

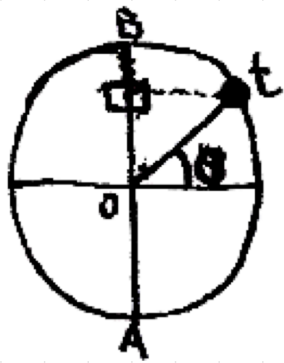
M.A.S.

pag 111 del libro  $\Rightarrow$  Teoría.  
Ejercicios M.A.S  $\Rightarrow$  página web, junto con sus  
soluciones

- a) Oscilación completa o ciclo completo,
- b) Velocidad angular, pulsación o frecuencia angular  $\omega$ .

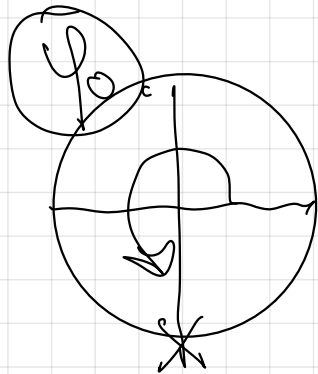
$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \left( \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)$$

- c) Ángulo de fase  $\varphi$  (rad en S.I.).



$\theta$  nos representa el estado vibratorio en ese instante  $t$

d) Ángulo de fase inicial  $\varphi_0$ ,



$t=0$ ,

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T} \left( \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right).$$

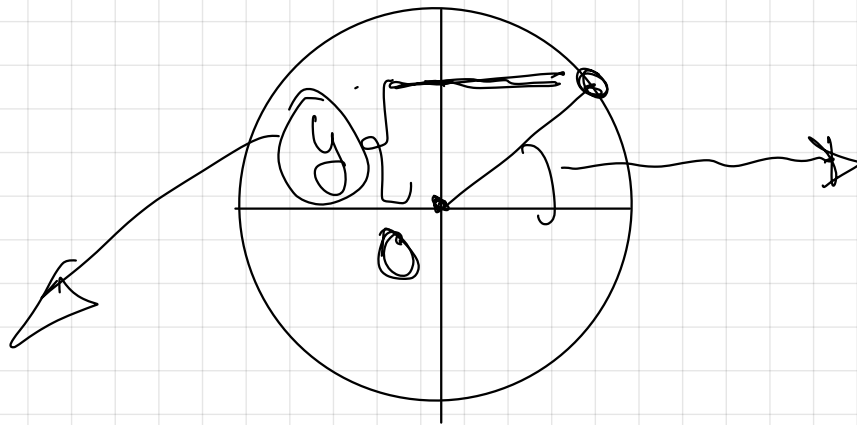
$$v = \frac{s}{t}.$$

$$s = v \cdot t.$$

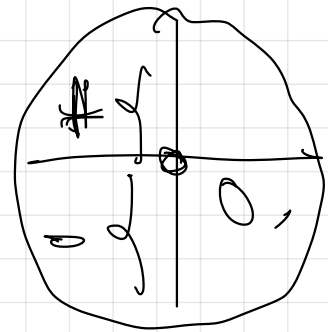
$$s = v \cdot t + s_0.$$

$$\varphi = \omega \cdot t + \varphi_0$$

e) Elongación  $y$  (m en SI).



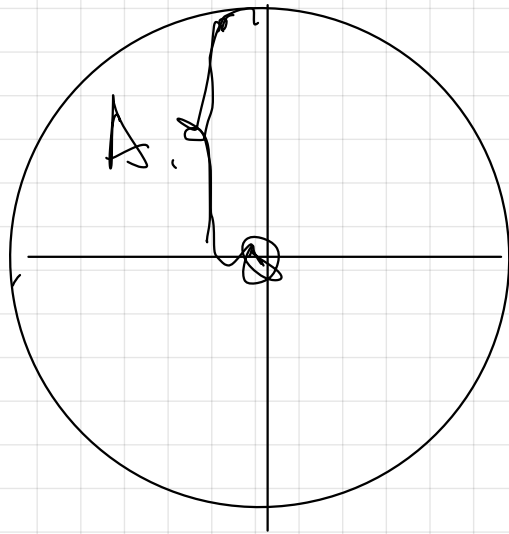
$$y = y_0 + \omega t$$



Distancia que lo separa de su posición intermedia en un instante  $t$ .

f) Amplitud (m)

$$y_{\max} = A.$$



AM  
FM

g) Período  $T$  (s. en s#).

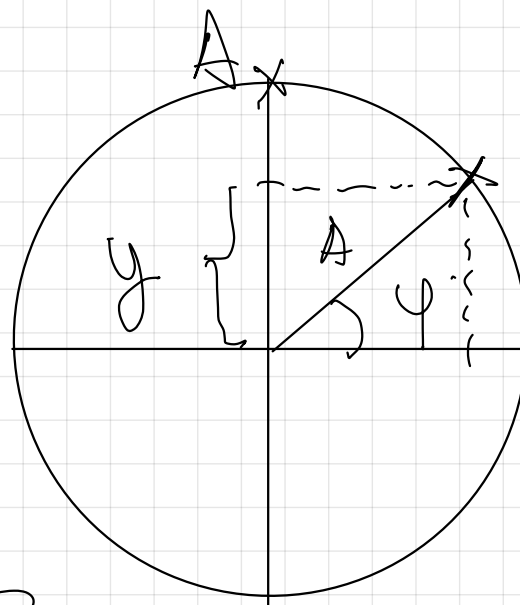
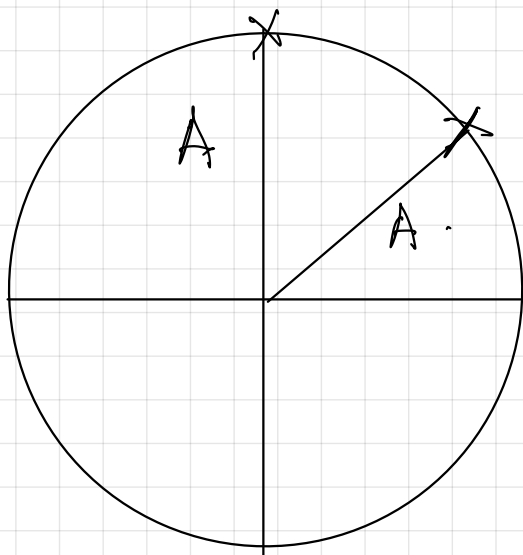
$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

h) Frecuencia  $\left( \text{Hz} = \text{s}^{-1}, \text{osc/s}, \text{etc.} \right)$

$$f = \frac{\text{n.º oscilaciones}}{t.}$$

$$f = \frac{1}{T.}$$

3º M.A.S.



$$\text{sen } \phi = \frac{y}{A} \rightarrow \begin{matrix} \text{cateto opuesto} \\ \text{hipotenusa} \end{matrix}$$

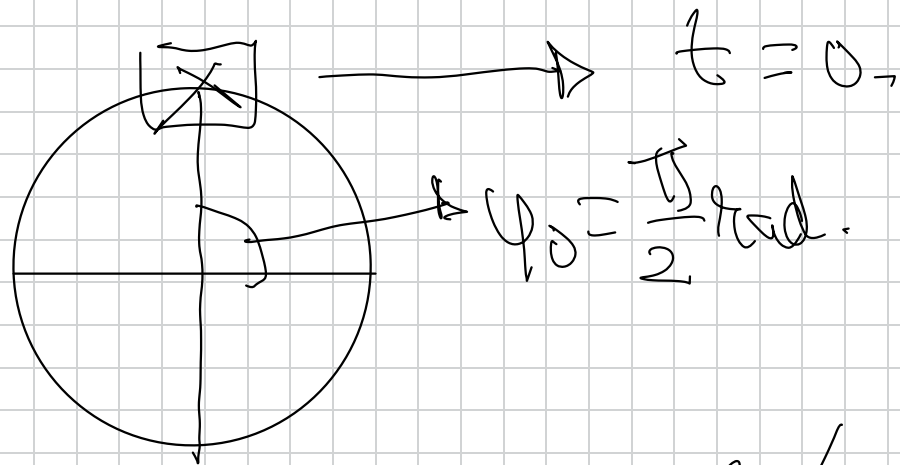
$$y = A \cdot \sin \phi \rightarrow (\omega t + \phi_0)$$

$$y = A \cdot \sin (\omega t + \phi_0)$$

$$y(t) = A \cdot \sin (\omega t + \phi_0)$$

Ecuación de un M.A.S.

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$



Para calcular  $\varphi_0$ , asigno  $t = 0$  y hallo cuánto vale sabiendo la elongación para ese instante.

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

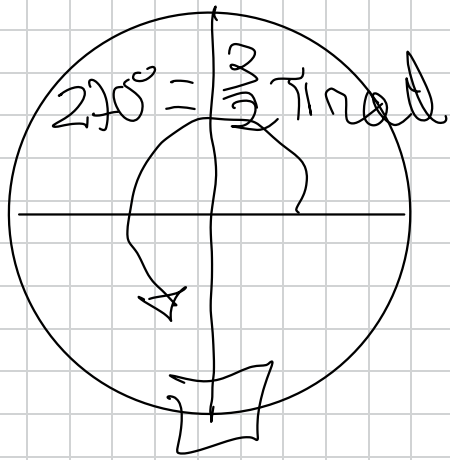
$t = 0 \Rightarrow y = A$

$$A = A \cdot \sin(\omega \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$\frac{A}{A} = \sin \varphi_0$$

$$\sin \varphi_0 = 1 \Rightarrow \varphi_0 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \text{ rad (or)}$$


---



$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Cálculo  $\varphi_0$ :

$$t=0 \Rightarrow y = -A.$$

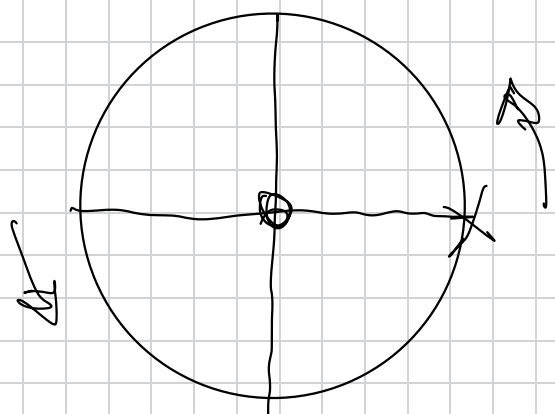
$$-A = A \cdot \sin(\omega \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$-A = A \cdot \sin \varphi_0.$$

$$\sin \varphi_0 = \frac{-A}{A} = -1$$

$$\varphi_0 = \arcsin(-1) = \frac{3}{2} \pi \text{ rad}$$


---



$\varphi_0$   
 $\searrow 180^\circ$   
 $\swarrow 180^\circ$  ( $\pi$  rad)

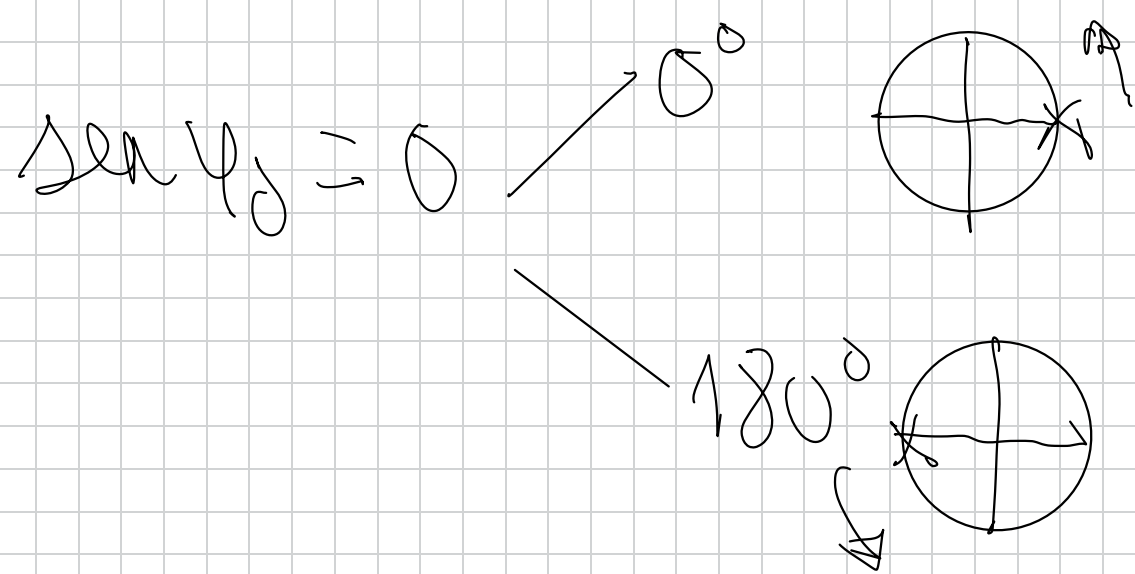
Calculate  $\varphi_0$ .

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

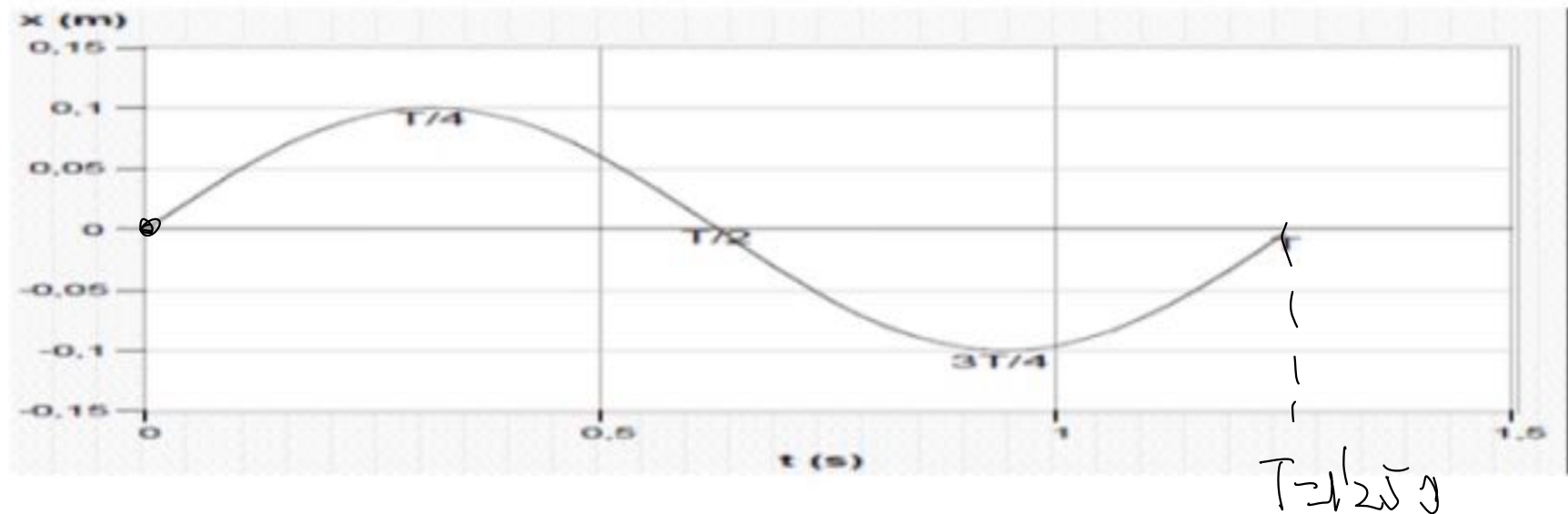
$$t = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$0 = A \cdot \sin(\omega \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$\frac{0}{A} = \sin \varphi_0$$



1.- En la gráfica se muestra la posición en función del tiempo para una partícula que describe un m.a.s. Determina la ecuación de dicho movimiento.



$$A = 0.1 \text{ m}$$

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

$$y(t) = 0.1 \cdot \sin\left(\frac{1}{6}\pi t + \varphi_0\right)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \frac{2\pi \text{ rad}}{1.25 \text{ s}} \Rightarrow \frac{1}{6}\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\boxed{y(t) = 0.1 \cdot \sin\left(\frac{1}{6}\pi t\right)} \quad (\text{SI})$$

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

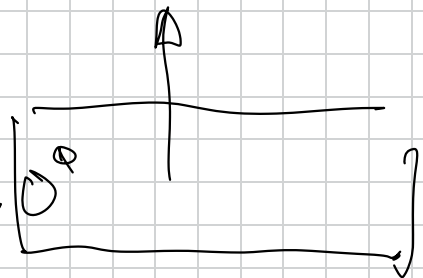
$$0 = A \cdot \sin(\omega \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$\frac{0}{A} = \sin \varphi_0$$

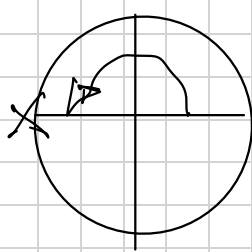
$$t = 0$$

$$y = 0$$

ascendente  $\varphi_0 = 0$

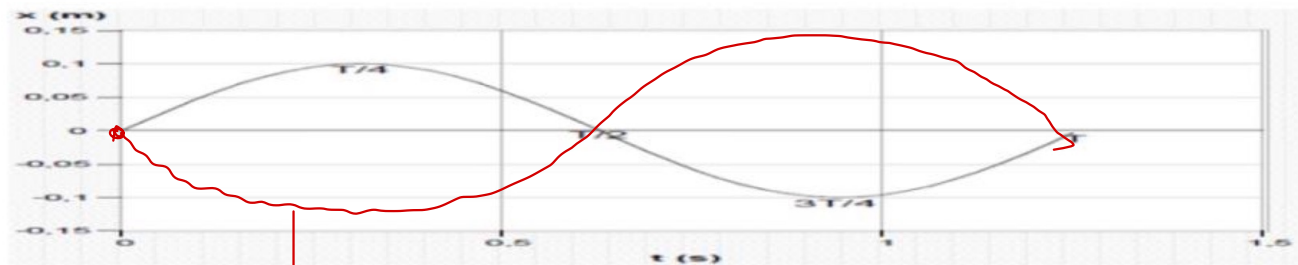
$$\varphi_0 = \arcsin 0 \rightarrow \begin{cases} 0^\circ \\ 180^\circ (\pi \text{ rad}) \end{cases}$$


Si  $\varphi_0$  hubiese sido  $180^\circ$  ( $\pi$  rad)



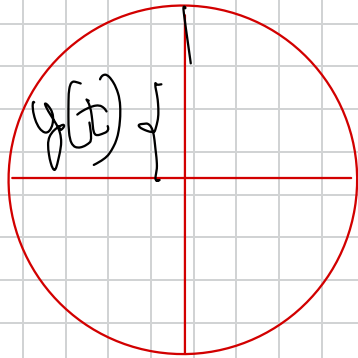
$\varphi_0 = 180$  ( $\pi$  rad)

1.- En la gráfica se muestra la posición en función del tiempo para una partícula que describe un m.a.s. Determina la ecuación de dicho movimiento.



$$y = 0,1 \sin(16\pi t + \pi) \text{ (SI)}$$

## Cinematica del M.A.S.



~~$$v = c \cdot t$$~~

~~$$v = \frac{s}{t} = \frac{y}{t}$$~~

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

v nel M.A.S.

$$v = \frac{dy}{dt} = A \cdot [\cos(\omega t + \varphi_0)] \omega$$

$$v = A \cdot \omega \cdot \boxed{\cos(\omega t + \varphi_0)}$$

$$\boxed{v_{\max} = A \cdot \omega}$$
$$v_{\max} = \pm A \cdot \omega.$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin^2(\omega t + \varphi_0) + \cos^2(\omega t + \varphi_0) = 1$$

$$\cos^2(\omega t + \varphi_0) = 1 - \sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = A \cdot \omega \cdot \underbrace{\left[ \cos(\omega t + \varphi_0) \right]}_{\left[ \cos(\omega t + \varphi_0) \right] = \sqrt{1 - \sin^2(\omega t + \varphi_0)}}$$

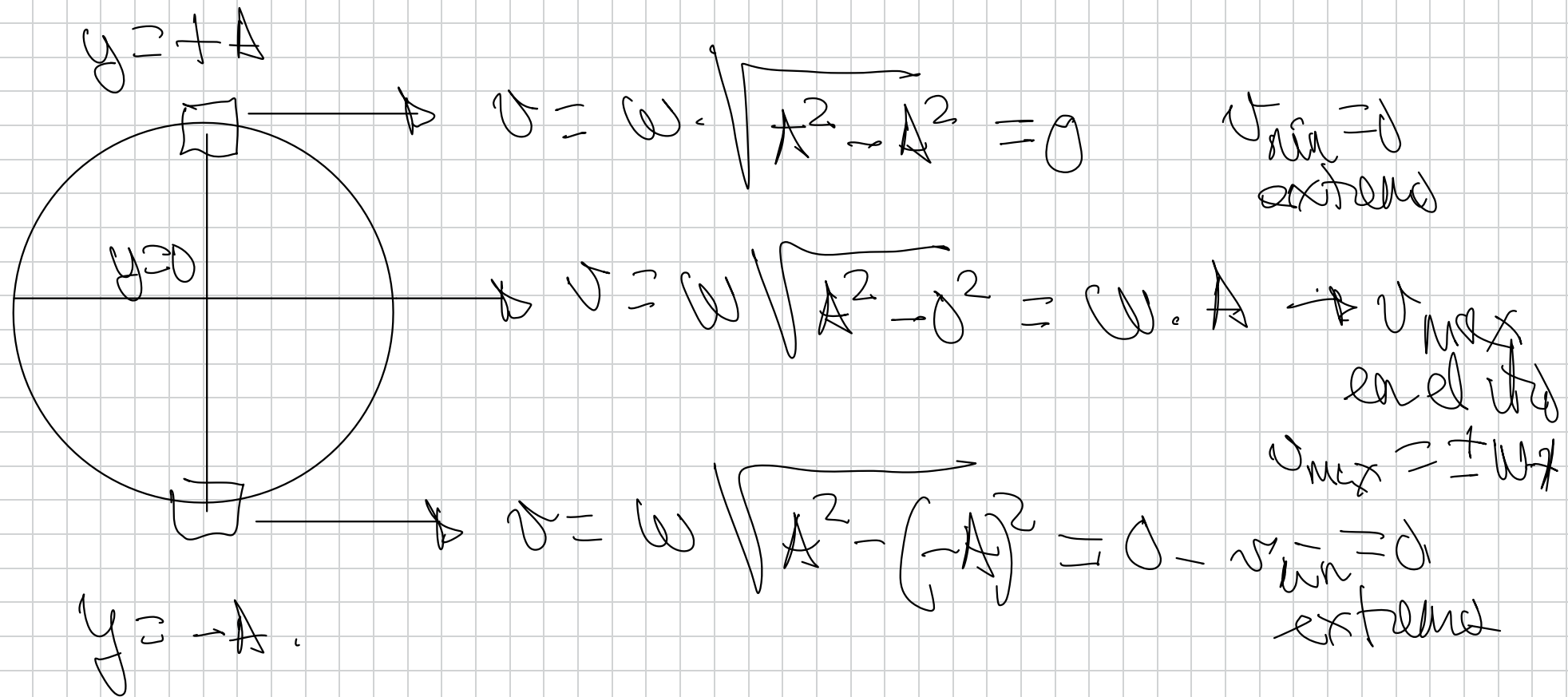
$$v = A \cdot \omega \cdot \sqrt{1 - \sin^2(\omega t + \varphi_0)}$$

$$v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - \underbrace{A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)}}_{\left[ A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) \right]}$$

$$y = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - y^2}$$

$v$  del M.A.S en función de la posición.



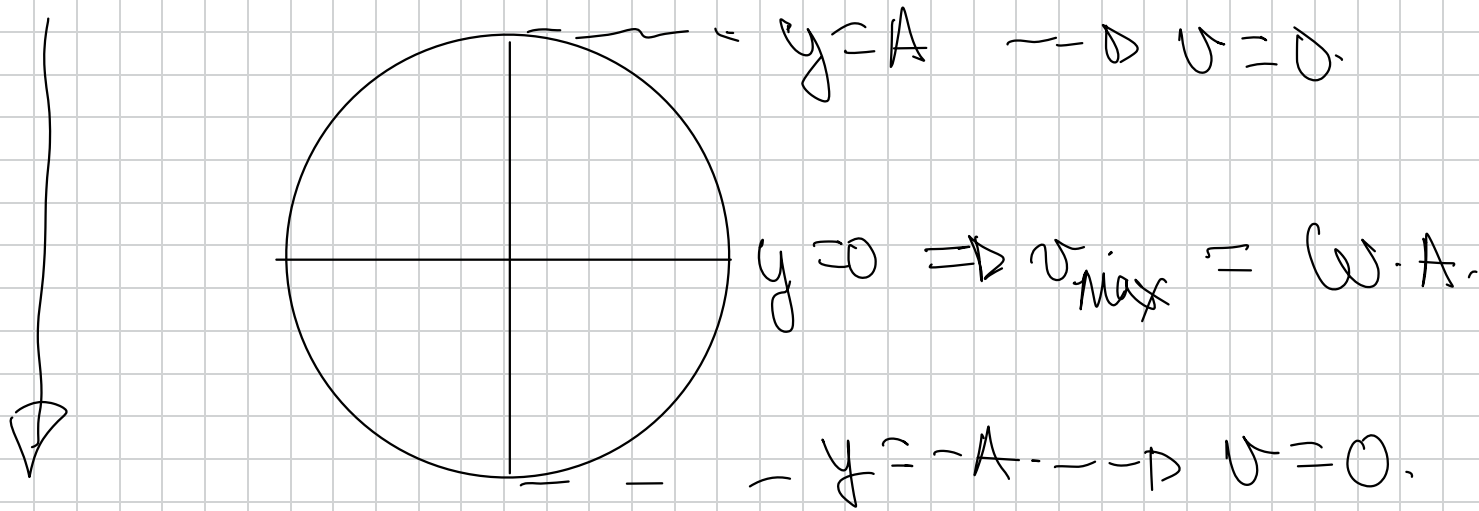
# Aceleración del M.A.S.

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$v = \frac{dy}{dt} = A \cdot \left[ \cos(\omega t + \varphi) \right] \omega$$

$$v = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$v = \omega \sqrt{A^2 - y^2}$$



$$a = \frac{dv}{dt} = A \cdot \omega \left[ -\sin(\omega t + \varphi_0) \right] \cdot \omega$$

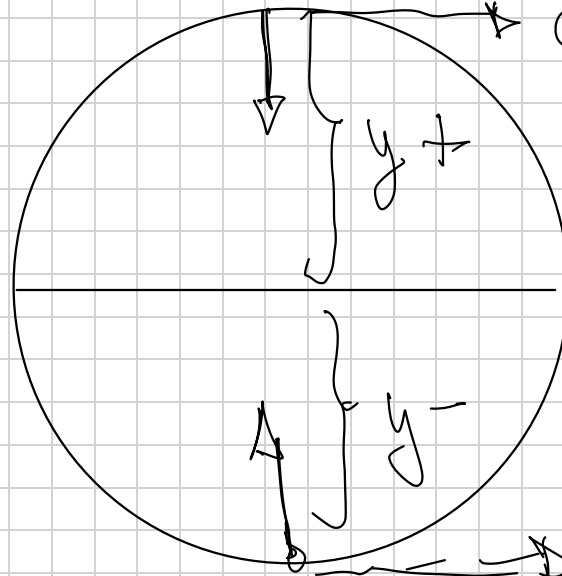
$$a = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$y = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$a = -\omega^2 y$$

$$a_{\max} = \pm \omega^2 A$$

$$a_{\max} = -\omega^2 A$$

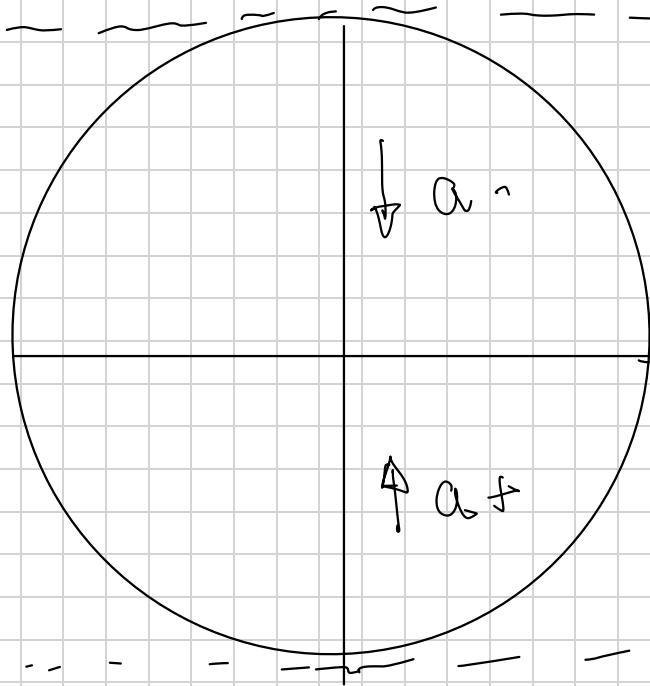


$$a = 0$$

$$a_{\max} = +\omega^2 A$$

$$v = 0 \quad \text{---} \quad a_{\max} = \omega^2 A$$

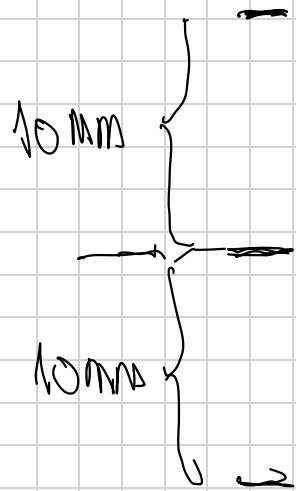
$$v_{\max} = \pm A \cdot \omega$$



$$a = 0$$

$$v = 0 \quad \text{---} \quad a_{\max} = \omega^2 A$$

2.- La aguja de una máquina de coser oscila entre dos puntos separados por una distancia vertical de 20 mm. Suponiendo que describe un m.a.s de frecuencia 30 Hz, ¿Cuál será su velocidad y aceleración máximas en unidades del Sistema Internacional?



$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot \frac{1}{T}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 30$$

$$\omega = 60\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$A = 10 \text{ mm} = 10^{-2} \text{ m}$$

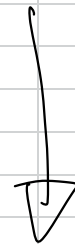
$$f = 30 \text{ Hz}$$

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

No especifican  
luego  $\varphi_0 = 0$ .

$$y = A \cdot \sin(\omega t)$$

$$y = 10^{-2} \cdot \sin(60\pi t) \text{ (S.I.)}$$



$$v = \frac{dy}{dt} = 10^{-2} \cdot \left[ \cos(60\pi t) \right] \cdot 60\pi.$$

$$v = 60\pi \cdot 10^{-2} \cdot \cos(60\pi t)$$

$$v_{\max} = 60\pi \cdot 10^{-2} \text{ m/s} = 1.88 \text{ m/s}.$$

$$v_{\max} = A \cdot \omega$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 60\pi \cdot 10^{-2} \left[ -\sin(60\pi t) \right] \cdot 60\pi$$

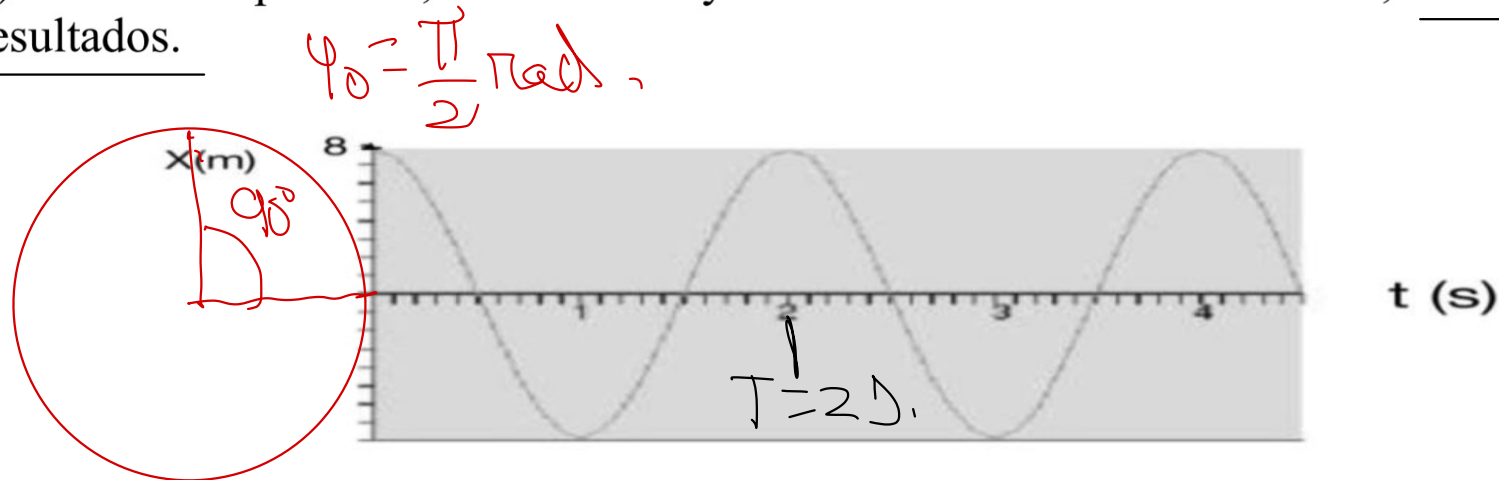
$$a_{\max} = \left( 60\pi \right)^2 \cdot 10^{-2} \cdot \sin(60\pi t)$$

$$a_{\max} = \pm 354194 \text{ m/s}^2$$

4.- En la gráfica se muestra la posición en función del tiempo para una partícula que describe un m.a.s.

a) Escribir la ecuación del m.a.s en unidades S.I.

b) Calcular su posición, su velocidad y su aceleración en el instante  $t=1s$ , comentando los resultados.



a)  $x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$

$x(t) = 8 \cdot \sin(\pi t)$

$A = 8 \text{ m}$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

$\omega = \frac{2\pi}{2}$

$\omega = \pi \text{ rad/s}$

Cálculo de  $\varphi_0$

$$x(t) = 8 \cdot \sin(\pi t + \varphi_0)$$

$$t=0 \rightarrow \\ x(t) = 8 \text{ m}$$

$$8 = 8 \cdot \sin(\pi \cancel{t} + \varphi_0)$$

$$8 = 8 \cdot \sin(\varphi_0)$$

$$\sin \varphi_0 = 1$$

$$\varphi_0 = \arcsin 1$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad } (90^\circ)$$

$$x(t) = 8 \cdot \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (SI)}$$

$$x(t) = 8 \cdot \cos(\pi t) \text{ (SI)}$$

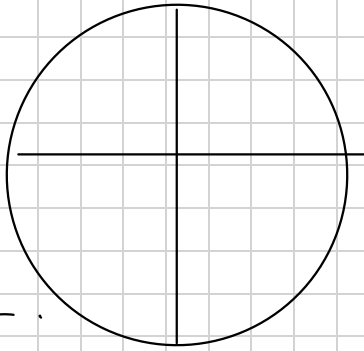
90

$$\sin 90 = 1.$$

$$\cos 90 = 0.$$

$$\sin 180 = 0$$

$$\cos 180 = -1.$$



0

$$\sin 0 = 0$$

$$\cos 0 = 1.$$

270

$$\sin 270 = -1$$

$$\cos 270 = 0.$$

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha.$$

$$x(t) = 8 \cdot \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (SI)$$

$$x(t) = 8 \cdot \cos(\pi t) \quad (SI)$$



$$v = \frac{dx}{dt} = 8 \cdot [-\sin(\pi t)] \cdot \pi$$

$$v(t) = -8\pi \cdot \sin(\pi t)$$

$$v(t=1s) = -8\pi \cdot \sin(\pi)$$

$$v(t=1s) = 0$$

$$\left[ \begin{array}{c} t=1s \\ T/2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} v=0 \\ a = +8\pi^2 \left( \frac{m}{s^2} \right) \end{array} \right.$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$a = -8\pi \left[ \cos(\pi t) \right] \pi$$

$$a = -8\pi^2 \cos(\pi t)$$

Comentarios ↓-

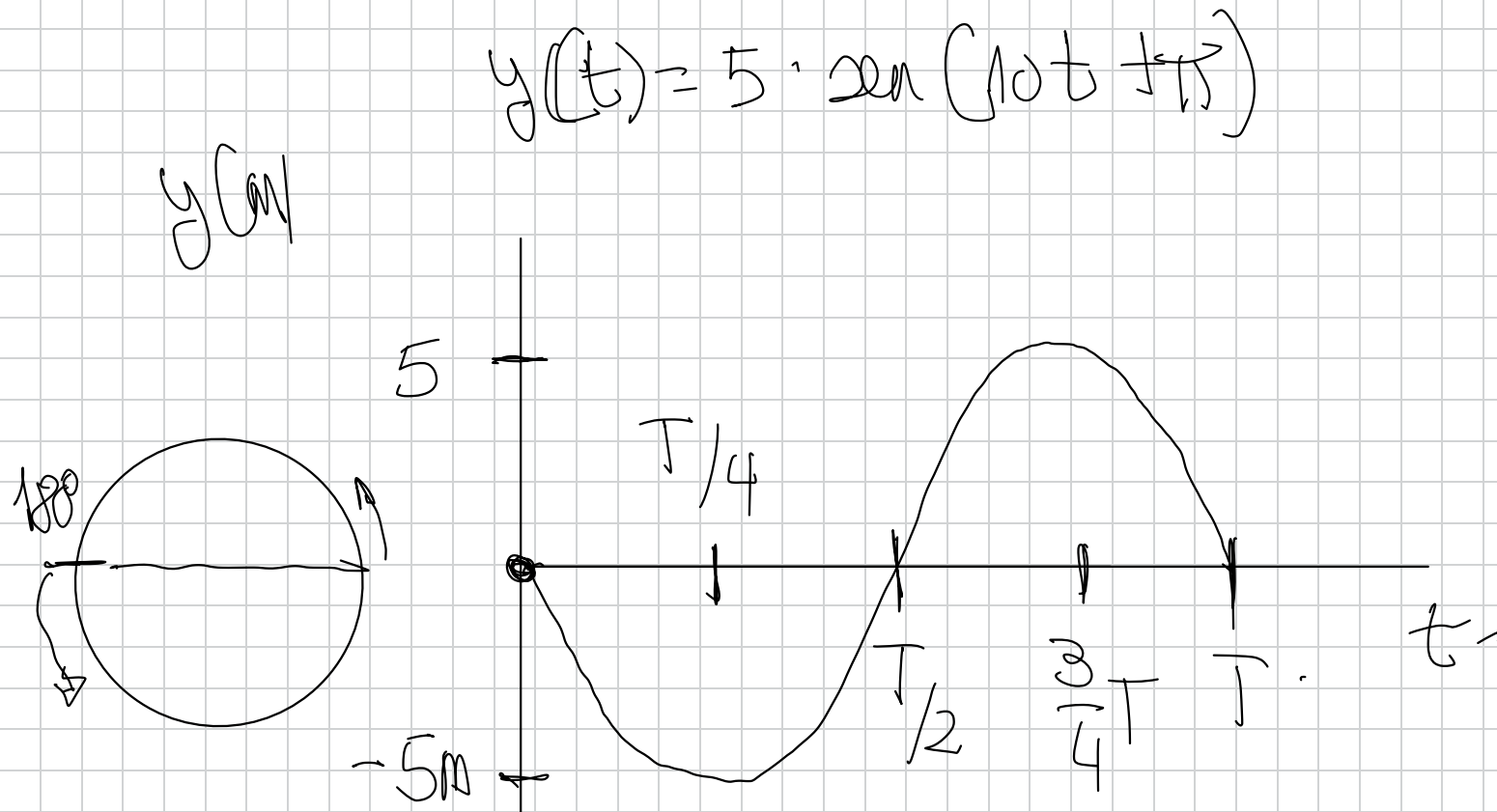
$$| a(t=1s) = -8\pi^2 \cdot \cancel{\cos(\pi)} \downarrow -1$$

$$a(t=1s) = +8\pi^2 \text{ m/s}^2$$

↓  
Extremo

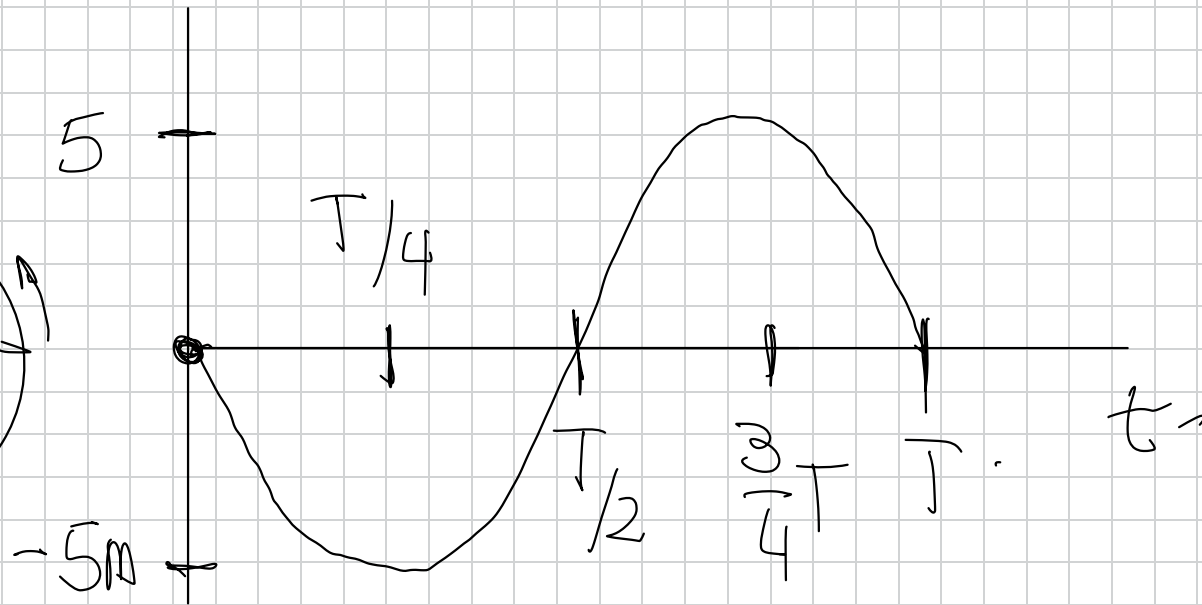
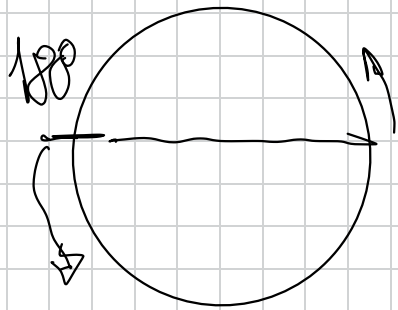
3.- a) Represente gráficamente el movimiento armónico simple de una partícula dado por la ecuación  $y(t)=5 \cdot \text{sen}(10t+\pi)$  (S.I). Represente también otro movimiento armónico simple que tenga una amplitud doble y una frecuencia mitad que la anterior.

b) Represente gráficamente la velocidad y la aceleración del movimiento armónico simple dado por la ecuación  $y(t)=5 \cdot \text{sen}(10t+\pi)$  (S.I)



$$y(t) = 5 \cdot \sin(\boxed{10t + \pi}) \text{ (SI)}$$

$y(t)$



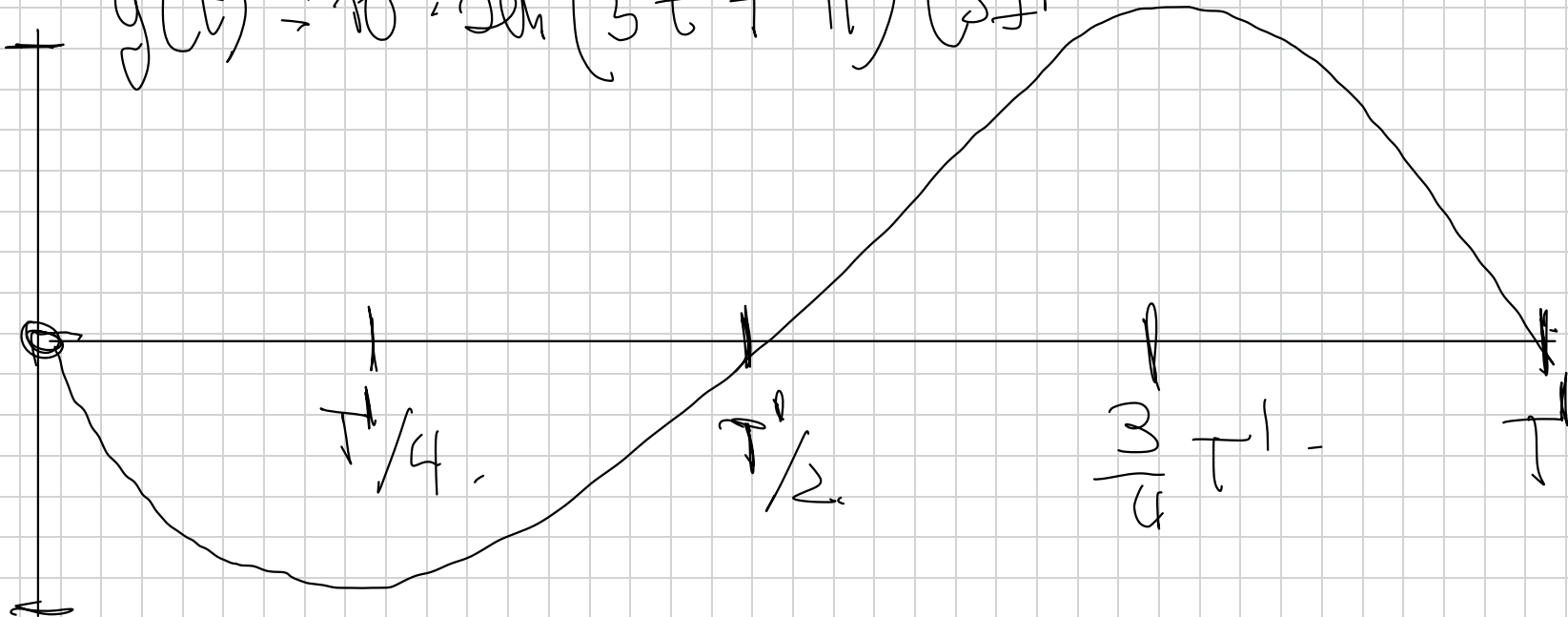
frequency  
inverted

$$f = \frac{1}{T}$$

$$T' = 2T$$

$$y(t) = 10 \cdot \sin(5t + \pi) \text{ (SI)}$$

10m



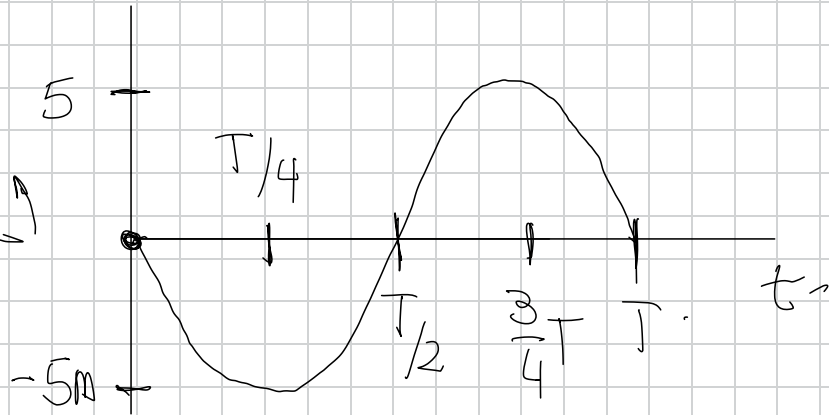
$$\omega = 2\pi f$$

$$\omega' = \pi f$$

$$\omega' = \frac{1}{2} \omega = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

-10m

$$y(t) = 5 \cdot \sin(10t + \pi)$$



$$v = \frac{dy}{dt} = 5 \cdot [\cos(10t + \pi)] \cdot 10$$

$$v = 50 \cdot \cos(10t + \pi)$$



$$a = \frac{dv}{dt} = 50 \cdot [-\sin(10t + \pi)] \cdot 10$$

$$a = -500 \cdot \sin(10t + \pi)$$

$a$



5.- La ecuación de un m.a.s viene dada por la expresión

$$x(t) = 0,5 \cdot \cos(\pi t) \text{ (S.I.)}$$

a) Calcular su amplitud, su ángulo de fase inicial, su periodo, su frecuencia y su posición al cabo de 0,5 segundos.

b) Calcular la velocidad y la aceleración máximas que podría alcanzar en su movimiento.

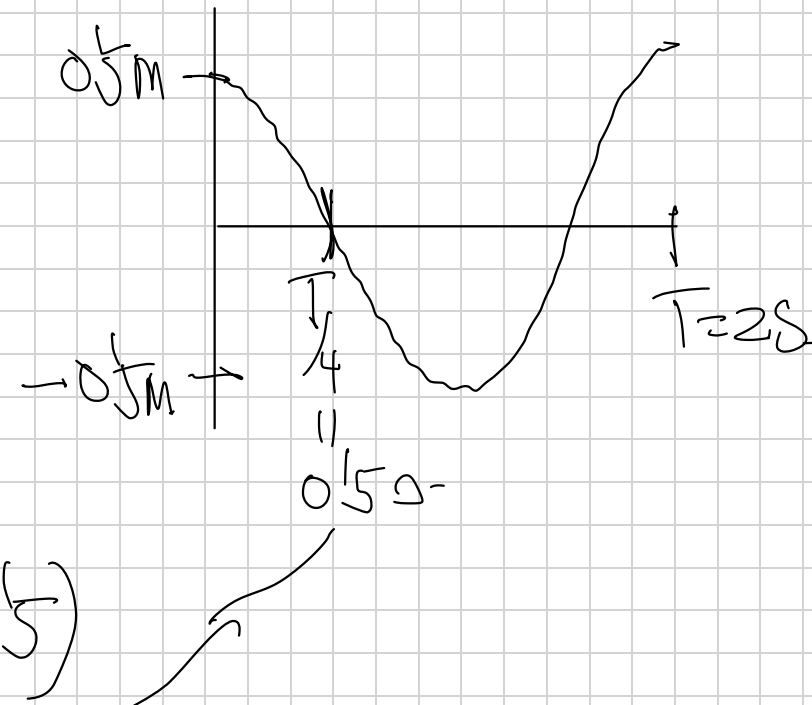
$$x(t) = 0,5 \cdot \cos\left(\underbrace{\pi t + \frac{\pi}{2}}_{\omega = \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}}\right) \text{ (S.I.)}$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

a)  $A = 0,5 \text{ m}$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \text{ s.}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ Hz.}$$



$$x(t) = 0,5 \cdot \cos(\pi t)$$

$$x(t=0,5 \text{ s}) = 0,5 \cdot \cos(\pi \cdot 0,5)$$

$$x(t=0.5s) = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

b)

$$x(t) = 0.5 \cdot \cos(\pi t)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 0.5 \cdot [-\sin(\pi t)] \cdot \pi$$

$$v = -0.5\pi \cdot \sin(\pi t)$$

$$v_{\max} = \pm 0.5\pi \text{ m/s}$$

$$(v_{\max} = A\omega)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -0.5\pi \cdot (\cos(\pi t))\pi$$

$$a = -0.5\pi^2 \cdot \cos(\pi t)$$

$$(a_{\max} = A \cdot \omega^2)$$

$$a_{\max} = \pm 0.5\pi^2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

6.- La ecuación de un cuerpo que describe un m.a.s es  $x(t) = 10 \cdot \sin(\pi t + 3\pi/2)$  (S.I).

a) ¿Cuánto valen la amplitud, el periodo y la frecuencia del movimiento?

b) Representar gráficamente la posición en función del tiempo

b) ¿Cuánto valen la velocidad y la aceleración del cuerpo para  $t = 2s$ ?

$$x(t) = \underbrace{10}_{A} \cdot \sin \left( \underbrace{\pi t + \frac{3}{2}\pi}_{\omega} \right) \text{ (S.I.)}$$

a)  $A = 10 \text{ m}$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \text{ s}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ Hz}$$

b)

$$x(t) = 10 \cdot \sin \left( \pi t + \frac{3}{2}\pi \right)$$

$t=0$   
 $x(t) = 10 \cdot \sin \left( \frac{3}{2}\pi \right)$   
 $x(t) = -10 \text{ m}$



$$b) \quad x(t) = 10 \cdot \sin\left(\pi t + \frac{3}{2} \pi\right) \quad (5.1)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 10 \cdot \left[ \cos\left(\pi t + \frac{3}{2} \pi\right) \right] \cdot \pi$$

$$v = 10 \pi \cdot \cos\left(\pi t + \frac{3}{2} \pi\right) \rightarrow a = \frac{dv}{dt}$$

$$\begin{array}{l}
 v(t=2s) = 10\pi \cdot \cos\left(2\pi + \frac{3}{2}\pi\right) \\
 v(t=2s) = 0
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 a = 10\pi \cdot \left[-\sin\left(\pi t + \frac{3}{2}\pi\right)\right] \cdot \pi \\
 a = -10\pi^2 \cdot \sin\left(\pi t + \frac{3}{2}\pi\right)
 \end{array} \right.$$


---

$$\begin{aligned}
 a(t=2s) &= -10\pi^2 \cdot \sin\left(2\pi + \frac{3}{2}\pi\right) \\
 a(t=2s) &= -10\pi^2 (-1) \\
 a(t=2s) &= 10\pi^2 \text{ m/s}^2
 \end{aligned}$$

7.- Un punto material está animado con un movimiento armónico simple en el eje X, alrededor de su posición de equilibrio en  $x=0$ . En el instante  $t=0$ , el punto material está situado en  $x=0$  y se desplaza en el sentido negativo del eje X con una velocidad de  $40 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ . La frecuencia del movimiento es de 5 Hz. Determinar:

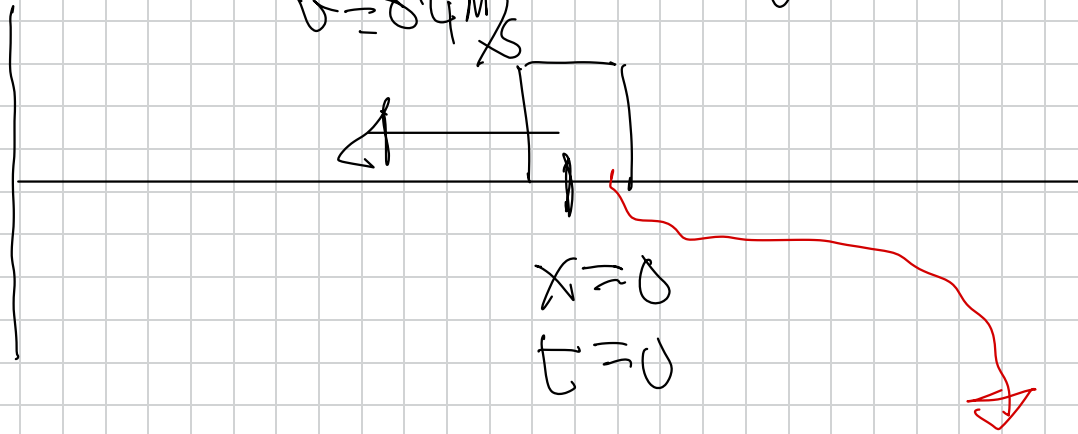
- La posición en función del tiempo o ecuación del movimiento armónico simple
- La posición y la velocidad en el instante  $t=5\text{s}$

$$v = 40 \text{ cm/s.}$$

$$v = 0.4 \text{ m/s}$$

$$f = 5 \text{ Hz.}$$

$$40 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot \frac{1 \text{ m}}{100 \text{ cm}} = 0.4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



$$v = 0.4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_{\text{max}} \text{ en el centro}$$

$$v_{\text{max}} = A \cdot \omega$$

$$A = \frac{v_{\text{max}}}{\omega}$$

$$A = \frac{0.4}{10\pi} \text{ m}$$

$$A = 0.013 \text{ m}$$

a)

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Cálculo de  $\varphi_0$

$$\left. \begin{array}{l} t=0 \\ x=0 \end{array} \right\}$$

$$0 = A \cdot \sin(\omega \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$0 = A \cdot \sin(\varphi_0)$$

$$\frac{0}{A} = \sin \varphi_0 \Rightarrow \sin \varphi_0 = 0 \Rightarrow \varphi_0 = \arcsin 0$$

Al desplazarse en el sentido  
negativo de las  $x$ ,  $\varphi_0 = 180^\circ = \pi \text{ rad}$ .

$$x(t) = 0.13 \cdot \sin(10\pi t + \pi)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot \frac{1}{T} = 2\pi f$$
$$\omega = 2\pi \cdot 5 = 10\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

b)

$$f = 5 \text{ s}^{-1}$$

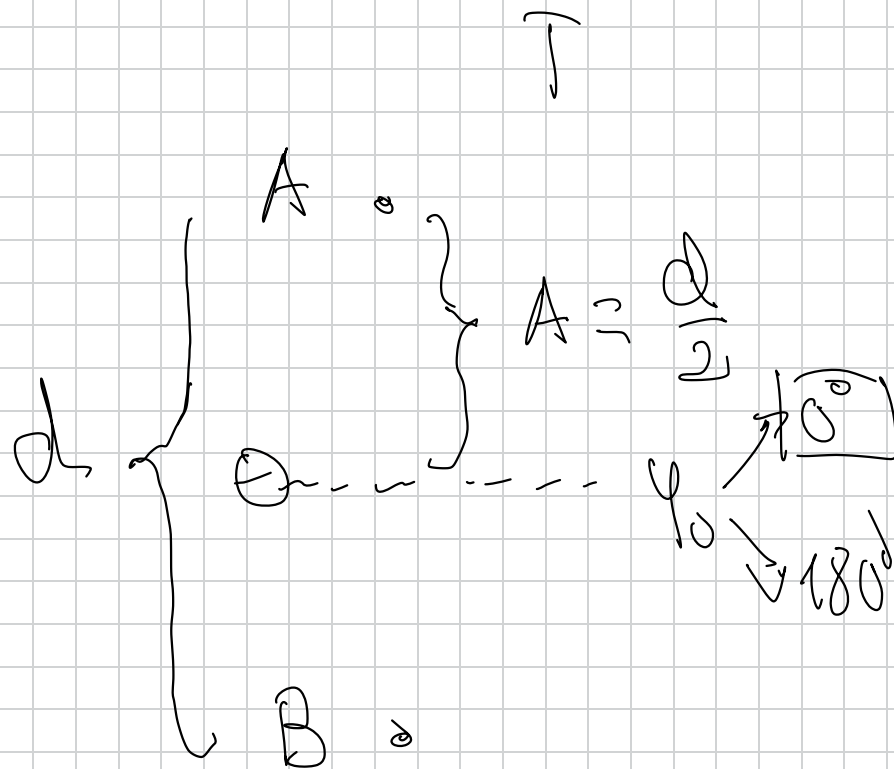
$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow T = \frac{1}{f} = \frac{1}{5} = 0.2 \text{ s}$$

8.-Una partícula describe un movimiento armónico simple entre dos puntos A y B que distan una distancia vertical  $d$ , con un periodo  $T$ .

a) Escriba la ecuación de dicho movimiento armónico simple sabiendo que para  $t=0$  la partícula se encuentra en el punto medio del segmento AB. Realizar una gráfica cualitativa de la elongación en función del tiempo.

b) Repita el apartado a) suponiendo que el periodo hubiese sido la mitad.

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

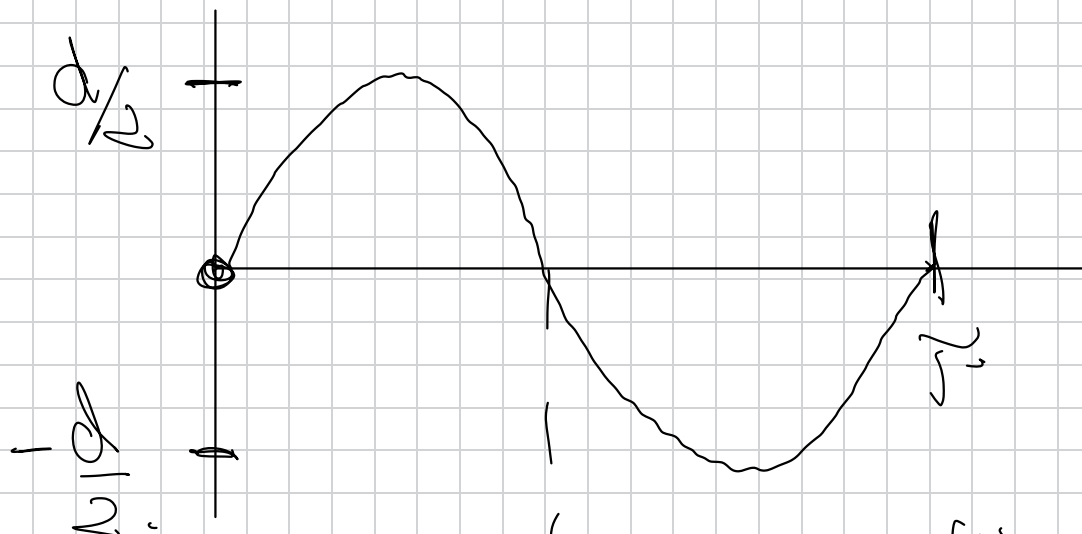


$$y(t) = \frac{d}{2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + 0\right)$$

$\Rightarrow$  Al no especificar,  $\varphi_0 = 0$ .

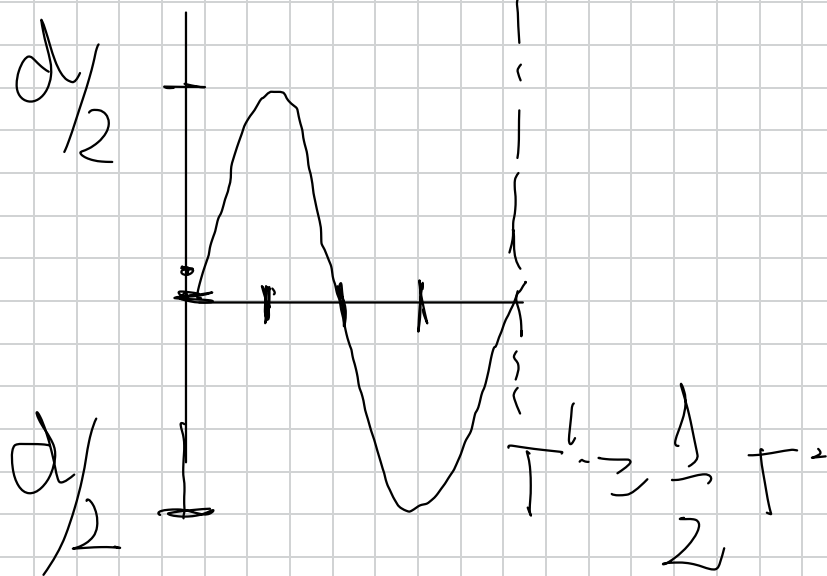
$$y(t) = \frac{d}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$$

$y(t)$



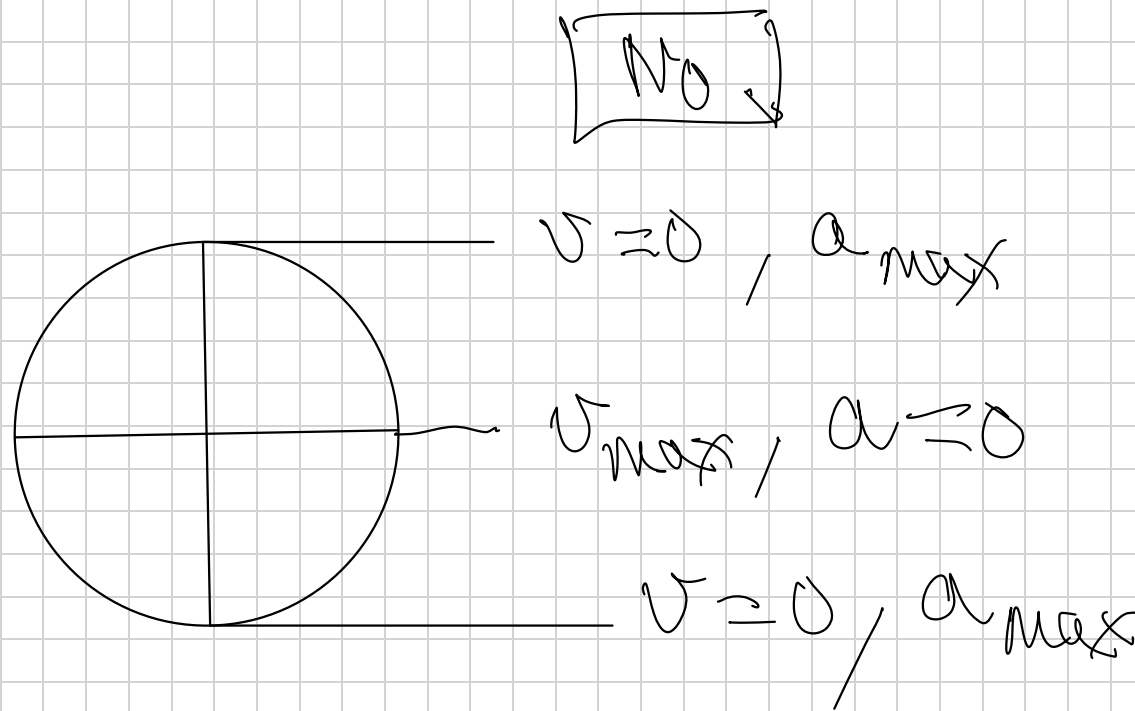
$$y(t) = \frac{d}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$$

$$y(t) = \frac{d}{2} \sin\left(\frac{4\pi}{T} t\right)$$



$$T \rightarrow \frac{1}{2} T$$

9.- ¿Pueden anularse simultáneamente la velocidad y la aceleración de un movimiento armónico simple?



10.- ¿En qué posición del movimiento armónico simple la velocidad es igual a la mitad de su valor máximo?

$$v_{max} = A \cdot \omega$$

Cuando vuelga  
la mitad

$$\Rightarrow v = \frac{A \cdot \omega}{2}$$

$$v = \frac{A \cdot \omega}{2}$$

Tengo que escribir  
la ecuación del M.A.S.  
en función de la  
posición.

$$v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - y^2}$$

Sustituyo el  
valor de  $v$   
y hallo el valor  
de  $y$  que le corresponde.

$$\frac{A \cdot \omega}{2} = \omega \cdot \sqrt{A^2 - y^2}$$

$$\frac{A}{2} = \sqrt{A^2 - y^2}$$

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{A^2 - y^2}\right)^2$$

$$\frac{A^2}{4} = A^2 - y^2$$

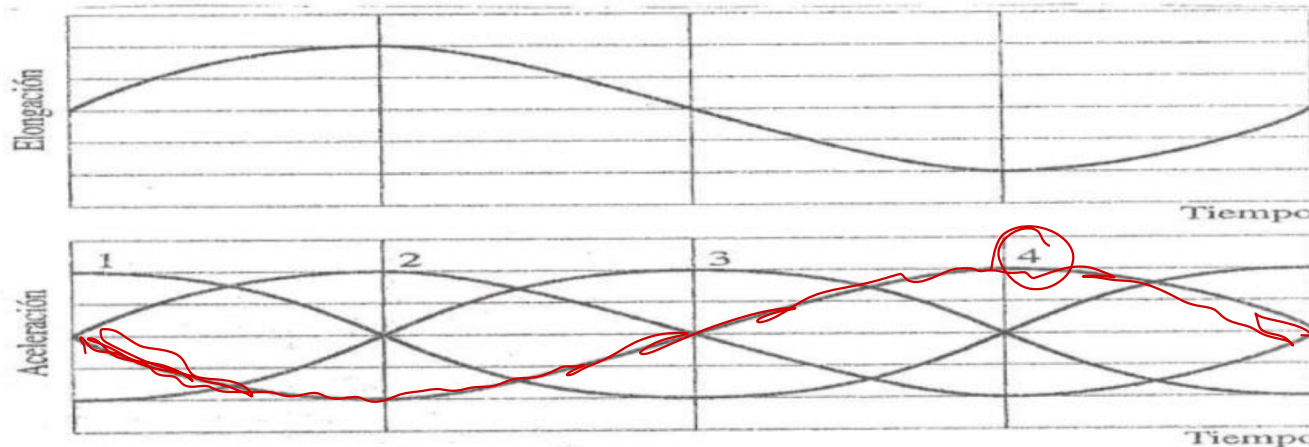
$$y^2 = A^2 - \frac{A^2}{4}$$

$$y^2 = \frac{3A^2}{4}$$

$$y = \sqrt{\frac{3A^2}{4}} = \pm \frac{\sqrt{3}A}{2}$$

Se alcanza en las posiciones

11.- En la primera de las dos gráficas que se muestran, se representa la variación con el tiempo del desplazamiento (elongación) que experimenta una partícula que se mueve con un m.a.s. ¿cuál de las curvas numeradas en la segunda gráfica puede representar la variación de la aceleración con el tiempo del citado m.a.s?



$$y = A \cdot \sin(\omega t)$$

$$v = \frac{dy}{dt} = A \cdot [\cos(\omega t)] \cdot \omega$$

$$v = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)$$

$$\boxed{a} = \frac{dv}{dt} = \boxed{-A\omega^2 \cdot \sin(\omega t)}$$

$$a = - \underbrace{[A]} \underbrace{\omega^2} \underbrace{[\sin(\omega t)]}$$

$$a = -\omega^2 \cdot \textcircled{y}$$

Un movimiento armónico simple (M.A.S) se caracteriza por tener una aceleración directamente proporcional a la elongación pero de sentido contrario.

pag 117.

## Características dinámicas do M.A.S.

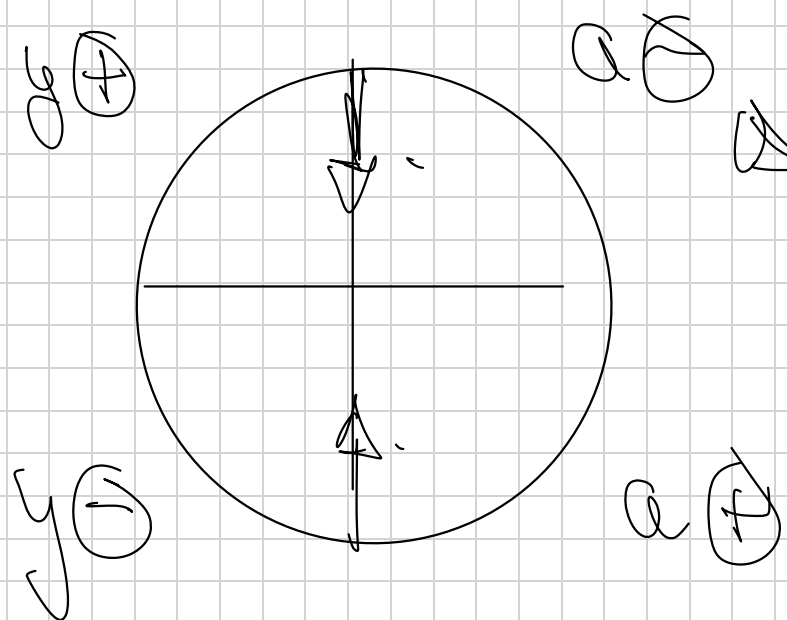
$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = \frac{dy}{dt} = A \cdot \left[ \cos(\omega t + \varphi_0) \right] \cdot \omega$$

$$v = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

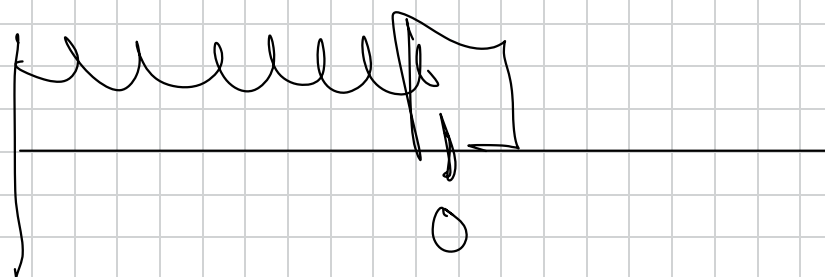
$$a = \frac{dv}{dt} = A \cdot \omega \left( -\sin(\omega t + \varphi_0) \right) \omega$$

Gen un M.A.S.

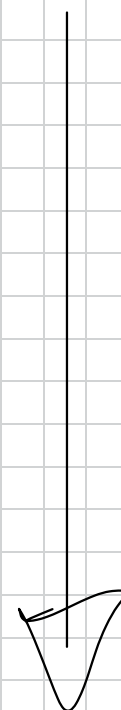
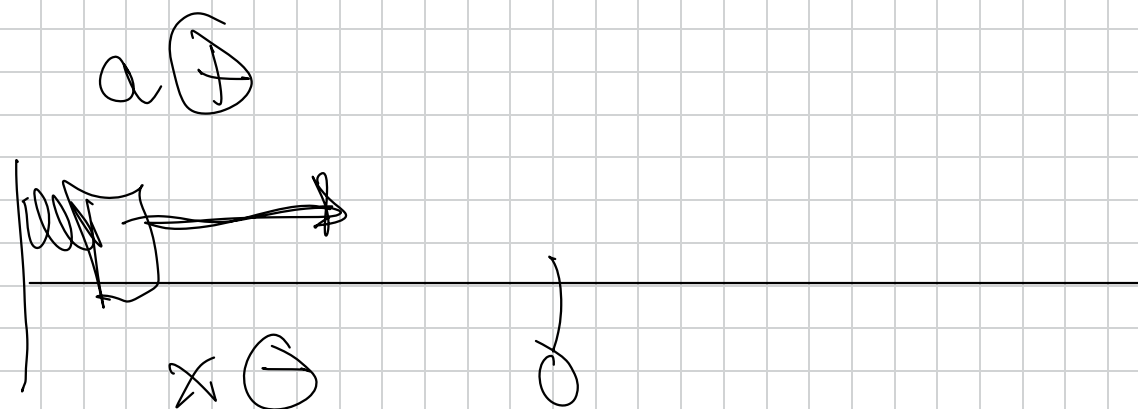
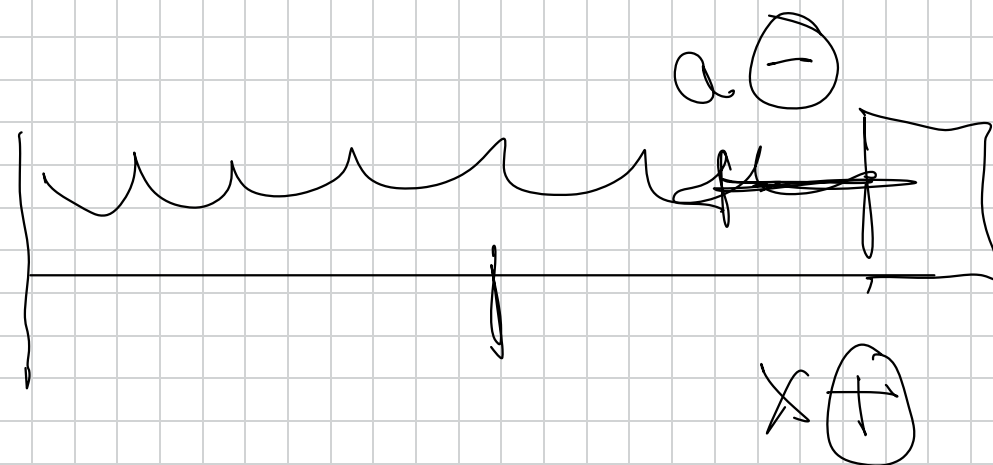


$$a \approx \underbrace{\left[ A \right] \omega^2 \left[ \sin(\omega t + \varphi_d) \right]}_y$$

$$a \approx \omega^2 \cdot y$$



$$Q = -\omega^2 \begin{pmatrix} \times \\ \oplus \end{pmatrix} \downarrow \begin{pmatrix} \oplus \end{pmatrix}$$

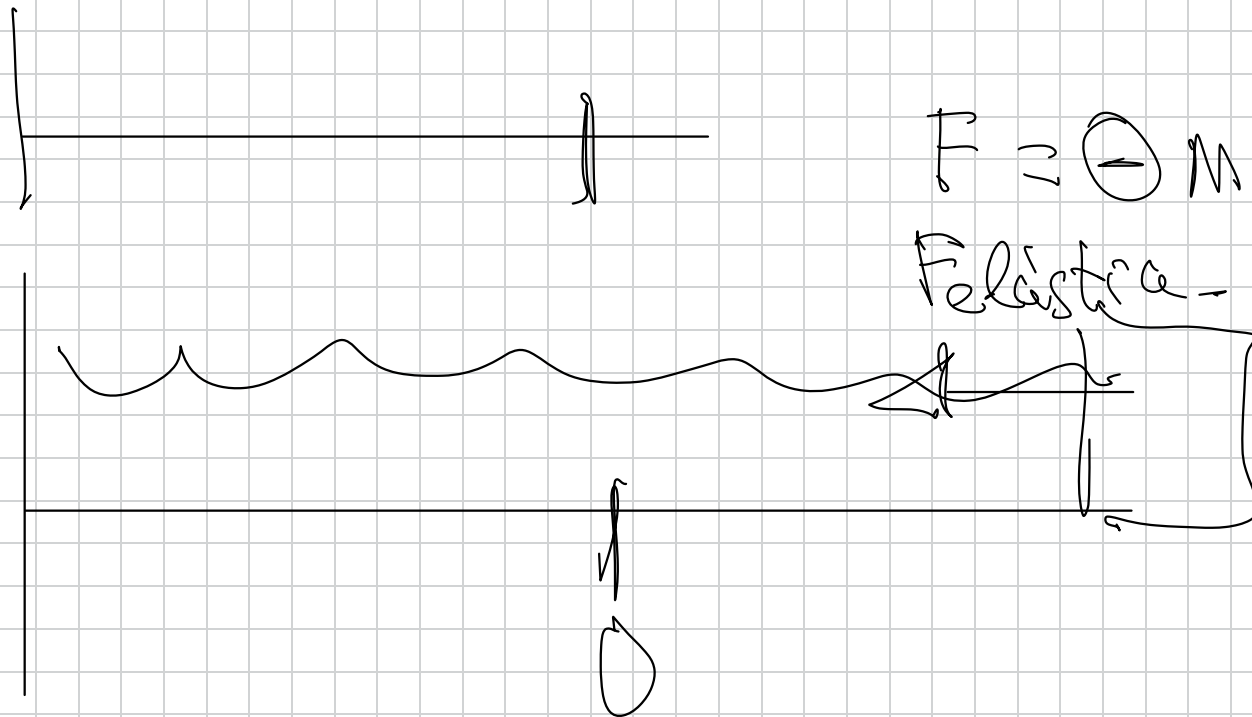


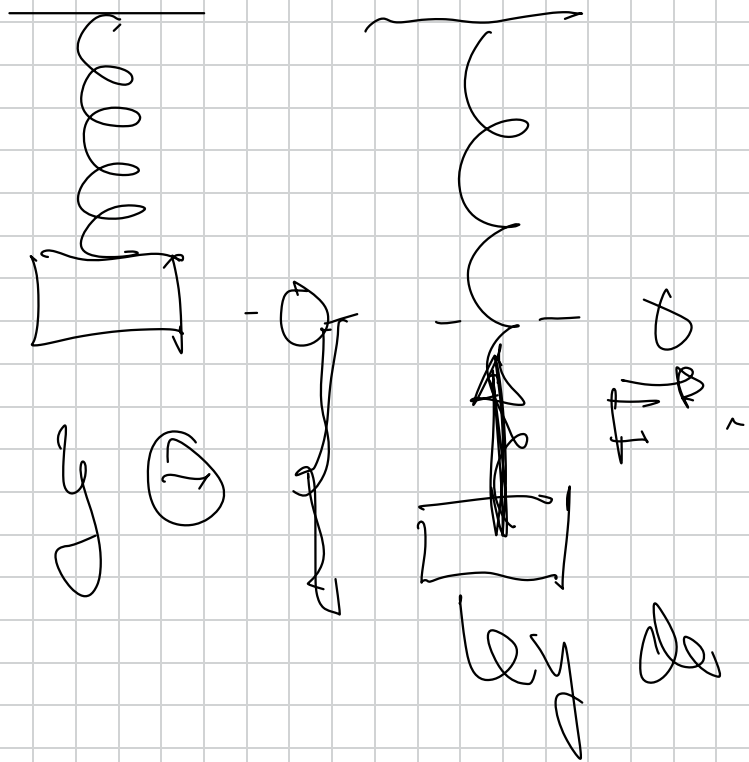
Dinamica del M.A.S.

$2^6$  by de Newton

$$F = m \cdot [a]$$

$$F \Rightarrow M_2(-\omega^2, y)$$





ley de Hooke

$$F = \left[ m \cdot \omega^2 \right] \cdot y$$

$$F = -K \cdot y$$

$$F = \textcircled{0} K \cdot \textcircled{y}$$

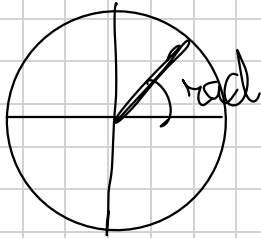
N.

$$\frac{N}{m} = \left[ N - m - 1 \right]$$

Cada muelle tiene  
su etc.

$$K = 50 \frac{N}{m}$$

$$K' = 100 \frac{N}{m}$$



$$K = m \cdot \omega^2 \left( \frac{N}{m} \right)$$

$$K = K_g \cdot \left( \frac{\text{rad}}{s} \right)^2$$

$$K = \frac{K_g}{s^2}$$

$$\frac{K_g}{s^2}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{N}{m}$$

$\Rightarrow$

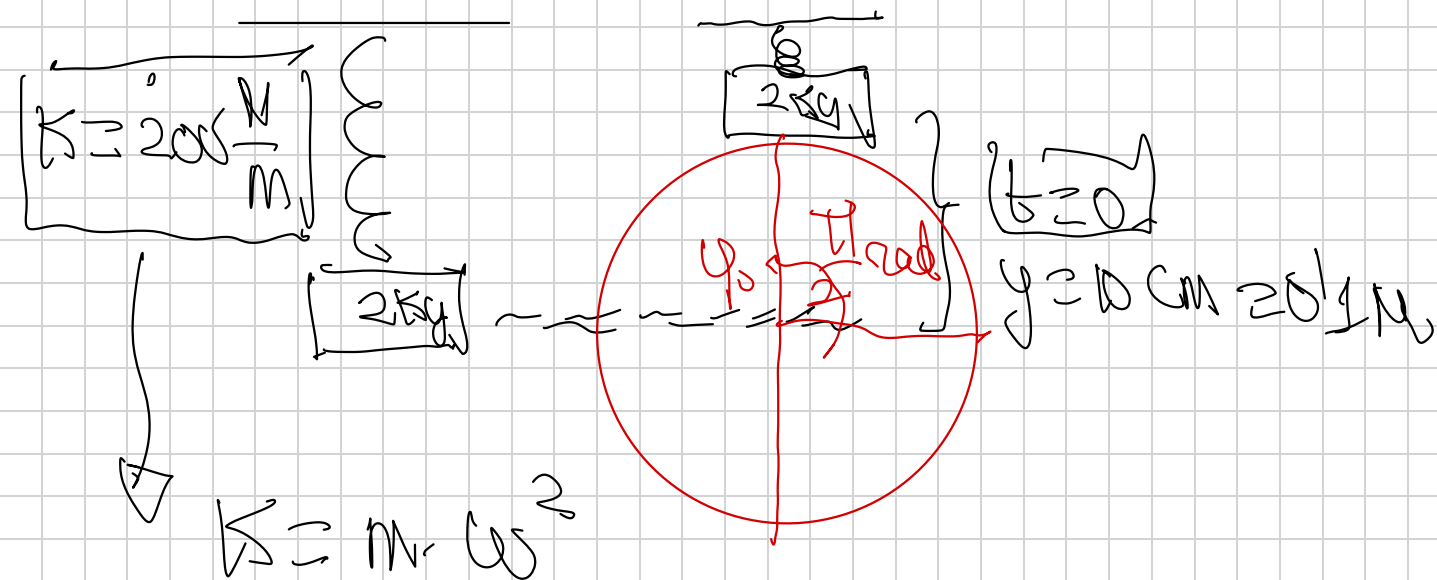
$$\frac{K_g \cdot \frac{N}{s^2}}{m}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{K_g}{s^2}$$

14.- Una masa de 2 Kg cuelga de un resorte cuya constante elástica es  $K=200 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$  y puede oscilar libremente sin rozamiento. Desplazamos la masa 10 cm por encima de su posición de equilibrio y la soltamos para que empiece a oscilar.

- Calcula la ecuación del movimiento de la masa
- Representa gráficamente la posición de la masa en función del instante  $t$
- Representa gráficamente la velocidad de la masa en función del instante  $t$
- Representa gráficamente la aceleración de la masa en función del instante  $t$
- Calcula su velocidad máxima y su aceleración máxima
- Calcula la fuerza recuperadora y la aceleración cuando la masa se encuentra 5 cm por encima de la posición de equilibrio
- Repetir el apartado f) para el caso en el que la masa se encuentre 7 cm por debajo de la posición de equilibrio.



$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$y = 0.1 \cdot 2 \sin(10t + \frac{\pi}{2}) \quad (\text{SI})$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{200}{2}} = \sqrt{100} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$y = 0.1 \cdot \cos(10t) \quad (\text{SI})$$

Calculate  $\varphi_0$

$$t=0, \quad y=0.1 \text{ m}$$

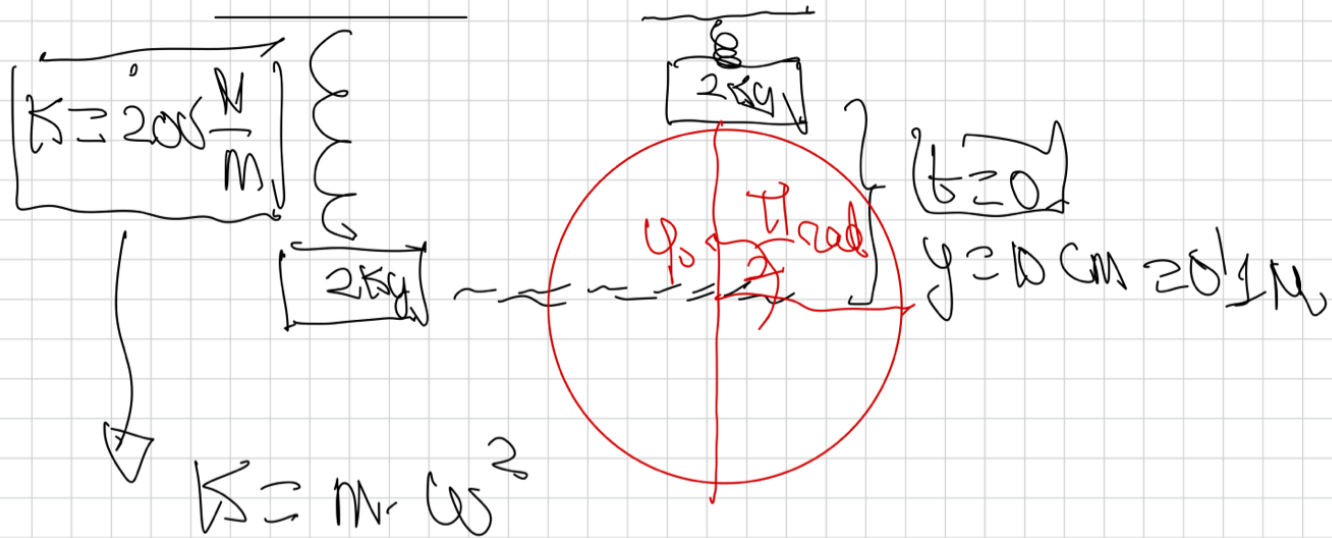
$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$0.1 \text{ m} = 0.1 \text{ m} \cdot \sin(\cancel{\omega t} + \varphi_0)$$

$$0.1 = 0.1 \cdot \sin(\varphi_0)$$

$$\sin \varphi_0 = \frac{0.1}{0.1} = 1$$

$$\varphi_0 = \arcsin 1 = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$



$$y = A \cdot \sin(\omega t + \phi_0)$$

$$y = 0.1 \cdot \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{SI})$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{200}{2}} = \sqrt{100} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$y = 0.1 \cdot \cos(10t) \quad (\text{SI})$$

Representation  $y(t) = 0.1 \cdot \cos(10t) \quad (\text{SI})$

b) Calculamos la ecuación del m.a.s.

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

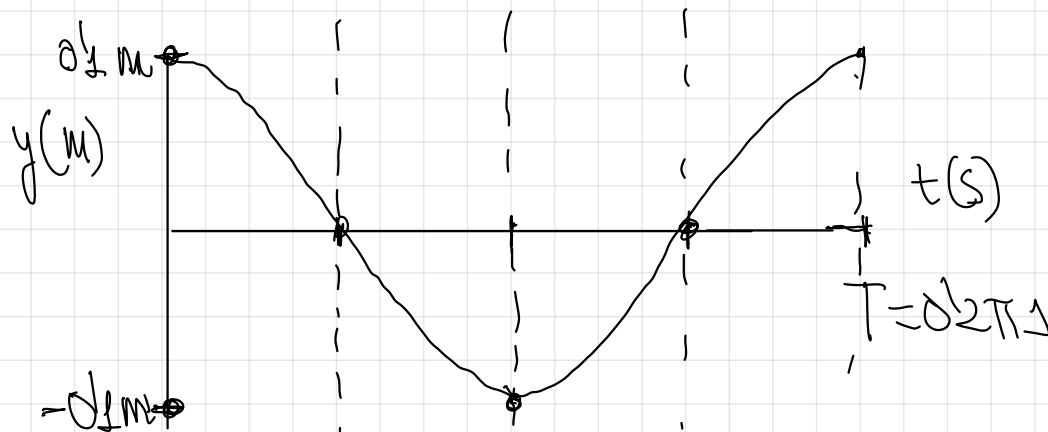
$$A = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}$$

$$K = m \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{200}{2}} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$y(t) = 0.1 \cdot \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

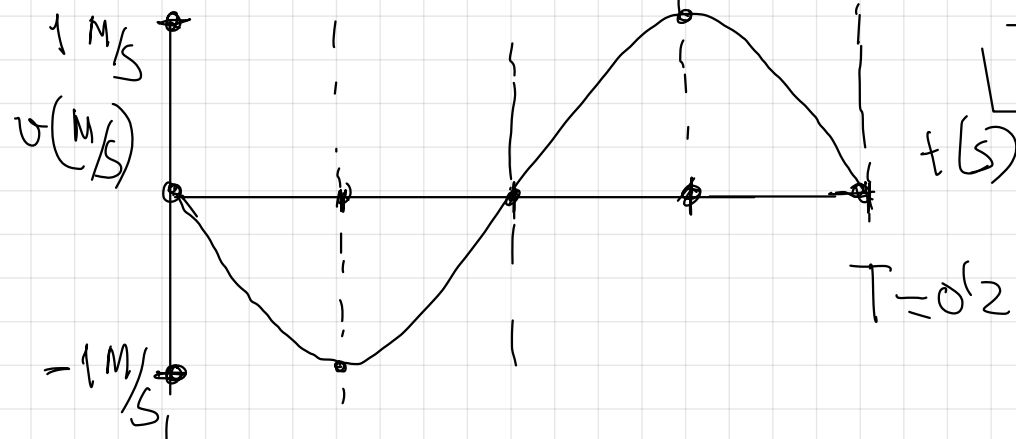
$$y(t) = 0.1 \cos(10t) \text{ SI} \rightarrow \text{recuerda que } \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha$$



$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10} = 0.2\pi \text{ s} \quad \left(\frac{\pi}{5} \text{ s}\right)$$

c)



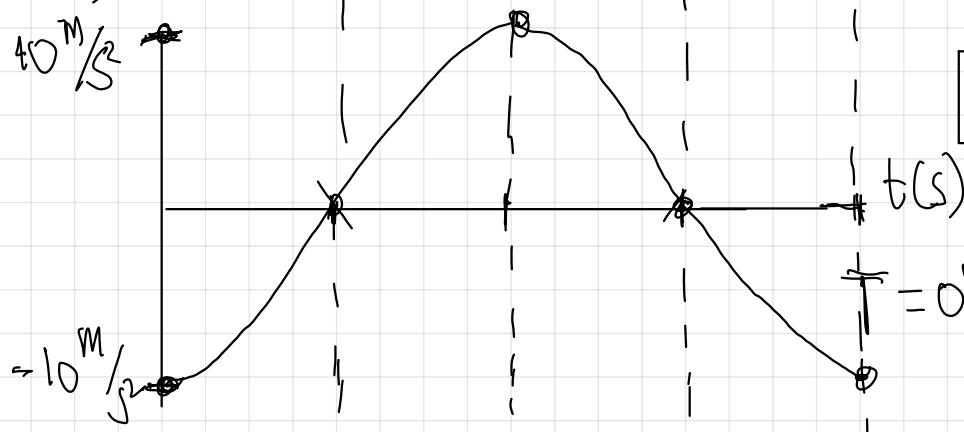
$$v = \frac{dy}{dt} = 0.1 \cdot (-\sin(10t)) \cdot 10$$

$$v = -1 \cdot \sin(10t) \text{ SI}$$

$$v_{\max} = \pm 1 \text{ m/s}$$

$$T = 0.2\pi \text{ s}$$

d)



$$a = \frac{dv}{dt} = -1 \cdot [\cos(10t)] \cdot 10$$

$$a = -10 \cdot \cos(10t) \text{ S.I.}$$

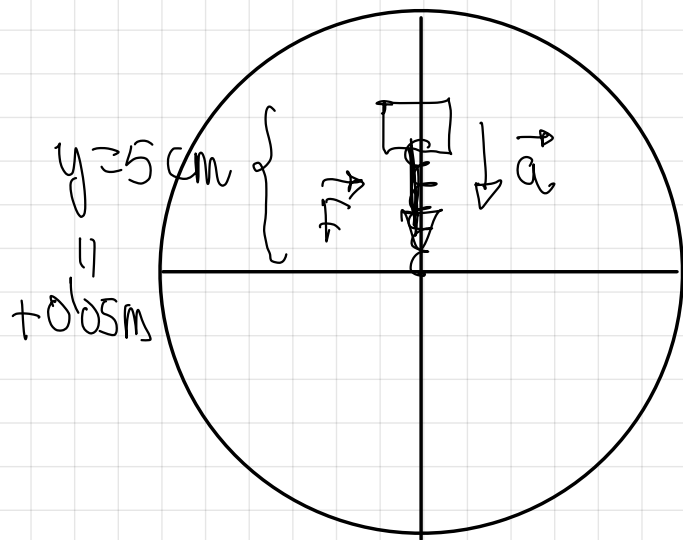
$$a_{\max} = \pm 10 \text{ m/s}^2$$

$$T = 0.2\pi \text{ s}$$

$$e) v_{\max} = \pm A \cdot \omega = \pm 0.1 \cdot 10 = \pm 1 \text{ m/s}$$

$$a_{\max} = \pm A \cdot \omega^2 = \pm 0.1 \cdot 10^2 = \pm 10 \text{ m/s}^2$$

f)



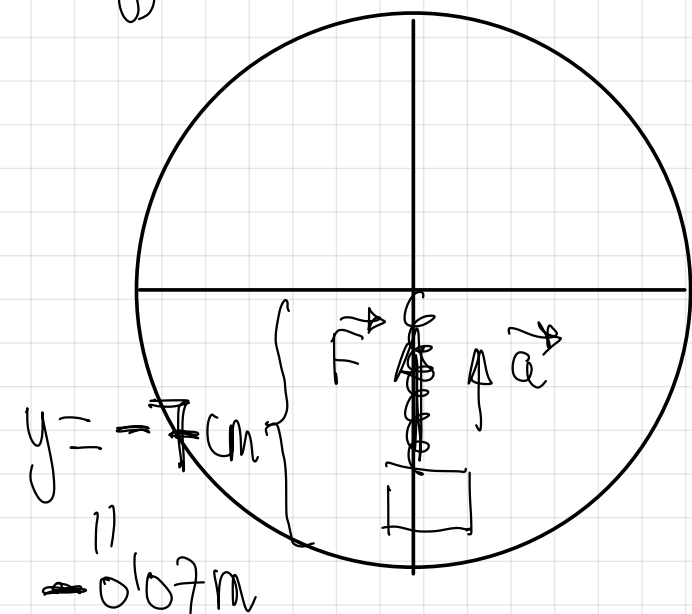
$$a = -\omega^2 \cdot y$$

$$a = -10^2 \cdot (+0.05) = -5 \text{ m/s}^2$$

$$F = -k \cdot y$$

$$F = -200 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (+0.05) = -10 \text{ N}$$

g)



$$a = -\omega^2 \cdot y$$

$$a = -10^2 \cdot (-0.07) = 7 \text{ m/s}^2$$

$$F = -k \cdot y$$

$$F = -200 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (-0.07) = 14 \text{ N}$$

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$a = \underbrace{\left[ A \cdot \omega \cdot \left[ -\sin(\omega t + \varphi_0) \right] \right]}_{y} \cdot \omega$$

$$a = -\omega^2 \cdot \boxed{y}$$

$$F = m \cdot a = m \cdot (-\omega^2 y)$$

$$F = - \boxed{m \omega^2} \cdot y$$

$$F = -k y$$

## 5.- ENERGÍA DE UN OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE

pag 119

$E_c$ ,  $E_m$ ,  $E_p$ .

$E_c$  de un M.A.S.

$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$   $\rightarrow v$  del M.A.S.

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot [A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)]^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} \underbrace{m A^2 \omega^2}_K \cdot \cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$E_c = \frac{1}{2} K \cdot A^2 \underbrace{\cos^2(\omega t + \varphi_0)}_{\substack{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \\ \sin^2(\omega t + \varphi_0) + \cos^2(\omega t + \varphi_0) = 1}}$$

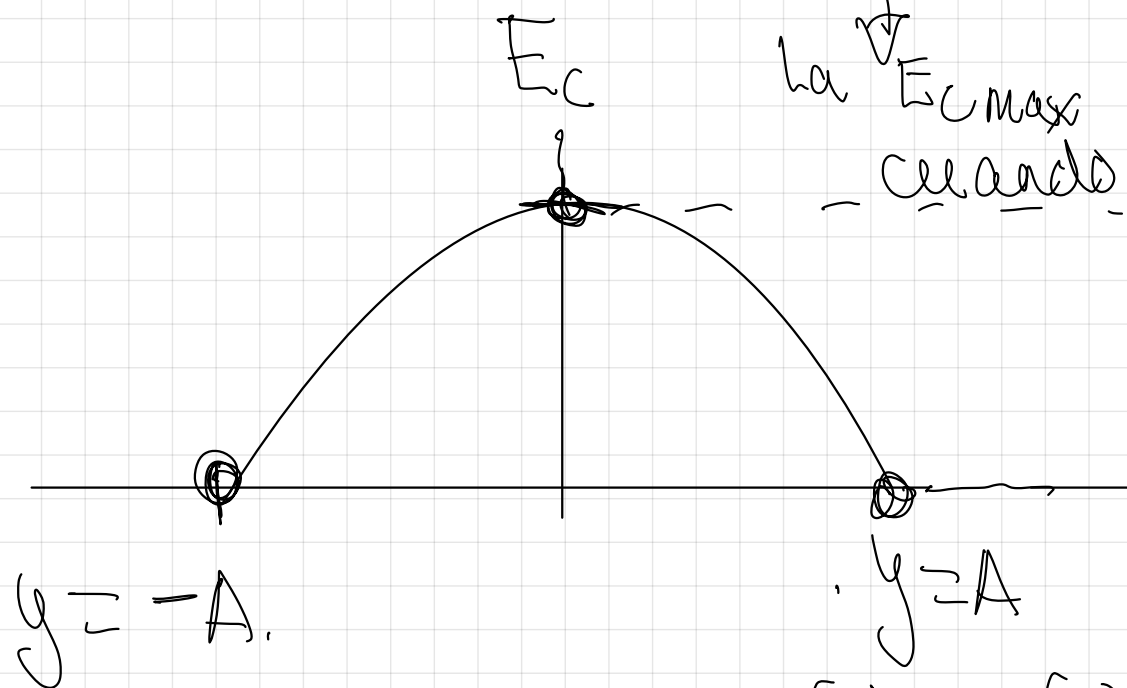
$$\cos^2(\omega t + \varphi_0) = 1 - \sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$E_c = \frac{1}{2} K A^2 (1 - \sin^2(\omega t + \varphi_0))$$

$$E_c = \frac{1}{2} K \cdot \left( A^2 - \underbrace{A^2 \cdot \sin^2(\omega t + \varphi_0)} \right)$$

$$\nabla y^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} k (A^2 - y^2)$$



La  $E_{c \max}$  si ha  
quando  $y=0$ .

$$E_{c \max} = \frac{1}{2} k A^2$$

$$E_m = E_{c \max} + E_k$$

$$E_m = \frac{1}{2} k A^2$$

$x(t)$  o  $y(t)$

$$E_m = E_{max}$$

$$E_m = E_c + E_p$$

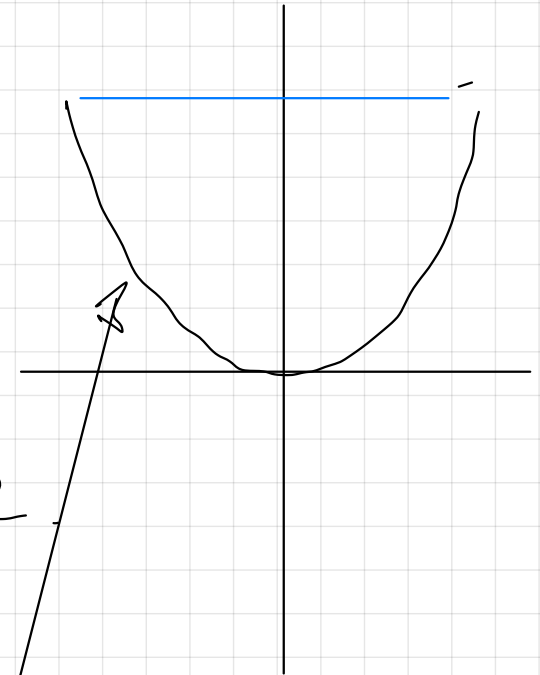
$$\frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} k (A^2 - y^2) + E_p$$

$$E_p = \frac{1}{2} k A^2 - \frac{1}{2} k (A^2 - y^2)$$

$$E_p = \cancel{\frac{1}{2} k A^2} - \cancel{\frac{1}{2} k A^2} + \frac{1}{2} k y^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} k y^2$$

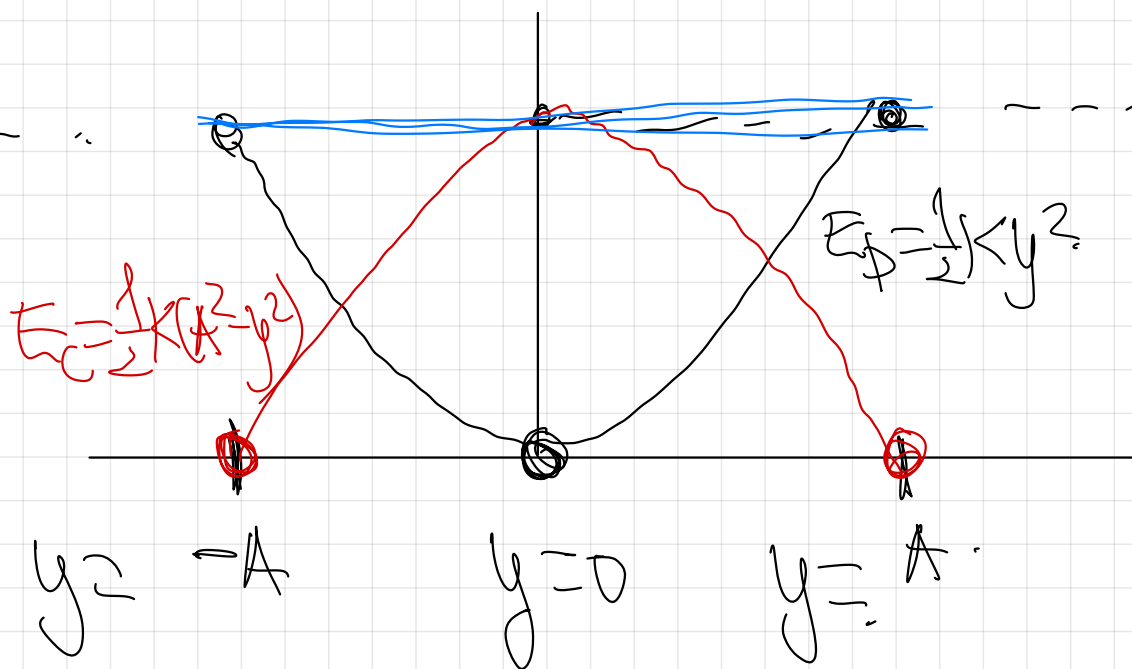
$$E_m = \frac{1}{2} k A^2$$



$$E_{p \max} = \frac{1}{2} k A^2$$

$$E_m = \frac{1}{2} k A^2$$

$$E_{c \max} = \frac{1}{2} k A^2$$



17.- Un cuerpo de 800 g de masa describe un m.a.s con una elongación máxima de 30 cm y un periodo de 2 s. Calcula su máxima energía cinética.

$$m = 800 \text{ g} = 0.8 \text{ kg}$$

$$y_{\max} = A = 30 \text{ cm} = 0.3 \text{ m.}$$

$$E_{\text{cmax}} = E_{\text{m}} = \frac{1}{2} k \cdot A^2$$

$$E_{\text{cmax}} = E_{\text{m}} = \frac{1}{2} 79 \cdot (0.3)^2$$

$$E_{\text{cmax}} = 0.35 \text{ J}$$

$$T = 2 \text{ s.}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$k = m \cdot \omega^2$$

$$k = 0.8 \cdot \left( \frac{2\pi}{2} \right)^2$$

$$k = 79 \frac{\text{N}}{\text{m.}}$$

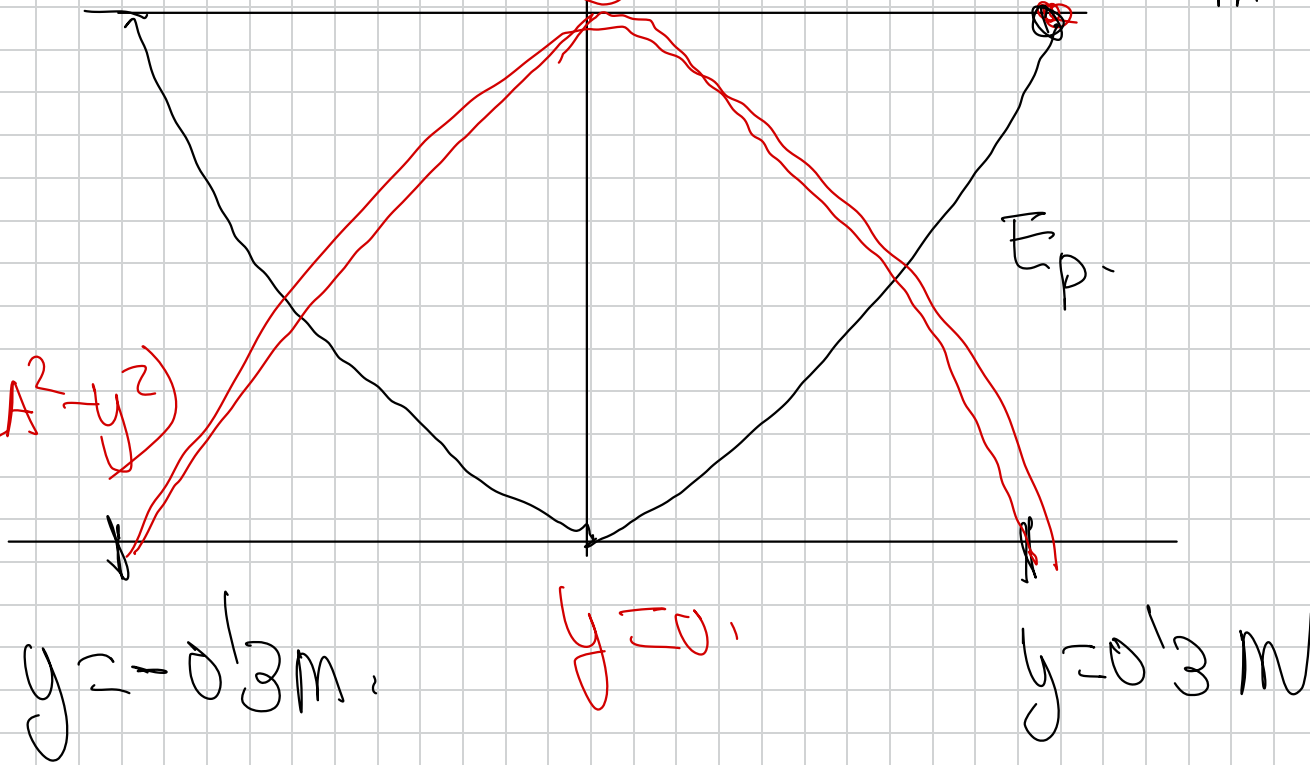
$$E_p = \frac{1}{2} k y^2$$

$$E_{\text{max}} = \frac{1}{2} k A^2 = 0.35 \text{ J}$$

$$E_m = \frac{1}{2} k A^2$$

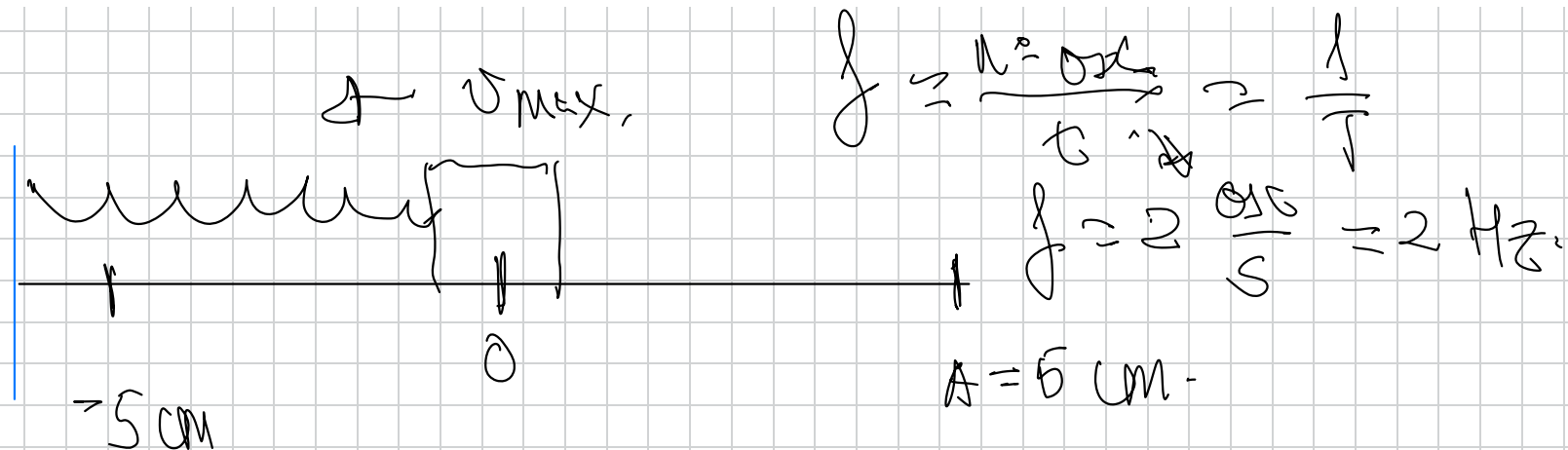
$$E_m = E_{\text{max}} = 0.35 \text{ J}$$

$$E = \frac{1}{2} (k A^2 - y^2)$$



18.- Una masa de 20g realiza un movimiento vibratorio armónico en el extremo de un resorte que da dos oscilaciones por segundo a lo largo del eje X, siendo la amplitud de 5 cm.

- Calcula la velocidad máxima de la masa que oscila
- Calcula la aceleración de la masa en el extremo de su movimiento
- Calcula la constante K del resorte
- Realiza un análisis de las variaciones energéticas
- Calcula su energía mecánica, su energía cinética y su energía potencial cuando se encuentra en la posición  $x=4$  cm



$$E_{\text{cmax}} = E_{\text{m}}$$

$$E_{\text{m}} = \frac{1}{2} k A^2$$

$$\frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m v_{\text{max}}^2$$

$$K = m \cdot \omega^2$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$K = m \cdot (2\pi f)^2 = m 4\pi^2 f^2$$

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = \frac{dy}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$v_{\max} = \pm A \cdot \omega \cdot \pm 1$$

$$\frac{1}{2} K \cdot A^2 = \frac{1}{2} m \cdot v_{\max}^2$$

$$\frac{1}{2} m 4\pi^2 f^2 A^2 = \frac{1}{2} m v_{\max}^2$$

$$v_{\max} = \sqrt{4\pi^2 f^2 A^2}$$

$$v_{\max} = 2\pi f \cdot A$$

$$v_{\max} = A \cdot \omega$$

$$v_{\max} = \pm A \cdot \omega$$

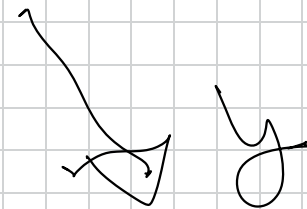
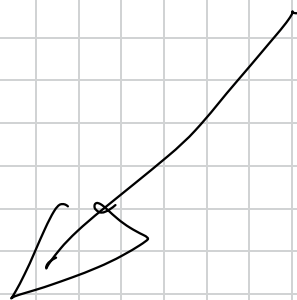
$$v_{\max} = A \cdot \omega$$

$$v_{\max} = A \cdot 2\pi f = 0.05 \cdot 2\pi \cdot 2 = 0.628 \text{ m/s}$$

---

$$a = \frac{dv}{dt} = A \cdot \omega \cdot [-\sin(\omega t + \varphi_0)] \cdot \omega$$

$$a = \underbrace{[A]}_{\text{amplitude}} \underbrace{\omega^2}_{\text{frequency}} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$



Gen. d. extrem:  $a_{\max}$

$$a_{\max} = \pm A \omega^2.$$

$$a_{\max} = \pm 0.05 \cdot (2\pi \cdot 2)^2.$$

$$a_{\max} = \pm 7.1 \text{ g N/s}^2.$$

$$a = -\omega^2 \cdot y \geq A.$$

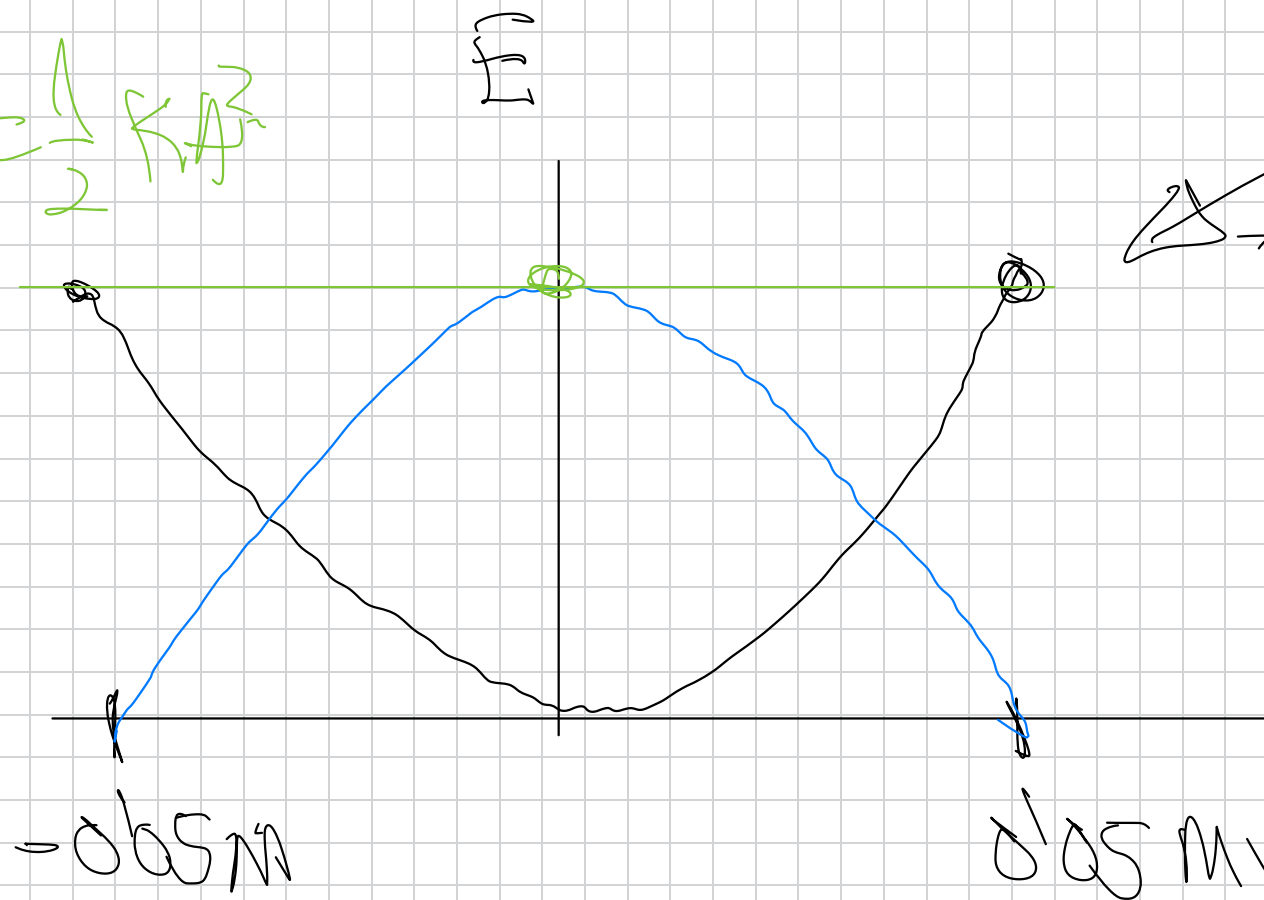
$$a_{\max} = -\omega^2 \cdot A.$$

$$a_{\max} = \pm 7.1 \text{ g N/s}^2.$$

$$c) \quad K = m \cdot \omega^2 = m (2\pi f)^2 = m \cdot 4\pi^2 f^2.$$

$$K = 3.14 \text{ N/m}.$$

$$E_m = \frac{1}{2} k A^2$$



$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

$$y = 0.5 x^2$$

e)

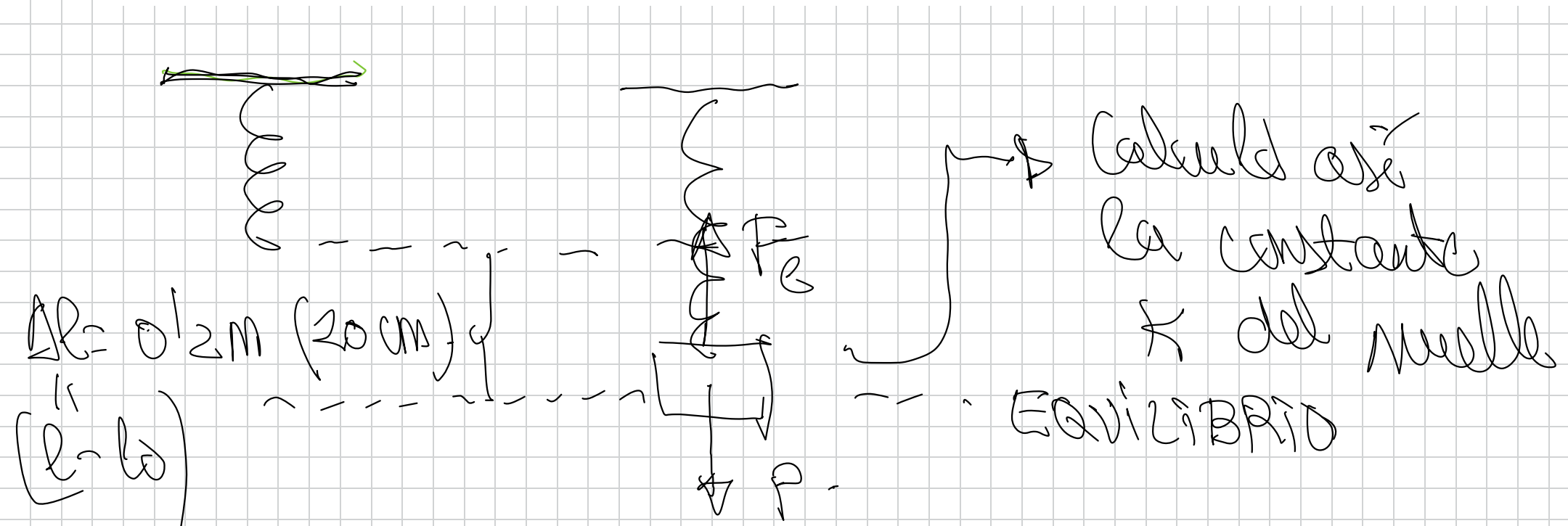
$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} 316 \cdot (0.04)^2 = 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

$$E_c = \frac{1}{2} k (A^2 - x^2) = \frac{1}{2} 316 [(0.05)^2 - (0.04)^2] = 1.4 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

$$E_m = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} 316 \cdot (0.05)^2 = 3.9 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

27.- Cierta muelle que se deforma 20 cm cuando se le cuelga en vertical una masa de 1 kg, se coloca sin deformación, unido a la misma masa sobre una superficie horizontal sin rozamiento. En esta posición, se tira de la masa hasta que el muelle se alarga 2 cm, y posteriormente se suelta.  $g=9,8 \text{ m/s}^2$

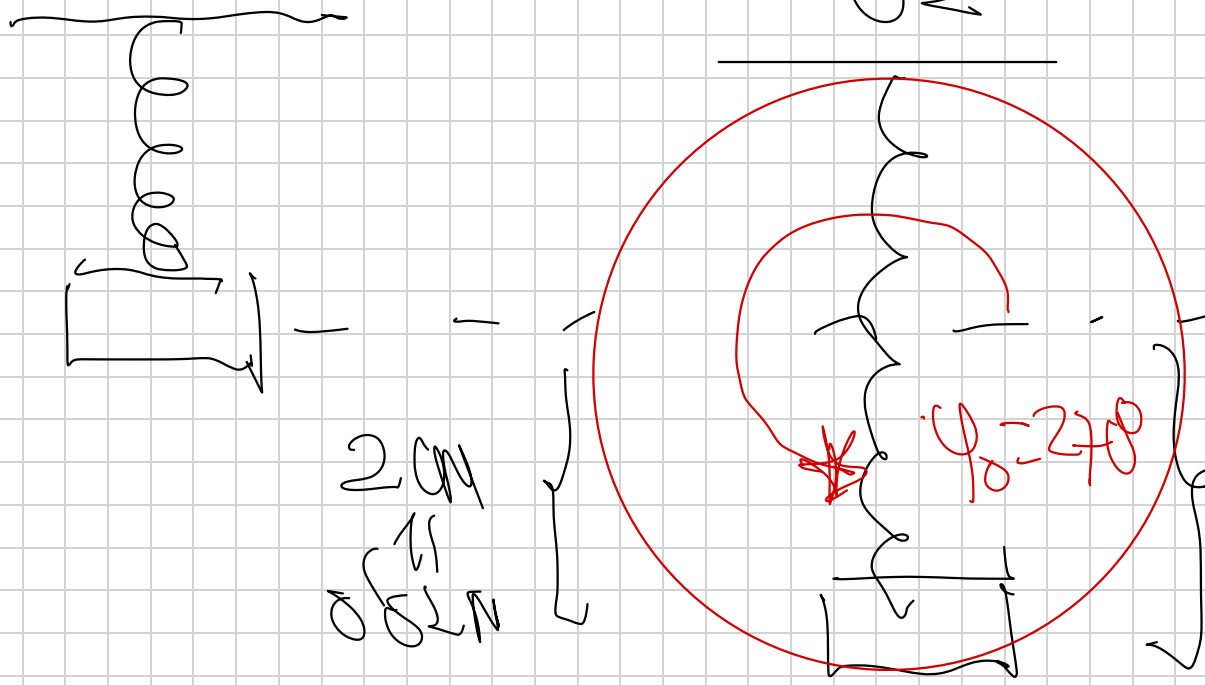
- Hallar la ecuación del movimiento armónico simple resultante y representarla gráficamente.
- Representar gráficamente la fuerza, recuperadora, en función de la posición, hallando sus valores máximos y calculando su valor cuando  $x=1 \text{ cm}$ .
- Hallar las energías cinética, potencial elástica y mecánica cuando ha transcurrido un tiempo  $t=3T/4$
- Representar los valores de la energía potencial elástica, energía cinética, y energía mecánica en función del tiempo durante un periodo  $T$ . Indicar en la gráfica los valores de estas energías cuando  $t=0$ .



$$|\vec{p}| = |\vec{r}|$$

$$m \cdot g = k \cdot \Delta l$$

$$k = \frac{m \cdot g}{\Delta l} = \frac{1 - 0.8}{0.2} = 40 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$



$$A = 0.02 \text{ m}$$

$$k = 40$$

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$y = 0.02 \cdot \sin\left(7t + \frac{3}{2}\pi\right)$$

$$49 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$K = m \cdot \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{49}{1}} = 7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\begin{aligned} &\downarrow \\ &t = 0 \\ &y = -0.02 \text{ m} \end{aligned}$$

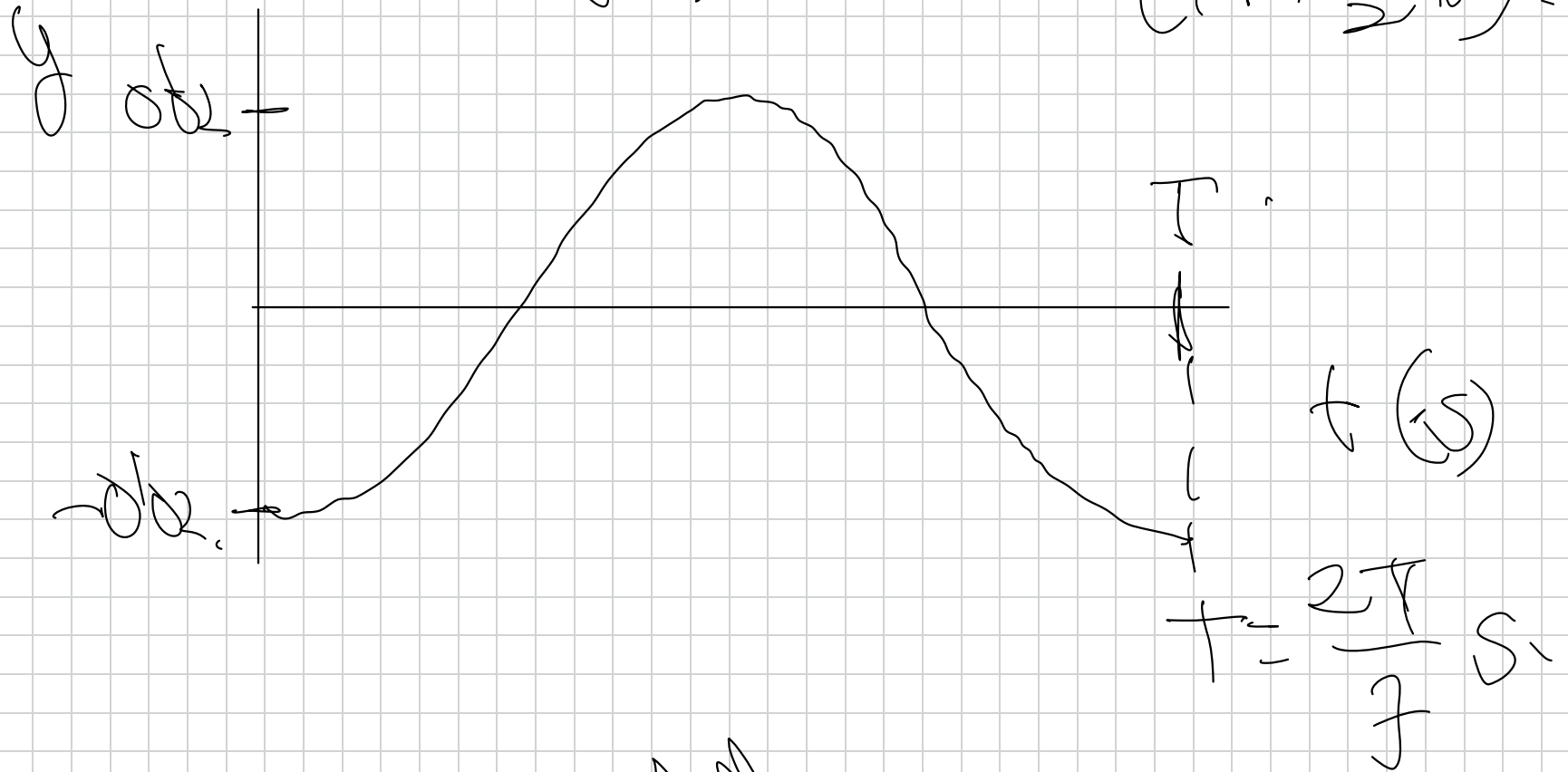
$$\begin{aligned} &\downarrow \\ &y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) \\ &-0.02 = 0.02 \cdot \sin(\varphi_0) \end{aligned}$$

$$\sin(\varphi_0) = -1$$

$$\varphi_0 = 2\pi \cdot \frac{3}{2} \text{ rad}$$

$$y = 0.02 \cdot \sin\left(7t + \frac{3}{2}\pi\right)$$

$$y(t) = 0.02 \cdot \sin\left(7t + \frac{3}{2}\pi\right)$$



$$\omega = 7 \frac{\text{rad}}{s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{7} s$$

29.- Un cuerpo realiza un movimiento vibratorio armónico simple.

a) Escriba la ecuación del movimiento si la aceleración máxima es de  $5\pi^2 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$ , el periodo de las oscilaciones 2s y la elongación del cuerpo al iniciarse el movimiento 2,5 cm.

b) Represente gráficamente la elongación y la velocidad en función del tiempo y comente la gráfica.

$$a_{\text{max}} = 5\pi^2 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$$

$$5\pi^2 \frac{\cancel{\text{cm}}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1 \text{ m}}{100 \cancel{\text{cm}}} =$$

$$a_{\text{max}} = A \cdot \omega^2$$

$$a_{\text{max}} = 0.05\pi^2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

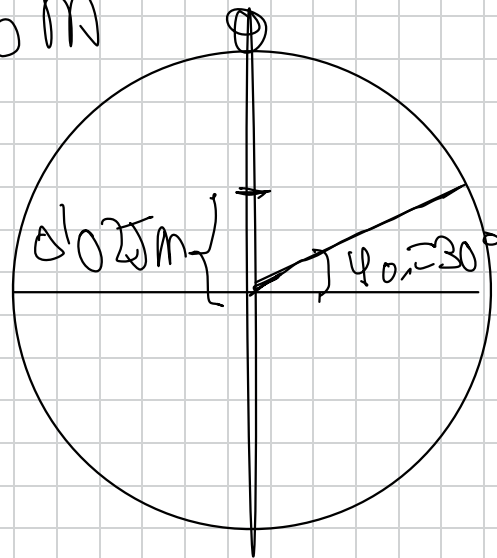
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$A = \frac{a_{\text{max}}}{\omega^2} = \frac{0.05\pi^2}{\pi^2} = 0.05 \text{ m}$$

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$y = 0.05 \cdot \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

0.05 m



$$\left. \begin{array}{l} t=0 \\ y=0.025 \text{ m} \end{array} \right\}$$

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$0.025 = 0.05 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$0.025 = 0.05 \cdot \sin \varphi_0$$

$$\sin \varphi_0 = \frac{0.025}{0.05} = \frac{1}{2}$$

$$\varphi_0 = \arcsin \frac{1}{2} = 30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$

$$y = 0,05 \cdot \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

b) La velocidad de vibración se obtiene derivando la elongación respecto al tiempo.

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 0,05 \cdot \pi \cdot \cos\left(\pi \cdot t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ m/s}$$

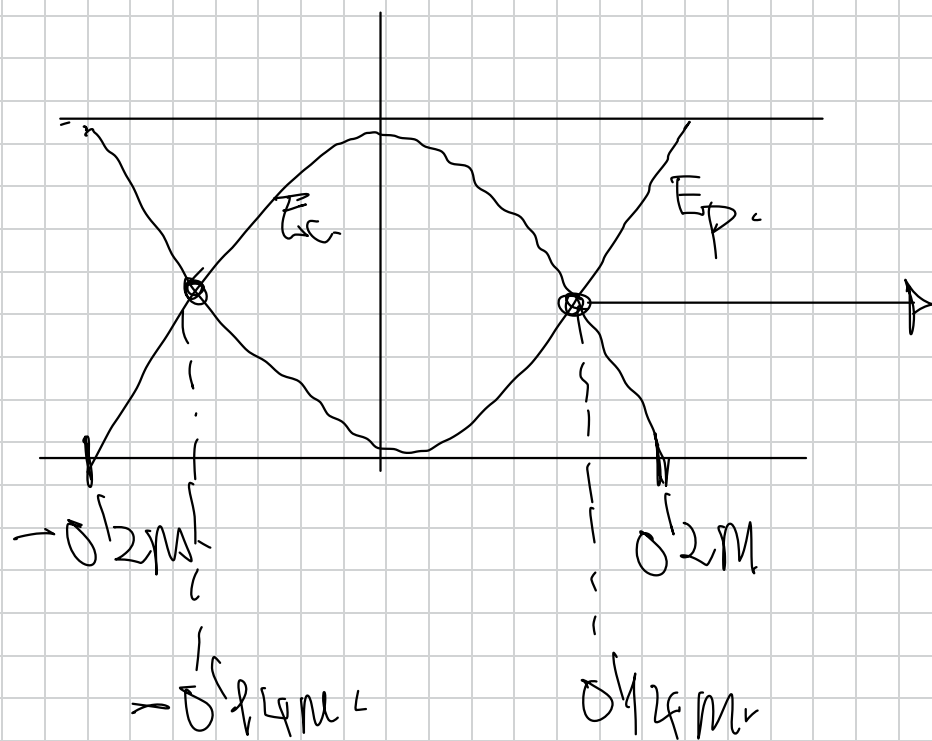
La velocidad es máxima (en valor absoluto) en aquellos instantes en que el móvil pasa por la posición de equilibrio, y nula cuando el móvil se encuentra en sus punto de elongación máxima.

La velocidad máxima es  $0,05\pi$  m/s. Ambas funciones (seno y coseno) están desfasadas  $\pi/2$ .

Para  $t = 0$  s, el movimiento comienza con una elongación igual a 0,025 m (la mitad de la amplitud) y con una velocidad de 0,136 m/s (la velocidad máxima es de 0,157 m/s)

Como todo m.a.s, la gráfica representa un movimiento periódico.

21.- Una partícula describe un movimiento armónico simple, cuya amplitud de 0,2 m.  
¿Cuál será el desplazamiento en el instante en el que las energías cinética y potencial son iguales?.



$$x = \frac{A}{\sqrt{2}} = \frac{0.2}{\sqrt{2}} = \pm 0.14 \text{ m}$$

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} k (A^2 - x^2)$$

las igualo y calculo  $x$ ?

$$E_p = E_c$$

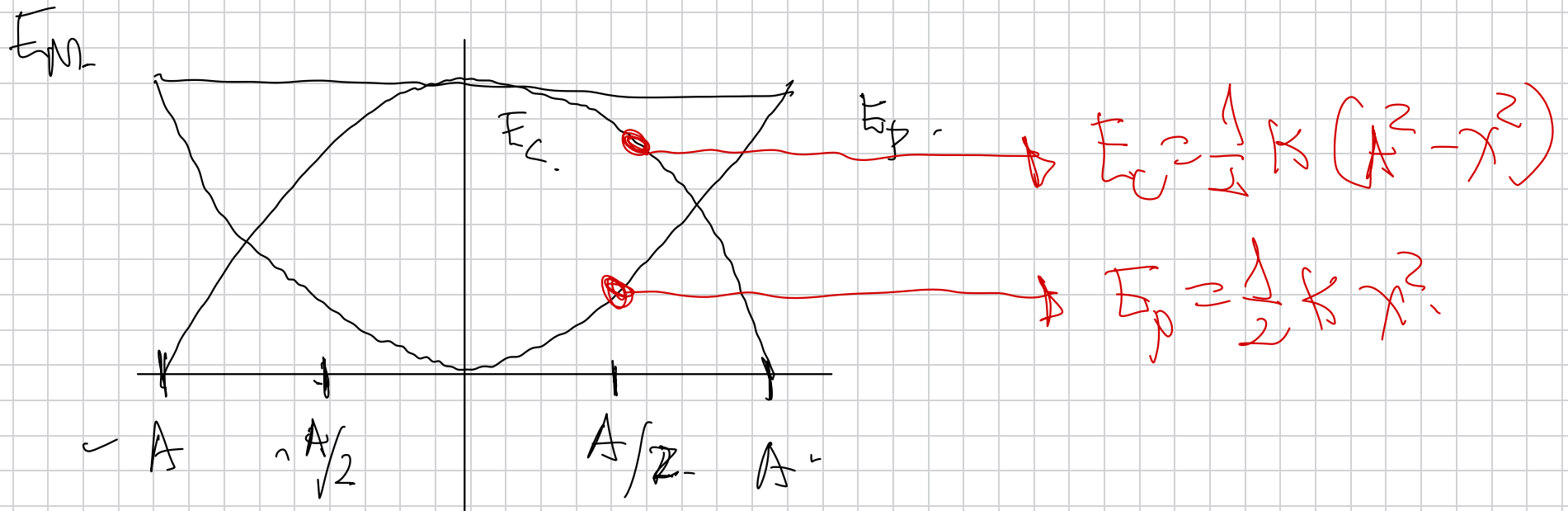
$$\cancel{\frac{1}{2}} k x^2 = \cancel{\frac{1}{2}} k (A^2 - x^2)$$

$$x^2 = A^2 - x^2$$

$$x^2 + x^2 = A^2$$

$$2x^2 = A^2$$

22.- Un oscilador armónico se encuentra en un instante en la posición  $x=A/2$ . ¿Qué relación existe entre sus energías cinética y potencial?



$$x = \frac{A}{2}$$

$$\frac{E_c}{E_p}$$

$$E_c = \frac{1}{2} K \left( A^2 - \left( \frac{A}{2} \right)^2 \right) = \frac{1}{2} K \left[ A^2 - \frac{A^2}{4} \right] = \frac{1}{2} K \left[ \frac{3}{4} A^2 \right]$$

$$E_p = \frac{1}{2} K x^2 = \frac{1}{2} K \left( \frac{A}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} K \frac{A^2}{4}$$

$$\frac{E_c}{E_p} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}} K \left[ \frac{3}{\cancel{4}} A^2 \right]}{\cancel{\frac{1}{2}} K \left[ \frac{1}{\cancel{4}} A^2 \right]}$$

$$\frac{E_c}{E_p} = 3 \quad \boxed{E_c = 3E_p}$$

23.- Explica cómo varía la energía de un oscilador cuando

- Se duplica la amplitud
- Se duplica la frecuencia
- Se duplica la amplitud y se reduce la frecuencia a la mitad

$$E_m = \frac{1}{2} K A^2$$

$$E'_m = \frac{1}{2} K (2A)^2 = \frac{1}{2} K 4 A^2$$

$$\frac{E'_m}{E_m} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}} \cancel{4} A^2}{\cancel{\frac{1}{2}} \cancel{A^2}}$$

$$\boxed{E'_m = 4 E_m}$$

b)  $E_m = \frac{1}{2} K \cdot A^2.$

Se se duplica  $f$ ,

$$E_m = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2.$$

$$E_m = \frac{1}{2} m (2\pi f)^2 A^2$$

$$E_m = \frac{1}{2} m 4\pi^2 f^2 A^2.$$

$$E'_m = \frac{1}{2} m 4\pi^2 (2f)^2 A^2.$$

$$\frac{E_m'}{E_m} = 4$$

$$E_m' = 4 E_m$$

c)

$$E_m = \frac{1}{2} m 4 \pi^2 \int^2 A^2.$$

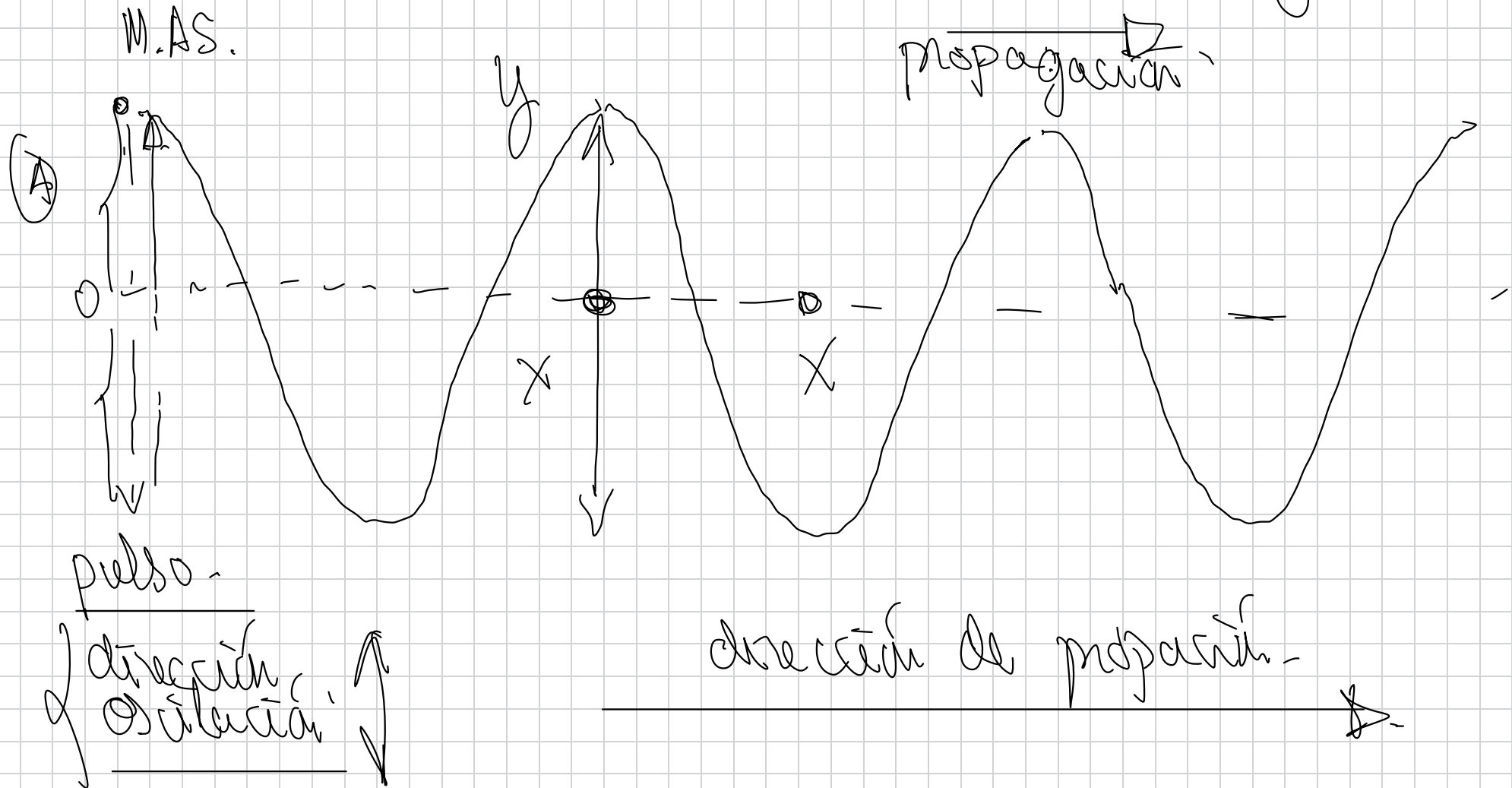
$$E_m' = \frac{1}{2} m 4 \pi^2 \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 \cdot (2A)^2.$$

$$E_m' = E_m \quad \text{no change.}$$

pag 123 y sucesivas del libro.

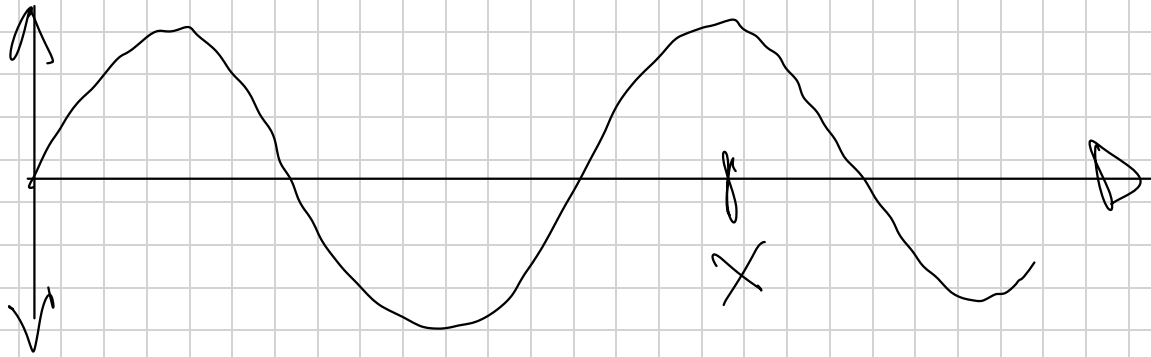
## Movimiento ondulatorio.

### Fenómenos ondulatorios, Pulsos y ondas.

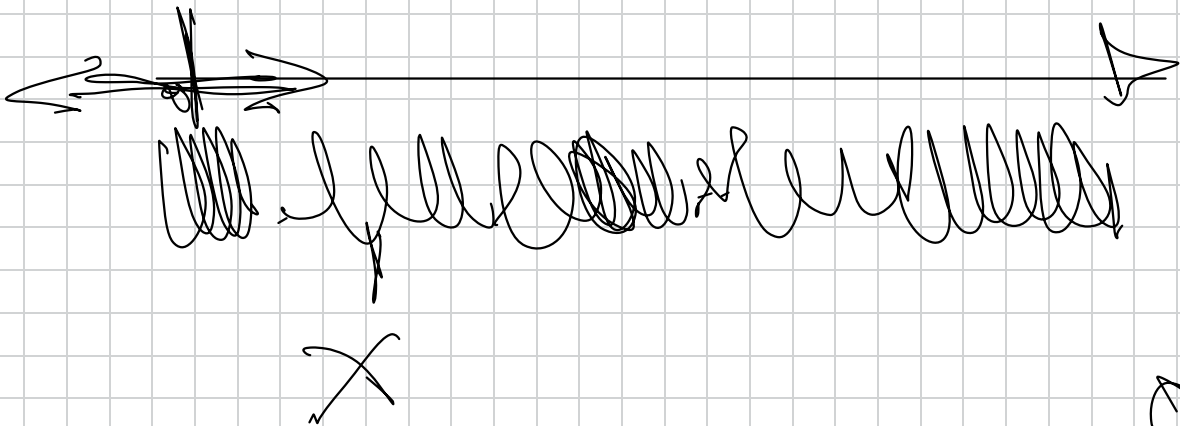


## Criterios de clasificación

- Direcciones de oscilación y de propagación.



Dirección de oscilación  
↓ a la  
dirección de  
propagación  
Onda transversal

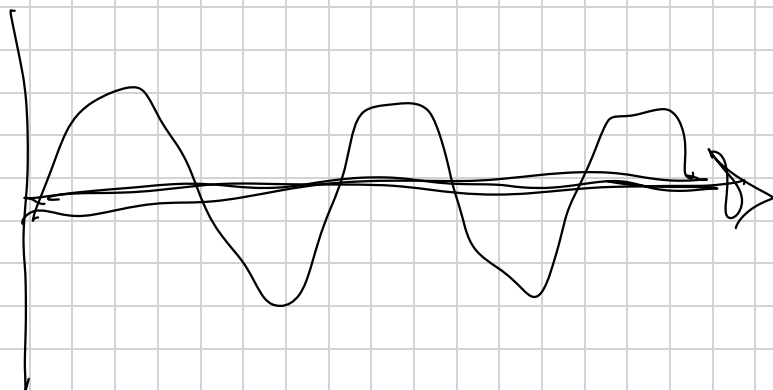


Dirección de oscilación  
y la de propagación  
es la ~~misma~~ misma.  
Onda longitudinal.

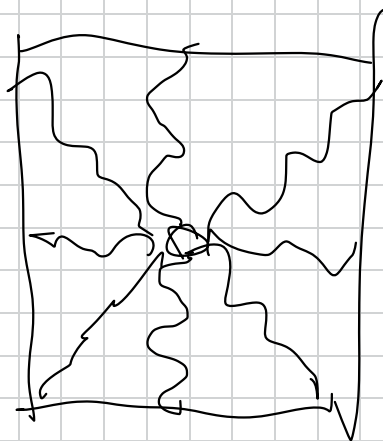
Medio en el que propagan.

- Ondas mecánicas o materiales, necesitan de un medio material para propagarse.  
(el sonido)
- Ondas electromagnéticas: no necesitan  
el medio material para propagarse.  
(la luz)

Nº de dimensiones en las  
que se propagan.



↓ dirección  
Unidimensionales  
(cuerdas)

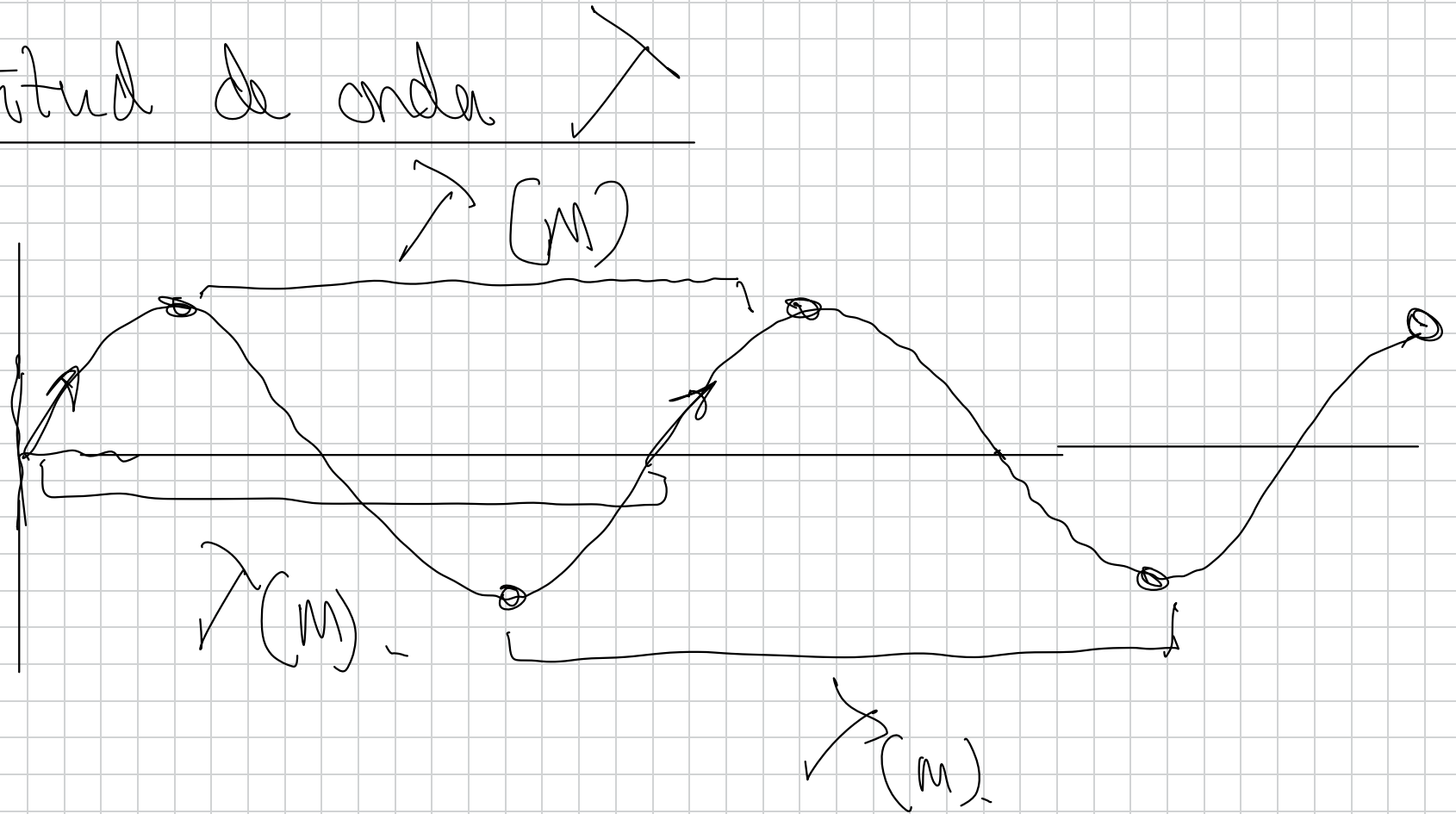


→ bidimensionales  
(piedra en el estanque)

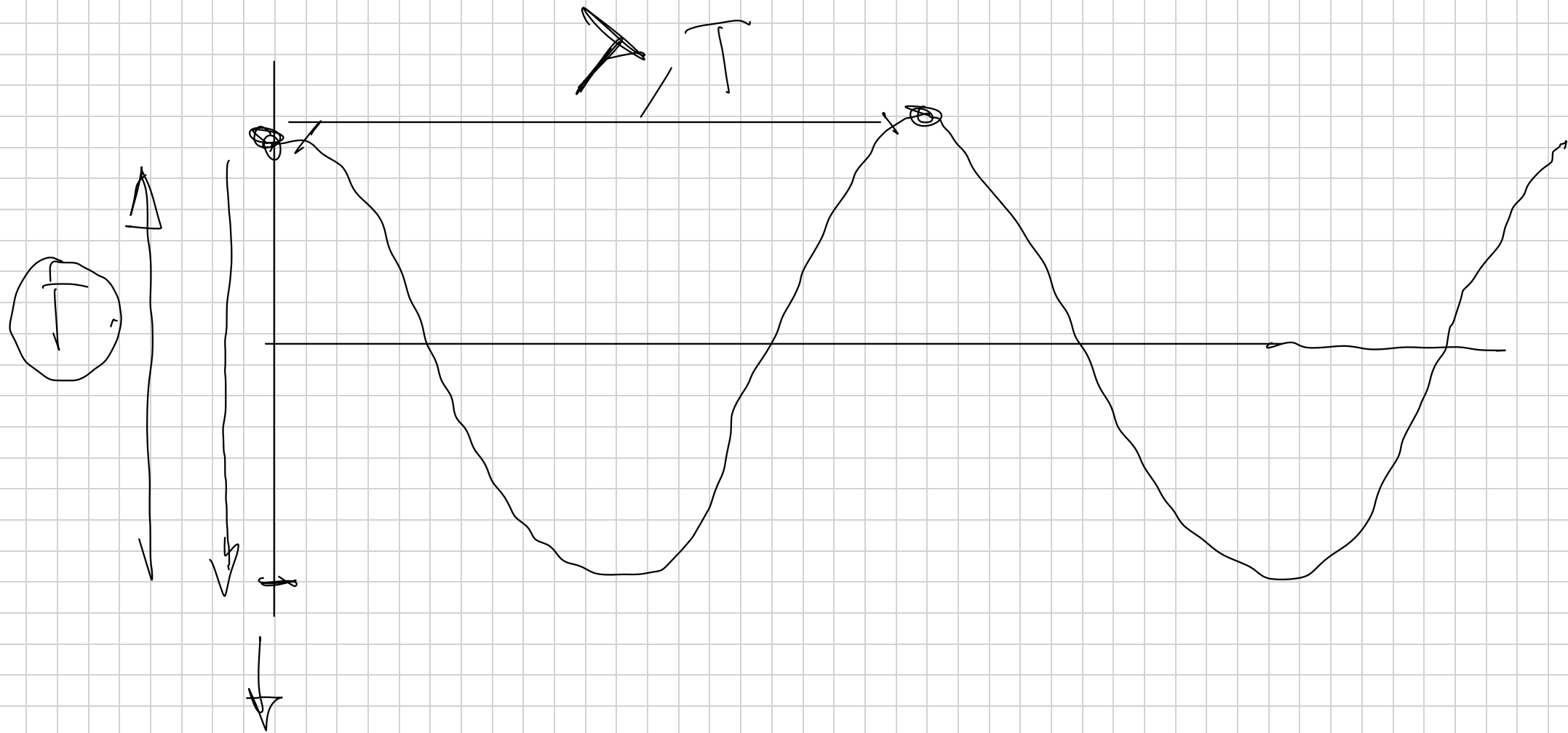
— tridimensionales  
(sonido)

# Magnitudes características de una onda

= Longitud de onda



= Período (T)



FOCO  
 Cpts donde se inicia la perturbación.

frecuencia:

M.A.S.  $f = \frac{N \text{ osc}}{t}$

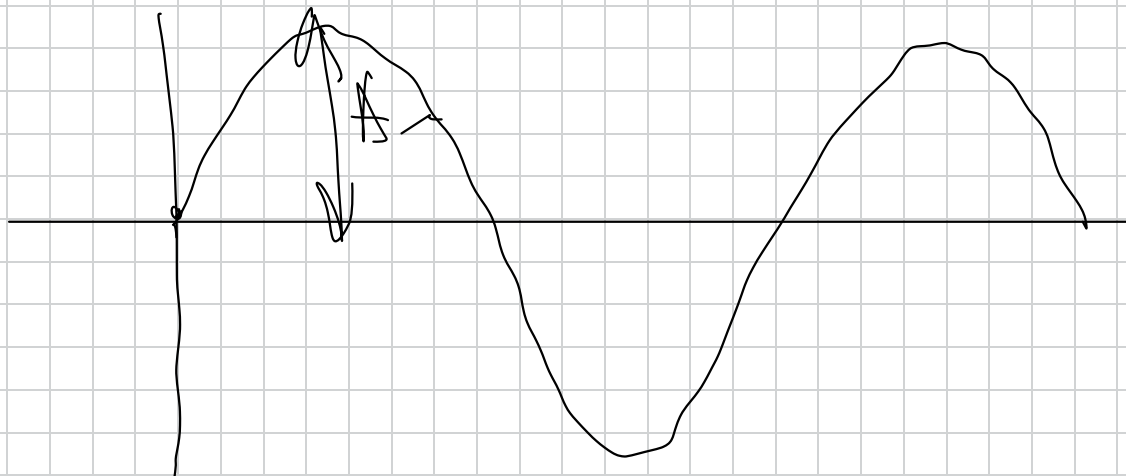
onda:  $f = \frac{N^{\circ} \text{ ondas}}{t}$

(1)

$f = \frac{1 \text{ osc}}{T}$

$f = \frac{1 \text{ onda}}{T}$

$f = \frac{1}{T}, s^{-1}, \text{ Hz}$



$A (m)$

$$v_p \rightarrow$$



$$v_p \rightarrow$$

no cte.

$v_{osc.}$



$v$  del M.A.S

$$v \Rightarrow \frac{dy}{dt}$$

$v_p =$  cte dentro del mismo medio.

$$v = cte = \frac{s}{t}$$

$$v = \frac{s}{t}$$

$$v = \frac{m}{s}$$

$$v_p = \lambda f$$

$$v_p = \frac{\omega}{k}$$

$$v_p = \frac{\lambda}{T}$$

$$v_p = \lambda \cdot \left[ \frac{1}{T} \right]$$

$$v_p = \lambda \cdot f$$

Número de onda  $k$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{\text{rad}}{\text{m}} \right)$$

Velocidad angular  $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Es la  $\omega$  del M.A.S de las partículas

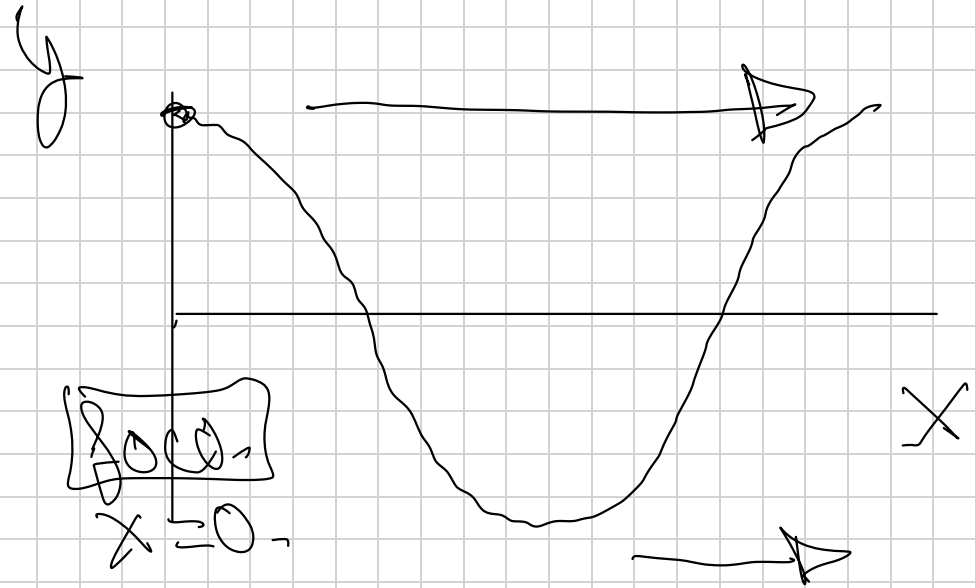
# Ecuación de una onda.

$$M.A.S.$$



$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

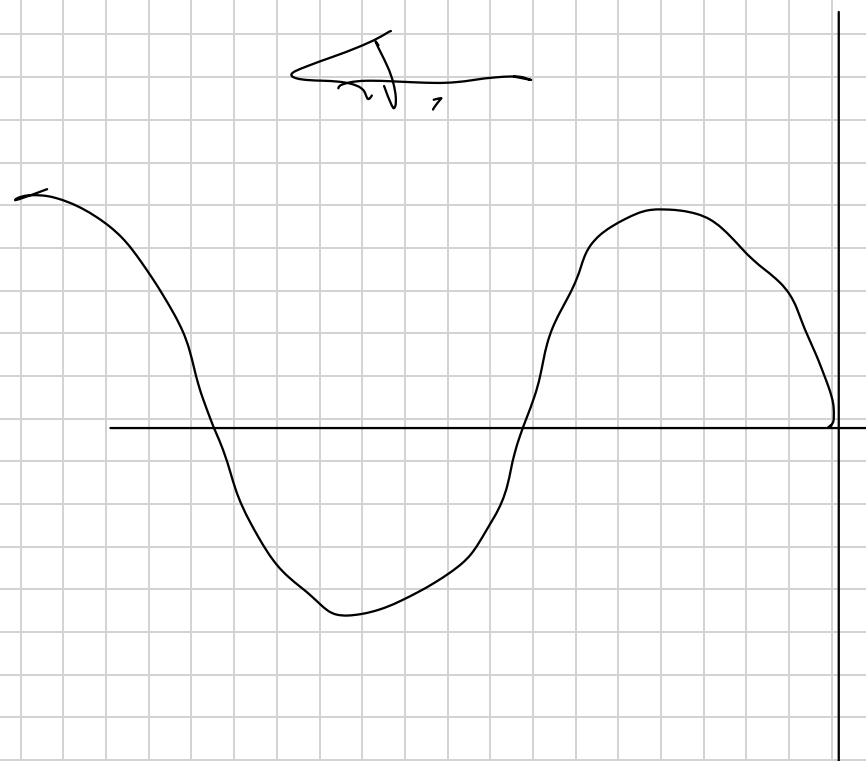
ONDA.



$$y(x, t) = A \cdot \sin(\omega t + kx + \varphi_0)$$

Ángulo de fase inicial  
en el foco.

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \\ t=0 \end{array} \right\}$$



$$y = A \cdot \sin(\omega t \pm kx \mp \phi)$$

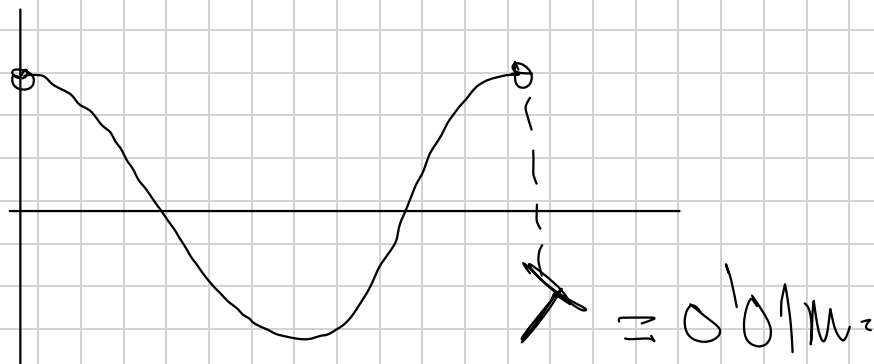
Una onda de 5 cm de amplitud se propaga en el sentido positivo del eje  $x$ . Se sabe que su período es  $T = 2\text{ s}$ , y que el foco en el instante inicial se encuentra en la posición  $y = 5\text{ cm}$ . Su longitud de onda es  $\lambda = 1\text{ cm}$ .

a) Escribir la ecuación de la onda en unidades S.I.

$$y = A$$

$$x = 0$$

$$t = 0$$



$$y(x, t) = A \cdot \sin(\omega t - kx + \phi)$$

$$y(x, t) = 0.05 \cdot \sin(4\pi t - 200\pi x + \phi)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0.01} = 200\pi \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

$$x=0 \quad y=0.05\text{m}$$

$$y(x,t) = A \cdot \sin(\omega t - kx + \varphi_0)$$

$$y(t) = A \cdot \sin \varphi_0$$

$$0.05 = 0.05 \cdot \sin \varphi_0$$

$$\varphi_0 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

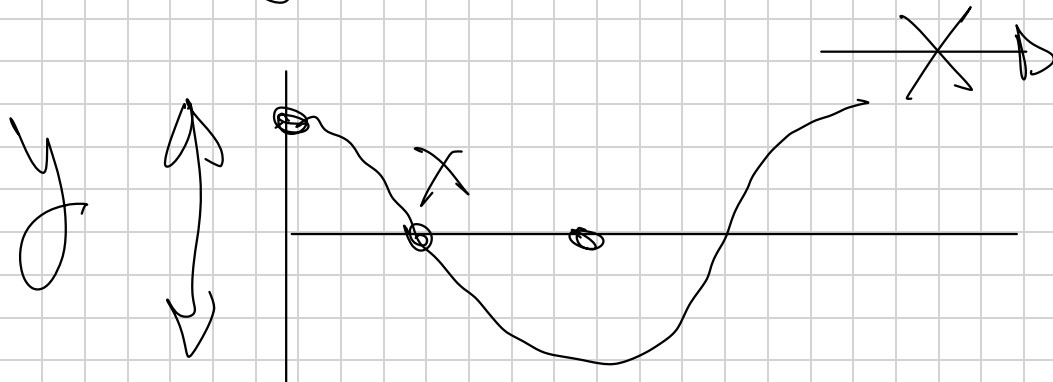
$$y(x,t) = 0.05 \cdot \sin\left(\pi t - 200\pi x + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

$$y(x,t) = 0.05 \cdot \cos(\pi t - 200\pi x) \text{ (SI)}$$

b) Calcular su velocidad de propagación.

$$v_p = \frac{\lambda}{T} = \frac{0.01 \text{ m}}{20} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m/s.}$$

c) Calcular la  $v$  de oscilación de un pto  $x$  cualquiera de la cuerda.



$$y(x, t) = A \cdot \sin(\omega t - kx + \varphi_0)$$

$$v_{osc} = \left( \frac{dy}{dt} \right)_{x=0} = A \cdot \left[ \cos(\omega t - kx + \varphi_0) \right] \omega.$$

$$v_{osc} = A \cdot \omega \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

$$v_{osc} = \pm A \cdot \omega = 0.05 \cdot \pi \text{ m/s.}$$

$$\pm 1$$

pag 167.

4.- La ecuación de una onda en una cuerda es  $y(x,t) = 0,03 \cdot \sin(2t - 3x)$  (S.I)

a) Explicar la doble periodicidad de la onda

b) Calcula su amplitud, su período, su longitud de onda y su frecuencia

c) Calcular su velocidad de propagación así como la velocidad de oscilación que puede tener un punto cualquiera de la cuerda y explicar el significado de cada una de ellas.

d) Calcular la velocidad máxima de oscilación que puede tener un punto cualquiera de la cuerda

a)

$$y(x,t) = \underbrace{0,03}_A \cdot \sin\left(\underbrace{2t}_\omega - \underbrace{3x}_k\right) \text{ (S.I.)}$$

b)

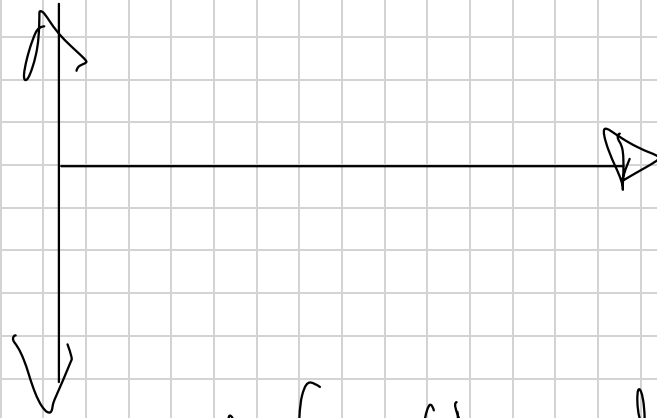
$$A = 0,03 \text{ m}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ s} \quad (3/4)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2}{3} \pi \text{ m}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{\pi} \text{ Hz}$$

c)



$v = \text{cte}$  en el mismo medio.

$$v = \frac{S}{t} = \frac{\lambda}{T} = \frac{\frac{2}{3} \cancel{\lambda}}{\cancel{T}} = \frac{2}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$y(x, t) = 0.03 \cdot \sin(2t - 3x) \quad (\text{SI})$$

$$v_{osc} = \left( \frac{dy}{dt} \right)_{x=\text{cte}} = 0.03 \cdot [\cos(2t - 3x)] \cdot 2$$

$$v_{osc} = 0.03 \cdot 2 \cdot \cos(2t - 3x) \quad \text{No es cte.}$$

depende del  
constante  $t$  y  
del pto  $x$  en

$$v_{\text{osc}} = 0.03 \cdot 2 \cdot \cos(2t - 3x) \quad \text{concretar}$$

$$v_{\text{max}} = \pm 0.06 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{\text{max osc}} = \pm A \cdot \omega$$

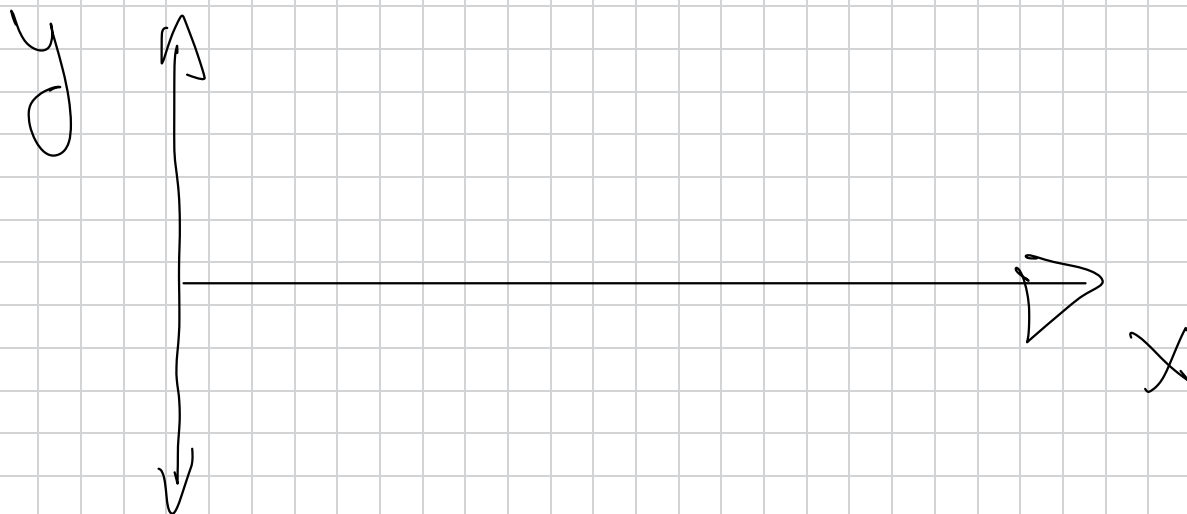
$$v_{\text{max osc}} = \pm 0.03 \cdot 2 = 0.06 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

pag 167.

Calcula la frecuencia de dicho sonido.

3.- Escribe la ecuación de una onda transversal de 10 cm de amplitud y periodo de 0,5 s que se desplaza con una velocidad de fase de  $340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  hacia la parte positiva del eje X. Supóngase que en el foco y en el instante inicial la elongación es máxima.

$v_{\text{propagación}}$



$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.5}$$

$$\omega = 4\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$y(x, t) = A \cdot \sin(\omega t - kx + \varphi_0)$$

$$y(x, t) = 0.1 \cdot \sin\left(4\pi t - \frac{2\pi}{170}x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y(x, t) = 0.1 \cdot \cos\left(4\pi t - \frac{2\pi}{170}x\right) \quad (\text{ST})$$

$340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$   
 $\uparrow$   
 $v_p$   
 $T = 0.50$



$$\Rightarrow \lambda = v_p \cdot T = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0.5 \text{ s} = 170 \text{ m}$$

$$K = \frac{2\pi}{170} \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

$$y = A \cdot \sin(\omega t - Kx + \varphi_0)$$

$$\left. \begin{array}{l} t=0 \\ x=0 \end{array} \right\} \Rightarrow y = A_1$$

$$A = A \cdot \sin(\cancel{\omega t} - \cancel{Kx} + \varphi_0)$$

$$A = A \cdot \sin \varphi_0$$

$$\sin \varphi_0 = 1$$

$$\varphi_0 = \arcsin 1$$

$$\varphi_0 = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

1.- ¿Con qué velocidad se desplaza una onda armónica cuya longitud de onda es de 0,5 cm y su frecuencia de  $6 \cdot 10^{10}$  Hz?. ¿Cuál será el tiempo que tarda la onda en recorrer una distancia igual a una longitud de onda?

$$v = \frac{\lambda}{T}$$

$$\Rightarrow v = \lambda \cdot \frac{1}{T}$$

$$v = \lambda \cdot f = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot 6 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1} \text{ Hz}$$

$$v = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$v = \frac{\lambda}{T}$$

$$\Rightarrow T = \frac{\lambda}{v} = \frac{5 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 1,67 \cdot 10^{-11} \text{ s}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow T = \frac{1}{f} = \frac{1}{6 \cdot 10^{10}} = 1.67 \cdot 10^{-11} \text{ s.}$$

- 2.- El sonido de la sirena de una fábrica tarda 10 s en llegar a un determinado receptor situado a una distancia equivalente a 5000 veces la longitud de onda del sonido emitido. Calcula la frecuencia de dicho sonido.

$$\begin{aligned} \text{⑤} &= \frac{\text{⑤}}{\text{⑦}} \\ &\quad \swarrow \quad \searrow \\ &\quad \frac{5000 \cancel{\lambda}}{10} = \cancel{\lambda} \cdot f \quad \swarrow \\ &\quad \quad \quad f = 500 \text{ Hz} \end{aligned}$$

$\text{⑥} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \frac{1}{T} = \lambda f$

c) Cuánto varía la elongación de los puntos que presentan la velocidad máxima.

- 6.- Suponga que en una onda armónica se duplica la frecuencia. Indicar cómo se modifican el período, la velocidad de propagación, la longitud de onda, la amplitud, y la velocidad máxima de oscilación de un punto cualquiera.

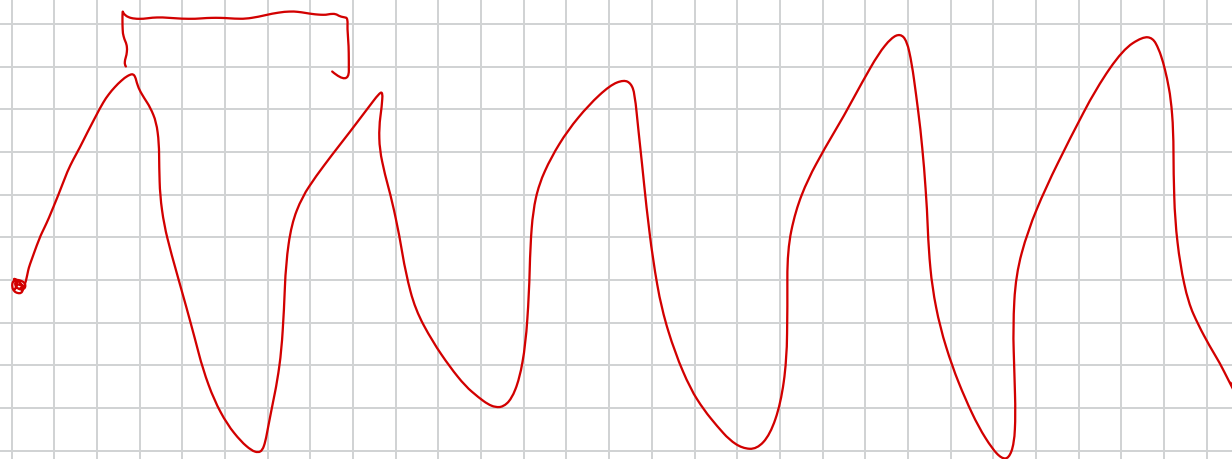
¡OJO! ¡CUIDADO! ¡SALE EN EL EXAMEN!

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{T} & \left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{f} \\ T' &= \frac{1}{2f} \end{aligned} \right\} & \frac{T'}{T} &= \frac{\frac{1}{2f}}{\frac{1}{f}} \Rightarrow T' = \frac{1}{2}T \\ & & & & & \downarrow \end{aligned}$$

$v_p \Rightarrow$  cte en el mismo medio, ¡OJO! no cambia.



$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$



$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega = 2\pi$$

$$v_p = \text{etc.}$$

$$v_p = \frac{\cancel{\lambda}}{\cancel{T}}$$

la même

$$v_p = \frac{\lambda}{\frac{1}{2}T}$$

$$v_p = \frac{\lambda}{\frac{1}{2}T}$$

$$\frac{\cancel{\lambda}}{\cancel{\frac{1}{2}T}} =$$

$$\lambda = \frac{1}{2}T$$

la amplitud y la frecuencia son independientes,  $A$  no cambia.

$$v_{\max \text{ osc}} = A \cdot \omega$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

$$v_{\max \text{ osc}} = A \cdot 2\pi f$$

$$v'_{\max \text{ osc}} = A \cdot 2\pi \cdot 2f$$

$$v_{\max \text{ osc}} = 2 v_{\max \text{ osc}}$$



7.- a) Escribe la ecuación de una onda armónica que se propaga en el sentido positivo del eje X, sabiendo que su frecuencia es de  $5 \cdot 10^{10}$  Hz, su velocidad de propagación de  $15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  y su amplitud de 0,5 m.

b) ¿Cómo se modificaría la ecuación de la onda anterior si la misma se propagase en sentido contrario con una amplitud mitad y una longitud de onda doble?

$$y(x, t) = A \cdot \sin(\omega t - kx + \phi_0)$$

Al no especificar  $\phi_0 = 0$

$$y(x, t) = 0,5 \cdot \sin\left(10^{11} \pi t - \frac{2\pi}{3 \cdot 10^{-10}} x\right)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = 2\pi \cdot 5 \cdot 10^{10} = 10^{11} \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$v_p = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v_p = \lambda \cdot f \Rightarrow v_p = \lambda \cdot f$$

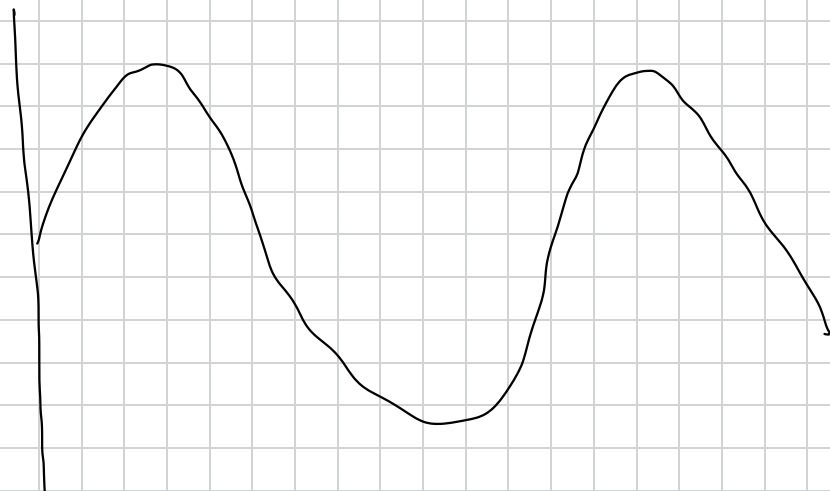
$$\lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{15 \text{ m/s}}{5 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}} = 3 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{3 \cdot 10^{-10}} \text{ rad/m}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$y(x,t) = 0.5 \cdot \sin \left( \underbrace{10^{11} \pi t}_{\text{}} - \frac{2\pi}{3 \cdot 10^{-10}} x \right)$$

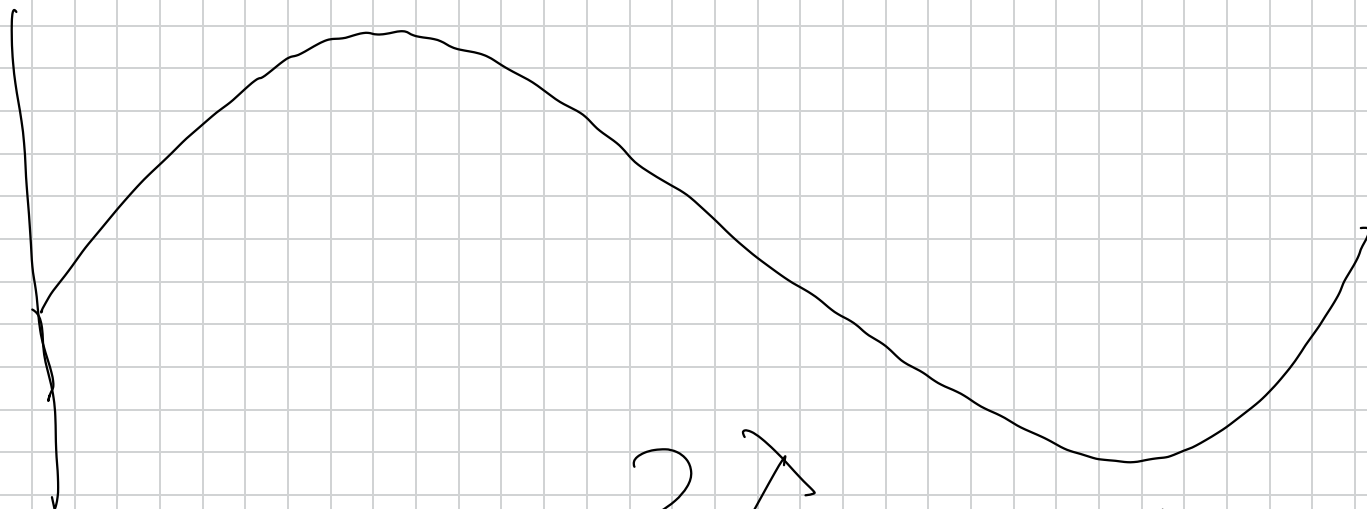
$$y(x,t) = 0.25 \cdot \sin \left( \frac{10^{11} \pi t}{2} + \frac{2\pi}{2 \cdot 3 \cdot 10^{-10}} x \right) \text{ (SI)}$$



$$\boxed{T' = 2T}$$

$$\omega' = \frac{2\pi}{T'}$$

$$\omega' = \frac{1}{2}\omega$$



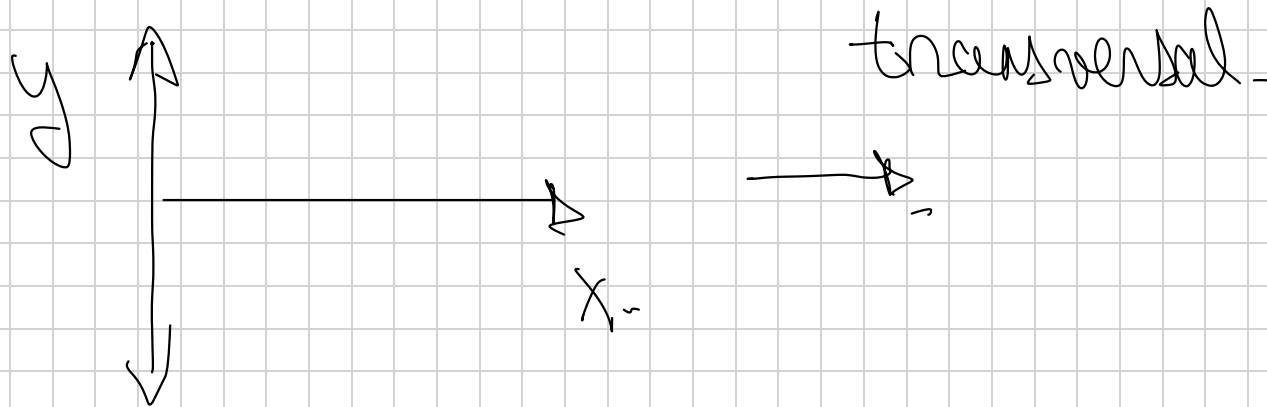
$$v_p = \text{const} \Rightarrow v_p = \frac{2\lambda}{2T} = \text{const.}$$

10.- Una onda viene dada por la ecuación:

$$y(x,t) = 2 \cdot \cos(100t - 5x) \text{ (S.I.)}$$

donde x e y son coordenadas cartesianas

- Haga un análisis razonado del movimiento ondulatorio representado por la ecuación anterior y explique si es longitudinal o transversal, y cuál es su sentido de propagación.
- Calcule la frecuencia, el período, la longitud de onda y el número de onda, así como el módulo, dirección y sentido de la velocidad de propagación de la onda. ¿Se mueven los puntos del medio con esa velocidad?



$$y(x,t) = 2 \cdot \cos \left( \underbrace{100t}_{\omega} - \underbrace{5x}_{k} \right) \text{ (S.I.)}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

$$k = 5 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi/\lambda}{2\pi/\omega} = \frac{\omega}{k} = \frac{100}{5} = 20 \text{ m/s}$$

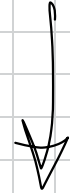
$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{100} \text{ s}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{5} \text{ m}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{100}{2\pi} \text{ Hz}$$

$$\vec{v} = 20 \hat{i} \left( \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$$



Los ptes del medio se movieran con la oscilación.

9.- Una onda armónica transversal que se propaga a lo largo de la dirección positiva del eje de las X tiene 5 cm de amplitud,  $8\pi$  cm de longitud de onda, y velocidad de propagación de  $40 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ . Sabiendo que la elongación de la partícula de abscisa  $x=0$  en el instante  $t=0$  es de 5 cm por debajo de la posición de equilibrio, determinar:

- El número de onda y la frecuencia angular de la onda
- La ecuación que representa el movimiento vibratorio armónico simple de la partícula de abscisa  $x=0$
- la ecuación que representa la onda armónica transversal indicada

$$v_p = 40 \text{ cm/s} = 0.4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\lambda = 8\pi \text{ cm} = 0.08\pi \text{ m}$$

$$a) \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi \text{ rad}}{0.08\pi \text{ m}}$$

$$k = 25 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

$$v_p = \frac{\lambda}{T} \quad T = \frac{\lambda}{v_p}$$

$$T = \frac{0.08\pi}{0.4} =$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{0.08\pi}{0.4}} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

b)

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$y(x,t) = A \cdot \sin(\omega t - kx + \varphi_0)$$

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

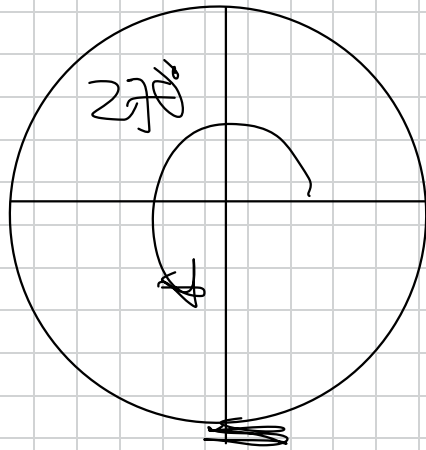
$$y(t) = 0.05 \cdot \sin(10t + \varphi_0)$$

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \\ t=0 \end{array} \right\} y = 0.05 \text{ m.}$$

$$\begin{aligned} \cancel{y(x,t)} &= 0.05 \sin(\cancel{10t} - \cancel{kx} + \varphi_0) \\ &= 0.05 = 0.05 \sin \varphi_0 \end{aligned}$$

$$\text{sen } \varphi_0 = -1$$

$$\varphi_0 = \arcsin(-1) = \frac{3\pi}{2} \text{ rad.} \\ (270^\circ)$$



$$y(t) = 0.05 \cdot \text{sen} \left( 10t + \frac{3}{2}\pi \right) (\text{SI})$$

$$y(x, t) = 0.05 \cdot \text{sen} \left( 10t - 25x + \frac{3}{2}\pi \right) (\text{SI})$$

$$y(x, t) = 0.05 \cdot \sin\left(10t - 25x + \pi + \frac{\pi}{2}\right) (S)$$

$$y(x, t) = 0.05 \cdot \cos\left(10t - 25x + \pi\right) (S)$$