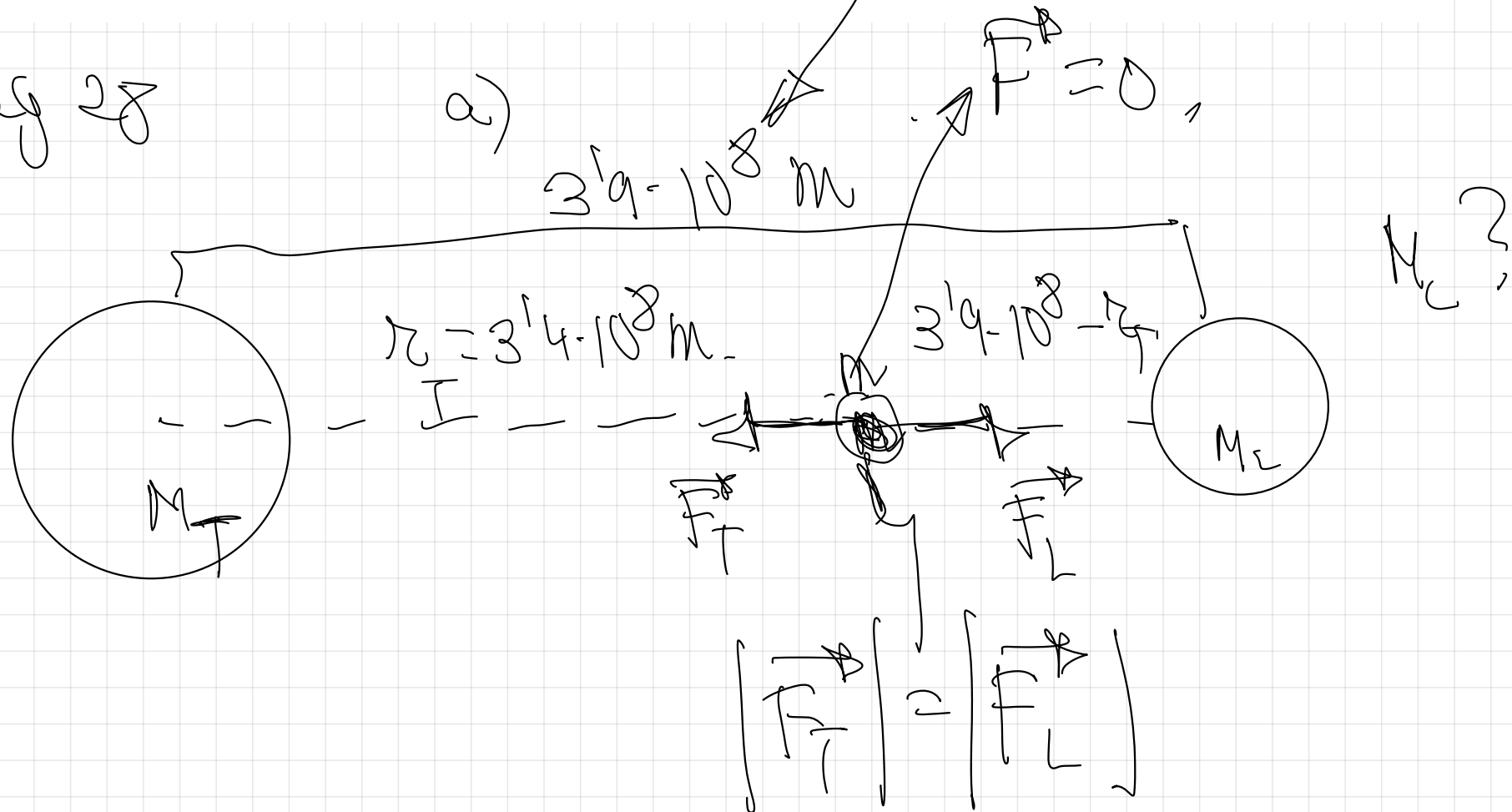
22.- La Luna describe una órbita circular en torno a la Tierra en 28 días

a) Calcular la distancia entre los centros de la Tierra y la Luna.

b) Calcular el valor de la masa de la Luna sabiendo que una partícula de masa m podría estar en equilibrio en un punto alineado con los centros de la Tierra y de la Luna, a una distancia del centro de la Tierra de $3,4 \cdot 10^8 \text{ m}$.

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}, M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ Kg}$$

pag 28



$$\cancel{G} \cdot \frac{M_T \cdot \cancel{M}}{r_f^2} = \cancel{G} \cdot \frac{M_L \cdot \cancel{M}}{(3.9 \cdot 10^8 - r_f)^2}$$

$$\cancel{G} \cdot \frac{M_T \cdot \cancel{M}}{r_1^2} = \cancel{G} \cdot \frac{M_L \cdot \cancel{M}}{r_2^2}$$

$$M_L = \frac{M_T \cdot r_2^2}{r_1^2} = \frac{6 \cdot 10^{24} \cdot (5 \cdot 10^7)^2}{(3.4 \cdot 10^8)^2} = 1.29 \cdot 10^{23} \text{ kg}$$

28.- Un satélite meteorológico da tres vueltas a la Tierra en un día para la confección de mapas del tiempo.

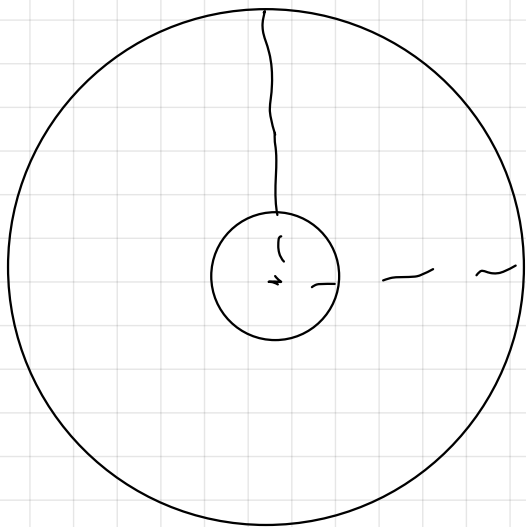
a) Calcula su período de revolución y su velocidad angular

b) Calcula el radio de la órbita que describe

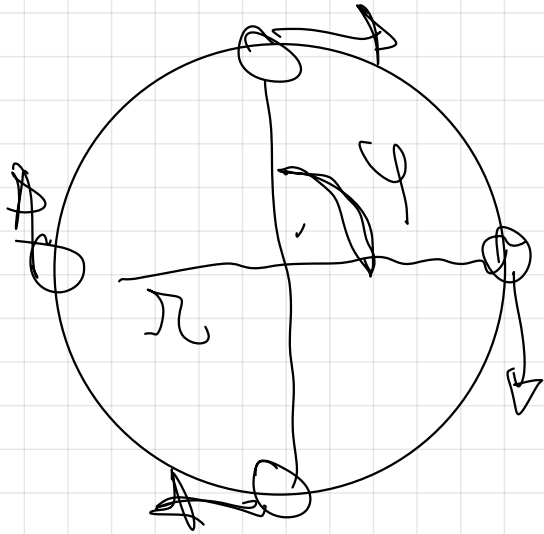
$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}, M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ Kg}$$

a)

$$T = \frac{24 \text{ h}}{3} = 8 \text{ h} = 8 \cancel{\text{ h}} \cdot \frac{3600 \text{ s}}{1 \cancel{\text{ h}}} =$$



$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi \text{ rad}}{8 \cdot 3600 \text{ s}}$$



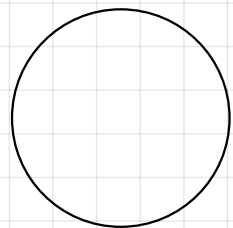
MCU $\Rightarrow$ $v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r}{T}$ m/s
 v de en modulo.

$$\omega = \frac{\phi}{t} = \frac{2\pi \text{ rad}}{T \text{ s}}$$

$$l = 2\pi r$$

Que espaço ocorre 1 satélite
 quando transcorre 1 período T ?

$$L = 2\pi R.$$



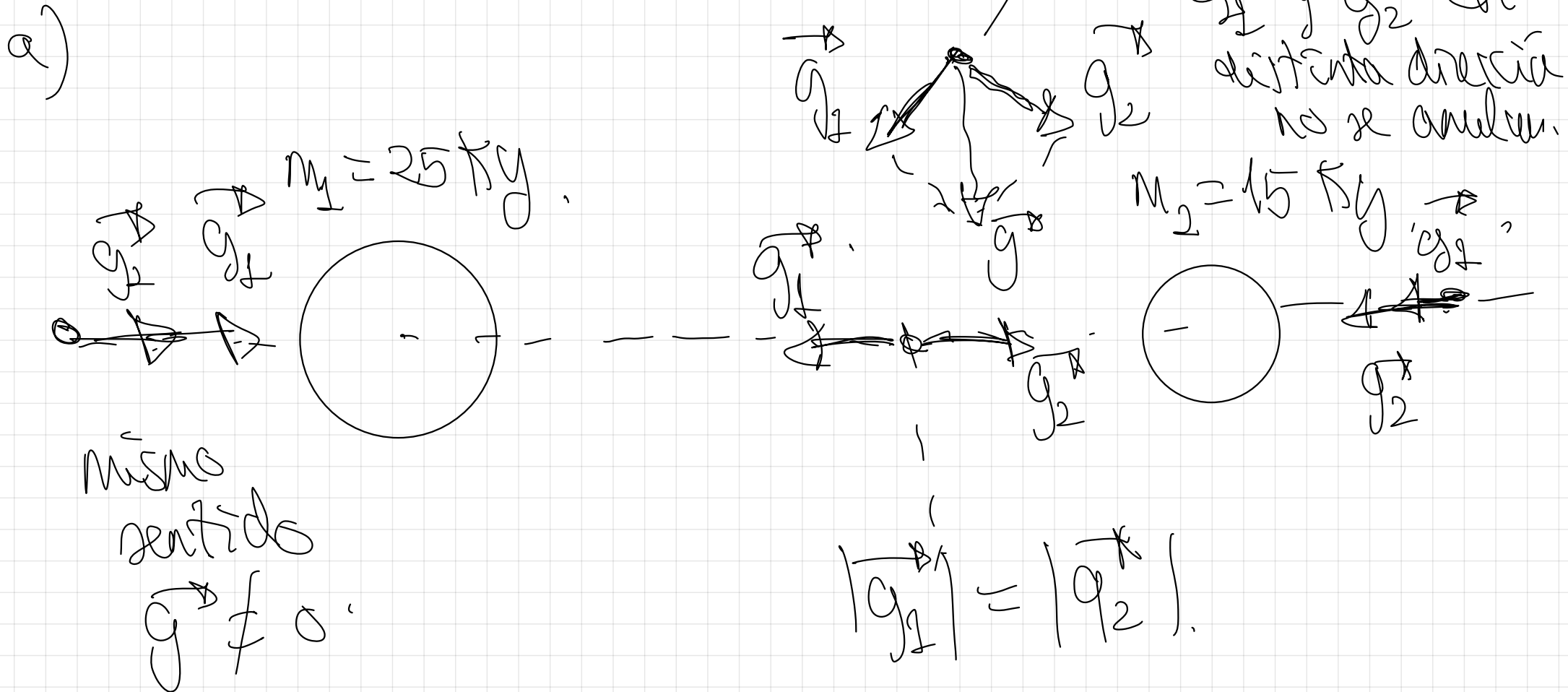
$$2\pi.$$

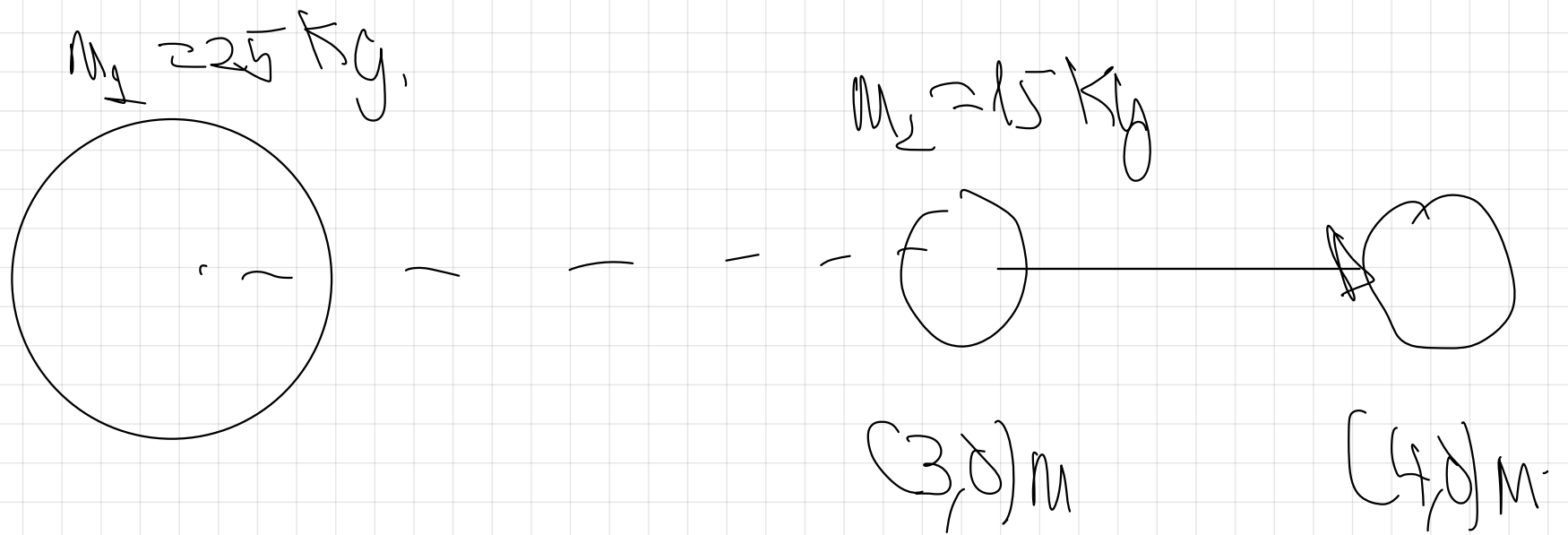
$$\hookrightarrow 2(2\pi R)$$

61.- Una pequeña esfera de 25 Kg está situada en el punto (0,0)m y otra de 15 Kg en el punto (3,0)m

- a) Razone en qué punto(s) del plano XY es nulo el campo gravitatorio resultante
b) Calcule el trabajo efectuado al trasladar una esfera de 15 Kg hasta el punto (4,0)m y discuta el resultado obtenido.

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}$$





$$V_{(0,0)m} = -G \cdot \frac{m_1}{r_2} = -6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{25}{3} = -5.55 \cdot 10^{-10} \text{ J/kg}$$

$$V_{(4,0)m} = -G \cdot \frac{m_1}{r_2} = -6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{25}{4} = -4.17 \cdot 10^{-10} \text{ J/kg}$$

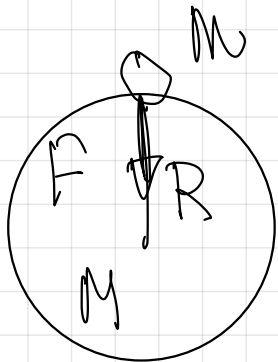
$$W_{(3,0)m \rightarrow (4,0)m} = m_2 \cdot (V_{(3,0)} - V_{(4,0)})$$

$$V(3,0) - V(4,0) = 15 \left(-555 \cdot 10^{-10} - (-417 \cdot 10^{-10}) \right)$$

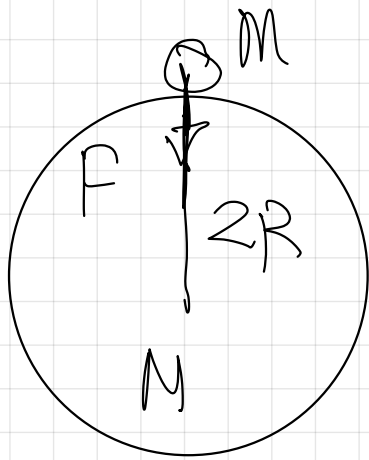
$$V(3,0) - V(4,0) = -2'07 \cdot 10^{-9} \text{ J.}$$

8.- Suponiendo que el radio de un planeta aumentara al doble de su valor, explicar cómo variaría el peso de los cuerpos en su superficie considerando el caso en el que permaneciera constante:

- La masa del planeta
- La densidad del planeta



$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2}$$



$$F' = G \cdot \frac{M \cdot m}{(2R)^2} = G \cdot \frac{M \cdot m}{4R^2}$$

$$\frac{F'}{F} = \frac{G \cdot \frac{M \cdot m}{4R^2}}{G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2}}$$

$$\frac{F'}{F} = \frac{1}{4}$$

$$F' = \frac{1}{4} F$$

b)



Obtengo expresión del peso
en función de la
densidad del planeta y

$$\textcircled{+} = G \cdot \frac{\cancel{M} \cdot M}{R^2} \quad \varphi = \frac{M}{V} = \frac{\textcircled{M}}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

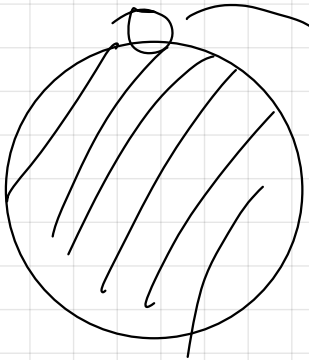


$$F = G \cdot \underbrace{\varphi \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot M}_{R^2} \quad \textcircled{M} = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$F = G \cdot \textcircled{+} \cdot \frac{4}{3}\pi R \cdot M$$

$$F' = G \cdot \textcircled{+} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 2R \cdot M \quad \left. \begin{array}{l} F \\ F' \end{array} \right\} \uparrow$$

etc.



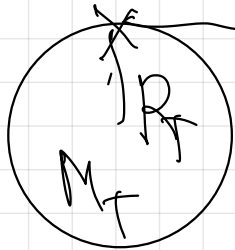
$$\frac{F_0}{F} = \frac{\cancel{G} \cdot \cancel{p} \cdot \frac{4}{3} \pi \cancel{R}^3 \cdot \cancel{m}}{\cancel{G} \cdot \cancel{p} \cdot \frac{4}{3} \pi \cancel{R}^3 \cdot m}$$

$F' = 2F$

↓

El peso se duplica

9.- Si la densidad de la tierra fuera tres veces mayor, ¿Cuál debería ser el radio terrestre para que el valor de la gravedad no variara?



$g_T = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}$

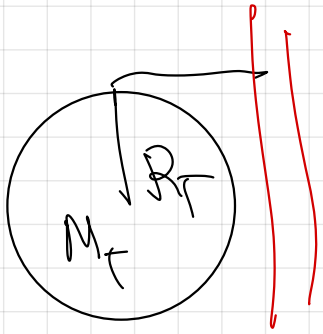
lo pongo en función de ρ

$$\rho = \frac{M_T}{V_T} = \frac{M_T}{\frac{4}{3} \pi R_T^3}$$

$$M_T = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R_T^3$$

$$g_T = G \cdot \frac{\rho \cdot \frac{4}{3} \pi R_T^3}{R_T^2}$$

$$\boxed{g_T} = G \cdot \frac{4}{3} \pi R_T$$

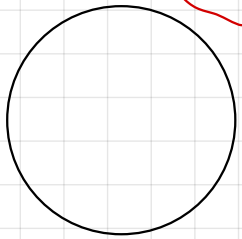


$$\rightarrow \cancel{G \cdot \frac{4}{3} \pi R_T} = \cancel{G \cdot 3 \cdot \frac{4}{3} \pi} \boxed{R_T}$$

$R_T = 3 R_T'$

$$\boxed{g_T} = G \cdot 3 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot R_T'$$

$$\boxed{R_T' = \frac{R_T}{3}}$$



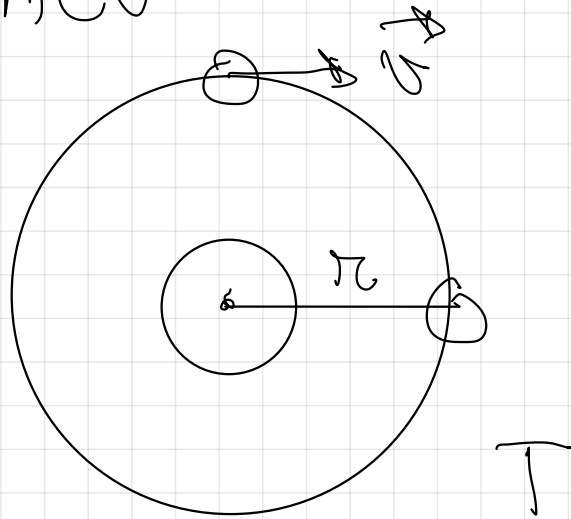
$$g_T' = g_T \cdot \left[\frac{g_T}{g_T} \right] \frac{\cancel{G \cdot 3 \cdot \frac{4}{3} \pi R_T'}}{\cancel{G \cdot \frac{4}{3} \pi R_T}}$$

$\frac{R}{H} \sim \frac{R}{H}$

Examen en el AULA B2. Pasillo
que va desde el salón de actos hasta
los servicios. 17:00 h (Esten
un poco antes para la colocación)

- 1 → a) Cuestión 1p
→ b) Ejercicio 1,5p
- 2 → a) Cuestión 1p
→ b) Ejercicio 1,5p
- 3 → a) Cuestión 1p
→ b) Ejercicio 1,5p
- 4 → a) Cuestión 1p
→ b) Ejercicio 1,5p.

MCU



$$|\vec{v}| = \frac{ds}{dt}$$

$$v = \frac{s}{t} \rightarrow (R_T + h)$$

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi R}{T}$$

$$s = 2\pi R$$

5. Un satélite artificial de 1000 kg describe una órbita geoestacionaria con una velocidad de $3,1 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}$.

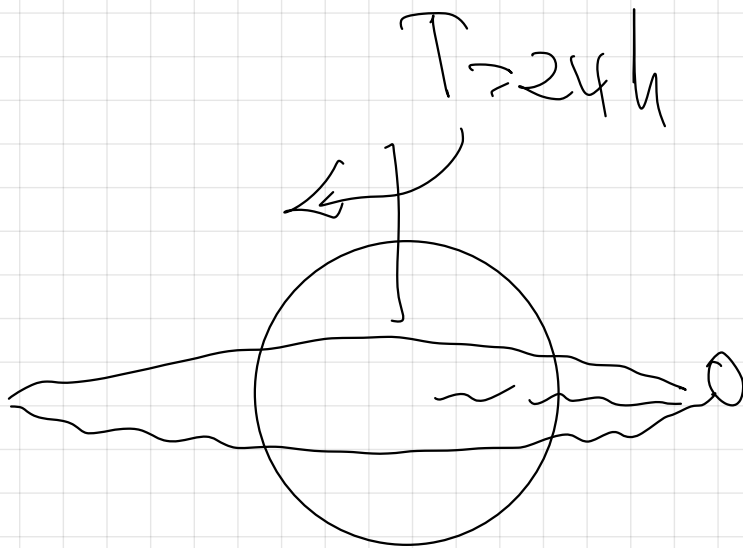
a) Explique qué significa órbita geoestacionaria y determine el radio de la órbita indicada.

b) Determine el peso del satélite en dicha órbita.

$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$; $M_T = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; $R_T = 6400 \text{ km}$



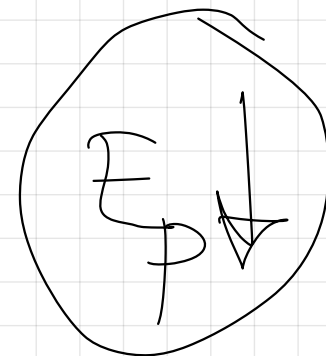
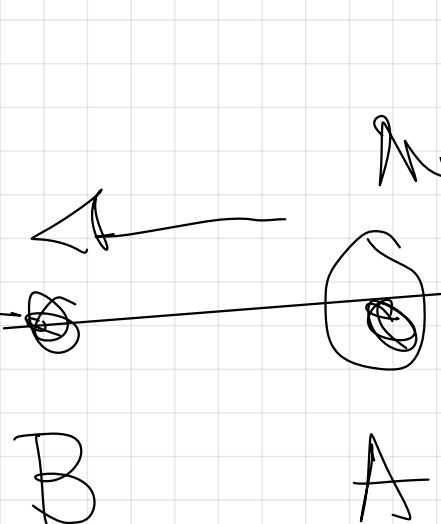
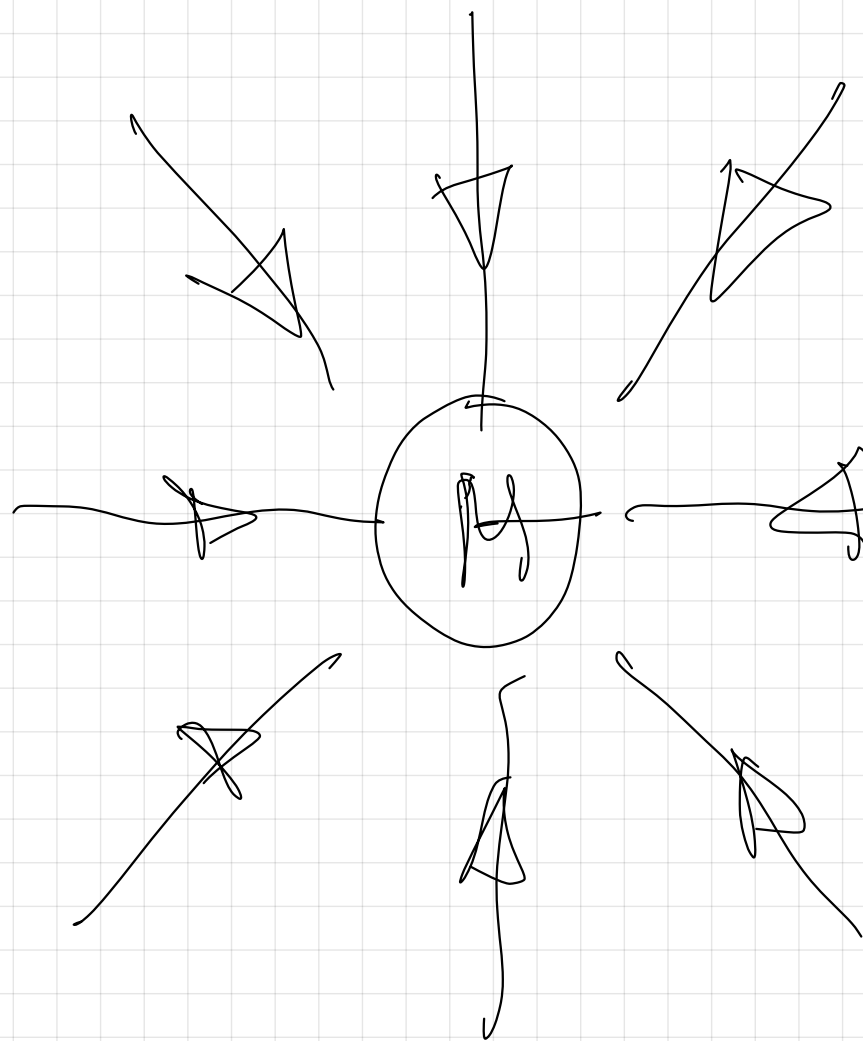
c) Explique qué se entiende por velocidad de escape de la Tierra y deduzca



$$T = 24 \text{ h}$$

$$v = \frac{2\pi R}{T} = 4$$

$$E_P = G \cdot \frac{M \cdot M}{R^2}$$

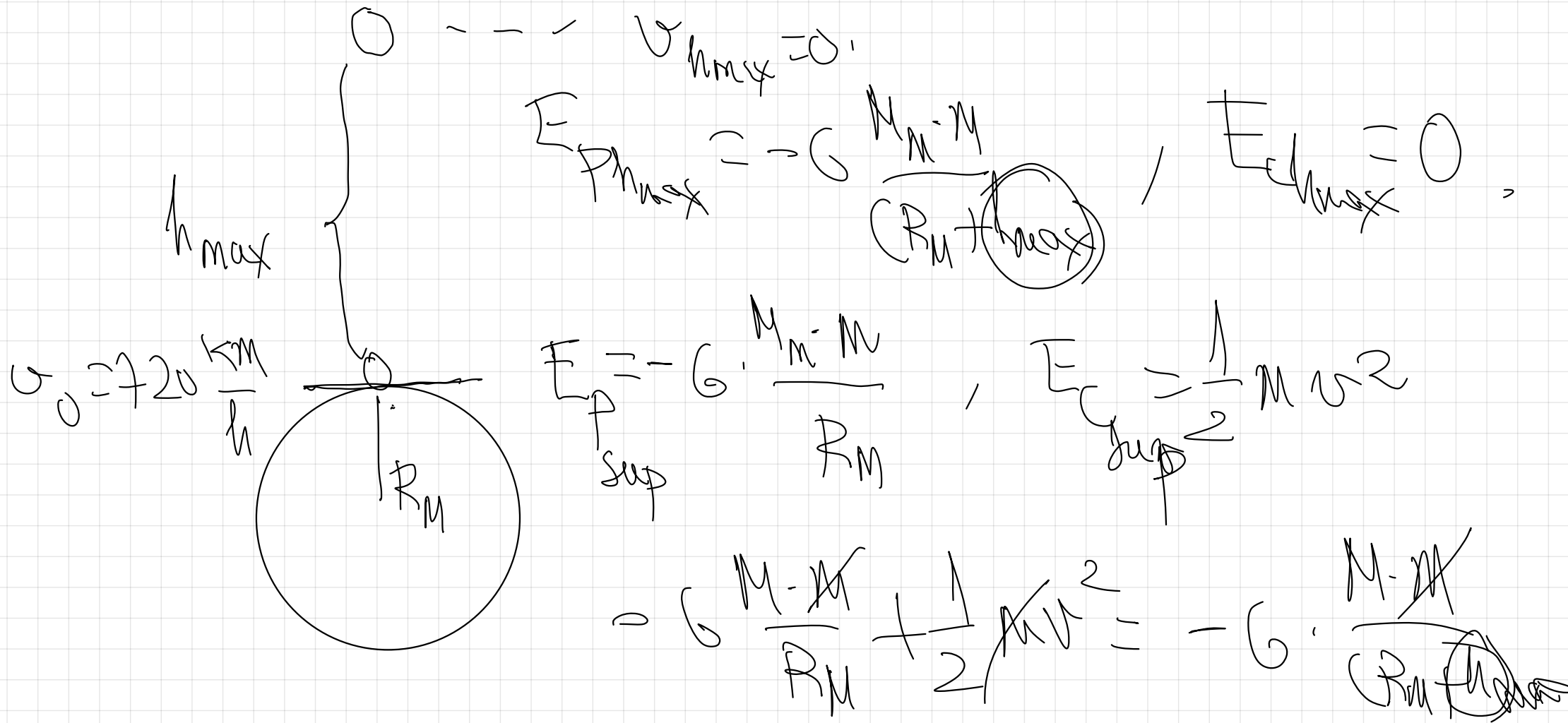


4. La masa de Marte es 9 veces menor que la de la Tierra y su diámetro es 0,5 veces el diámetro terrestre.

a) Determine la velocidad de escape en Marte y explique su significado.

b) ¿Cuál sería la altura máxima alcanzada por un proyectil lanzado verticalmente hacia arriba, desde la superficie de Marte, con una velocidad de 720 km h^{-1} ?

$g = 10 \text{ m s}^{-2}$ $R_T = 6370 \text{ km}$



1) Si la órbita fuera elíptica, ¿cuál sería el trabajo de esa fuerza a lo largo de una órbita completa?

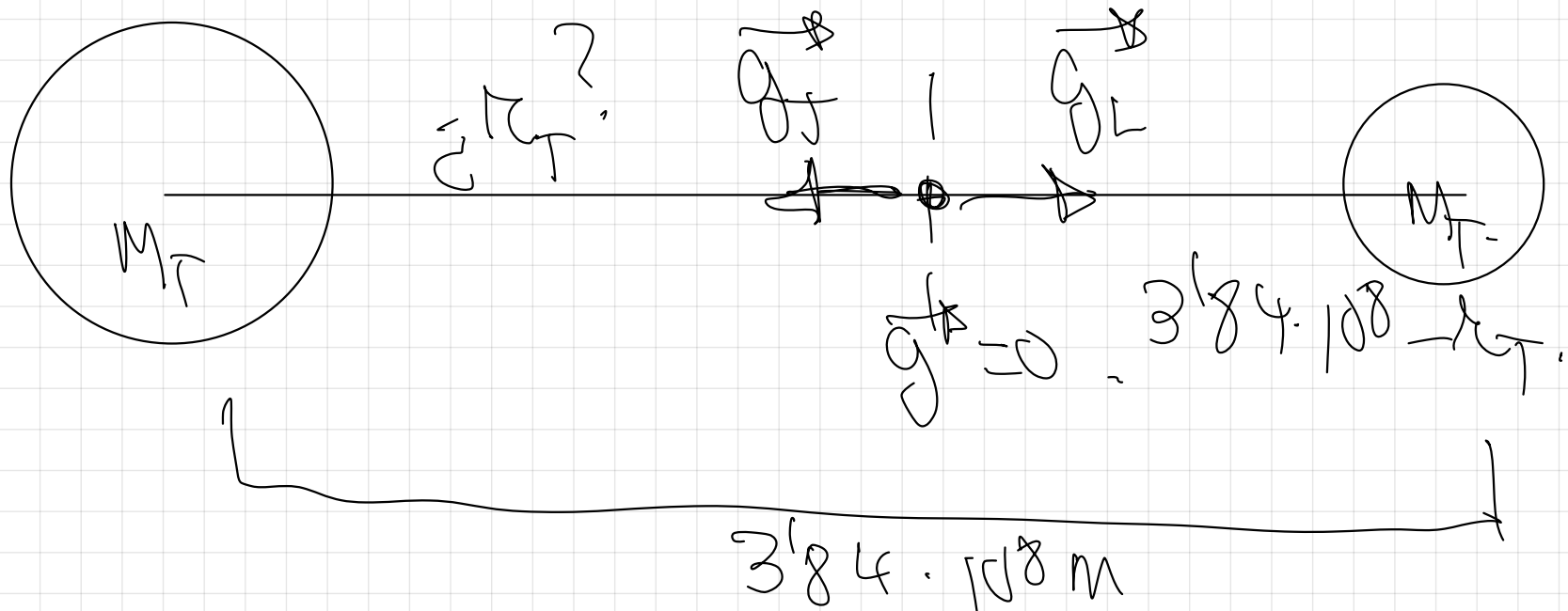
2. a) Dibuje en un esquema las fuerzas que actúan sobre un cuerpo de 1000 kg, situado en el punto medio entre la Tierra y la Luna y calcule el valor de la fuerza resultante. La distancia desde el centro de la Tierra hasta el de la Luna es $3,84 \cdot 10^8$ m.

b) ¿A qué distancia del centro de la Tierra se encuentra el punto, entre la Tierra y la Luna, en el que el campo gravitatorio es nulo?

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}; M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}; M_L = 7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$$

3. a) Considere un punto situado a una determinada altura sobre la superficie

Principio de superposición $g = G \frac{M}{r^2}$.

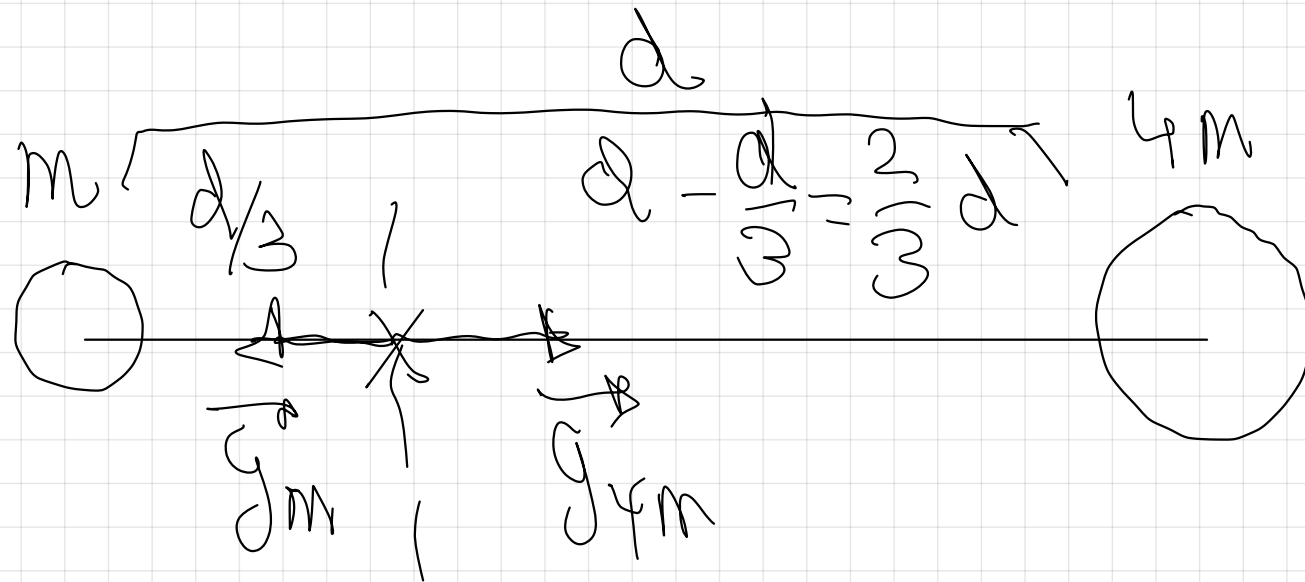


$$|\vec{g}_T| = |\vec{g}_L|$$

$$\cancel{\phi} \cdot \frac{M_T}{r_T^2} = \cancel{\phi} \cdot \frac{M_L}{(384 \cdot 10^8 - r_T)^2}$$

$$\cancel{\phi} \cdot \frac{M_T}{r_T} = \cancel{\phi} \cdot \frac{M_L}{(384 \cdot 10^8 - r_T)}$$

a) Razone la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación: "Dos masas de valor m y $4m$ separadas una distancia d , generarán un campo gravitatorio nulo en un punto entre ambas situado a una distancia $\frac{d}{3}$ de la masa más pequeña".



$$|g_m| = G \cdot \frac{m}{\left(\frac{d}{3}\right)^2} = G \cdot \frac{m}{\frac{d^2}{9}} = 9 G \frac{m}{d^2}$$

$$\left| \vec{g}_{4M} \right| = G \cdot \frac{4M}{\left(\frac{2d}{3} \right)^2} - G \cdot \frac{M}{\frac{4d^2}{9}} = g - G \cdot \frac{M}{d^2}$$

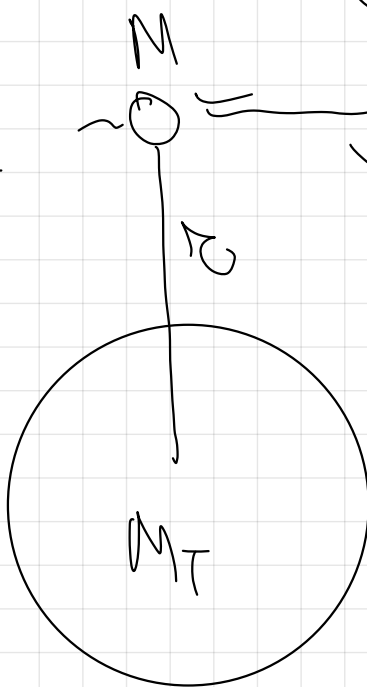
4. Un satélite de 200 kg describe una órbita circular alrededor de la Tierra con un periodo de dos horas.

a) Calcule razonadamente el radio de su órbita.

b) ¿Qué trabajo tendríamos que realizar para llevar el satélite hasta una órbita de radio doble.

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}; M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

- O



$$E_{MB} = -G \frac{M \cdot M}{2r_B}$$

Major

$$E_M = -G \frac{M \cdot M}{2r_A}$$

Minor

$$E_{MA} + E = E_{MB}$$

$$E = E_{MB} - E_{MA}$$

E_m orbital

$$E_m = E_p + E_c$$

$$E_m = -G \frac{M \cdot m}{r} + \frac{1}{2} m v_o^2$$



$$G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{v_o^2}{r}$$

$$E_m = -G \frac{M \cdot m}{r} + \frac{1}{2} m \left(\sqrt{G \frac{M}{r}} \right)^2$$

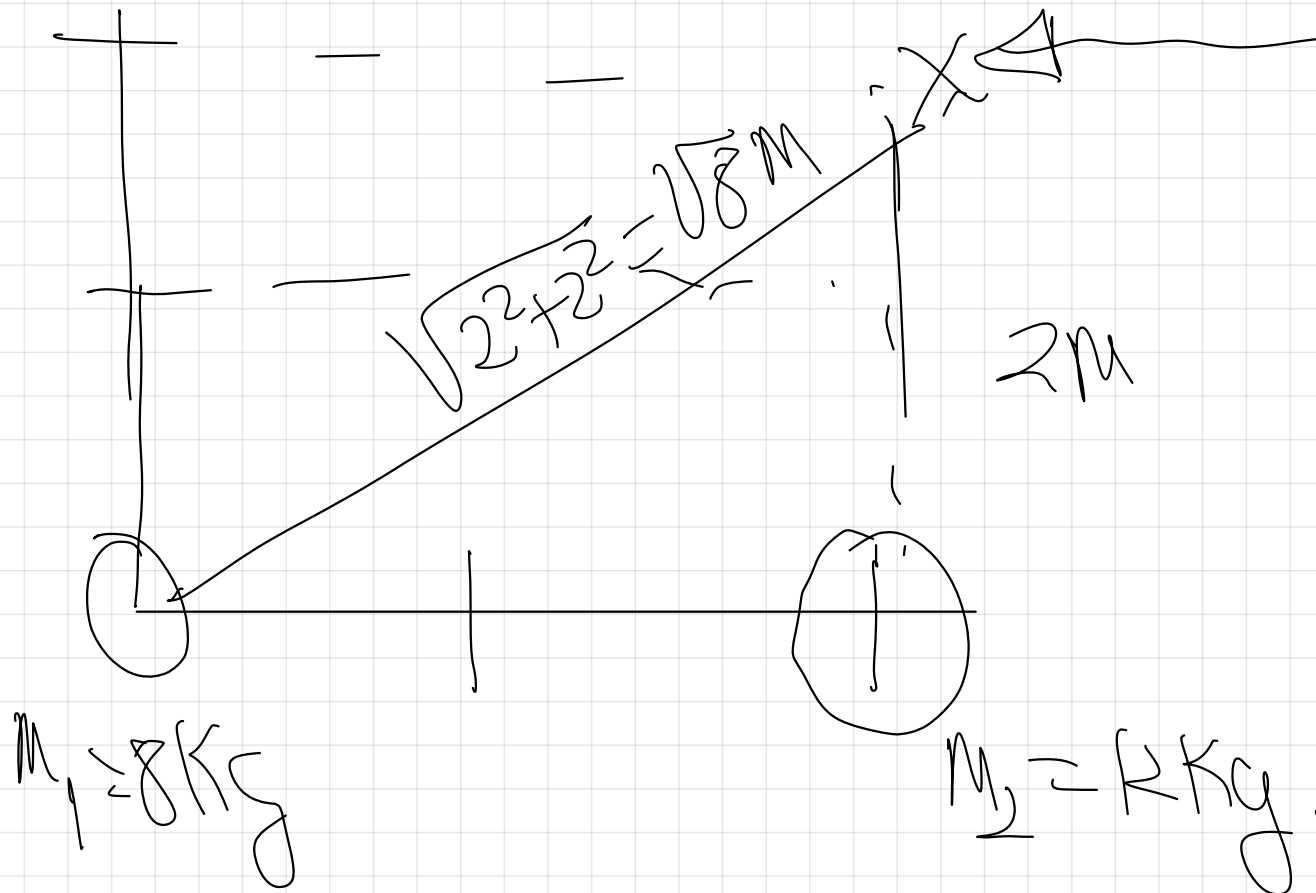
$$E_M = + G \frac{M \cdot M}{2r} - G \frac{M \cdot M}{r}.$$

$$E_M = G \frac{M \cdot M}{2r}.$$

$$E_M = - \frac{1}{2} G \frac{M \cdot M}{r}.$$

- a) Razone la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación: "Al acercar dos masas aumenta la fuerza de atracción entre ellas, pero disminuye su energía potencial".
- b) Dos masas puntuales $m_1 = 8\text{kg}$ y $m_2 = 12\text{kg}$ están situadas en los puntos $A(0,0)\text{ m}$ y $B(2,0)\text{ m}$, respectivamente. i) Determine el punto entre las dos masas donde se anula el campo gravitatorio. ii) Calcule el trabajo que realiza la fuerza gravitatoria cuando una tercera masa $m_3 = 2\text{kg}$ se desplaza desde el infinito hasta el punto $C(2,2)\text{ m}$.

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$$



$$V_{\infty} = V_1 + V_2 = 0$$

$$W_{\infty} \rightarrow (2,2) \approx 3 \cdot \left(\cancel{V} - V_{(2,2)} \right)$$

Princípio superp.

$$V = V_1 + V_2,$$

$$V_{(2,2)} = G \cdot \frac{M_1}{r_1} + \left(-G \cdot \frac{M_2}{r_2} \right)$$

$r_1 = 18 \text{ m}$ $r_2 = 2 \text{ m}$

$$V_{(2,2)} = -1$$

$$\frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

