M.A.S

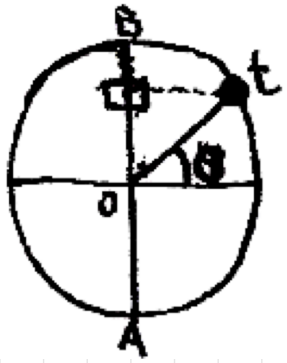
pag 111 del libro ⇒ Teoría.
Ejercicios M.A.S ⇒ página Web, junto con sus soluciones

a) Oscilación completa o ciclo completo.

b) Velocidad angular, pulsación o frecuencia angular ω.

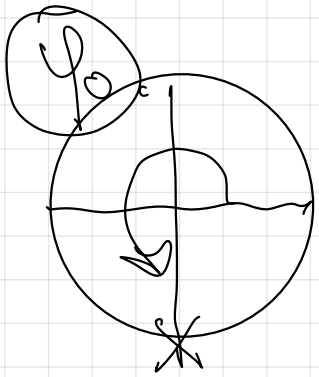
$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \left(\frac{rad}{s}\right)$$

c) Ángulo de fase φ (rad en S.I).



θ nos representa el estado vibratorio en ese instante t

a) Ángulo de fase inicial φ_0.



$t = 0$.

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T} \left(\frac{rad}{s}\right).$$

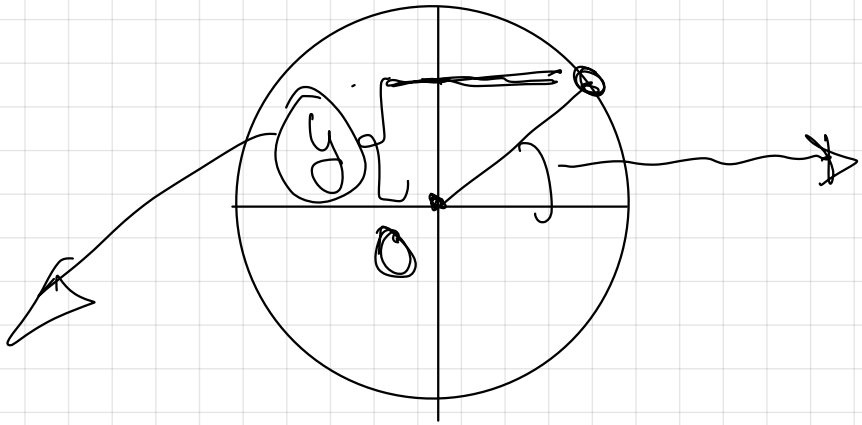
$$v = \frac{s}{t}.$$

$$s = v \cdot t.$$

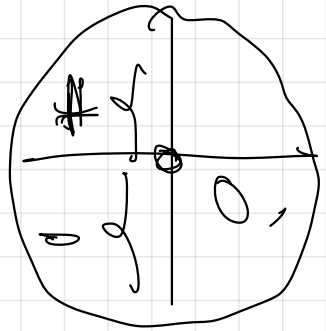
$$s = v \cdot t + s_0.$$

$\varphi = \omega \cdot t + \varphi_0$.

e) Elongación y (m en SI).



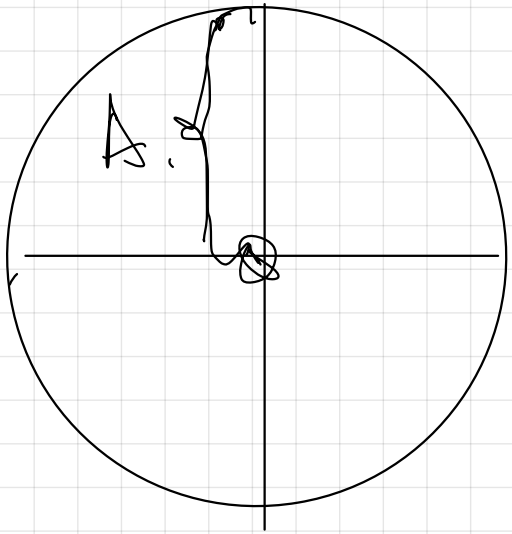
$\varphi = \varphi_0 + \omega t$.



Distancia que lo separa de su posición intermedia en un instante t.

f) Amplitud (m)

$y_{max} = A$.



Ay
Fy

g) Período T. (s. en SI).

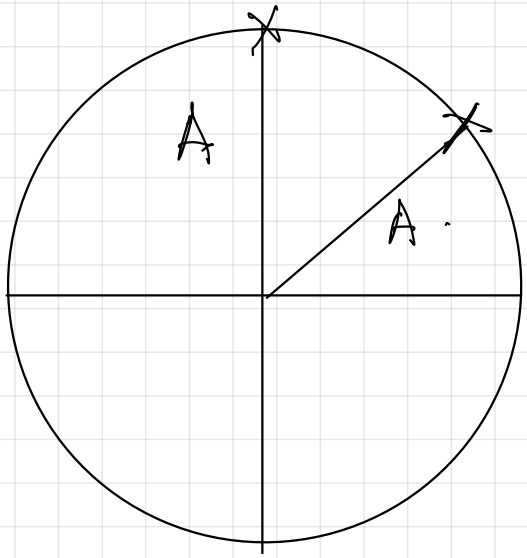
$\omega = \frac{2\pi}{T}$.

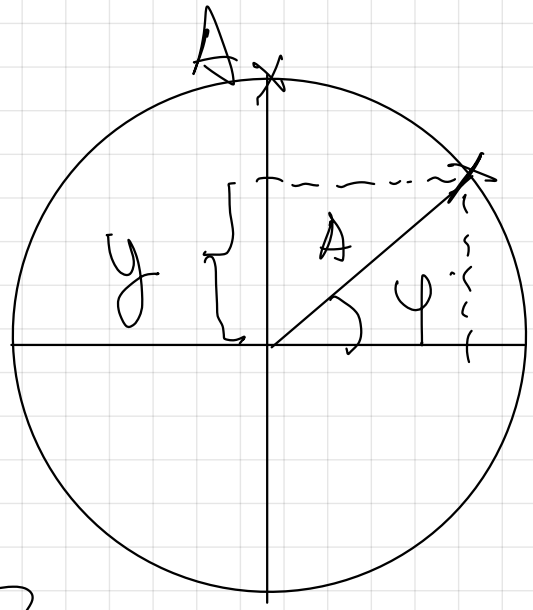
h) Frecuencia. ($Hz = s^{-1}$; osc/s, ciclos/s, vibraciones/s, etc...)

$$f = \frac{\text{nº oscilaciones}}{t}$$

$$f = \frac{1}{T}$$

3º M.A.S.





?

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{y}{A}$$

y → cateto oposto

A → hipotenusa.

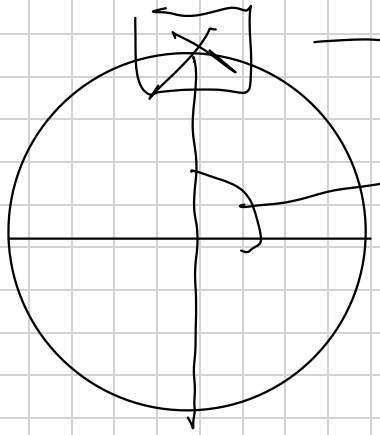
$$y = A \cdot \operatorname{sen}(\varphi) \rightarrow (\omega t + \varphi_0)$$

$$y = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

$$\boxed{y(t) = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)}$$

Ecuación de un M.A.S.

$$y(t) = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$$



$t = 0$

$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}\,\text{rad}$

Para calcular φ_0, asigno $t = 0$ y hallo cuanto vale sabiendo la ecuación para ese instante.

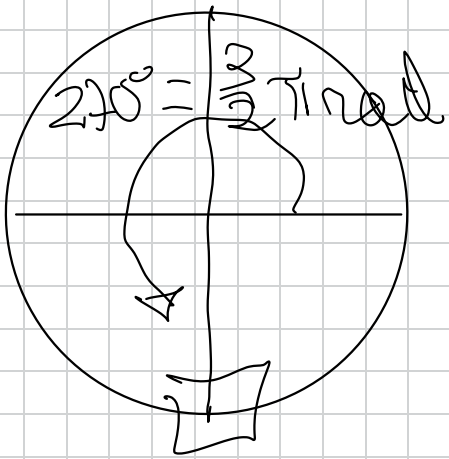
$$y(t) = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

$t = 0 \Rightarrow y = A$

$$A = A \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$\frac{A}{A} = \operatorname{sen} \varphi_0$$

$$\operatorname{sen} \varphi_0 = 1 \Rightarrow \varphi_0 = \operatorname{arcsen} 1 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$



$$y(t) = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

Cálculo φ_0:

$$t = 0 \Rightarrow y = -A.$$

$$-A = A \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$-A = A \cdot \operatorname{sen} \varphi_0$$

$$\operatorname{sen}\varphi_0 = \frac{-A}{A} = -1.$$

$$\varphi_0 = \operatorname{arcsen}(-1) = \frac{3}{2}\pi \text{ rad.}$$

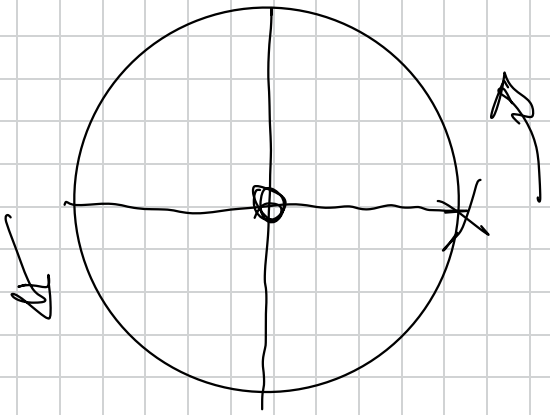
Calcule φ_0.

$$y(t) = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

$$t = 0 \Rightarrow y = 0.$$

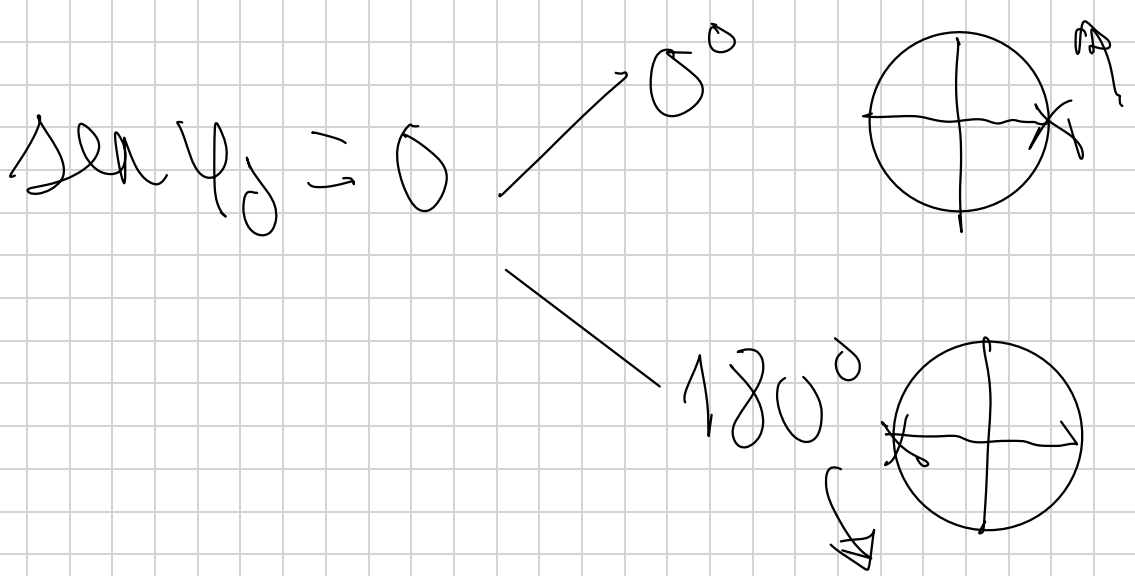
$$0 = A \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$\frac{0}{A} = \operatorname{sen}\varphi_0.$$

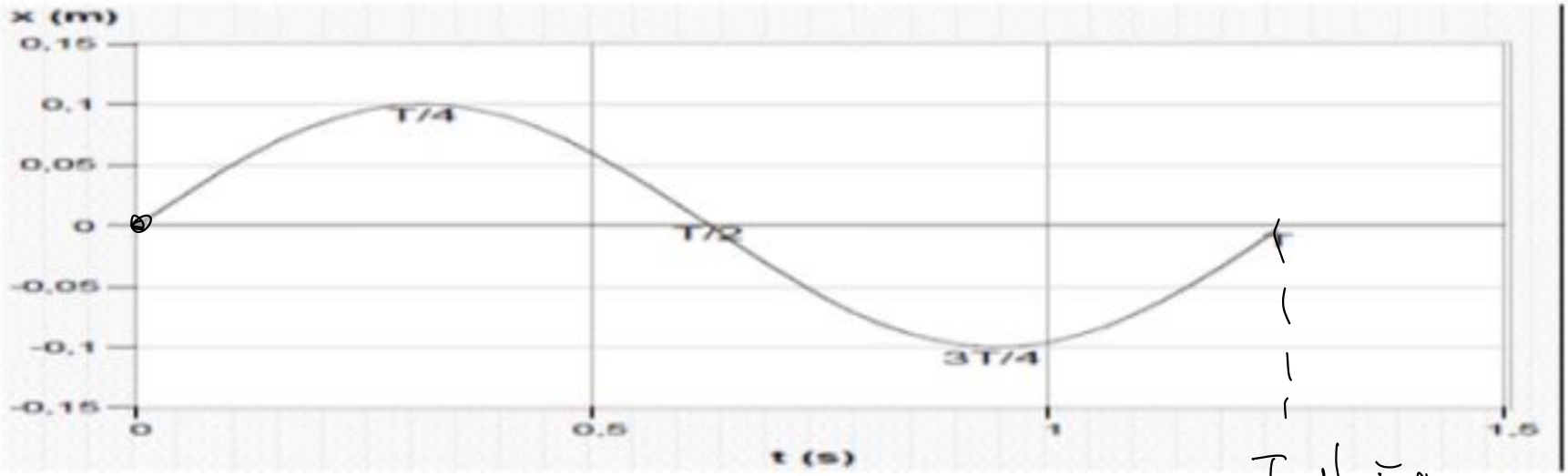


φ_0 → $0°$

→ $180°$ (π rad)



1.- En la gráfica se muestra la posición en función del tiempo para una partícula que describe un m.a.s. Determina la ecuación de dicho movimiento.



$$y(t) = A \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

$A = 0'1\ m$

$$y(t) = 0'1 \cdot \operatorname{sen}(1'6\pi t + \varphi_0)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi\ rad}{1'25\ s} = 1'6\pi\ \frac{rad}{s}$$

$$\boxed{y(t) = 0'1 \cdot \operatorname{sen}(1'6\pi t) \quad (S.I.)}$$

$$y(t) = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

ascendente $\varphi_0 = 0$

$t = 0$

$y = 0.$

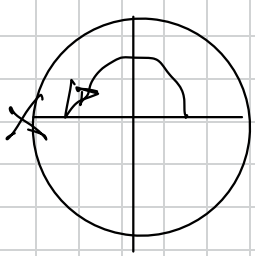
$$0 = A \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$\frac{0}{A} = \operatorname{sen} \varphi_0.$$

$\varphi_0 = \operatorname{arcsen} 0^\circ$ → 0°

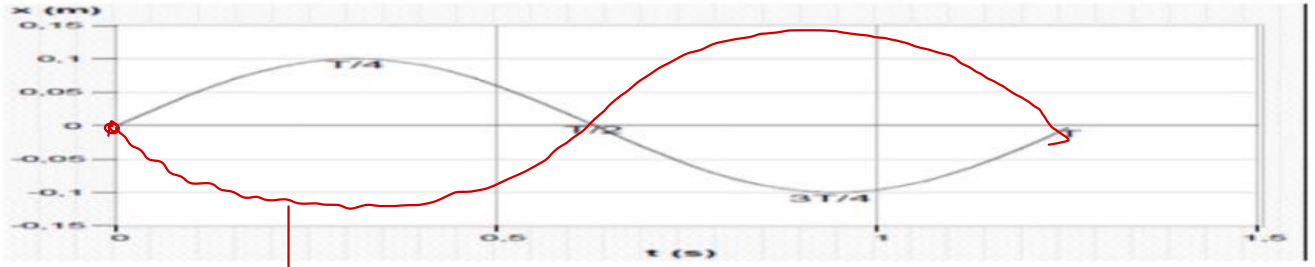
→ 180° (π rad)

Si φ_0 hubiese sido 180° (π rad)



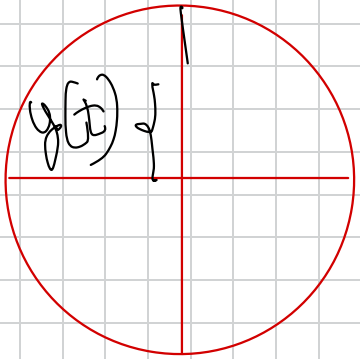
$\varphi_0 = 180$ (π rad)

1.- En la gráfica se muestra la posición en función del tiempo para una partícula que describe un m.a.s. Determina la ecuación de dicho movimiento.



$y = 0{,}1 \cdot \sin(16\pi t + \pi)$ (SI)

Cinemática del M.A.S.



$v = cte$ ~~$v = cte$~~

$v = \frac{s}{t} \rightarrow \frac{y}{t}$ ~~$v = \frac{s}{t} \rightarrow \frac{y}{t}$~~

$$y(t) = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

v en un M.A.S.

$$v = \frac{dy}{dt} = A \cdot \left[\cos(\omega t + \varphi_0)\right] \omega$$

$$v = A \cdot \omega \cdot \boxed{\cos(\omega t + \varphi_0)}$$

$$\boxed{v_{max} = A \cdot \omega}$$

$$v_{max} = \pm A \cdot \omega.$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi) = 1$$

$$\cos^2(\omega t + \varphi) = 1 - \sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$v = A \cdot \omega \cdot |\cos(\omega t + \varphi)| \qquad |\cos(\omega t + \varphi)| = \sqrt{1 - \sin^2(\omega t + \varphi)}$$

$$v = A \cdot \omega \cdot \sqrt{1 - \sin^2(\omega t + \varphi)}$$

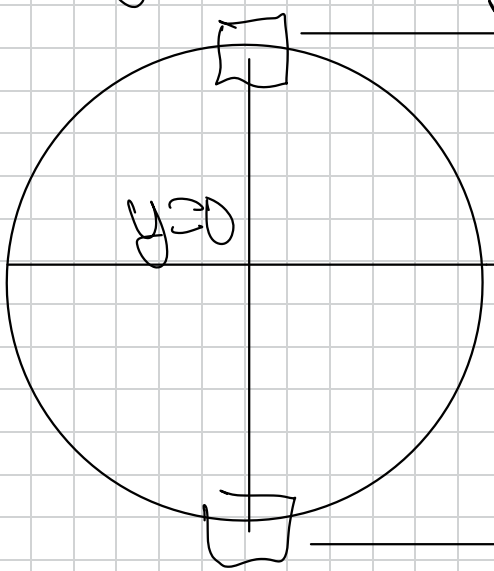
$$v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - |A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)|}$$

$$y = A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - y^2}$$

→ v del M.A.S en función de la posición.

$y = +A$



$$v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - A^2} = 0$$

$v_{min} = 0$ extremo

$$v = \omega \sqrt{A^2 - 0^2} = \omega \cdot A \rightarrow v_{max}$$

en el 0

$v_{max} = \pm \omega A$

$$v = \omega \sqrt{A^2 - (-A)^2} = 0 \quad v_{min} = 0$$

extremo

$y = -A$.

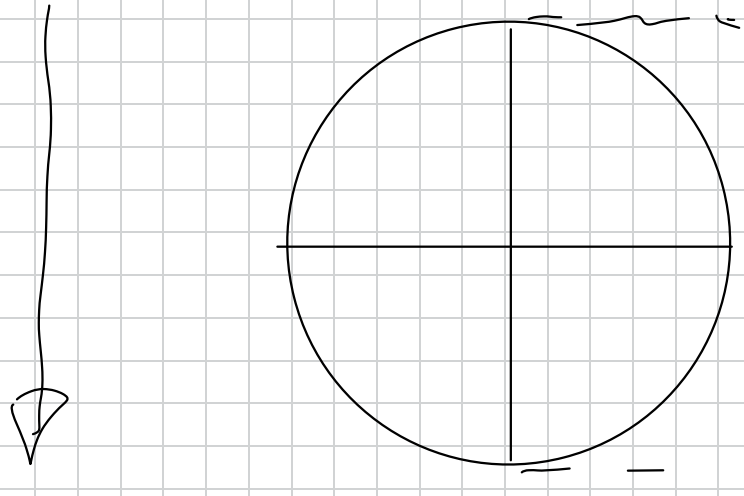
Aceleración del M.A.S.

$$y(t) = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

$$v = \frac{dy}{dt} = A \cdot \left(\cos(\omega t + \varphi)\right) \omega$$

$$v = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$v = \omega \sqrt{A^2 - y^2}$$



$y = A \rightarrow v = 0$

$y = 0 \Rightarrow v_{max} = \omega \cdot A$

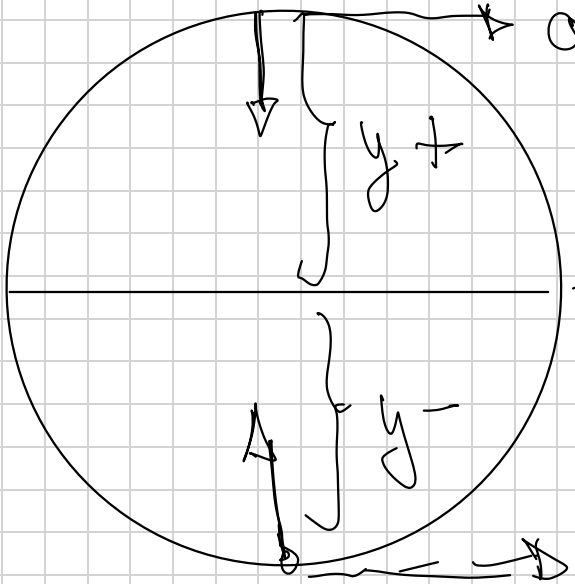
$y = -A \rightarrow v = 0$

$$a = \frac{dv}{dt} = A \cdot \omega \left[-\operatorname{sen}(\omega t + \gamma) \right] \cdot \omega$$

$$\boxed{a = -A\omega^2 \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)} \qquad y = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \gamma)$$

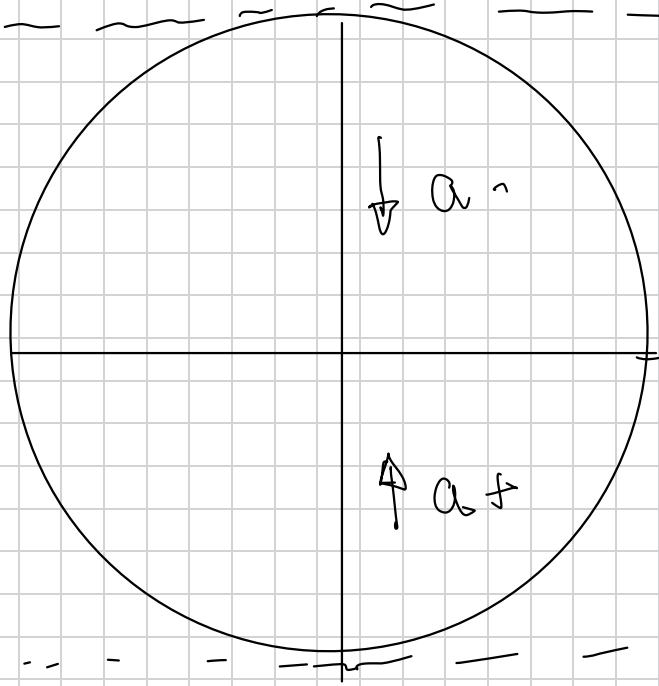
$$a = -\omega^2 y \longrightarrow a_{max} = \pm \omega^2 A$$

$$a_{max} = -\omega^2 A$$



$$a_{max} = +\omega^2 A$$

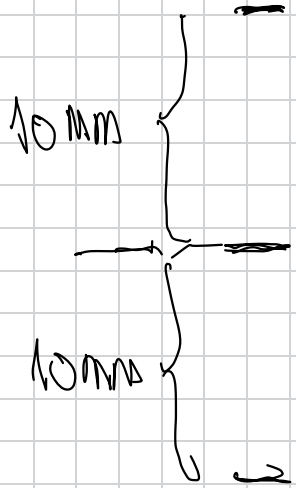
$v = 0$ — — — — — — $a_{max} = -\omega^2 A$



$v_{max} = \pm A \cdot \omega$ — — $a = 0$.

$v = 0$. — — — — — — $a_{max} = \omega^2 A$.

2.- La aguja de una máquina de coser oscila entre dos puntos separados por una distancia vertical de 20 mm. Suponiendo que describe un m.a.s de frecuencia 30 Hz, ¿Cuál será su velocidad y aceleración máximas en unidades del Sistema Internacional?.



$A = 10\ mm = 10^{-2}\ m$

$f = 30\ Hz$

$y = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$ → No especifican, luego $\varphi_0 = 0$.

$y = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t)$

$y = 10^{-2} \cdot \operatorname{sen}(60\pi t)\ (S.I.)$

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot \frac{1}{T}$

$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 30$

$\omega = 60\pi\ \frac{rad}{s}$

$$v = \frac{dy}{dt} = 10^{-2} \cdot \left[\cos(60\pi t)\right] \cdot 60\pi \cdot$$

$$v = 60\pi \cdot 10^{-2} \cdot \cos(60\pi t)$$

$$v_{max} = 60\pi \cdot 10^{-2}\ m/s = 1{,}88\ m/s$$

$$v_{max} = A \cdot \omega$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 60\pi \cdot 10^{-2} \left[-\operatorname{sen}(60\pi t)\right] 60\pi$$

$$a_{max} = -(60\pi)^2 \cdot 10^{-2} \cdot \operatorname{sen}(60\pi t)$$

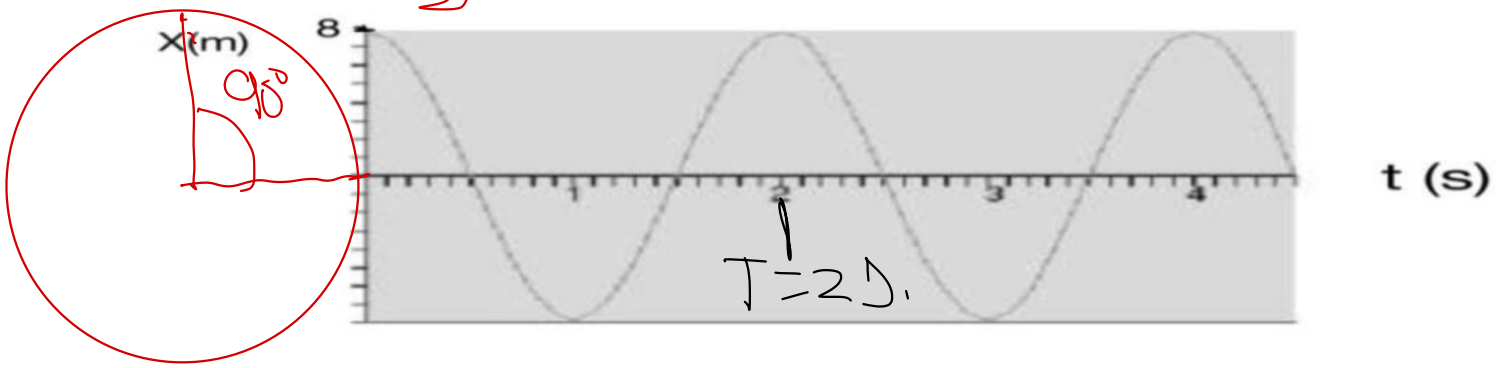
$$a_{max} = \pm\ 354{,}94\ m/s^2$$

4.- En la gráfica se muestra la posición en función del tiempo para una partícula que describe un m.a.s.

a) Escribir la ecuación del m.a.s en unidades S.I.

b) Calcular su posición, su velocidad y su aceleración en el instante t=1s, comentando los resultados.

$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ rad.



a) $x(t) = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0)$

$x(t) = 8 \cdot \text{sen}(\pi t$

$A = 8$ m

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

$\omega = \frac{2\pi}{2}$

$\omega = \pi$ rad/s

Cálculo de φ_0

$$x(t) = 8 \cdot \operatorname{sen}(\pi t + \varphi_0)$$

$t = 0$ s

$x(t) = 8$ m

$$8 = 8 \cdot \operatorname{sen}(\pi \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$8 = 8 \cdot \operatorname{sen}(\varphi_0)$$

$$\operatorname{sen} \varphi_0 = 1 \qquad \varphi_0 = \operatorname{arcsen} 1$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad } (90°)$$

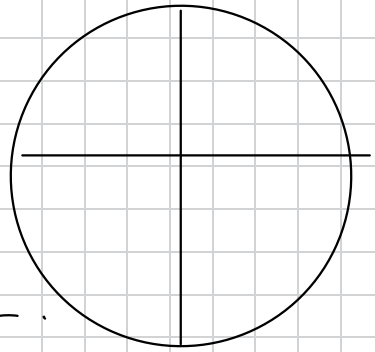
$$x(t) = 8 \cdot \operatorname{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (SI)}$$

$$x(t) = 8 \cdot \cos(\pi t) \qquad \text{(SI)}$$

90

$\operatorname{sen} 90 = 1$.

$\cos 90 = 0$.



$\operatorname{sen} 180 = 0$

180

$\cos 180 = -1$.

0

$\operatorname{sen} 0 = 0$

$\cos 0 = 1$.

270

$\operatorname{sen} 270 = -1$

$\cos 270 = 0$.

$\operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha$.

$$x(t) = 8 \cdot \operatorname{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \ (SI)$$

$$x(t) = 8 \cdot \cos(\pi t) \qquad (SI)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 8 \cdot [-\operatorname{sen}(\pi t)] \cdot \pi \vec{j}$$

$$v(t) = -8\pi \cdot \operatorname{sen}(\pi t)$$

$$v(t=1s) = -8\pi \cdot \operatorname{sen}(\pi)$$

$$v(t=1s) = 0$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$a = -8\pi [\cos(\pi t)] \vec{j}$$

$$a = -8\pi^2 \cos(\pi t)$$

$t = 1s$ ($T/2$) $\Rightarrow v = 0$

$a = +8\pi^2 \ (m/s^2)$

Conclusione:

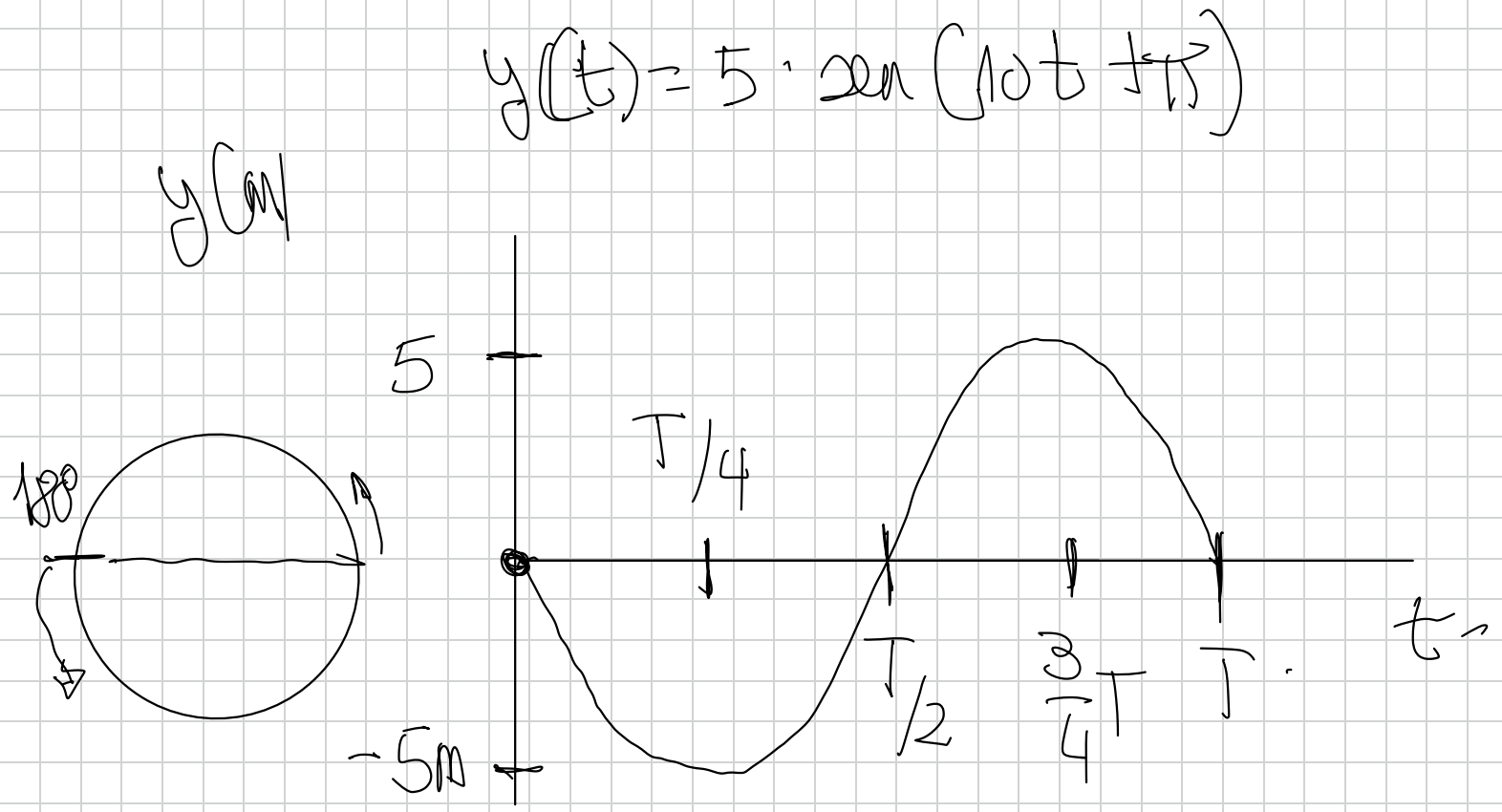
$$a(t=1s) = -8\pi^2 \cdot \cos(\pi)$$

$$a(t=1s) = +8\pi^2 \ m/s^2.$$

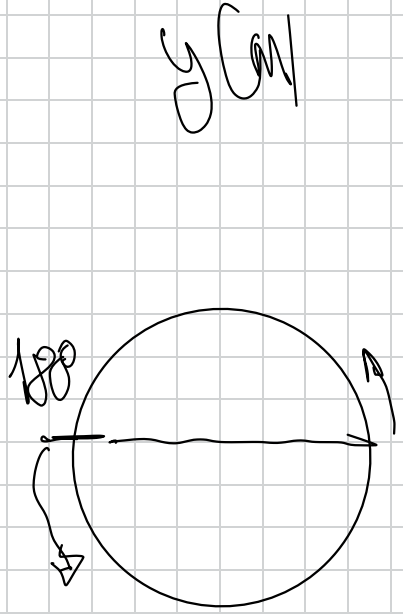
Estremo!

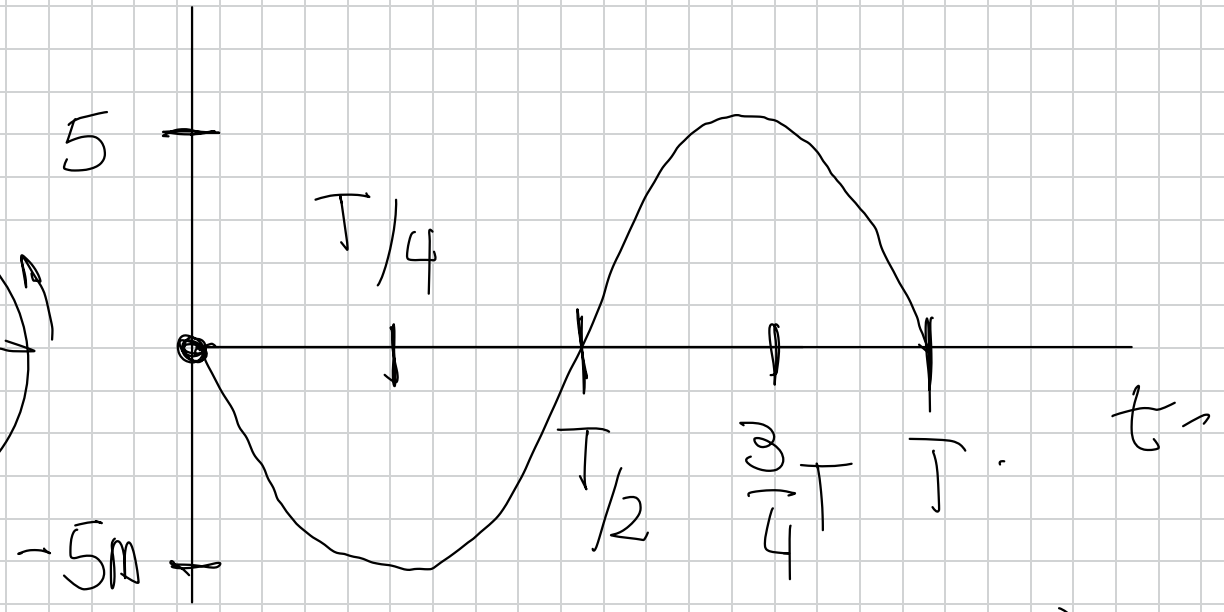
3.- a) Represente gráficamente el movimiento armónico simple de una partícula dado por la ecuación y(t)=5 ·sen (10t+π) (S.I). Represente también otro movimiento armónico simple que tenga una amplitud doble y una frecuencia mitad que la anterior.

b) Represente gráficamente la velocidad y la aceleración del movimiento armónico simple dado por la ecuación y(t)=5 ·sen (10t+π) (S.I)



$y(t) = 5 \cdot \operatorname{sen}(10t + \pi)$ (S.I.)



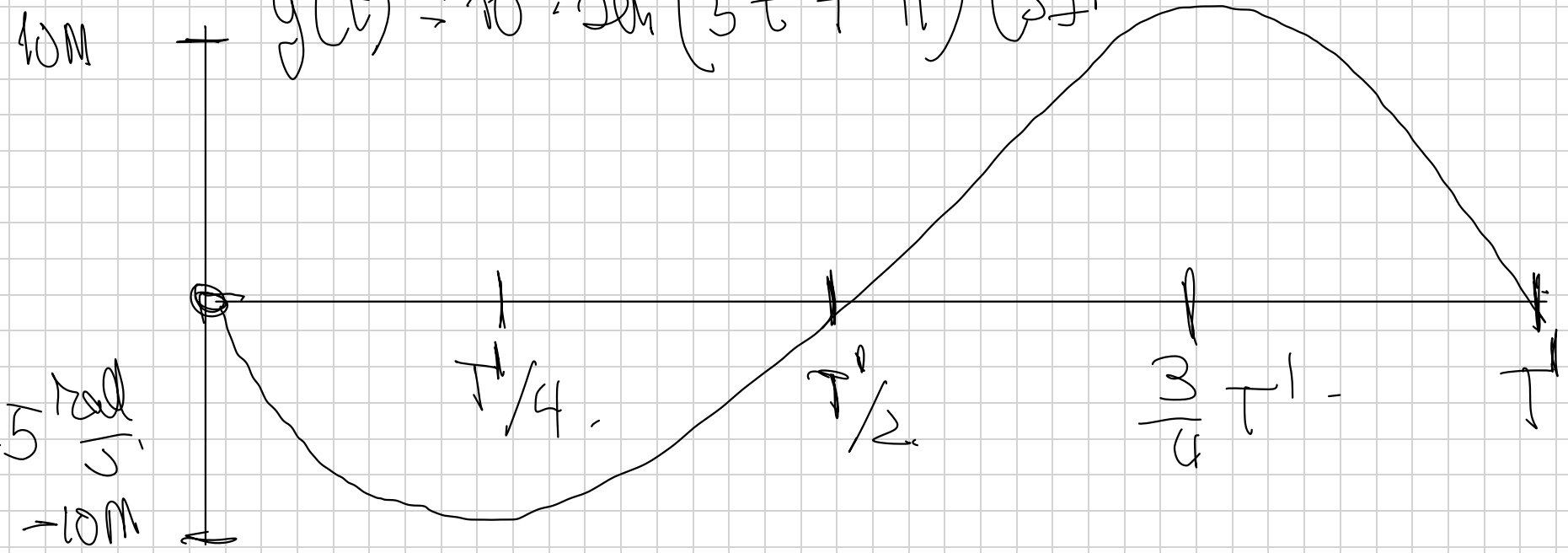


frecuencia natural

$f = \frac{1}{T}$.

$T' = 2T$

$y(t) = 10 \cdot \operatorname{sen}(5t + \pi)$ (S.I.)

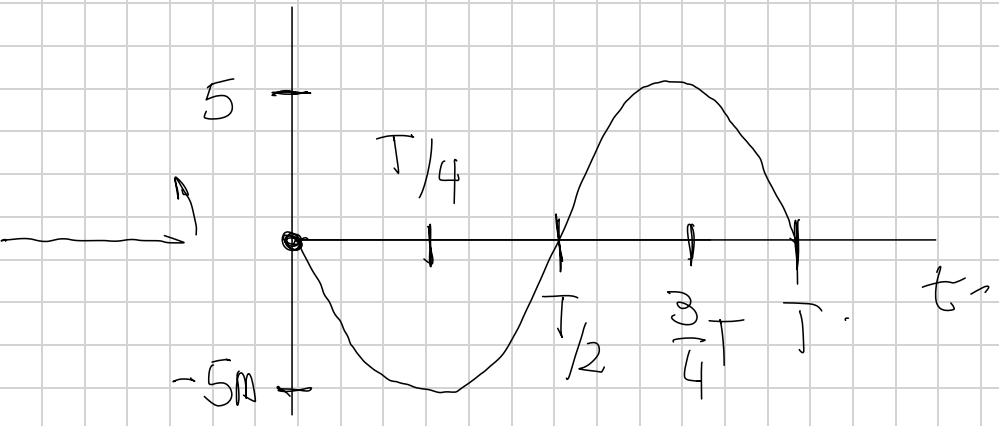


$\omega = 2\pi f$

$\omega' = \pi f$

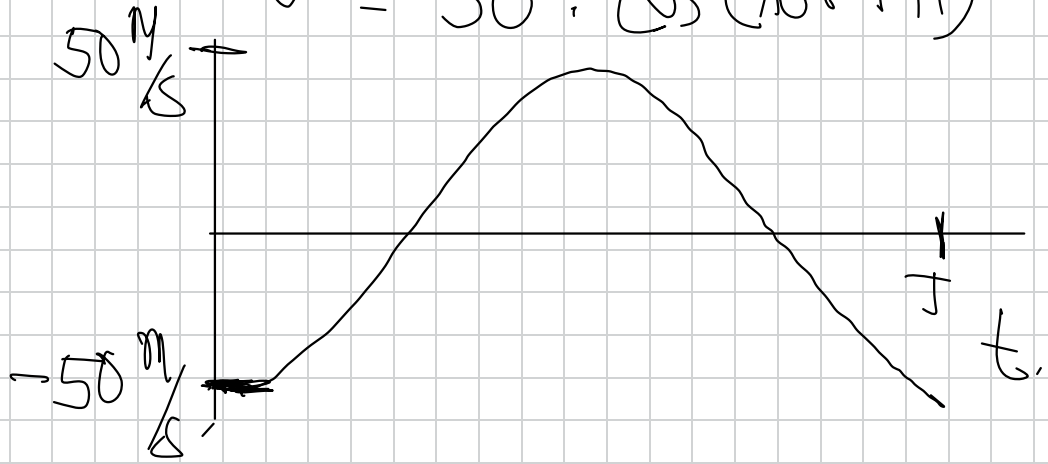
$\omega' = \frac{1}{2}\omega = 5 \frac{rad}{s}$.

$y(t) = 5 \cdot \operatorname{sen}(10t + \pi)$



$$v = \frac{dy}{dt} = 5 \cdot [\cos(10t + \pi)] \cdot 10$$

$$v = 50 \cdot \cos(10t + \pi)$$



$$a = \frac{dv}{dt} = 50 \cdot [-\operatorname{sen}(10t + \pi)] \cdot 10$$

$$a = -500 \cdot \operatorname{sen}(10t + \pi)$$



5.- La ecuación de un m.a.s viene dada por la expresión

$$x(t) = 0{,}5 \cdot \cos(\pi t)\ (S.I)$$

a) Calcular su amplitud, su ángulo de fase inicial, su periodo, su frecuencia y su posición al cabo de 0,5 segundos.

b) Calcular la velocidad y la aceleración máximas que podría alcanzar en su movimiento.

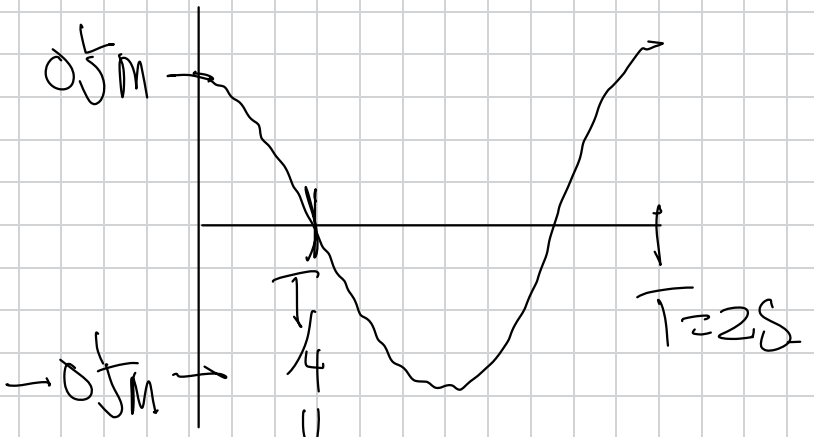
$x(t) = 0'5 \cdot \operatorname{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ (S.I) $\quad \boxed{\varphi_0 = \frac{\pi}{2}\ \text{rad.}}$

$\omega = \pi \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

a) $A = 0'5\ m$

$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi} = 2\ s.$

$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} = 0'5\ Hz.$



$T/4 = 0'5\ s.$

$x(t) = 0'5 \cdot \cos(\pi t)$

$x(t = 0'5\ s) = 0'5 \cdot \cos(\pi \cdot 0'5)$

$x(t=0{,}5) = 0$ ✗

$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

b) $x(t) = 0{,}1 \cdot \cos(\pi t)$

$v = \frac{dx}{dt} = 0{,}1 \cdot [-\operatorname{sen}(\pi t)] \cdot \pi$

$v = -0{,}1\pi \cdot \operatorname{sen}(\pi t) \longrightarrow a = \frac{dv}{dt} = -0{,}1\pi^2 \cdot \cos(\pi t)$

$v_{max} = \pm 0{,}1\pi \ m/s$

$a = -0{,}1\pi^2 \cdot \cos(\pi t)$

$(v_{max} = A\omega)$

$(a_{max} = A \cdot \omega^2)$

$a_{max} = \pm 0{,}1\pi^2 \frac{M}{s^2}$

6.- La ecuación de un cuerpo que describe un m.a.s es $x(t) = 10 \cdot \text{sen}(\pi t + 3\pi/2)$ (S.I).
a) ¿Cuánto valen la amplitud, el periodo y la frecuencia del movimiento?
b) Representar gráficamente la posición en función del tiempo
b) ¿Cuánto valen la velocidad y la aceleración del cuerpo para t = 2s?

$$x(t) = \underbrace{10}_{A} \cdot \text{sen}\left(\underbrace{\pi t}_{\omega} + \frac{3}{2}\pi\right) \quad (S.I).$$

a) $A = 10\ m$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi} = 2\ s.$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} = 0{,}5\ Hz$$

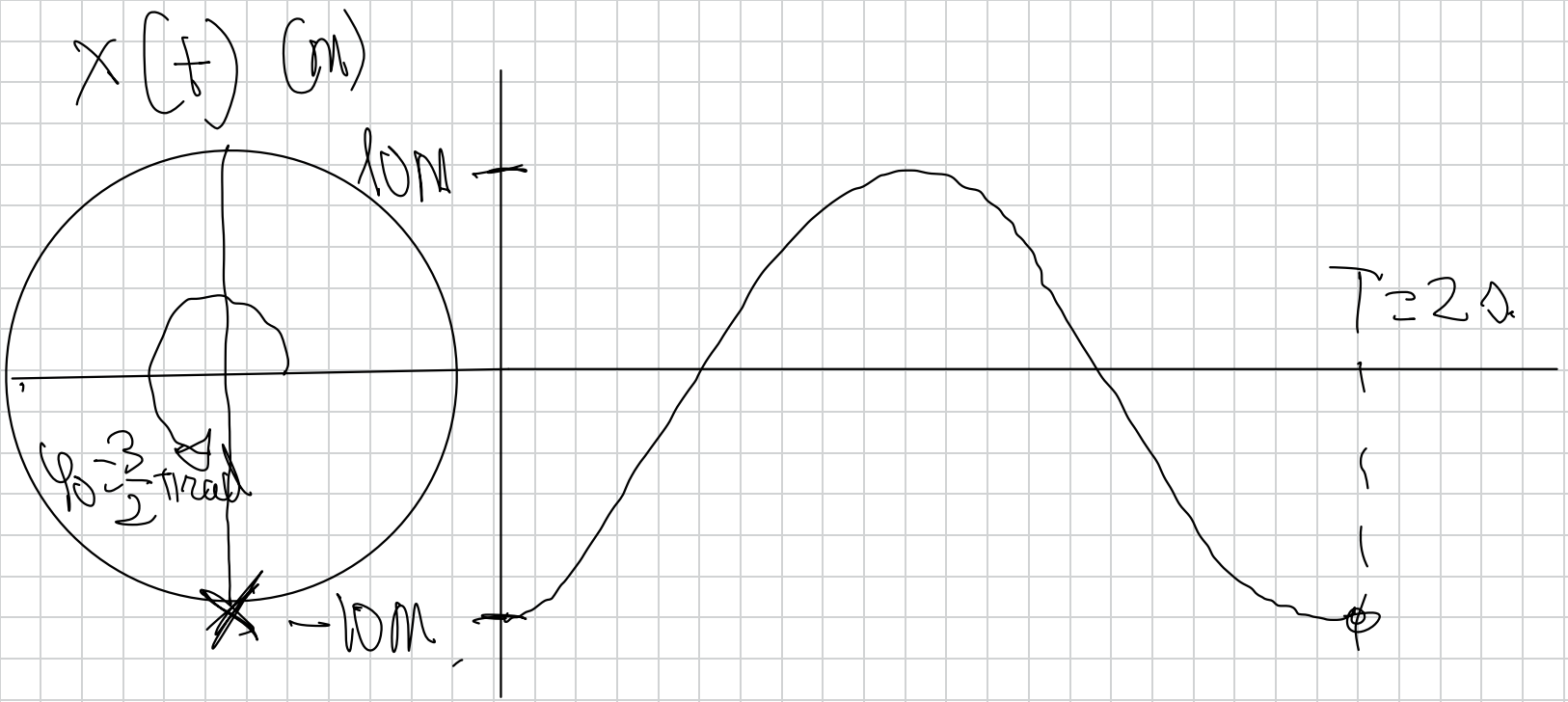
b)

$$x(t) = 10 \cdot \text{sen}\left(\pi t + \frac{3}{2}\pi\right)$$

$t = 0$

$$x(t) = 10 \cdot \text{sen}\left(\frac{3}{2}\pi\right)$$

$$x(t) = -10\ m$$



b) $x(t) = 10 \cdot \cos\left(\pi t + \frac{3}{2}\pi\right)$ (S.I.)

$v = \frac{dx}{dt} = 10 \cdot \left[\cos\left(\pi t + \frac{3}{2}\pi\right)\right]' \cdot \pi$.

$v = 10\pi \cdot \cos\left(\pi t + \frac{3}{2}\pi\right) \rightarrow a = \frac{dv}{dt}$

$$v(t=2) = 10\pi \cdot \cos\left(2\pi + \frac{3}{2}\pi\right)$$

$$v(t=2) = 0$$

$$a = 10\pi \cdot \left[-\operatorname{sen}\left(\pi t + \frac{3}{2}\pi\right)\right] \cdot \pi$$

$$a = -10\pi^2 \cdot \operatorname{sen}\left(\pi t + \frac{3}{2}\pi\right)$$

$$a(t=2) = -10\pi^2 \cdot \operatorname{sen}\left(2\pi + \frac{3}{2}\pi\right)$$

$$a(t=2) = -10\pi^2 \cdot (-1)$$

$$a(t=2) = 10\pi^2 \ m/s^2.$$

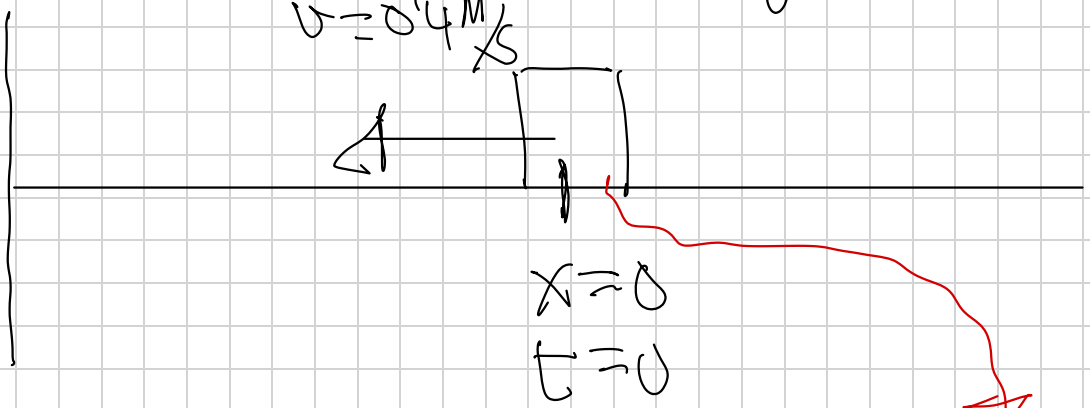
7.- Un punto material está animado con un movimiento armónico simple en el eje X, alrededor de su posición de equilibrio en x= 0. En el instante t=0, el punto material está situado en x=0 y se desplaza en el sentido negativo del eje X con una velocidad de 40 $cm \cdot s^{-1}$. La frecuencia del movimiento es de 5 Hz. Determinar:

a) La posición en función del tiempo o ecuación del movimiento armónico simple

b) La posición y la velocidad en el instante t=5s

$v = 40\ cm/s$. $f = 5\ Hz$.

$v = 0'4\ m/s$



$40\ \frac{cm}{s} \cdot \frac{1\ m}{100\ cm} = 0'4\ \frac{m}{s}$.

$v = 0'4\ \frac{m}{s}$ ⇒ v_{max} en el centro

$v_{max} = A \cdot \omega$

a) $x(t) = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$

$A = \frac{v_{max}}{\omega}$

$A = \frac{0'4}{10\pi}\ m$

$A = 0'013\ m$

$t = 0$, $x = 0$

Cálculo de φ_0

$0 = A \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot 0 + \varphi_0)$

$0 = A \cdot \operatorname{sen}(\varphi_0)$

$\frac{0}{A} = \operatorname{sen}\varphi_0$ ⇒ $\operatorname{sen}\varphi_0 = 0$ ⇒ $\varphi_0 = \arcsen 0^\circ$

0°

Al desplazarse en el sentido negativo de las x, $\varphi_0 = 180° = \pi \text{ rad}$.



$$x(t) = 0{,}13 \cdot \operatorname{sen}(10\pi t + \pi)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot \frac{1}{T} = 2\pi f$$

$$\omega = 2\pi \cdot 5 = 10\pi \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

b) $f = 5\ \text{s}^{-1}$

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow T = \frac{1}{f} = \frac{1}{5} = 0{,}2\ \text{s}$$

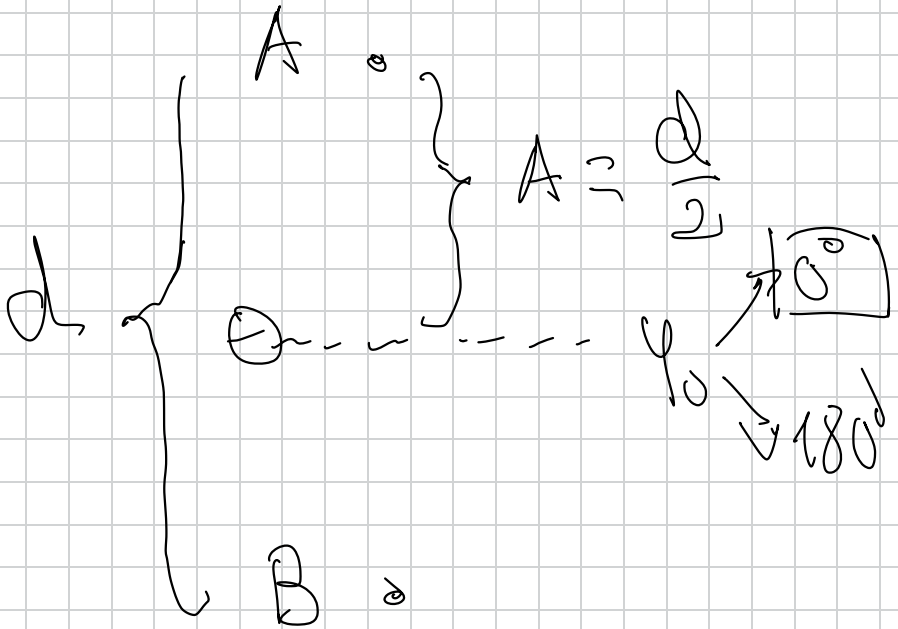
8.-Una partícula describe un movimiento armónico simple entre dos puntos A y B que distan una distancia vertical d, con un periodo T.

a) Escriba la ecuación de dicho movimiento armónico simple sabiendo que para t=0 la partícula se encuentra en el punto medio del segmento AB. Realizar una gráfica cualitativa de la elongación en función del tiempo.

b) Repita el apartado a) suponiendo que el periodo hubiese sido la mitad.

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

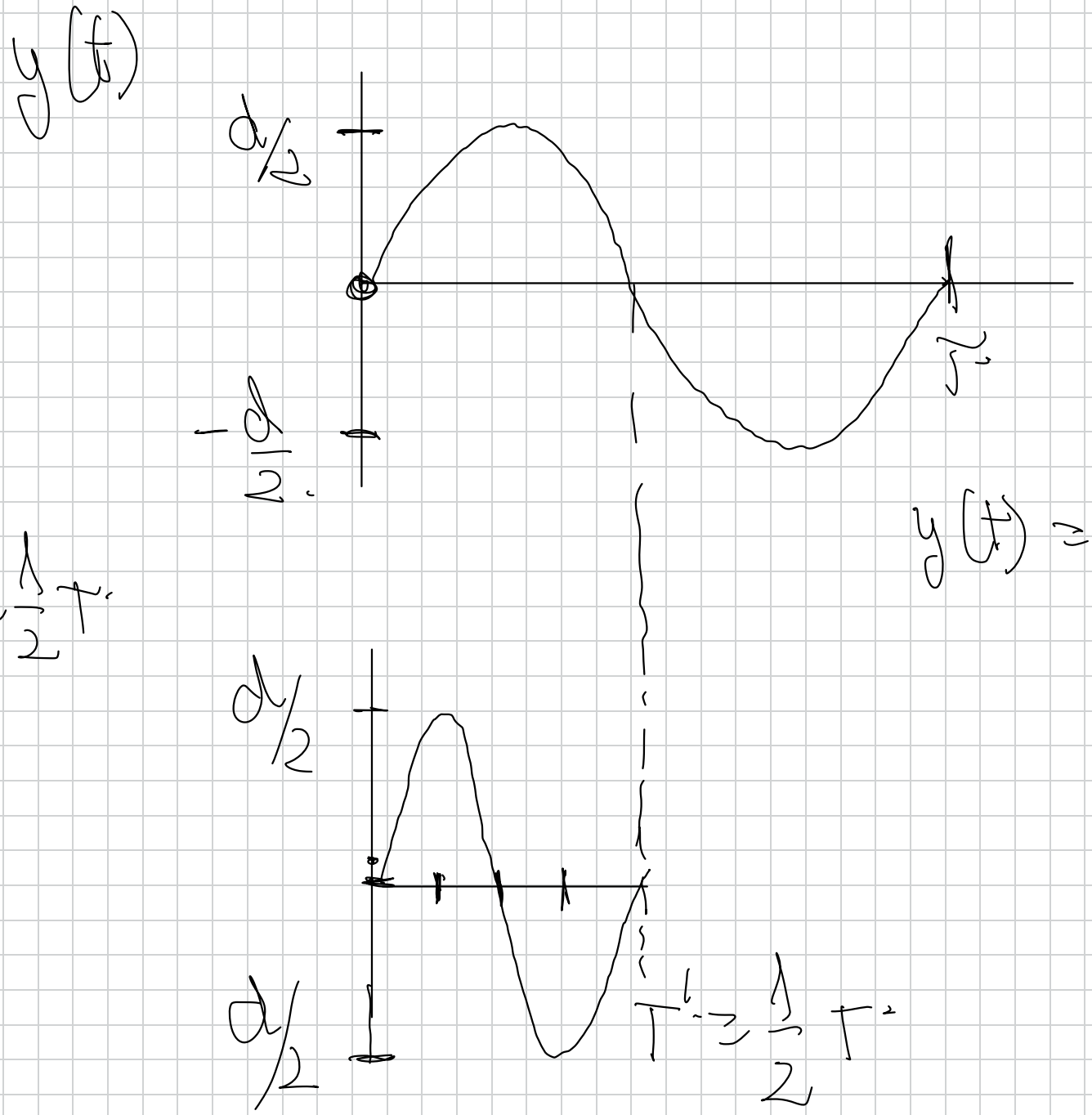
T



$y(t) = \frac{d}{2} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + 0\right)$

$\Rightarrow$ Al no especificar, $\varphi_0 = 0$.

$y(t) = \frac{d}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$

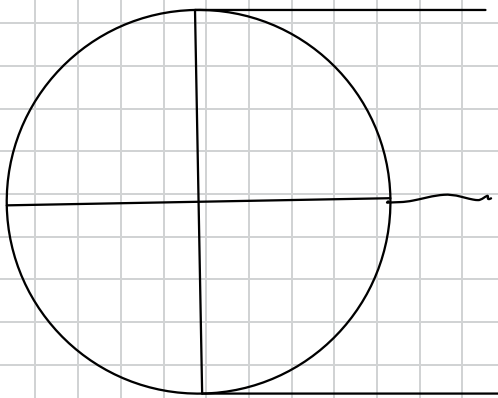


$$y(t) = \frac{d}{2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\frac{1}{2}T} \cdot t\right)$$

$$y(t) = \frac{d}{2} \sin\left(\frac{4\pi}{T} t\right)$$

9.- ¿Pueden anularse simultáneamente la velocidad y la aceleración de un movimiento armónico simple?

NO



$v = 0$, a_{max}

v_{max} , $a = 0$

$v = 0$, a_{max}

10.- ¿En qué posición del movimiento armónico simple la velocidad es igual a la mitad de su valor máximo?

$v_{max} = A \cdot \omega \cdot$

Cuando valga la mitad $\Rightarrow v = \frac{A \cdot \omega}{2}$

$v = \frac{A \cdot \omega}{2}$

Tengo que escribir la ecuación del M.A.S. en función de la posición.

$$v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - y^2}$$

Sustituyo el valor de v y hallo el valor de y que le corresponde.

$$\frac{A \cdot \omega}{2} = \omega \cdot \sqrt{A^2 - y^2}$$

$$\frac{A}{2} = \sqrt{A^2 - y^2}$$

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{A^2 - y^2}\right)^2$$

$$\frac{A^2}{4} = A^2 - y^2$$

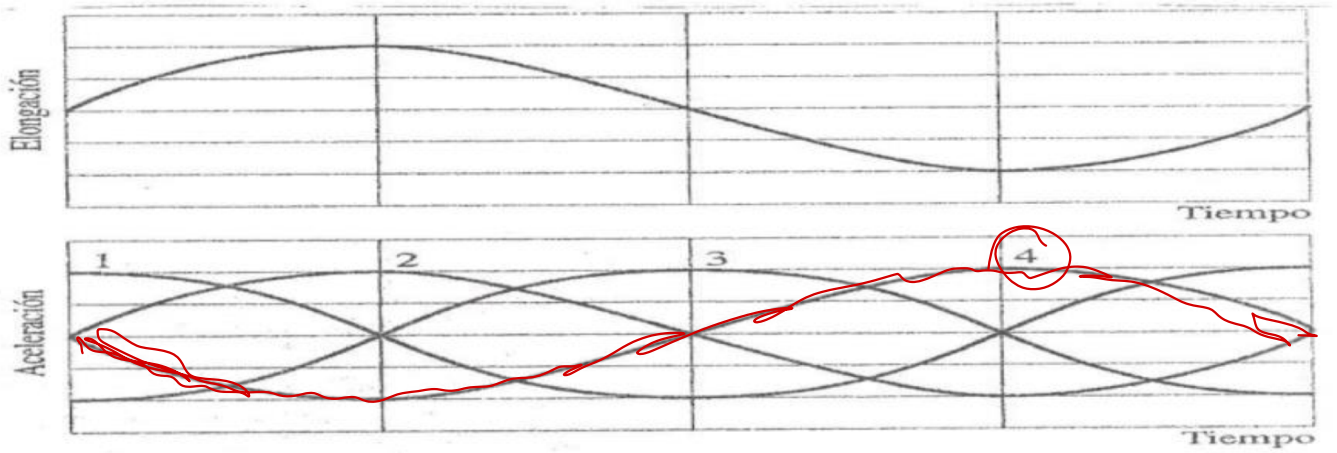
$$y^2 = A^2 - \frac{A^2}{4}$$

$$y^2 = \frac{3A^2}{4}$$

$$y = \sqrt{\frac{3}{4}A^2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}A$$

Se alcanza en dos posiciones

11.- En la primera de las dos gráficas que se muestran, se representa la variación con el tiempo del desplazamiento (elongación) que experimenta una partícula que se mueve con un m.a.s. ¿cuál de las curvas numeradas en la segunda gráfica puede representar la variación de la aceleración con el tiempo del citado m.a.s?



$$y = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t)$$

$$v = \frac{dy}{dt} = A \cdot [\cos(\omega t)] \cdot \omega$$

$$v = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \boxed{-A\omega^2 \cdot \operatorname{sen}(\omega t)}$$

$$a = -[A] \omega^2 \cdot [\operatorname{sen}(\omega t)]$$

$$a = -\omega^2 y$$

Un movimiento armónico simple (M.A.S) se caracteriza por tener una aceleración directamente proporcional a la elongación pero de sentido contrario.

pag 117.

Características dinámicas del M.A.S.

$$y = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

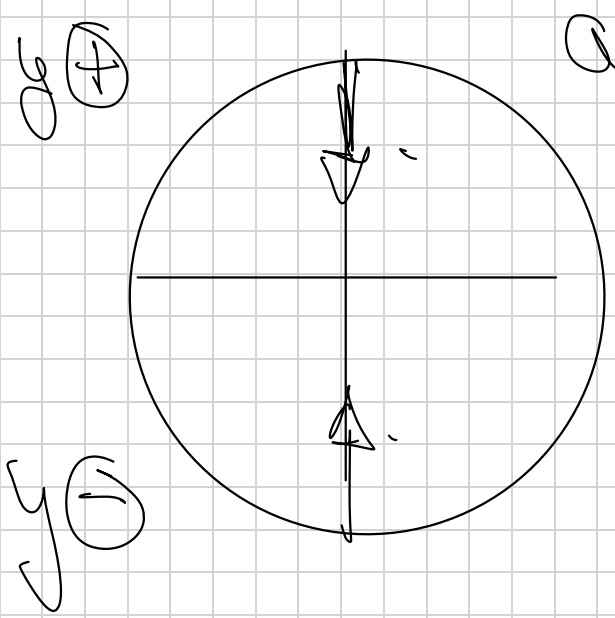
$$v = \frac{dy}{dt} = A \cdot \left[\cos(\omega t + \varphi_0)\right] \cdot \omega$$

$$v = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = A \cdot \omega \left[-\operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)\right] \omega$$

En un M.A.S.

$$a = -A\omega^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$



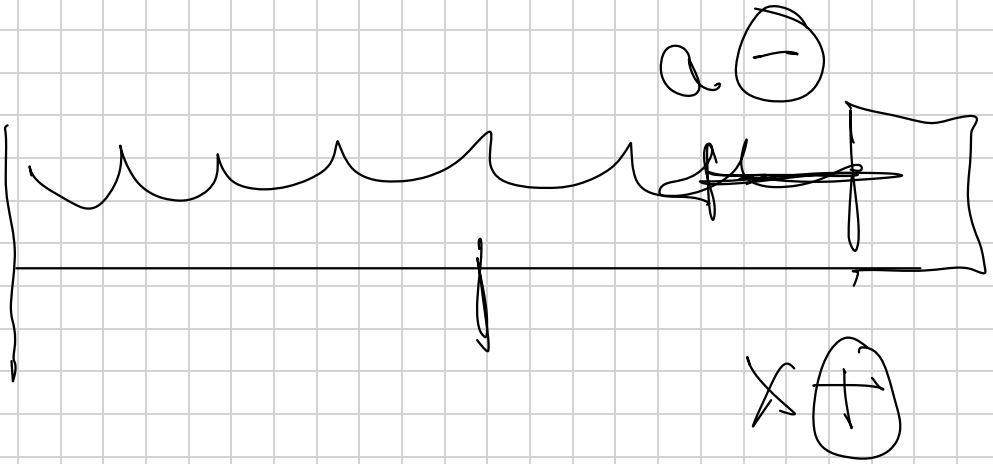
a⊖

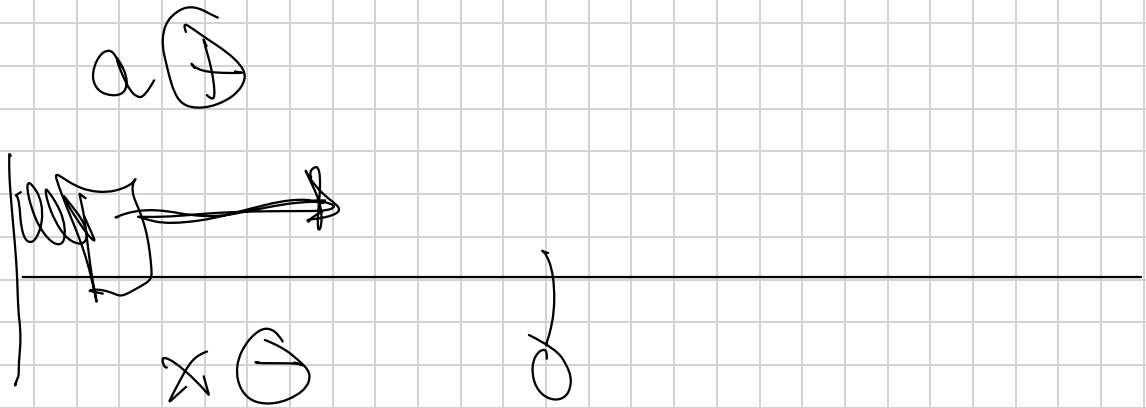
a⊕

$$a = -\omega^2 \cdot y$$

y

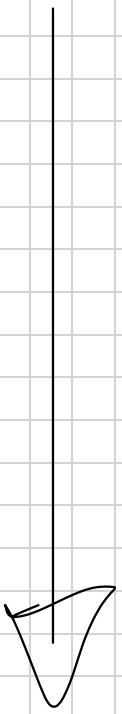






$$a = -\omega^2 \cdot x$$

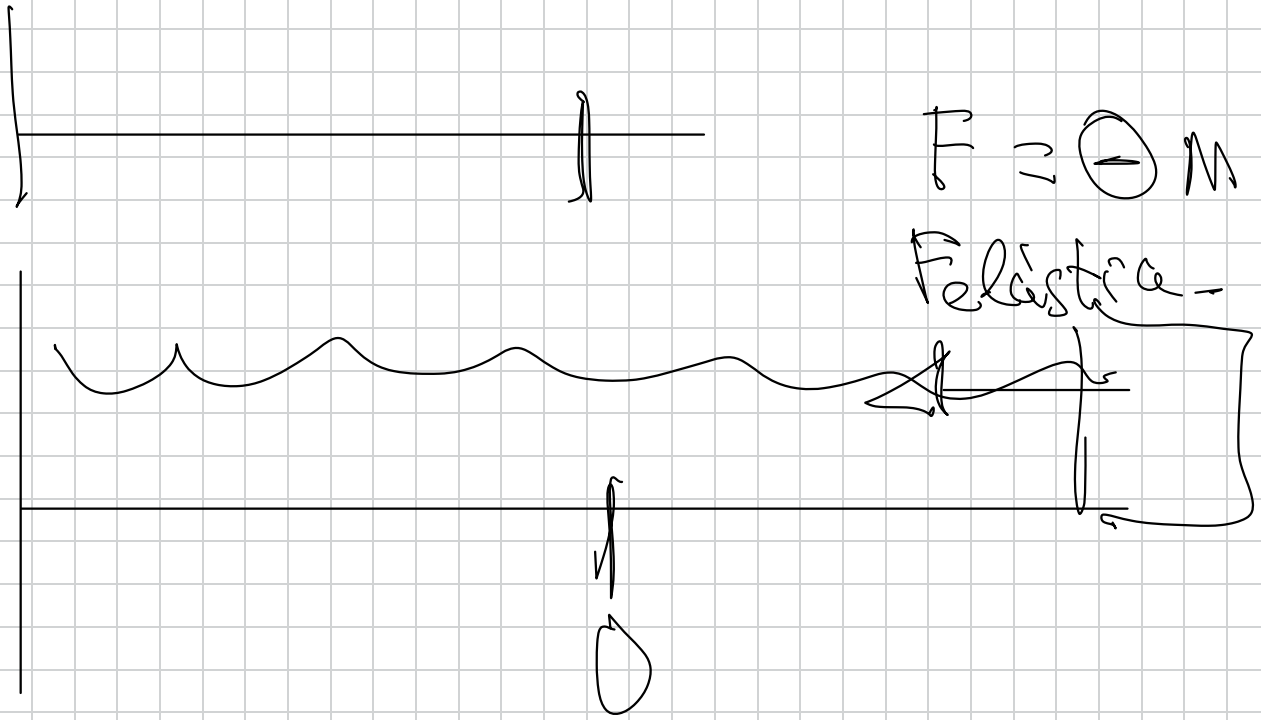
(x) → (+)



Dinámica del M.A.S.

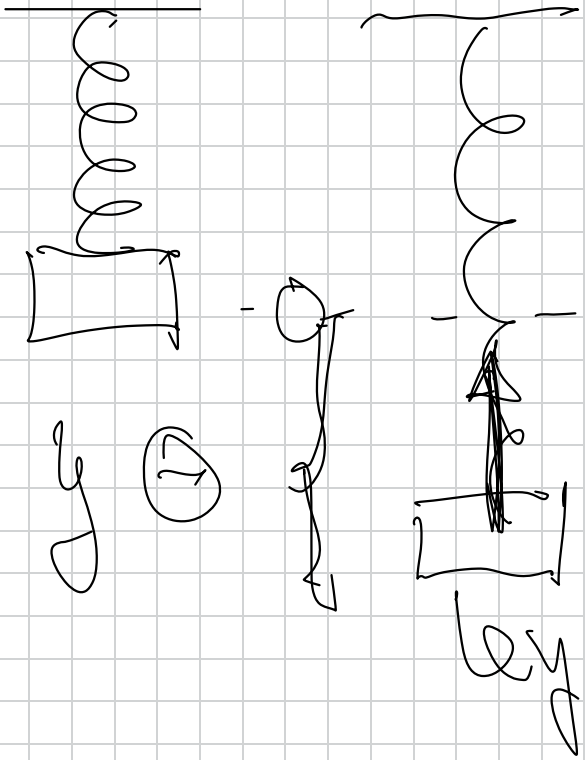
2ª ley de Newton $F = m \cdot a$ — M.A.S.

$$F = m \cdot (-\omega^2 \cdot y)$$



$$F = -m \cdot \omega^2 \cdot y$$

Elástica.



$$F = -\boxed{m \cdot \omega^2} \cdot y$$

$$F = -k \cdot y$$

Ley de Hooke $\quad F = \ominus k \cdot \Theta$

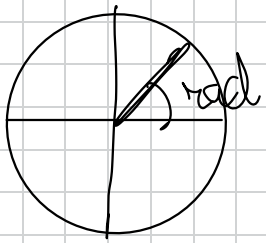
F → N ; k → $N \cdot m^{-1}$; Θ → m

Cada muelle tiene su k.

$$\frac{N}{m} = \boxed{N \cdot m^{-1}}$$

$K = 50 \frac{N}{m}$

$K' = 100 \frac{N}{m}$



$K = m \cdot \omega^2 \quad \left(\frac{N}{m}\right)$

$K = Kg \cdot \left(\frac{rad}{s}\right)^2$

$K = \frac{Kg}{s^2}$

$\frac{Kg}{s^1} \Rightarrow \frac{N}{m} = \frac{Kg \cdot \frac{m}{s^2}}{m} = \frac{Kg}{s^2}$

14.- Una masa de 2 Kg cuelga de un resorte cuya constante elástica es K=200 $N \cdot m^{-1}$ y puede oscilar libremente sin rozamiento. Desplazamos la masa 10 cm por encima de su posición de equilibrio y la soltamos para que empiece a oscilar.

a) Calcula la ecuación del movimiento de la masa

b) Representa gráficamente la posición de la masa en función del instante t

c) Representa gráficamente la velocidad de la masa en función del instante t

d) Representa gráficamente la aceleración de la masa en función del instante t

e) Calcula su velocidad máxima y su aceleración máxima

f) Calcula la fuerza recuperadora y la aceleración cuando la masa se encuentra 5 cm por encima de la posición de equilibrio

g) Repetir el apartado f) para el caso en el que la masa se encuentre 7 cm por debajo de la posición de equilibrio.

$K = 200 \frac{N}{m}$

2 kg

2 kg

$t = 0$

$y = 0 \text{ cm} = 0'1 \text{ m}$

$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$

$y = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$

$y = 0'1 \cdot \operatorname{sen}\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$ (SI)

$K = m \cdot \omega^2$

$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{200}{2}} = \sqrt{100} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

$y = 0'1 \cdot \cos(10t)$ (SI)

Cálculo φ_0.

$t = 0$, $y = 0{,}1\ m$.

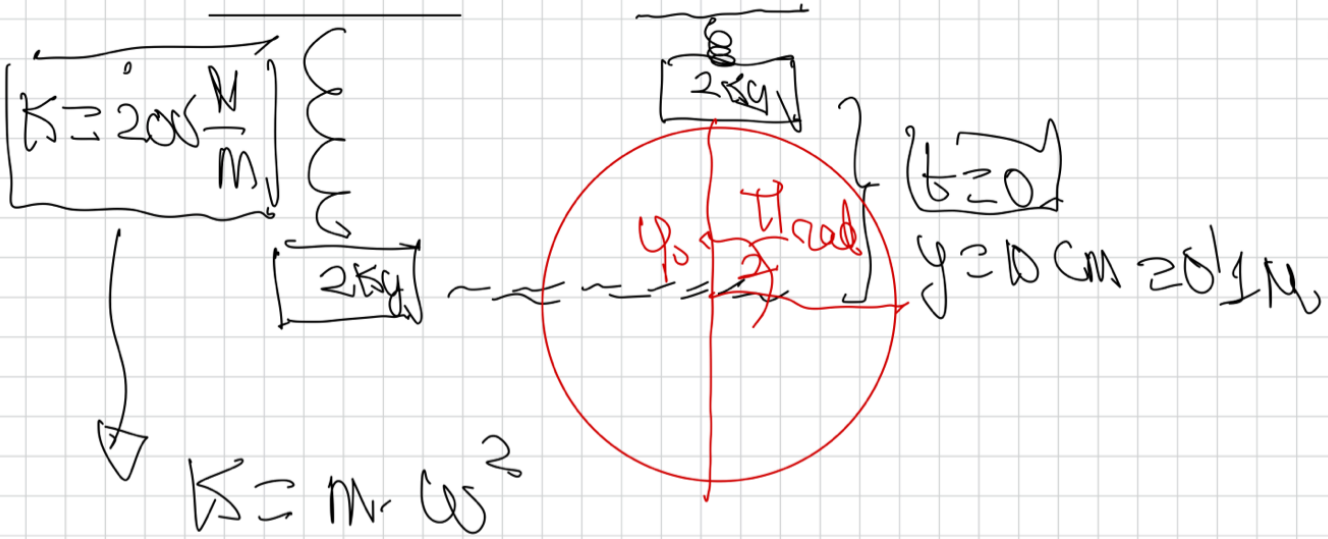
$$y = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

$$0{,}1_m = 0{,}1_m \cdot \operatorname{sen}(\cancel{\omega t}^{\,0} + \varphi_0)$$

$$0{,}1_1 = 0{,}1_1 \cdot \operatorname{sen}(\varphi_0)$$

$$\operatorname{sen}\varphi_0 = \frac{0{,}1_1}{0{,}1_1} = 1$$

$$\varphi_0 = \operatorname{arcsen} 1 = 90° = \frac{\pi}{2}\ rad.$$



$$y = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

$$K = m \cdot \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{200}{2}} = \sqrt{100} = 10 \ \frac{rad}{s}$$

$$y = 0'1 \cdot \operatorname{sen}\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \ (SI)$$

$$y = 0'1 \cdot \cos(10t) \ (SI)$$

Representar $y(t) = 0'1 \cdot \cos(10t) \quad (S.I.)$

b) Calculamos la ecuación del M.A.S.

$$y = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

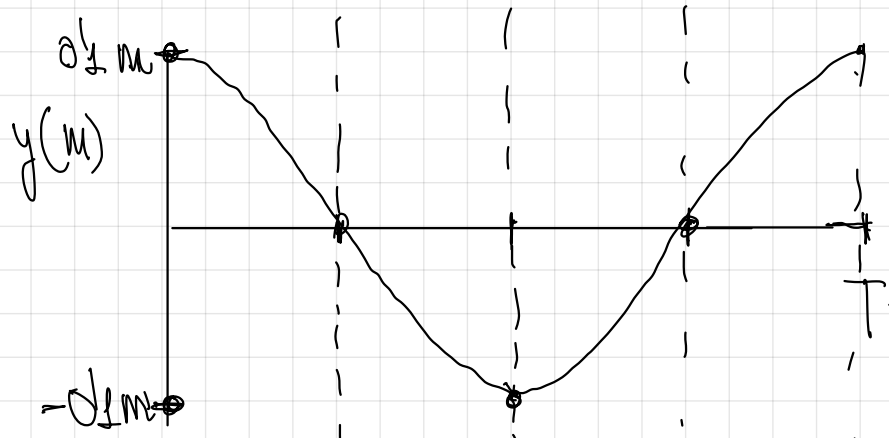
$A = 10\,cm = 0'1\,m$

$K = m \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{200}{2}} = 10\ \frac{rad}{s}$

$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}\ rad$

$$y(t) = 0'1 \cdot \operatorname{sen}\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)\ (S.I.)$$

$$\boxed{y(t) = 0'1 \cos(10t)\ SI}$$ → recordar que $\operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$



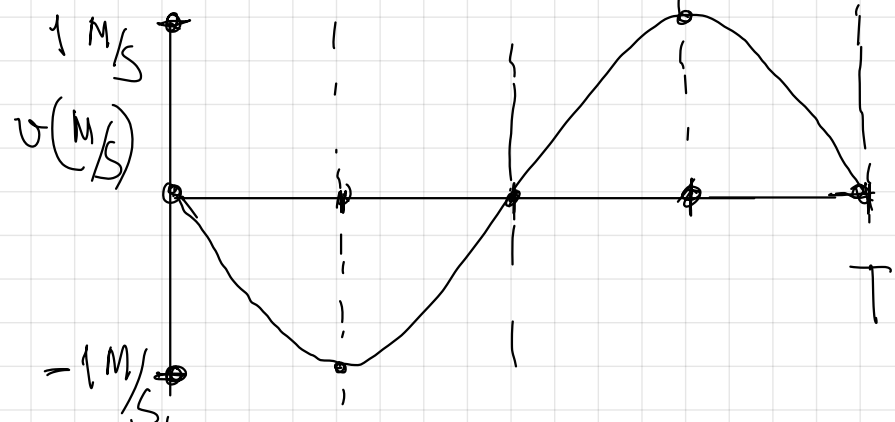
$\omega = \frac{2\pi}{T}$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10} = 0'2\pi\ s$ $\left(\frac{\pi}{5}\ s\right)$

c)

$$v = \frac{dy}{dt} = 0'1 \cdot (-\operatorname{sen}(10t)) \cdot 10$$

$$\boxed{v = -1 \cdot \operatorname{sen}(10t)\ SI}$$

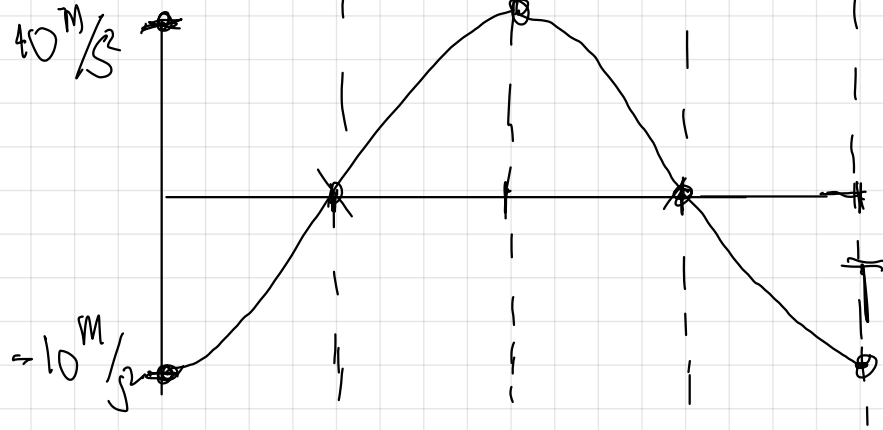


$v_{max} = \pm 1\ m/s$.

d)

$$a = \frac{dv}{dt} = -1 \cdot [\cos(10t)] \cdot 10$$

$$\boxed{a = -10 \cdot \cos(10t)\ S.I.}$$

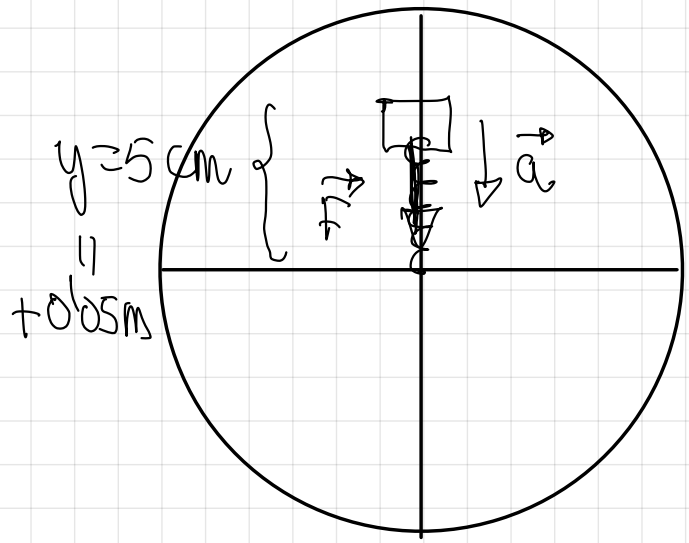


$a_{max} = \pm 10\ m/s^2$

e) $v_{max} = \pm A \cdot \omega = \pm 0'1 \cdot 10 = \pm 1 \, M/s$

$a_{max} = \pm A \omega^2 = \pm 0'1 \cdot 10^2 = \pm 10 \, M/s^2$

f)



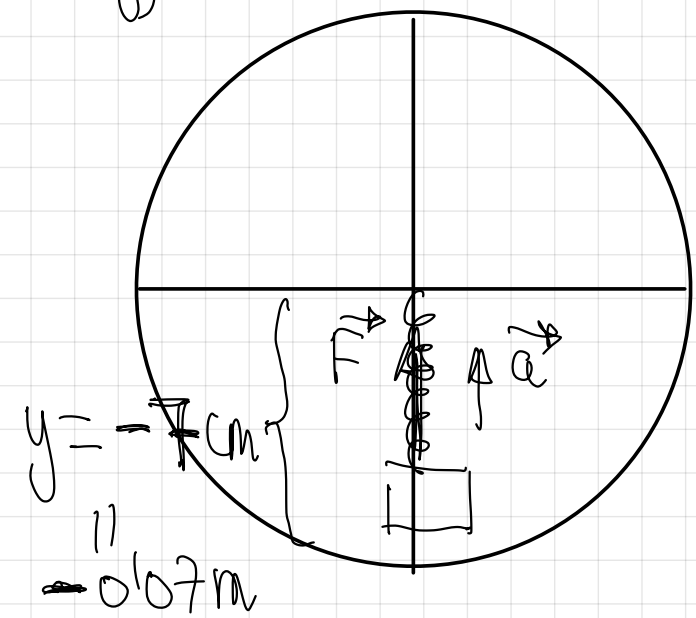
$a = -\omega^2 \cdot y$

$a = -10^2 \cdot (+0'05) = -5 \, M/s^2$

$F = -k \cdot y$

$F = -200 \frac{N}{m} \cdot (+0'05) = -10N$

g)



$a = -\omega^2 \cdot y$

$a = -10^2 \cdot (-0'07) = 7 \, M/s^2$

$F = -k \cdot y$

$F = -200 \frac{N}{m} (-0'07) = 14N$

$$y = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$a = A \cdot \omega \cdot [-\operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)] \cdot \omega \cdot$$

$$a = -\omega^2 \cdot y$$

$$F = m \cdot a = m \cdot (-\omega^2 y)$$

$$F = -m\omega^2 \cdot y$$

$$F = -k y$$

5.- ENERGÍA DE UN OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE

Pag 119.

E_c, E_m, E_p.

- **E_c de un M.A.S.**

$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$ → v del M.A.S.

$y(t) = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$

$v(t) = \frac{dy}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$

$E_c = \frac{1}{2} m \cdot \left[A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \right]^2$

$$E_c = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \cdot \cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$m A^2 \omega^2 = k$$

$$E_c = \frac{1}{2} k \cdot A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\sin^2(\omega t + \varphi_0) + \cos^2(\omega t + \varphi_0) = 1$$

$$\cos^2(\omega t + \varphi_0) = 1 - \sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

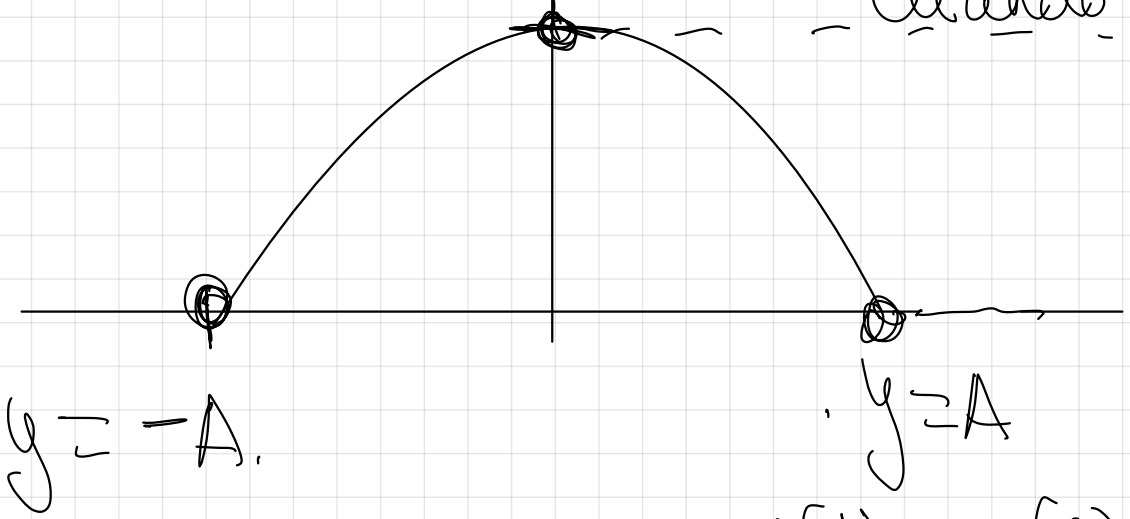
$$E_c = \frac{1}{2} k A^2 \left(1 - \sin^2(\omega t + \varphi_0)\right)$$

$$E_c = \frac{1}{2} k \cdot \left(A^2 - A^2 \cdot \sin^2(\omega t + \varphi_0)\right)$$

y^2.

$$E_C = \frac{1}{2} k (A^2 - y^2)$$

E_C



$x(t)$ o $y(t)$

la $E_{C\,max}$ se da cuando $y = 0$.

$$E_{C_{max}} = \frac{1}{2} k A^2$$

$$E_m = E_{C_{max}} + E_P$$

$$E_m = \frac{1}{2} k A^2.$$

$E_m = E_{c\,max}$

$$E_m = E_c + E_p$$

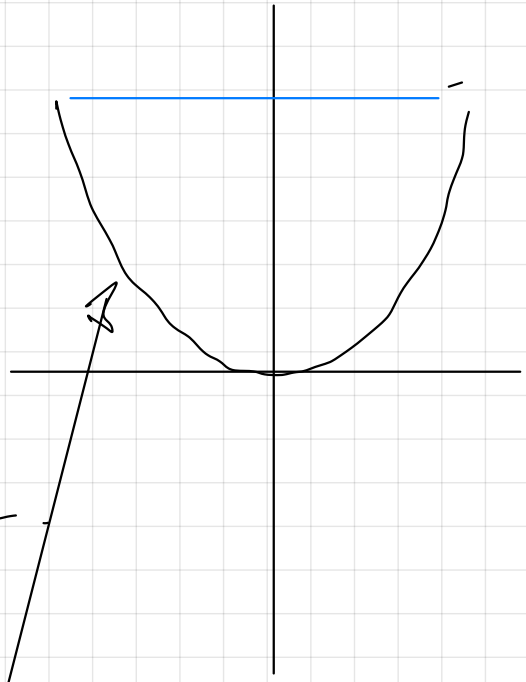
$$\frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} k (A^2 - y^2) + E_p$$

$$E_p = \frac{1}{2} k A^2 - \frac{1}{2} k (A^2 - y^2)$$

$$E_p = \frac{1}{2} k A^2 - \frac{1}{2} k A^2 + \frac{1}{2} k y^2$$

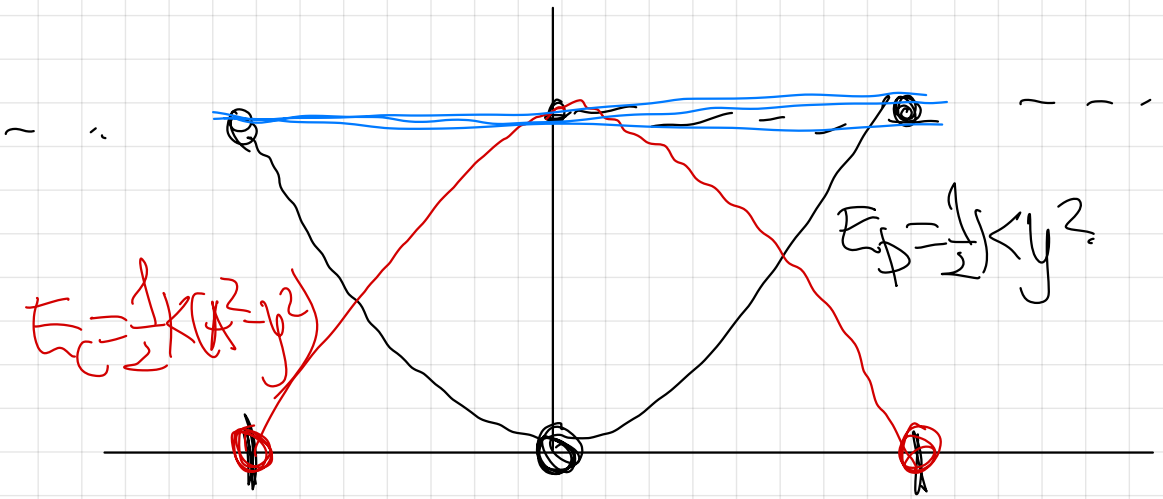
$$\boxed{E_p = \frac{1}{2} k y^2}$$

$E_m = \frac{1}{2} k A^2$



$E_m = \frac{1}{2} k A^2$.

$E_{p\,max} = \frac{1}{2} k A^2$.



$E_{c\,max} = \frac{1}{2} k A^2$.

$y = -A$ $\quad y = 0$ $\quad y = A$.

17.- Un cuerpo de 800 g de masa describe un m.a.s con una elongación máxima de 30 cm y un periodo de 2 s. Calcula su máxima energía cinética.

$m = 800\,g = 0{,}8\,kg$

$y_{max} = A = 30\,cm = 0{,}3\,m.$

$T = 2\,s.$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

$K = m \cdot \omega^2$

$K = 0{,}8 \cdot \left(\frac{2\pi}{2}\right)^2$

$K = 7{,}9\ \frac{N}{m}$

$E_{c\,max} = E_m = \frac{1}{2} K \cdot A^2$

$E_{c\,max} = E_m = \frac{1}{2} 7{,}9 \cdot (0{,}3)^2$

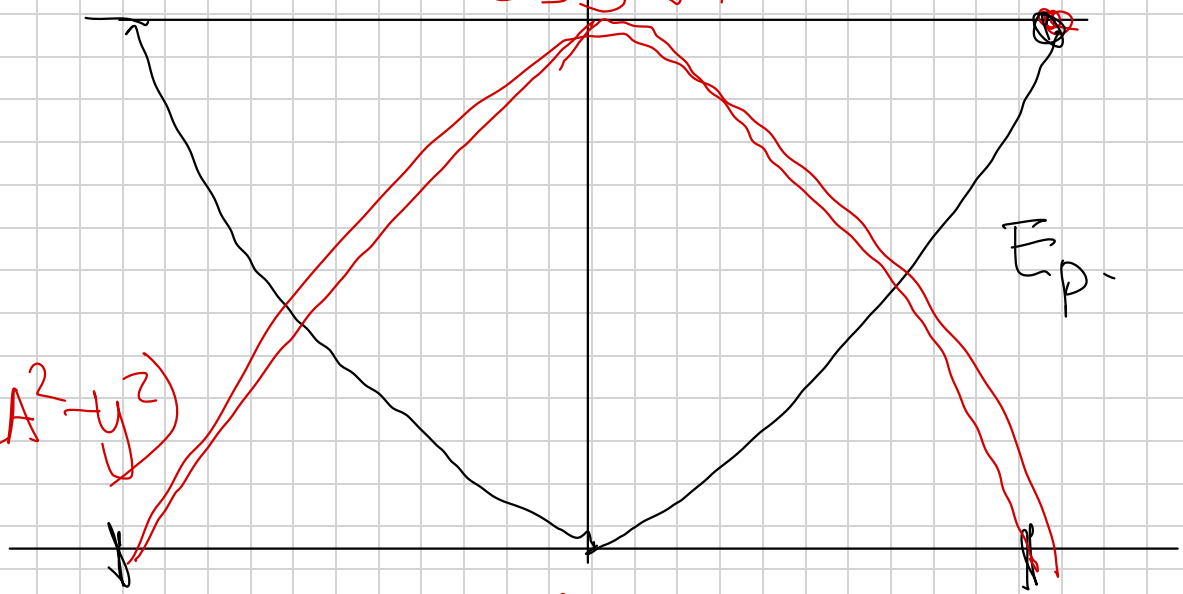
$E_{c\,max} = 0{,}35\ J$

$E_p = \frac{1}{2}ky^2$.

$E_{max} = \frac{1}{2}kA^2$.

$0.35\,J$.

$E_k = \frac{1}{2}(A^2 - y^2)$



$y = -0.3\,m$.

$y = 0$.

$y = 0.3\,m$

$E_k = \frac{1}{2}kA^2$.

$E_k = E_{max} = 0.35\,J$.

18.- Una masa de 20g realiza un movimiento vibratorio armónico en el extremo de un resorte que da dos oscilaciones por segundo a lo largo del eje X, siendo la amplitud de 5 cm.

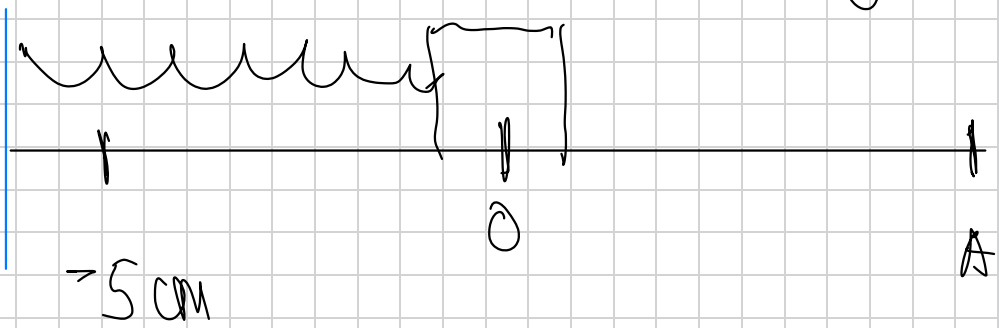
a) Calcula la velocidad máxima de la masa que oscila

b) Calcula la aceleración de la masa en el extremo de su movimiento

c) Calcula la constante K del resorte

d) Realiza un análisis de las variaciones energéticas

e) Calcula su energía mecánica, su energía cinética y su energía potencial cuando se encuentra en la posición x=4 cm



$f = \frac{n^{\circ}\ osc}{t} = \frac{1}{T}$

$f = 2\ \frac{osc}{s} = 2\ Hz.$

$A = 5\ cm.$

$E_{C\,max} = E_m$

$E_m = \frac{1}{2} k \cdot A^2.$

$\frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m \cdot v_{max}^2.$

$K = m \cdot \omega^2$.

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \frac{1}{T}$

$\omega = 2\pi f$

$K = m \cdot (2\pi f)^2 = m\, 4\pi^2 f^2$.

$y = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$

$v = \frac{dy}{dt} = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \cdot \omega$

$v = A \cdot \omega \cdot \cos[\omega t + \varphi_0]$

$v_{max} = \pm A \cdot \omega \cdot \pm 1$.

$\frac{1}{2} K \cdot A^2 = \frac{1}{2} m \cdot v_{max}^2$.

$\frac{1}{2} m\, 4\pi^2 f^2 A^2 = \frac{1}{2} m\, v_{max}^2$.

$v_{max} = \sqrt{4\pi^2 f^2 A^2}$.

$v_{max} = 2\pi f \cdot A$.

$\boxed{v_{max} = A \cdot \omega}$.

$v_{max} = \pm A \cdot \omega$.

$$v_{max} = A \cdot \omega$$

$$v_{max} = A \cdot 2\pi f = 0{,}05 \cdot 2\pi \cdot 2 = 0{,}628 \ m/s$$

$$a = \frac{dv}{dt} = A \cdot \omega \cdot [-\operatorname{sen}(\omega t + \varphi)] \cdot \omega$$

$$a = -[A]\omega^2 \cdot [\operatorname{sen}(\omega t + \varphi)]$$

$\downarrow$ y

En el extremo: a_{max}

$$a_{max} = \pm A \omega^2$$

$$a_{max} = \pm 0{,}05 \cdot (2\pi \cdot 2)^2$$

$$a_{max} = \pm 7{,}9 \text{ m/s}^2$$

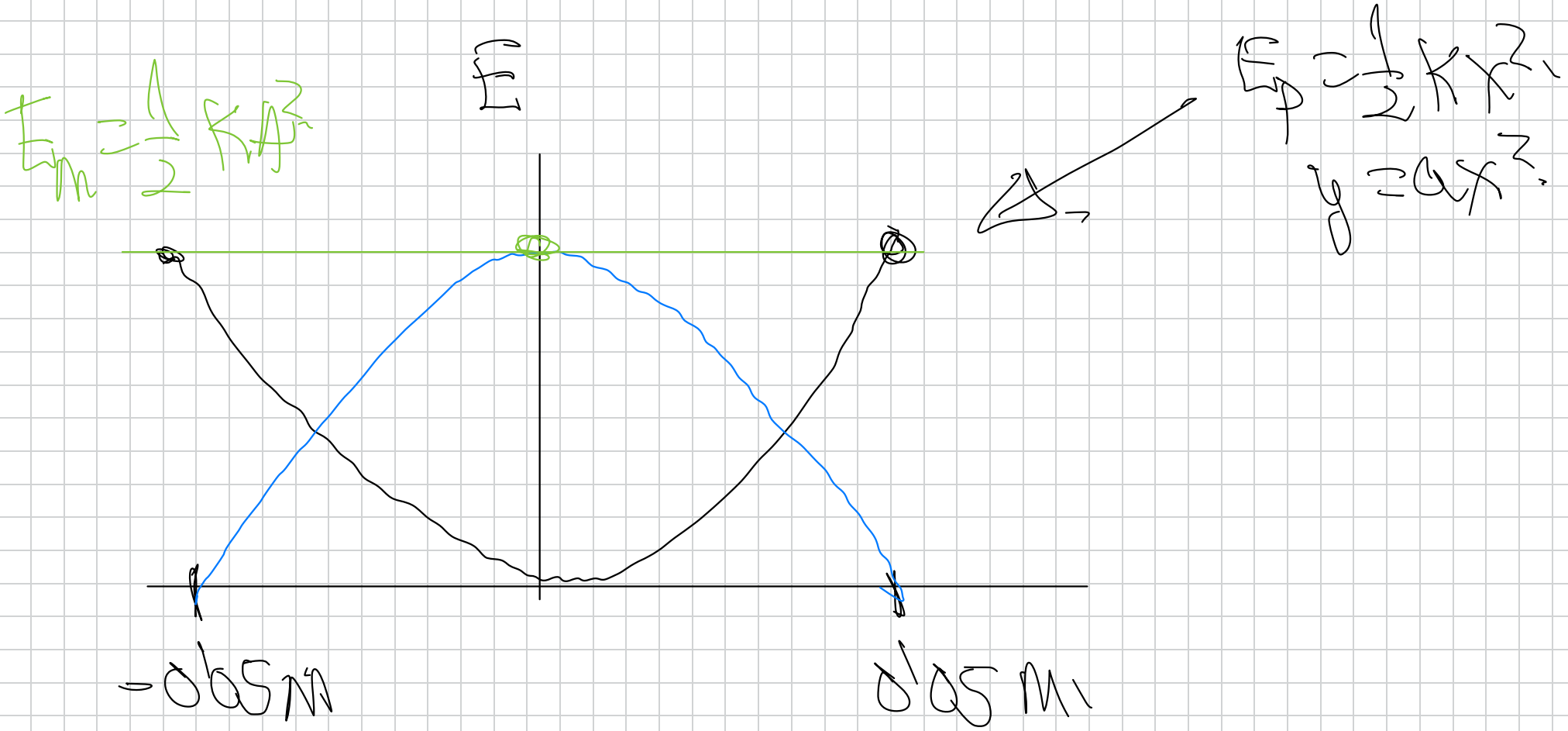
$$a = -\omega^2 \cdot y \quad y = A$$

$$a_{max} = -\omega^2 \cdot A$$

$$a_{max} = \pm 7{,}9 \text{ m/s}^2$$

c) $$k = m \cdot \omega^2 = m (2\pi f)^2 = m \cdot 4\pi^2 f^2$$

$$k = 3{,}16 \text{ N/m}$$



e)

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} 3'16 \cdot (0'04)^2 = 2'5 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

$$E_c = \frac{1}{2} k (A^2 - x^2) = \frac{1}{2} 3'16 \left[(0'05)^2 - (0'04)^2 \right] \simeq 1'4 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

$$E_m = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} 3'16 \cdot (0'05)^2 = 3'9 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

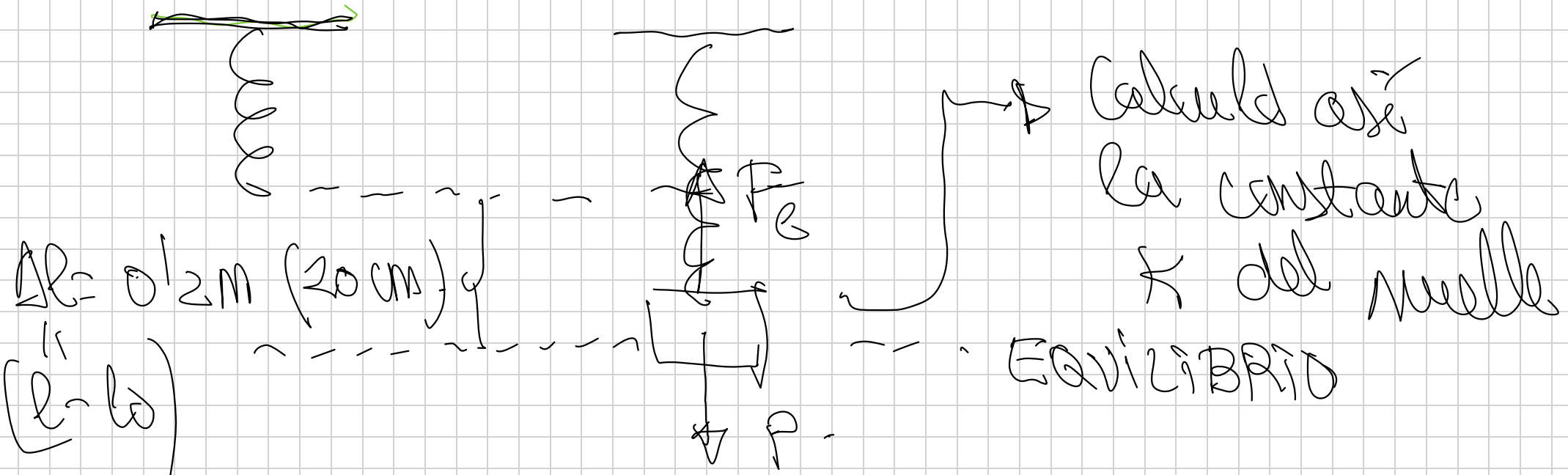
27.- Cierto muelle que se deforma 20 cm cuando se le cuelga en vertical una masa de 1 kg, se coloca sin deformación, unido a la misma masa sobre una superficie horizontal sin rozamiento. En esta posición, se tira de la masa hasta que el muelle se alarga 2 cm, y posteriormente se suelta. $g=9{,}8\ m/s^2$

a) Hallar la ecuación del movimiento armónico simple resultante y representarla gráficamente.

b) Representar gráficamente la fuerza, recuperadora, en función de la posición, hallando sus valores máximos y calculando su valor cuando x= 1 cm.

c) Hallar las energías cinética, potencial elástica y mecánica cuando ha transcurrido un tiempo t=3T/4

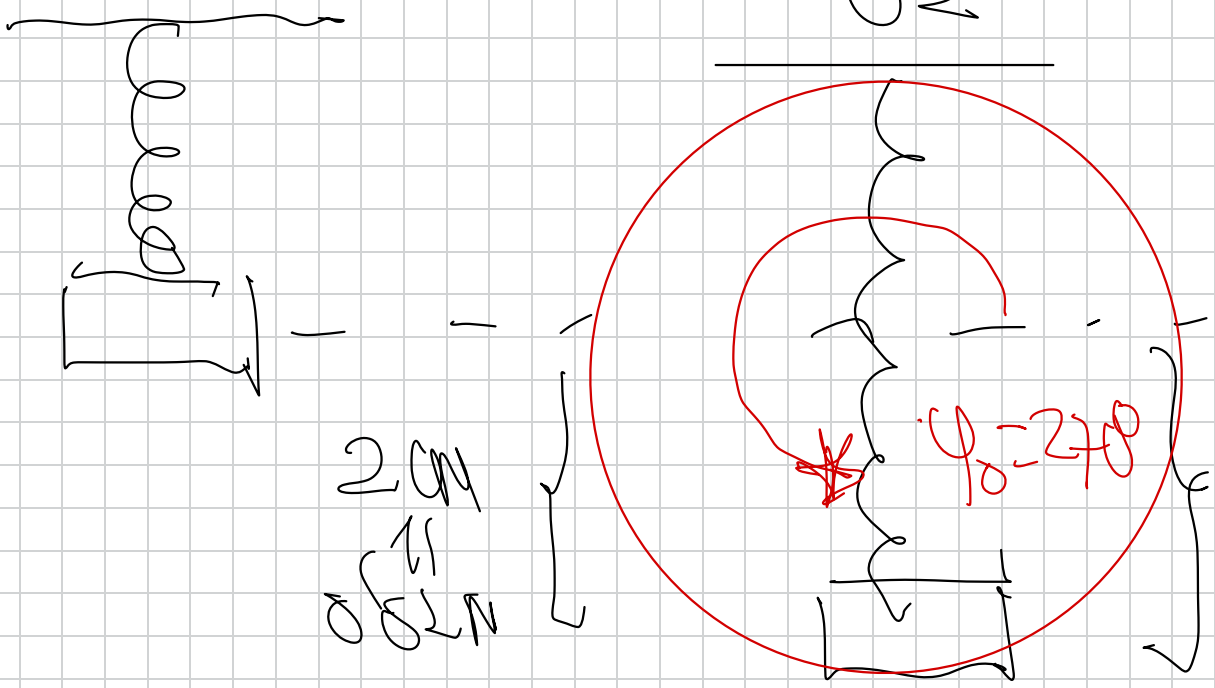
d) Representar los valores de la energía potencial elástica, energía cinética, y energía mecánica en función del tiempo durante un periodo T. Indicar en la gráfica los valores de estas energías cuando t=0.



$$|\vec{F}| = |\vec{F}_e|$$

$$m \cdot g = k \cdot \Delta l$$

$$k = \frac{m \cdot g}{\Delta l} = \frac{1 \cdot 9{,}8}{0{,}2} = 49 \ \frac{N}{m}$$



$A = 0{,}2 \ m$

$\rightarrow \underline{E = 0 J}$

$$y = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

$$\boxed{y = 0{,}02 \cdot \operatorname{sen}\left(7t + \frac{3}{2}\pi\right)}$$

$t = 0$

$y = -0{,}02\,m$

$y = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$

$-0{,}02 = 0{,}02 \cdot \operatorname{sen}(\varphi_0)$

$\operatorname{sen}(\varphi_0) = -1$

$\varphi_0 = 270^\circ = \frac{3}{2}\pi\,rad$

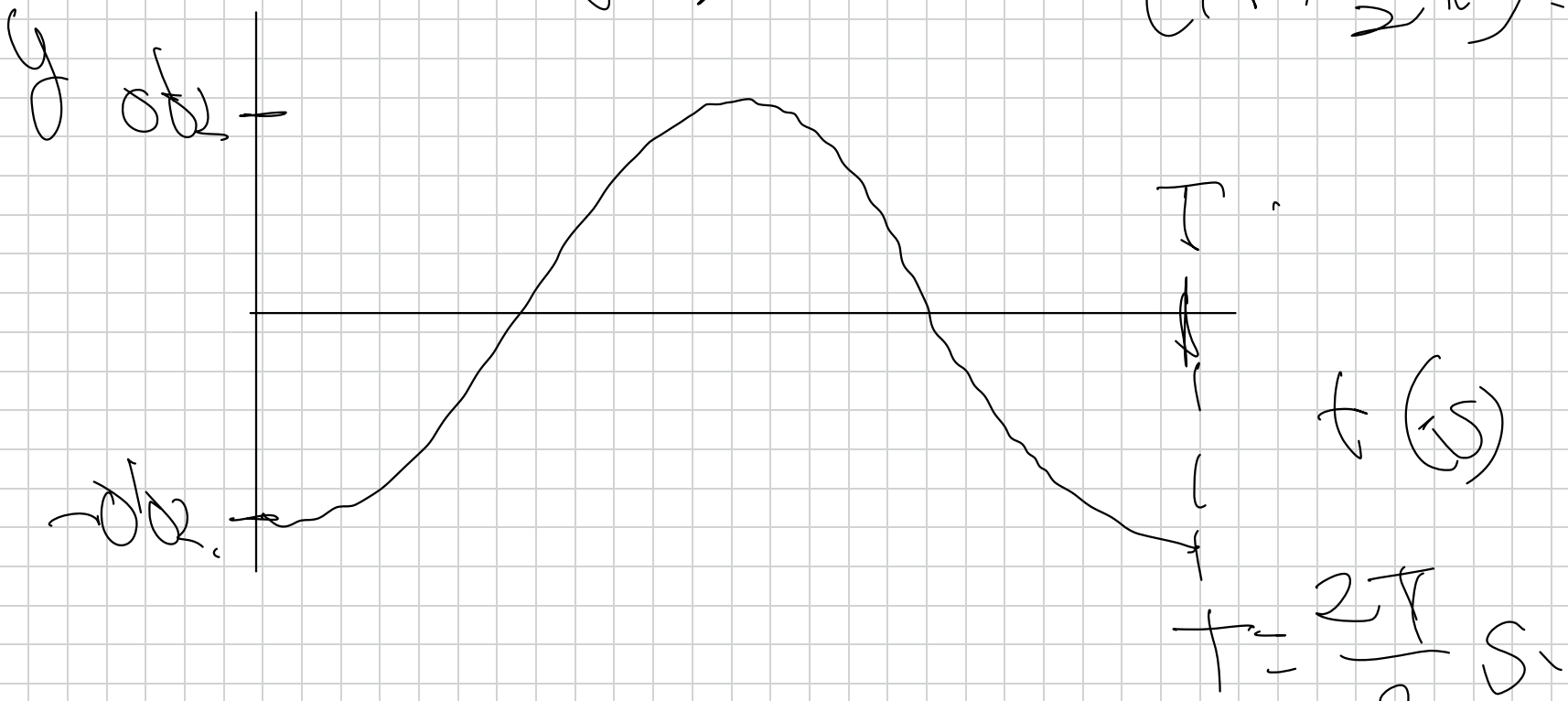
$49\,\frac{N}{m}$

$F = m \cdot \omega^2$

$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{49}{1}} = 7\,\frac{rad}{s}$

$$y = 0{,}02 \cdot \operatorname{sen}\left(7t + \frac{3}{2}\pi\right)$$

$$y(t) = \sqrt{2} \cdot \operatorname{sen}\left(7t + \frac{3}{2}\pi\right)$$



$$T = \frac{2\pi}{7}\ s.$$

$$\omega = 7\ \frac{rad}{s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{7}\ s.$$

29.- Un cuerpo realiza un movimiento vibratorio armónico simple.

a) Escriba la ecuación del movimiento si la aceleración máxima es de $5\pi^2$ cm·s^{-2}, el periodo de las oscilaciones 2s y la elongación del cuerpo al iniciarse el movimiento 2,5 cm.

b) Represente gráficamente la elongación y la velocidad en función del tiempo y comente la gráfica.

$a_{max} = 5\pi^2 \frac{cm}{s^2}$

$5\pi^2 \frac{cm}{s^2} \cdot \frac{1\ m}{100\ cm} =$

$a_{max} = A \cdot \omega^2$

$a_{max} = 0{,}05\pi^2 \frac{m}{s^2}$

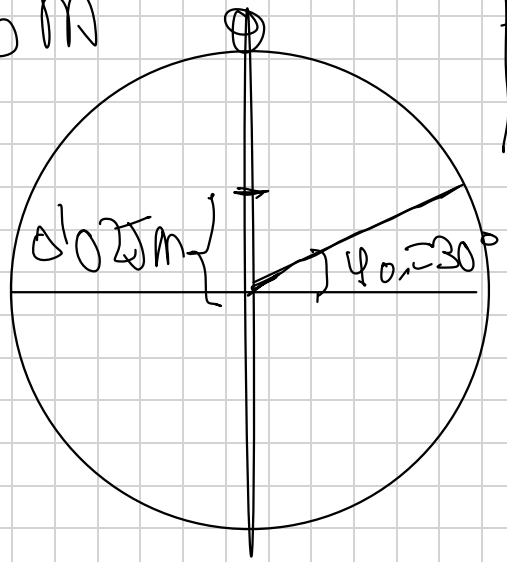
$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \frac{rad}{s}$

$A = \frac{a_{max}}{\omega^2} = \frac{0{,}05\pi^2}{\pi^2} = 0{,}05\ m$

$y = A \cdot sen(\omega t + \varphi_0)$

$$y = 0{,}05 \cdot \operatorname{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

0,05 m



$t = 0$

$y = 0{,}025$ m

$$y = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

$$0{,}025 = 0{,}05 \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$0{,}025 = 0{,}05 \cdot \operatorname{sen}\varphi_0$$

$$\operatorname{sen}\varphi_0 = \frac{0{,}025}{0{,}05} = \frac{1}{2}$$

$$\varphi_0 = \operatorname{arcsen}\frac{1}{2} = 30° = \frac{\pi}{6}\ \text{rad}$$

$y = 0{,}05 \cdot \operatorname{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$

b) La velocidad de vibración se obtiene derivando la elongación respecto al tiempo.

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 0{,}05 \cdot \pi \cdot \cos\left(\pi \cdot t + \tfrac{\pi}{6}\right) m/s$$

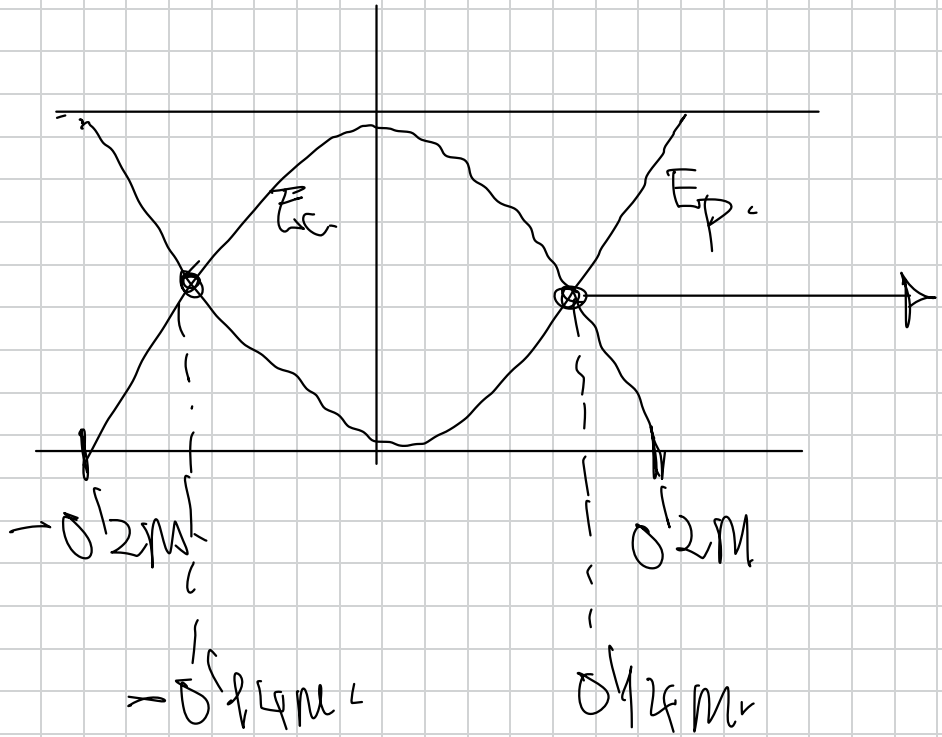
La velocidad es máxima (en valor absoluto) en aquellos instantes en que el móvil pasa por la posición de equilibrio, y nula cuando el móvil se encuentra en sus punto de elongación máxima.

La velocidad máxima es *0,05π m/s*. Ambas funciones (seno y coseno) están desfasadas π/2.

Para t = 0 s, el movimiento comienza con una elongación igual a 0,025 m (la mitad de la amplitud) y con una velocidad de 0,136 m/s (la velocidad máxima es de 0,157 m/s)

Como todo m.a.s, la gráfica representa un movimiento periódico.

21.- Una partícula describe un movimiento armónico simple, cuya amplitud de 0,2 m. ¿Cuál será el desplazamiento en el instante en el que las energías cinética y potencial son iguales?.



$$x = \frac{A}{\sqrt{2}} = \frac{0'2}{\sqrt{2}} = \pm 0'14\ m$$

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} k (A^2 - x^2)$$

las igualo y calculo x^2

$$E_p = E_c$$

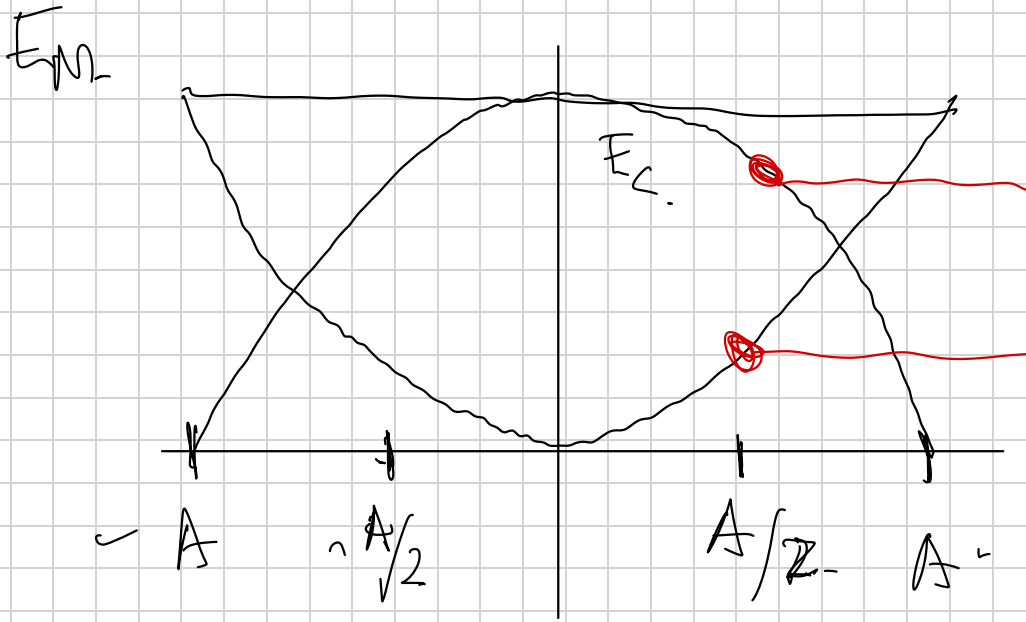
$$\frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k \cdot (A^2 - x^2)$$

$$x^2 = A^2 - x^2$$

$$x^2 + x^2 = A^2$$

$$2x^2 = A^2$$

22.- Un oscilador armónico se encuentra en un instante en la posición x=A/2. ¿Qué relación existe entre sus energías cinética y potencial?



$$E_c = \frac{1}{2} k (A^2 - x^2)$$

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

$$\boxed{x = \frac{A}{2}} \qquad \frac{E_c}{E_p}$$

$$E_c = \frac{1}{2} k \left(A^2 - \left(\frac{A}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{2} k \left[A^2 - \frac{A^2}{4}\right] = \frac{1}{2} k \left[\frac{3}{4} A^2\right]$$

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k \left(\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} k \frac{A^2}{4}$$

$$\frac{E_c}{E_p} = \frac{\frac{1}{2} k \left[\frac{3}{4} A^2\right]}{\frac{1}{2} k \left[\frac{1}{4} A^2\right]}$$

$$\frac{E_c}{E_p} = 3 \qquad \boxed{E_c = 3 E_p}$$

23.- Explica cómo varía la energía de un oscilador cuando
a) Se duplica la amplitud
b) Se duplica la frecuencia
c) Se duplica la amplitud y se reduce la frecuencia a la mitad

$$E_m = \frac{1}{2} k A^2$$

$$E'_m = \frac{1}{2} k (2A)^2 = \frac{1}{2} k 4 A^2$$

$$\frac{E_m'}{E_m} = \frac{\frac{1}{2} K 4 A^2}{\frac{1}{2} K A^2}$$

$$\boxed{E_m' = 4 E_m}$$

b) $E_m = \frac{1}{2} K \cdot A^2$ Si se duplica f.

$$E_m = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \cdot A^2$$

$$E_m = \frac{1}{2} m (2\pi f)^2 A^2$$

$$E_m = \frac{1}{2} m 4\pi^2 f^2 A^2$$

$$E_m' = \frac{1}{2} m 4\pi^2 (2f)^2 A^2$$

$$\frac{E_m'}{E_m} = 4 \qquad E_m' = 4 E_m$$

c) $$E_m = \frac{1}{2} m 4\pi^2 f^2 A^2.$$

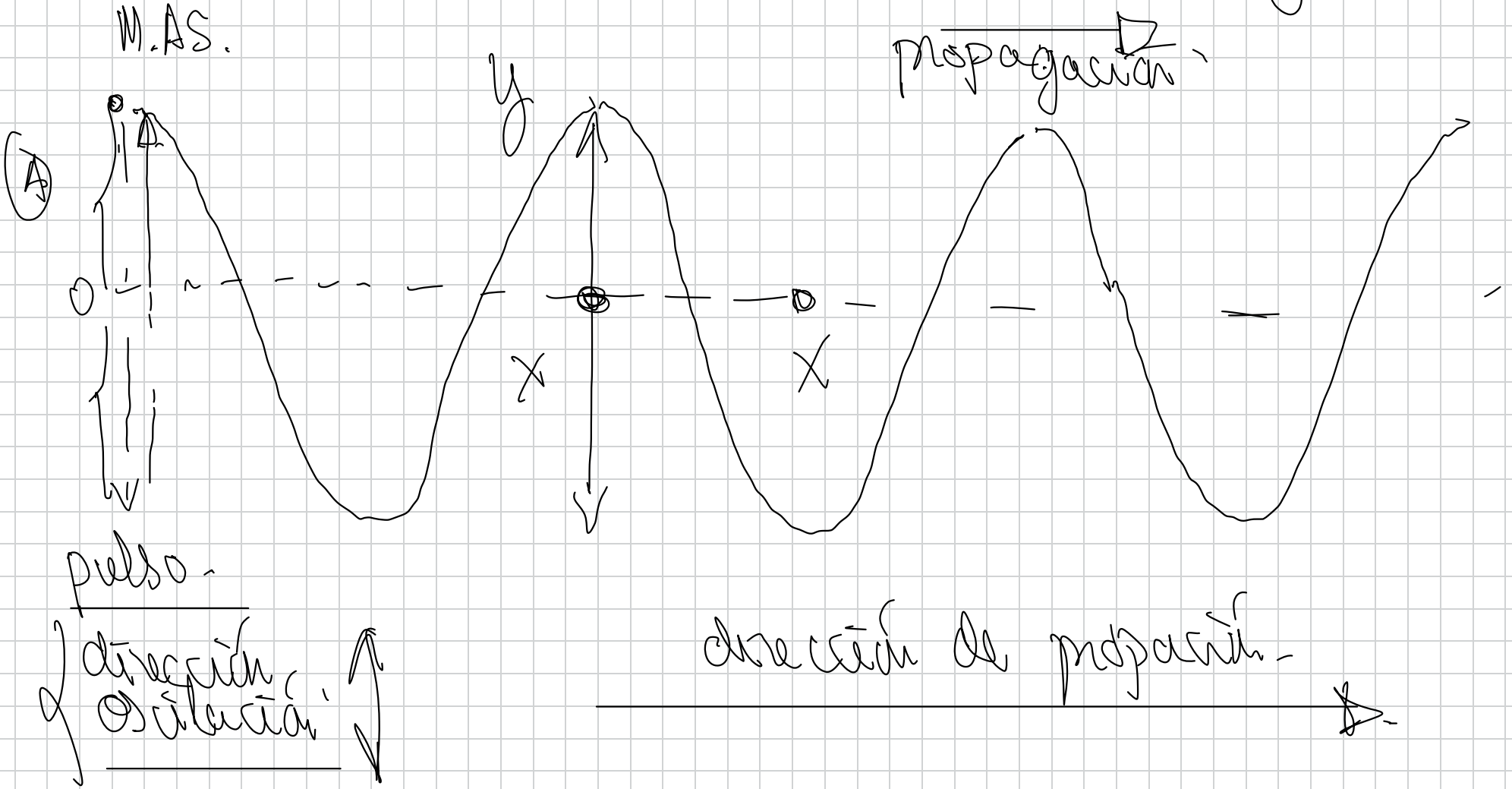
$$E_m' = \frac{1}{2} m 4\pi^2 \cdot \left(\frac{f}{2}\right)^2 \cdot (2A)^2.$$

$E_m' = E_m$ no cambia.

pag 123	y sucesivas del libro.

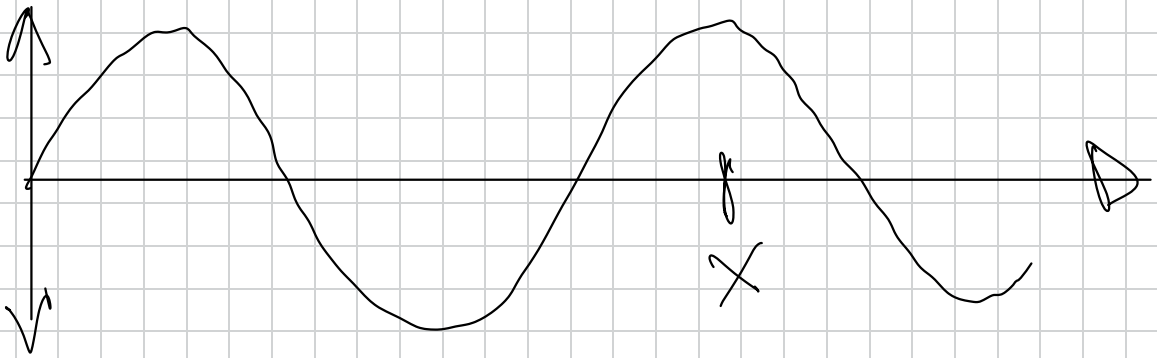
Movimiento ondulatorio.

Fenómenos ondulatorios. Pulsos y ondas.



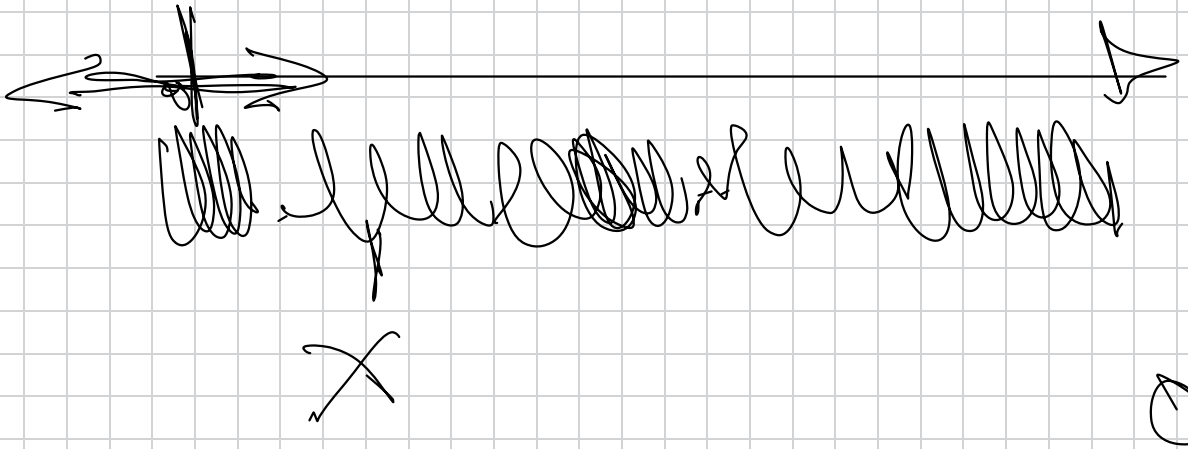
Criteris de classificació

- Direccions de oscil·lació i de propagació.



Direcció de oscil·lació ⊥ a la direcció de propagació

Onda transversal



Direcció de oscil·lació i la de propagació és la mateixa.

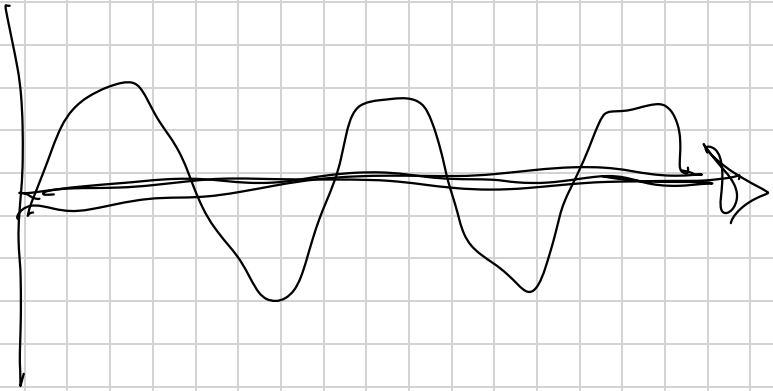
Onda longitudinal.

Medio en el que propagan.

- Ondas mecánicas o materiales. Necesitan de un medio material para propagarse. (el sonido)

- Ondas electromagnéticas: no necesitan el medio material para propagarse. (la luz)

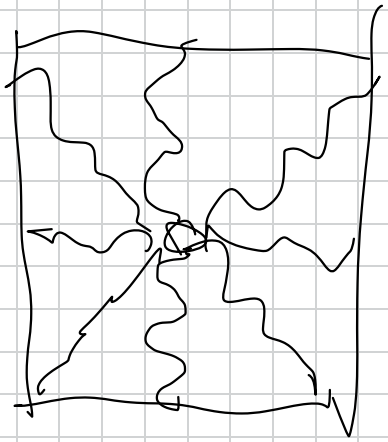
Nº de dimensiones en las que se propagan.



1 dirección

Unidimensionales

(cuerda)



→ bidimensionales

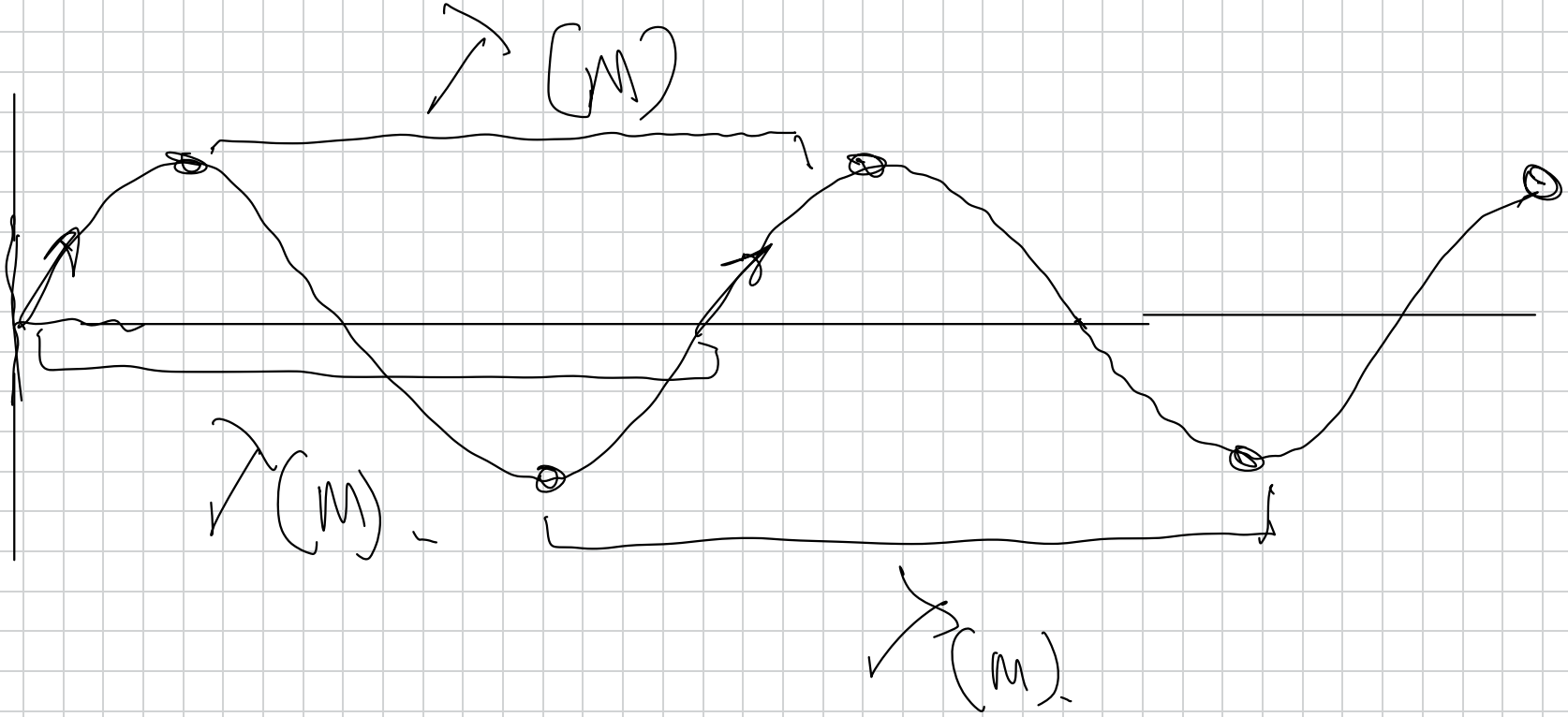
(piedra en el estanque)

→ tridimensionales

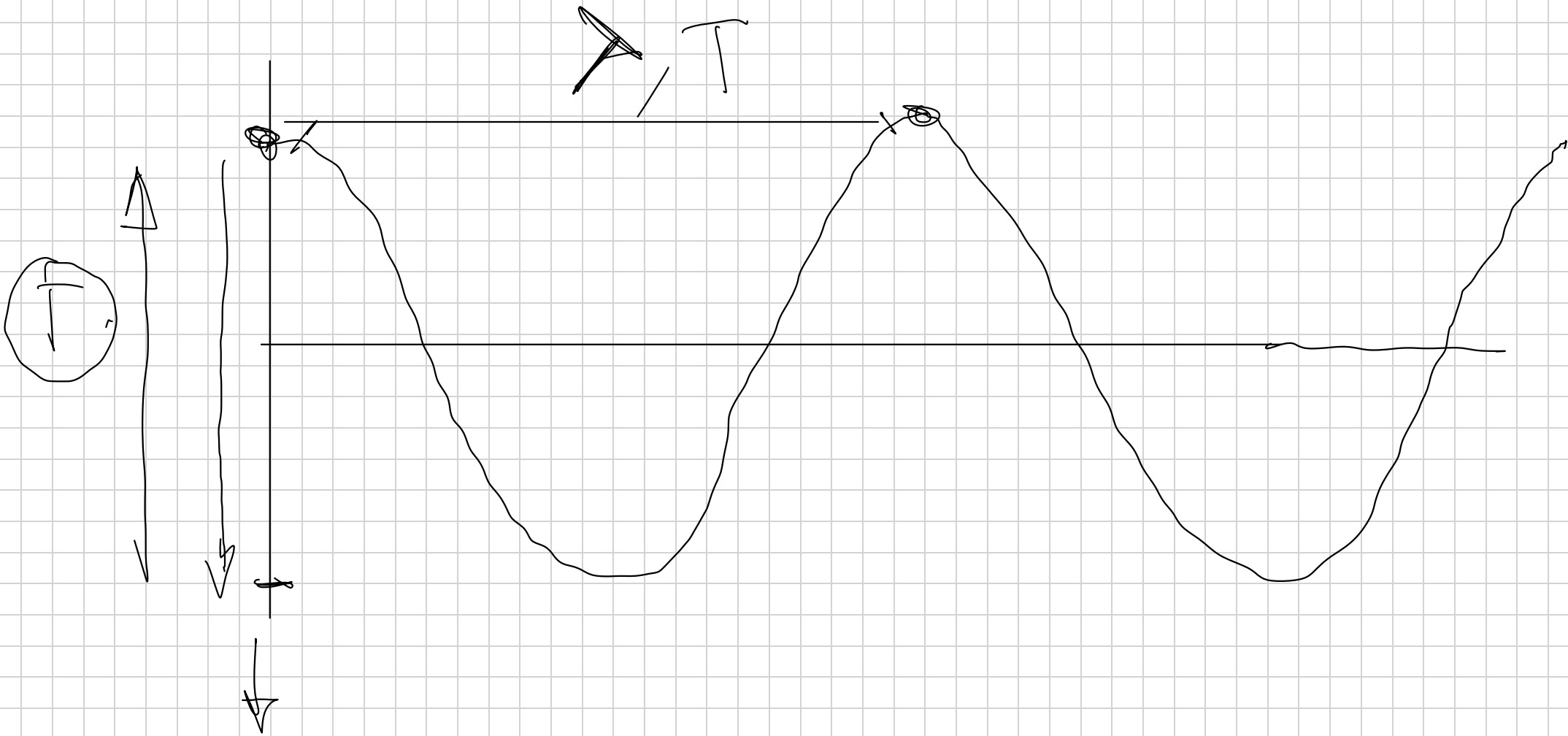
(sonido)

Magnitudes características de una onda

- Longitud de onda (λ)



- Periodo (T)



FOCO

Lugar donde se inicia la perturbación.

Frecuencia:

M.A.S. $f = \frac{\text{Nº osc}}{t}$

onda: $f = \frac{\text{Nº ondas}}{t}$ (1)

$f = \frac{1 \text{ osc}}{T}$

$f = \frac{1 \text{ onda}}{T}$

$f = \frac{1}{T}, \; s^{-1}, \; Hz$



A (m).

$v_p \rightarrow$



No Ox.

$v_{osc.}$

v_p Ox.

v_p = cte dentro del mismo medio.

v del MAS

$v = \frac{dy}{dt}$.

$v = cte = \frac{s}{t}$

$v = \frac{s}{t}$

$v = \frac{\lambda}{T} \left(\frac{m}{s}\right)$

$$v_p = \lambda \cdot \nu \Rightarrow v_p = \frac{S}{t} \qquad v_p = \frac{\lambda}{T}.$$

$$v_p = \lambda \cdot \left[\frac{1}{T}\right] \qquad \boxed{v_p = \lambda \cdot f}.$$

Número de onda k $\quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{rad}{m}\right)$

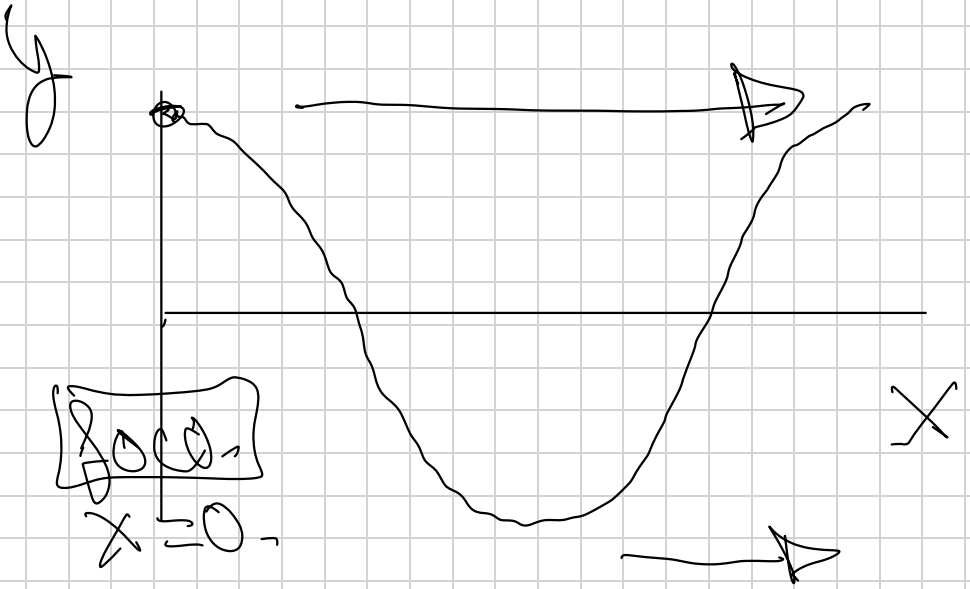
Velocidad angular $\omega = \frac{2\pi}{T}$.
Es la ω del M.A.S de las partículas.

Ecuación de una onda.

M.A.S.



ONDA.

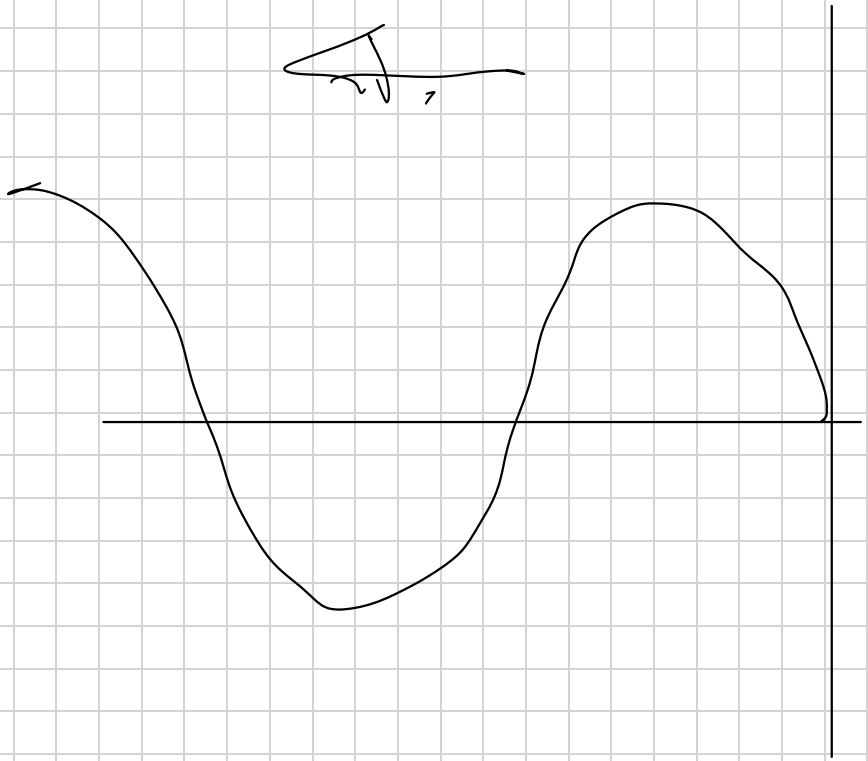


$$y(t) = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

$$y(x,t) = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t \mp kx + \varphi_0)$$

Ángulo de fase inicial en el foco.

$x=0$
$t=0$



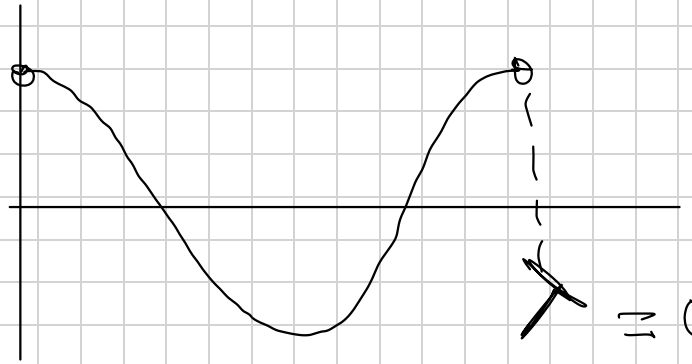
$$y = A \cdot \sin(\omega t \mp kx + \varphi)$$

Una onda de 5 cm de amplitud se propaga en el sentido positivo del eje X. Se sabe que su periodo es $T = 2\,s$, y que el foco en el instante inicial se encuentra en la posición $y = 5$ cm. Su longitud de onda es 1 cm.

a) Escribir la ecuación de la onda en unidades S.I.

$y = A$

$x = 0$
$t = 0$



$$y(x,t) = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t - kx + \varphi_0)$$

$$y(x,t) = 0'05 \cdot \operatorname{sen}(2\pi t - 200\pi x + \varphi_0)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \ \frac{rad}{s}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0{,}01} = 200\pi \ \frac{rad}{m}$$

$x = 0$, $t = 0$ $\Rightarrow$ $y = 0{,}05\,m$.

$$y(x,t) = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t - kx + \varphi_0)$$

$$y(x,t) = A \cdot \operatorname{sen} \varphi_0$$

$$0{,}05 = 0{,}07 \cdot \operatorname{sen} \varphi_0$$

$$\varphi_0 = \operatorname{arcsen} 1 = \frac{\pi}{2} \ rad$$

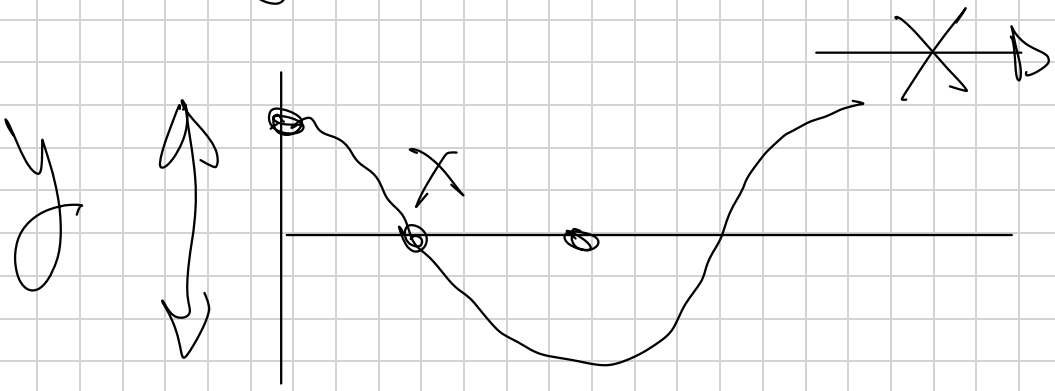
$$\boxed{y(x,t) = 0{,}05 \cdot \operatorname{sen}\left(\pi t - 200\pi x + \frac{\pi}{2}\right) \ (S.I)}$$

$$y(x,t) = 0{,}05 \cdot \cos(\pi t - 200\pi x) \ (SI)$$

b) Calculen su velocidad de propagación.

$$v_p = \frac{\lambda}{T} = \frac{0{,}01\ m}{2\ s} = 5 \cdot 10^{-3}\ m/s.$$

c) Calcula la v de oscilación de un pto x cualquiera de la cuerda.



$$y(x,t) = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t - kx + \varphi)$$

$$v_{osc} = \left(\frac{dy}{dt}\right)_{x=te} = A \cdot [\cos(\omega t - kx + \varphi)] \cdot \omega$$

$$v_{osc} = A \cdot \omega \cos(\omega t - kx + \varphi) \rightarrow \pm 1$$

$$v_{osc} = \pm A \cdot \omega = 0{,}05 \cdot \pi \ m/s$$

pag 167.

4.- La ecuación de una onda en una cuerda es $y(x,t) = 0{,}03 \cdot \text{sen}\,(2t-3x)$ (S.I)

a) Explicar la doble periodicidad de la onda

b) Calcula su amplitud, su período, su longitud de onda y su frecuencia

c) Calcular su velocidad de propagación así como la velocidad de oscilación que puede tener un punto cualquiera de la cuerda y explicar el significado de cada una de ellas.

d) Calcular la velocidad máxima de oscilación que puede tener un punto cualquiera de la cuerda

a)

$$y(x,t) = \underbrace{0{,}03}_{A} \cdot 2\pi \left(\underbrace{2t}_{\omega} - \underbrace{3x}_{k}\right) \text{ (S.I)}$$

b)

$A = 0{,}03$ m

$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ s $(3{,}14)$

$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2}{3}\pi$ m.

$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{\pi}$ Hz.

c)



v = cte en el mismo medio.

$$v = \frac{S}{t} = \frac{\lambda}{T} = \frac{\frac{2}{3}\pi}{\pi} = \frac{2}{3}\ \frac{m}{s}$$

$$y(x,t) = 0'03 \cdot \text{sen}(2t - 3x)\ (SI)$$

$$v_{osc} = \left(\frac{dy}{dt}\right)_{x=cte} = 0'03 \cdot [\cos(2t - 3x)]\ 2$$

$$v_{osc} = 0'03 \cdot 2 \cdot \cos(2t - 3x)$$

No es cte.

$\Downarrow$

depende del instante t y del pto x en y

$v_{oy} = 0'03 \cdot 2 \cdot \cos(2t - 3x)$

± 1 → concreto.

$v_{max} = \pm 0'06 \ \frac{m}{s}$.

$v_{max\ osc} = \pm A \cdot \omega$

$v_{max\ osc} = \pm 0'03 \cdot 2 = 0'06 \ \frac{m}{s}$.

Pag 167.

Calcula la frecuencia de dicho sonido.

3.- Escribe la ecuación de una onda transversal de 10 cm de amplitud y periodo de 0,5 s que se desplaza con una velocidad de fase de 340 $m \cdot s^{-1}$ hacia la parte positiva del eje X. Supóngase que en el foco y en el instante inicial la elongación es máxima.

$v_{propagación}$.



$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}5}$$

$$\omega = 4\pi \ \frac{rad}{s}$$

$$y(x,t) = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t - kx + \varphi_0)$$

$$y(x,t) = 0{,}1 \cdot \operatorname{sen}\left(4\pi t - \frac{2\pi}{170}x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\boxed{y(x,t) = 0{,}1 \cdot \cos\left(4\pi t - \frac{2\pi}{170}x\right) \ (SI)}$$

$340 \ \frac{m}{s}$

$$v_p = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \lambda = v_p \cdot T = 340 \ \frac{m}{s} \cdot 0{,}5 \ s = 170 \ m$$

$T = 0{,}5 \ s$

$$k = \frac{2\pi}{17} \frac{rad}{m}$$

$$y = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t - kx + \varphi_0)$$

$$\left.\begin{array}{l} t = 0 \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = A_1$$

$$A = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t^{\,0} - kx^{\,0} + \varphi_0)$$

$$A = A \cdot \operatorname{sen} \varphi_0$$

$$\operatorname{sen} \varphi_0 = 1.$$

$$\varphi_0 = \operatorname{arcsen} 1$$

$$\varphi_0 = 90^\circ = \frac{\pi}{2} rad.$$

1.- ¿Con qué velocidad se desplaza una onda armónica cuya longitud de onda es de 0,5 cm y su frecuencia de $6 \cdot 10^{10}$ Hz?. ¿Cuál será el tiempo que tarda la onda en recorrer una distancia igual a una longitud de onda?.

$$v = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v = \lambda \cdot \frac{1}{T}$$

$$v = \lambda \cdot f = 5 \cdot 10^{-3}\,m \cdot 6 \cdot 10^{10}\,s^{-1} \quad (s^{-1} = Hz)$$

$$v = 3 \cdot 10^{8}\,m/s$$

$$v = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow T = \frac{\lambda}{v} = \frac{5 \cdot 10^{-3}\,m}{3 \cdot 10^{8}\,m/s} = 1{,}67 \cdot 10^{-11}\,s$$

$f = \frac{1}{T} \Rightarrow T = \frac{1}{f} = \frac{1}{6 \cdot 10^{10}} = 1'67 \cdot 10^{-11}\ s.$

2.- El sonido de la sirena de una fábrica tarda 10 s en llegar a un determinado receptor situado a una distancia equivalente a 5000 veces la longitud de onda del sonido emitido. Calcula la frecuencia de dicho sonido.

$v = \frac{s}{t}$

$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \frac{1}{T} = \lambda f$

$\frac{5000\lambda}{10} = \lambda \cdot f$

$f = 500\ Hz$

5) Cuanto valdrá la elongación de los puntos que presenten la velocidad máxima.

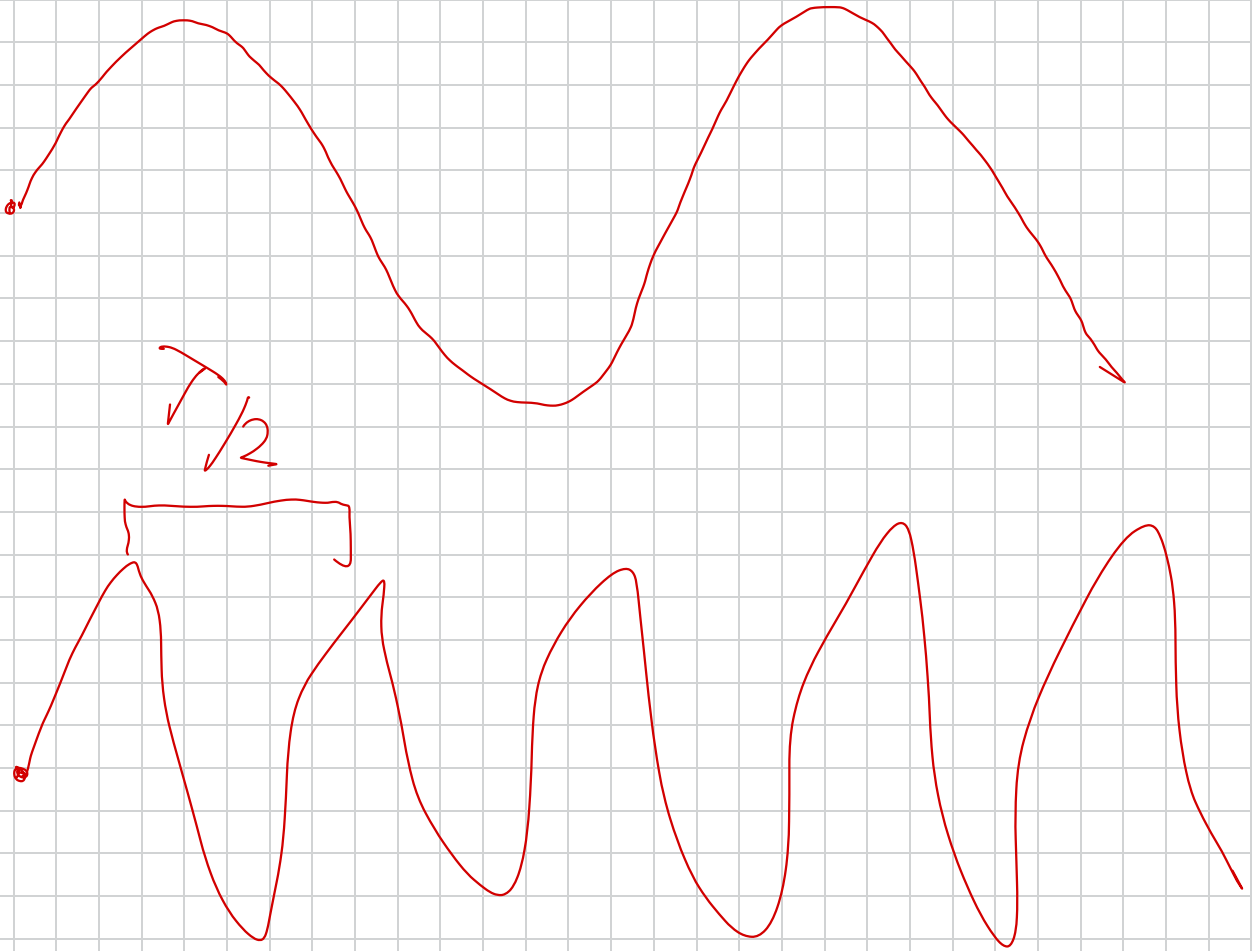
6.- Suponga que en una onda armónica se duplica la frecuencia. Indicar cómo se modifican el período, la velocidad de propagación, la longitud de onda, la amplitud, y la velocidad máxima de oscilación de un punto cualquiera.

¡OJO! ¡CUIDADO! ¡SALE EN EL EXAMEN!

$f = \frac{1}{T}$ $\quad T = \frac{1}{f}$ $\quad T' = \frac{1}{2f}$

$\frac{T'}{T} = \frac{\frac{1}{2f}}{\frac{1}{f}} \Rightarrow T' = \frac{1}{2}T$

$v_p \Rightarrow$ cte en el mismo medio, ¡OJO! no cambia.



$$v_p = \frac{\lambda}{T}$$

$$v_p' = \frac{\frac{1}{2}\lambda}{\frac{1}{2}T}$$

$$v_p' = v_p$$

$v_p = \frac{\lambda}{T}$

$v_p = \frac{\lambda'}{\frac{1}{2}T}$

La misma

$v_p = \frac{\lambda}{T}$

$v_p = \frac{\lambda'}{\frac{1}{2}T}$

$\frac{\lambda}{T} = \frac{\lambda'}{\frac{1}{2}T}$

$\lambda' = \frac{1}{2}\lambda$

La amplitud y la frecuencia son independientes, A no cambia.

$$v_{max\ osc} = A \cdot \omega.$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

$$v_{max\ osc} = A \cdot 2\pi f$$

$$v'_{max\ osc} = A \cdot 2\pi 2f$$

$$\boxed{v_{max\ osc} = 2\, v_{max\ osc}.}$$

7.- a) Escribe la ecuación de una onda armónica que se propaga en el sentido positivo del eje X, sabiendo que su frecuencia es de $5 \cdot 10^{10}$ Hz, su velocidad de propagación de 15 $m \cdot s^{-1}$ y su amplitud de 0,5 m.

b) ¿Cómo se modificaría la ecuación de la onda anterior si la misma se propagase en sentido contrario con una amplitud mitad y una longitud de onda doble?

$$y(x,t) = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t - kx + \varphi_0)$$

Al no especificar $\varphi_0 = 0$

$$\boxed{y(x,t) = 0{,}5 \cdot \operatorname{sen}\left(10^{11}\pi t - \frac{2\pi}{3 \cdot 10^{-10}} x\right)}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = 2\pi \cdot 5 \cdot 10^{10} = 10^{11}\pi \ \frac{rad}{s}$$

$$v_p = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v_p = \lambda \cdot \frac{1}{T} \Rightarrow v_p = \lambda \cdot f$$

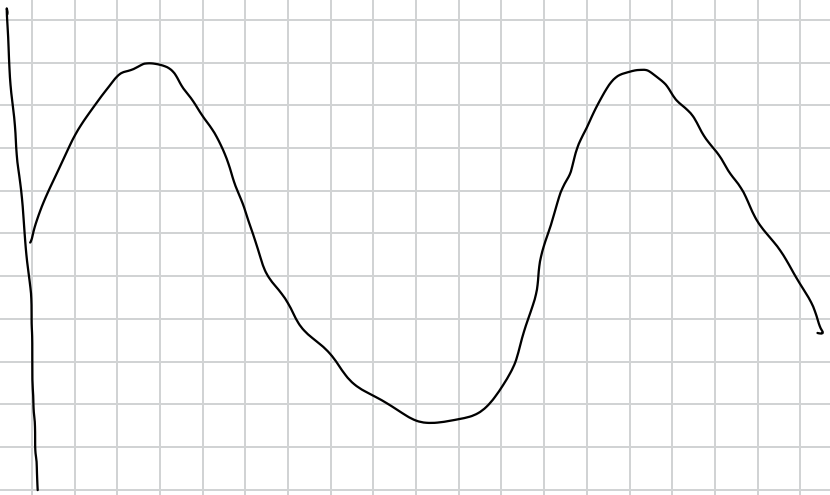
$$\lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{15\ m/s}{5 \cdot 10^{10}\ s^{-1}} = 3 \cdot 10^{-10}\ m$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{3 \cdot 10^{-10}}\ \frac{rad}{m}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

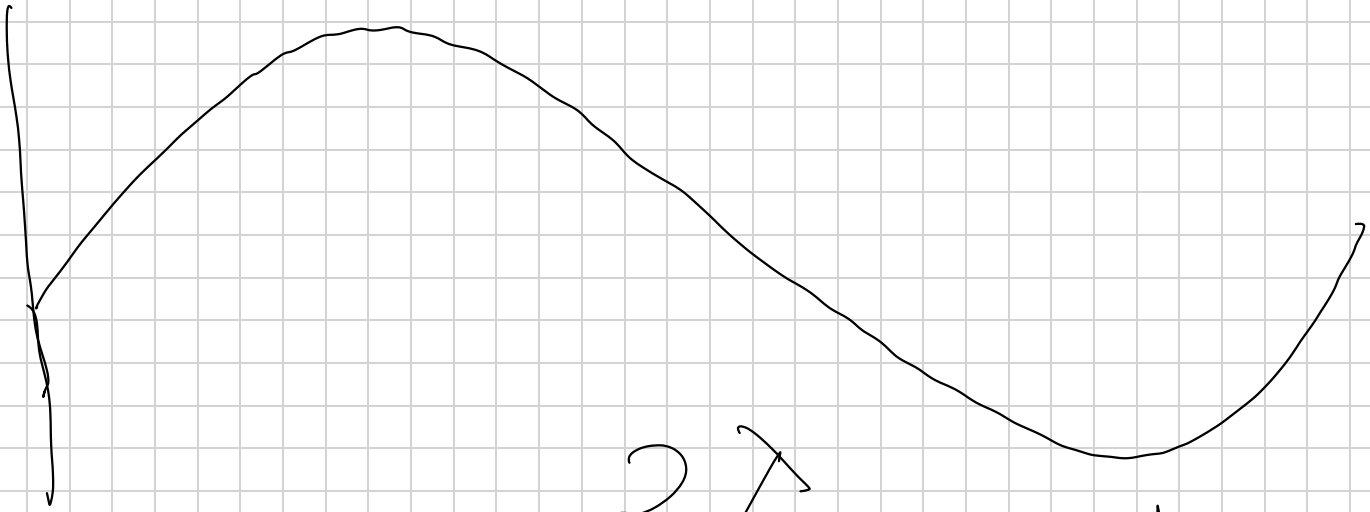
$$\boxed{y(x,t) = 0{,}5 \cdot \operatorname{sen}\left(10^{11}\pi t - \frac{2\pi}{3 \cdot 10^{-10}} x\right)}$$

$$y(x,t) = 0{,}25 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{10^{11}\pi}{2} t + \frac{2\pi}{2 \cdot 3 \cdot 10^{-10}} x\right)\ (SI)$$



$$T' = 2T$$

$$\omega' = \frac{2\pi}{T'} \qquad \omega' = \frac{1}{2}\omega$$



$$v_p = cte \Rightarrow v_p = \frac{2\lambda}{2T} = cte.$$

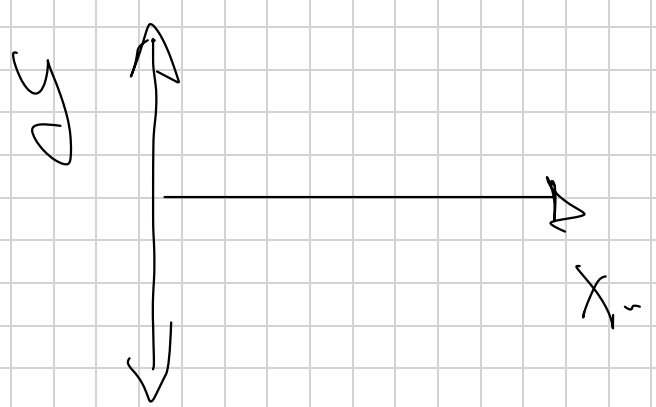
10.- Una onda viene dada por la ecuación:

$$y(x,t) = 2 \cdot \cos(100t - 5x) \text{ (S.I)}$$

donde x e y son coordenadas cartesianas

a) Haga un análisis razonado del movimiento ondulatorio representado por la ecuación anterior y explique si es longitudinal o transversal, y cuál es su sentido de propagación.

b) Calcule la frecuencia, el período, la longitud de onda y el número de onda, así como el módulo, dirección y sentido de la velocidad de propagación de la onda. ¿Se mueven los puntos del medio con esa velocidad?.



transversal.

$y(x,t) = 2 \cdot \cos(100t - 5x)$ (S.I)

ω k.

$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k}$.

$k = 5 \frac{rad}{m}$.

$$v_p = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2\pi/k}{2\pi/\omega} = \frac{\omega}{k} = \frac{100}{5} = \boxed{20 \text{ m/s}}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{100} \text{ s}.$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{5} \text{ m}.$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{100}{2\pi} \text{ Hz}.$$

$$\vec{v} = 20\vec{t} \left(\frac{m}{s}\right)$$

Los ptos del medio se mueven en la vertical.

9.- Una onda armónica transversal que se propaga a lo largo de la dirección positiva del eje de las X tiene 5 cm de amplitud, 8π cm de longitud de onda, y velocidad de propagación de 40 cm $\cdot s^{-1}$. Sabiendo que la elongación de la partícula de abscisa x=0 en el instante t== es de 5 cm por debajo de la posición de equilibrio, determinar:

a) El número de onda y la frecuencia angular de la onda

b) La ecuación que representa el movimiento vibratorio armónico simple de la partícula de abscisa x=0

c) la ecuación que representa la onda armónica transversal indicada

$v_p = 40 \text{ cm/s} = 0'4 \frac{m}{s}$

a) $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi \text{ rad}}{0'08\pi \text{ m}}$

$\lambda = 8\pi \text{ cm} = 0'08\pi \text{ m}.$

$k = 25 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$

$v_p = \frac{\lambda}{T} \quad T = \frac{\lambda}{v_p}$

$T = \frac{0'08\pi}{0'4} =$

$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{0'08\pi}{0'4}} = 10 \frac{\text{rad}}{s}$

b) $y(t) = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$

$y(x,t) = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t - kx + \varphi_0)$

$y(t) = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$

$y(t) = 0{,}05 \cdot \operatorname{sen}(10t + \varphi_0)$

$x = 0$
$t = 0$ $\Big\}$ $y = 0{,}05$ m.

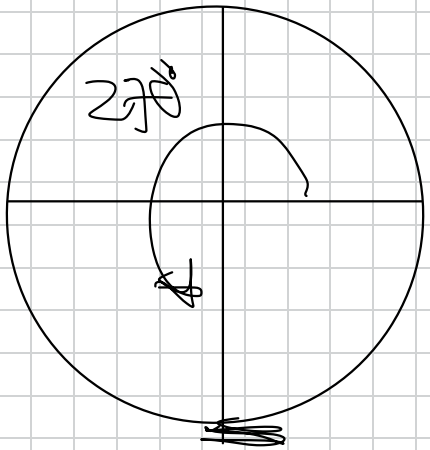
$y(t) = 0{,}05 \operatorname{sen}(10t - 15x + \varphi_0)$

$-0{,}05 = 0{,}05 \operatorname{sen} \varphi_0$

$$\operatorname{sen}\varphi_0 = -1$$

$$\varphi_0 = \operatorname{arcsen}(-1) = \frac{3}{2}\pi \text{ rad}$$

(270°)

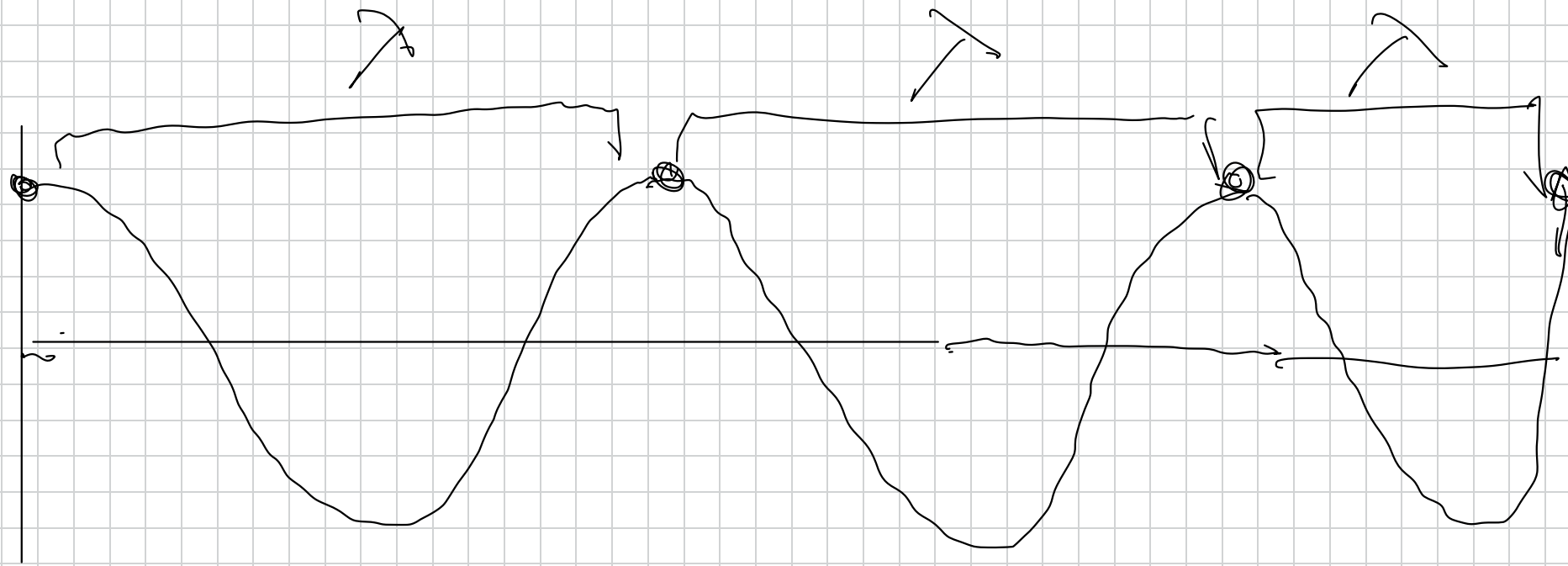


$$y(t) = 0{,}05 \cdot \operatorname{sen}\left(10t + \frac{3}{2}\pi\right) \text{ (SI)}$$

$$\boxed{y(x,t) = 0{,}05 \cdot \operatorname{sen}\left(10t - 25x + \frac{3}{2}\pi\right) \text{ (SI)}}$$

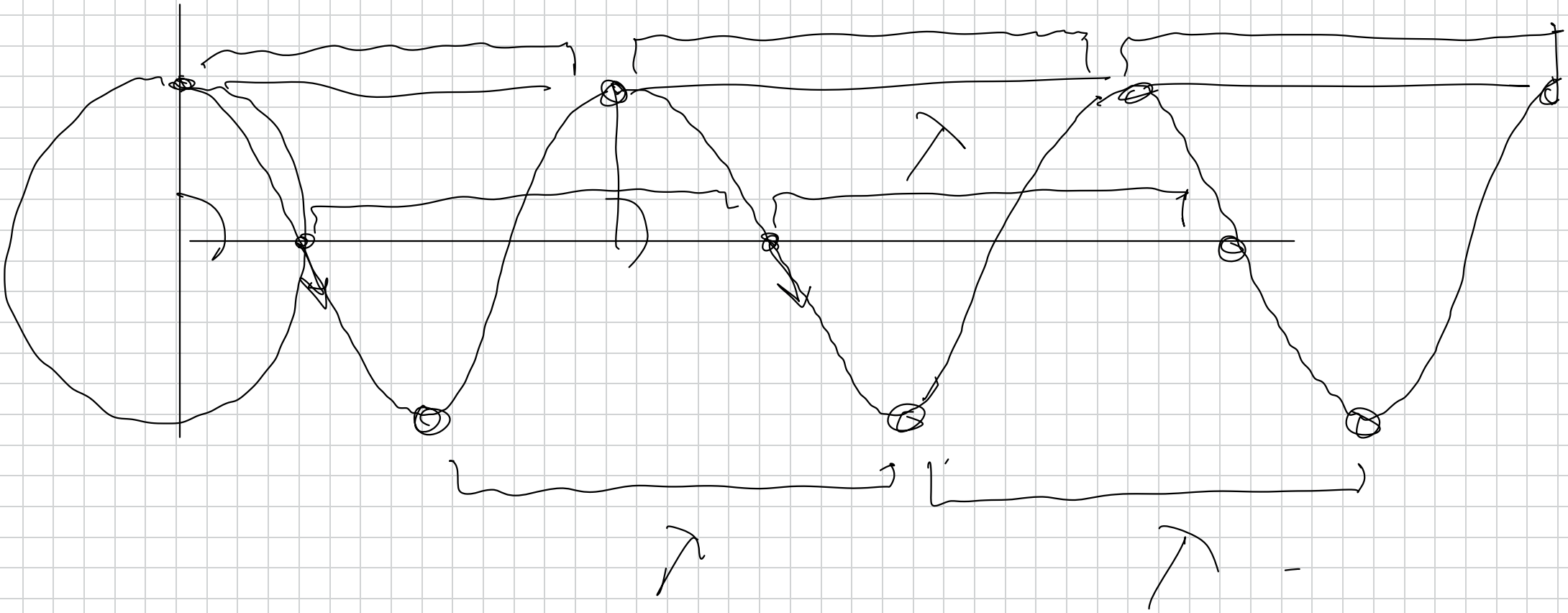
$$y(x,t) = 0{,}05 \cdot \sin\left(10t - 25x + \pi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (SI)$$

$$y(x,t) = -0{,}05 \cdot \cos(10t - 25x + 4\pi) \quad (SI)$$

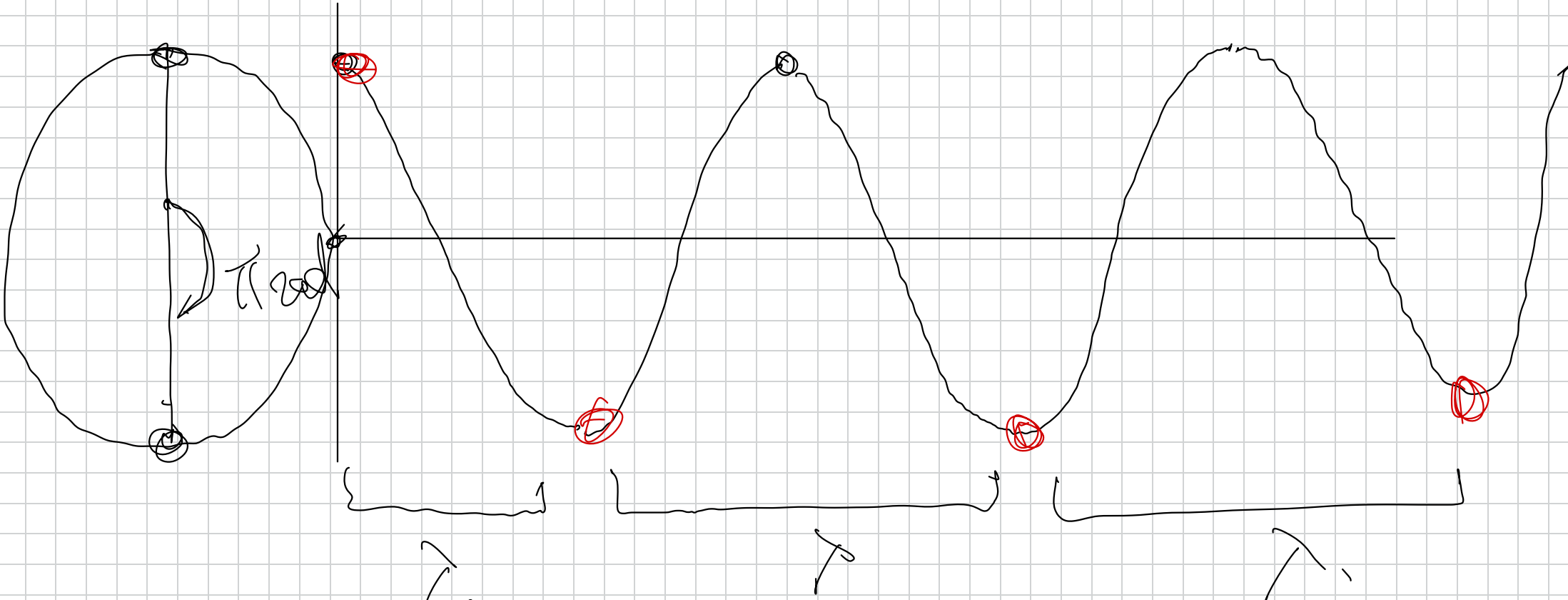


pto en fase.

$2\pi, 4\pi$



$n\lambda$.



$\frac{\lambda}{2}$, $3\frac{\lambda}{2}$, $5\frac{\lambda}{2}$

$(2n+1)\frac{\lambda}{2}$

$n = 0, 1, 2, 3, \cdots$

14.- La ecuación de una onda transversal que se propaga por una cuerda es:

$$y(x,t)=0{,}06\cdot\cos 2\pi\,(4t-2x)\ (S.I)$$

a) Calcule la diferencia de fase entre los estado de vibración de una partícula de la cuerda en los instantes t=0 y t=0,5 s.

b) Haga una representación gráfica aproximada de la forma que adopta la cuerda en los instantes anteriores.

$$y(x,t)=0{,}06\cdot\cos(8\pi t-4\pi x)\ (SI)$$

$\omega = 8\pi \frac{rad}{s}$ $\quad k = 4\pi \frac{rad}{m}$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{8\pi} = \frac{1}{4}\,s$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}\,m$

$$y(x,t) = 0{,}06 \cdot \cos\left(\underbrace{8\pi t - 4\pi x}_{\varphi_1}\right)$$

Mismo para x.

$$y(x,t) = 0{,}06 \cdot \cos\left(\underbrace{8\pi \cdot 0{,}5 - 4\pi x}_{\varphi_2}\right)$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \underbrace{\left[8\pi \cdot 0{,}5 - 4\pi x\right]}_{\varphi_2} - \underbrace{\left[8\pi \cdot 0 - 4\pi x\right]}_{\varphi_1}$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 4\pi - 4\pi x - 0 + 4\pi x$$

$\varphi_2 - \varphi_1 = 4\pi$ rad $= 0°$ (están en fase).

b) $t = 0 \Rightarrow y(x,t) = 0'06 \cdot \cos(8\pi t - 4\pi x)$

función a representar $\Rightarrow y(x,t) = 0'06 \cdot \cos(-4\pi x)$ (SI).

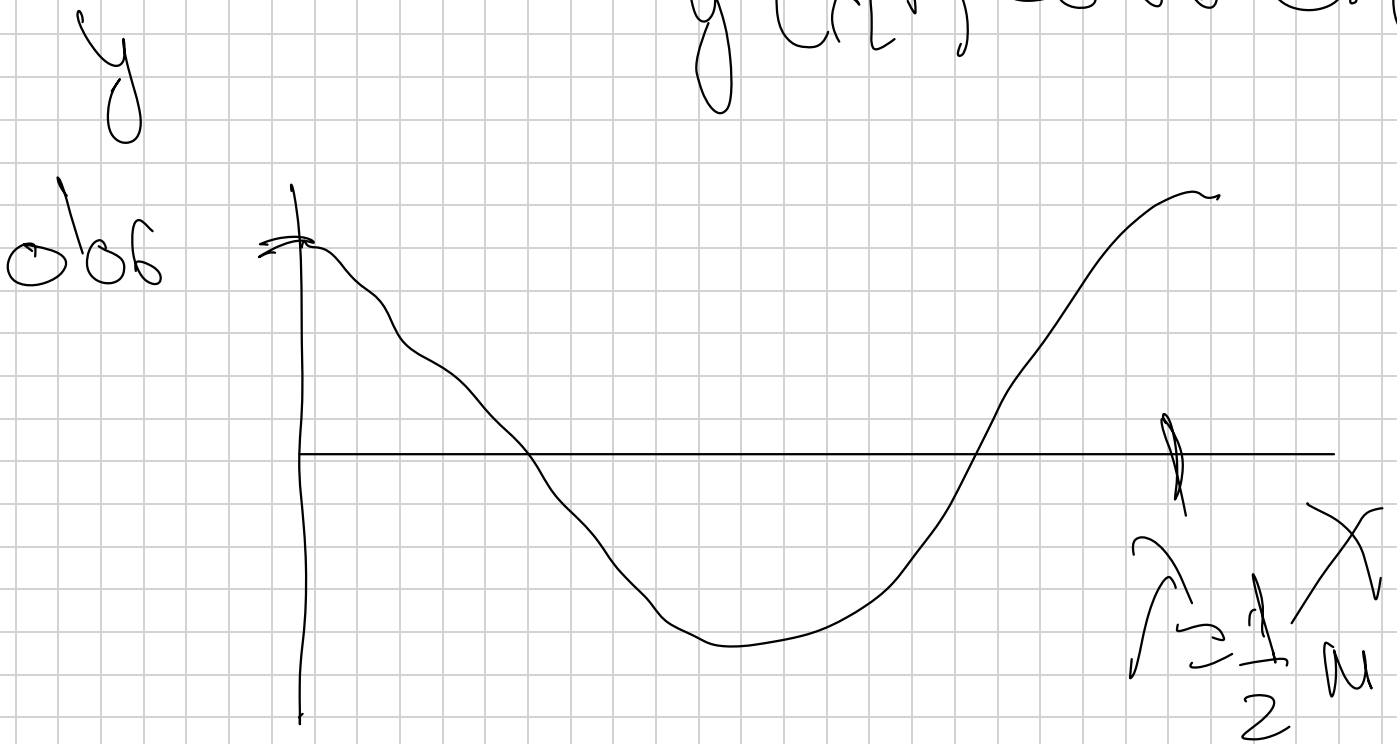
$t = 0$



$\lambda = \frac{1}{2}$ m.

$t = 0{,}5\ s \Rightarrow y(x,t) = 0{,}06 \cdot \cos(8\pi \cdot 0{,}5 - 4\pi x)$

$y(x,t) = 0{,}06 \cdot \cos(4\pi - 4\pi x)$.



adopta la misma forma.

15.- Una onda armónica se propaga por un medio elástico siguiendo la ecuación

$$y(x,t)=24\cdot \text{sen}\, 2\pi\,(2000t-5x)\ \text{(S.I)}$$

Calcula el desfase que existirá entre dos puntos separados 0,2 m entre si a lo largo de la dirección de propagación de la onda. en un mismo instante t.

$$y(x,t) = 24 \cdot \text{sen}\left(4000\pi t - \underbrace{10\pi}_{k} x\right)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{10\pi} = \frac{1}{5}\ m$$

pto en fase. $\Delta\varphi$

$$\boxed{\lambda = 0'2\ m}$$

mismo instante t →

$$y(x,t) = 24 \cdot \operatorname{sen}\left(4000\pi t - 10\pi x\right)$$

$$y(x,t) = 24 \cdot \operatorname{sen}\left(4000\pi t - 10\pi(x+0{,}2)\right)$$

φ_1 $\qquad$ φ_2

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \left[4000\pi t - 10\pi x + 2\pi\right] - \left[4000\pi t - 10\pi x\right]$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 4000\pi t - 10\pi x + 2\pi - 4000\pi t + 10\pi x$$

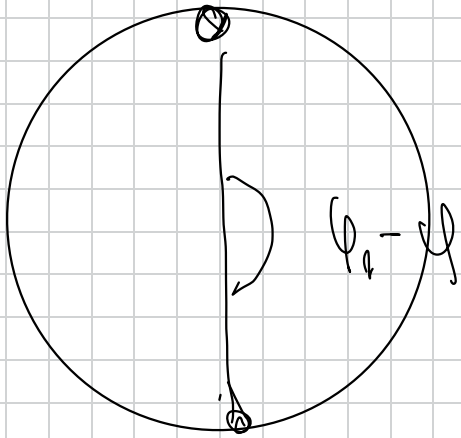
$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi \text{ rad.} \Rightarrow \text{Están en fase.}$$

16.- Una onda armónica cuya frecuencia es de 50 Hz, se propaga en la dirección positiva del eje X. Sabiendo que la diferencia de fase, en un instante dado, para dos puntos separados 20 cm es de $\pi/2$ rad, determinar:

a) El período, la longitud de onda y la velocidad de propagación de la onda

b) En un punto dado, ¿Qué diferencia de fase existe entre los desplazamientos que tienen lugar en dos instantes separados por un intervalo de 0,01 s?

a) $f = \frac{1}{T}$ $\quad T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50}\ s = \boxed{0{,}02\ s}$



$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2}\ rad.$

$\frac{\lambda}{2} = 0{,}2\ m \quad \Delta = 20\ cm$

$\boxed{\lambda = 0{,}4\ m}$

mismo instante t.

$$y = A \cdot \operatorname{sen}\left(\underbrace{\omega t}_{\varphi_1} - kx\right)$$

$$y = A \cdot \operatorname{sen}\left(\underbrace{\omega t - k(x+\Delta/2)}_{\varphi_2}\right)$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}\ \text{rad}.$$

$$\omega t - k(x+\Delta/2) - [\omega t - kx] = \frac{\pi}{2}$$

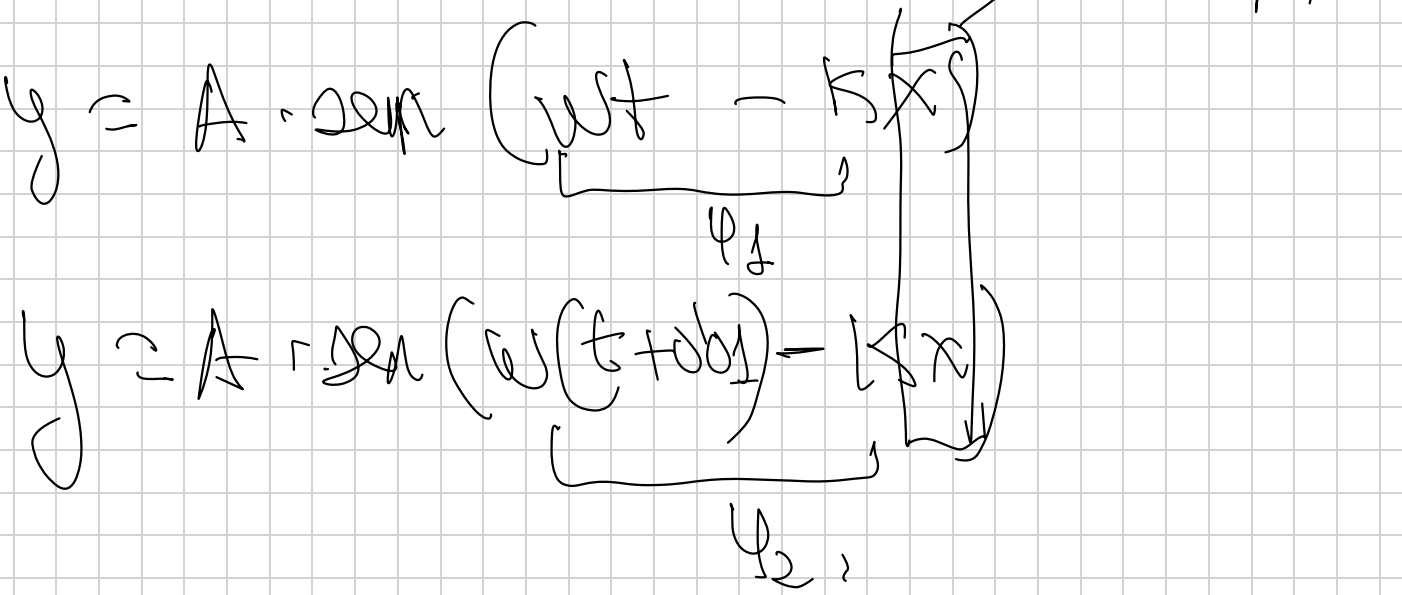
$$\omega t - kx - k\Delta/2 - \omega t + kx = \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{2\pi}{\pi} \cdot 0{,}2 = \frac{\pi}{2} \cdot$$

$$\lambda = 0{,}4\ m.$$

$$v_f = \frac{\lambda}{T} = \frac{0{,}4\ m}{0{,}02\ s} = 20\ m/s. \quad (T = 0{,}4\ m.$$

b)



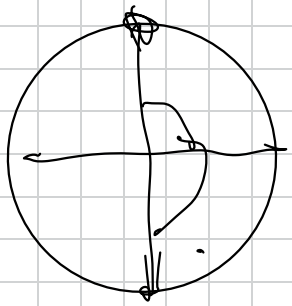
$$\varphi_2 - \varphi_1 = \omega(t+0{,}01) - kx - \omega t + kx.$$

$\varphi_2 - \varphi_1 = \omega t + \omega \cdot \Delta t_{01} - kx - \omega t + kx$

$\varphi_2 - \varphi_1 = \omega \cdot \Delta t_{01}$

$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi}{T} \cdot \Delta t_{01}$

$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi}{\Delta t_{02}} \cdot \Delta t_{01}$



$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\Delta t_{02} \pi}{\Delta t_{02}}$

$\varphi_2 - \varphi_1 = \pi \text{ rad} \longrightarrow$ En oposición de fase.

17.- Una onda armónica sinusoidal se propaga en el sentido positivo del eje OX con una frecuencia de 100 Hz, con una velocidad de 500 $m \cdot s^{-1}$ y tiene una amplitud de 15 cm. Calcular:

a) La separación entre dos puntos cuya diferencia de fase, en un cierto instante, es de $\pi/5$ radianes

b) La diferencia de fase entre dos vibraciones de un mismo punto del espacio, separadas por un intervalo de tiempo de $2{,}5 \cdot 10^{-3}$ s

a) $y = A \cdot \operatorname{sen}(\underbrace{\omega t - K x_1}_{\varphi_1})$

$y = A \cdot \operatorname{sen}(\underbrace{\omega t - K x_2}_{\varphi_2})$

$v = \frac{\lambda}{T}$

$v = \lambda \cdot f$

$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{500}{100}$

$\lambda = 5\,m$

$\varphi_2 - \varphi_1 = \omega t - K x_2 - \omega t + K x_1$

$$\frac{\pi}{5} = k\left(\overrightarrow{x_1 - x_2}\right)$$ → separación.

$$\frac{\pi}{5} = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1)$$

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{5}(x_2 - x_1).$$

$$(x_2 - x_1) = 0'5\,m.$$

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow T = \frac{1}{f} = \frac{1}{100} = 0{,}01\ s.$$

$2{,}5 \cdot 10^{-3}\ s$

$$y = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t - kx)$$ → Ninjas

$$y = A \cdot \operatorname{sen}.(\omega(t + 2{,}5 \cdot 10^{-3}) - kx)$$

φ_1

φ_2

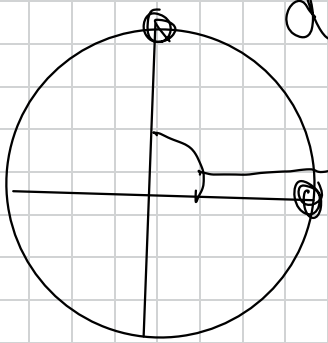
$$\varphi_2 - \varphi_1 = \omega \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-3}.$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi}{T} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-3}$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi}{0{,}01} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-3}$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}\ \text{rad}$$

En $\frac{1}{4}T$, la diferencia de fase es de $\pi/2$ rad



$T = 0{,}01\ s$ $\quad 2{,}5 \cdot 10^{-3}\ s$ es $\frac{1}{4}T$