

M.A.S

- 1** a) Demuestre que en un oscilador armónico simple la aceleración es proporcional al desplazamiento pero de sentido contrario.
- b) Una partícula realiza un movimiento armónico simple sobre el eje OX y en el instante inicial pasa por la posición de equilibrio. Escriba la ecuación del movimiento y razone cuándo es máxima la aceleración.

a) Un movimiento armónico simple (m.a.s.) es un movimiento oscilatorio periódico, cuya elongación (desplazamiento) respecto a la posición de equilibrio (y) viene dada por una función sinusoidal $y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$, donde A es la amplitud del movimiento, ω la frecuencia angular y φ_0 la fase inicial del movimiento.

La velocidad la obtenemos derivando la posición respecto al tiempo.
$$v_y = \frac{dy}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Y la aceleración, derivando la velocidad respecto al tiempo
$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -A \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Comparando las expresiones de posición y aceleración, comprobamos que se cumple que $a_y = -\omega^2 \cdot y$, es decir, la aceleración es proporcional al desplazamiento, y va en sentido contrario.

b) Como hemos visto en el apartado anterior, la expresión general de un m.a.s. viene dada por $y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$, donde “y” representa el desplazamiento desde la posición de equilibrio, independientemente de la coordenada espacial en que se produzca el m.a.s.

La fase inicial φ_0 depende del estado inicial del movimiento. La cuestión nos dice que para $t = 0$ s, pasa por la posición de equilibrio, es decir, $y = 0$. Sustituyendo en la ecuación

$$0 = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot 0 + \varphi_0) \rightarrow A \cdot \text{sen}\varphi_0 = 0 \rightarrow \text{sen}\varphi_0 = 0 \rightarrow \varphi_0 = 0$$

La expresión del movimiento será $y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$ Aplicando la relación demostrada en el apartado anterior, la aceleración es proporcional al desplazamiento. Así, la aceleración será máxima cuando el desplazamiento sea máximo, es decir, cuando la elongación sea igual a la amplitud (en valor absoluto). ($y = \pm A$).

2. Un cuerpo realiza un movimiento vibratorio armónico simple.

a) Escriba la ecuación de movimiento si la aceleración máxima es $5\pi^2 \text{ cm s}^{-2}$, el periodo de las oscilaciones 2 s y la elongación del cuerpo al iniciarse el movimiento 2,5 cm.

b) Represente gráficamente la elongación y la velocidad en función del tiempo y comente la gráfica.

a) Un movimiento armónico simple (m.a.s.) es un movimiento oscilatorio periódico, cuya elongación (desplazamiento) respecto a la posición de equilibrio (y) viene dada por una función sinusoidal $y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$, donde A es la amplitud del movimiento (valor máximo de la elongación), ω la frecuencia angular y φ_0 la fase inicial del movimiento.

Calculamos las magnitudes implicadas a partir de los datos del problema:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi \text{ rad}}{2 \text{ s}} = \pi \text{ rad/s}$$

$$\text{Aceleración máxima: } a_{\text{ymáx}} = A \cdot \omega^2 \rightarrow A = \frac{a_{\text{ymáx}}}{\omega^2} = \frac{5\pi^2 \text{ cm/s}^2}{\pi^2 \text{ s}^{-2}} = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m}$$

Fase inicial: Para $t = 0 \text{ s}$, $y = 2,5 \text{ cm} = 0,025 \text{ m}$. sustituyendo en la ecuación.

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0) \rightarrow 0,025 = 0,05 \cdot \text{sen}(\varphi_0) \rightarrow \varphi_0 = \arcsen(0,5) = \frac{\pi}{6} \text{ rad} = 0,52 \text{ rad}$$

(También es válido $\varphi_0 = \frac{5}{6} \pi$)

La ecuación de movimiento queda: $y(t) = 0,05 \cdot \text{sen}(\pi \cdot t + \frac{\pi}{6}) \text{ m}$

b) La velocidad de vibración se obtiene derivando la elongación respecto al tiempo.

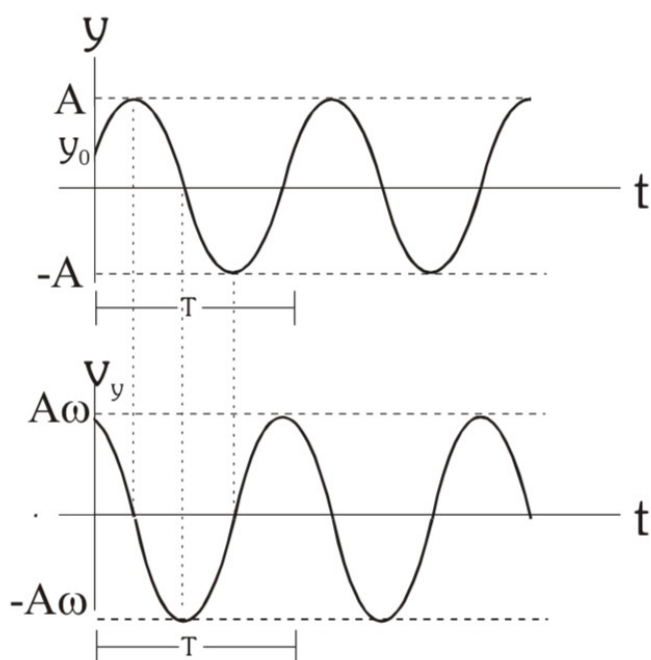
$$v_y = \frac{dy}{dt} = 0,05 \cdot \pi \cdot \cos(\pi \cdot t + \frac{\pi}{6}) \text{ m/s}$$

La velocidad es máxima (en valor absoluto) en aquellos instantes en que el móvil pasa por la posición de equilibrio, y nula cuando el móvil se encuentra en sus punto de elongación máxima.

La velocidad máxima es $0,05\pi \text{ m/s}$. Ambas funciones (seno y coseno) están desfasadas $\pi/2$.

Para $t = 0 \text{ s}$, el movimiento comienza con una elongación igual a $0,025 \text{ m}$ (la mitad de la amplitud) y con una velocidad de $0,136 \text{ m/s}$ (la velocidad máxima es de $0,157 \text{ m/s}$)

Como todo m.a.s, la gráfica representa un movimiento periódico.



3

- a) Describa el movimiento armónico simple y comente sus características cinemáticas y dinámicas.
 b) Una masa oscila verticalmente suspendida de un muelle. Describa los tipos de energía que intervienen y sus respectivas transformaciones.

- a) Un movimiento armónico simple (m.a.s.) es un movimiento oscilatorio periódico, cuya elongación (desplazamiento) respecto a la posición de equilibrio (y) viene dada por una función sinusoidal $y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$, donde A es la amplitud del movimiento, ω la frecuencia angular y φ_0 la fase inicial del movimiento.

La velocidad la obtenemos derivando la posición respecto al tiempo. $v_y = \frac{dy}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$

Y la aceleración, derivando la velocidad respecto al tiempo $a_y = \frac{dv_y}{dt} = -A \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$

Comparando las expresiones de posición y aceleración, comprobamos que se cumple que $a_y = -\omega^2 \cdot y$, es decir, la aceleración es proporcional al desplazamiento, y va en sentido contrario.

Dinámicamente, un sistema físico describe un m.a.s. cuando está sometido a una fuerza que es proporcional al desplazamiento respecto a una determinada posición (posición de equilibrio) y se opone a dicho desplazamiento. La ley de Hooke de los cuerpos elásticos es un ejemplo característico. Por ejemplo, para una partícula unida a un resorte, aplicando la 2ª ley de Newton, obtenemos la expresión de la frecuencia característica de oscilación a partir de la masa de la partícula y de la constante elástica del resorte.

$$\left. \begin{aligned} Fel &= -K \cdot y \\ \Sigma F &= m \cdot a_y = -m \cdot \omega^2 \cdot y \end{aligned} \right\} K = m \cdot \omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

- b) En la oscilación vertical, y despreciando el rozamiento, la partícula sólo está sometida a dos fuerzas conservativas, el peso y la fuerza elástica. Por consiguiente, la energía mecánica del sistema se mantendrá constante. Las energías presentes (cinética, potencial elástica y potencial gravitatoria) varían de la siguiente forma durante una oscilación completa:

$$Ec = \frac{1}{2} m \cdot v_y^2 \quad ; \quad Ep_{el} = \frac{1}{2} K \cdot y^2 \quad ; \quad Epg = mgh$$

En el punto más alto de la oscilación, la energía potencial gravitatoria es máxima, así como la elástica, ya que el muelle sufre su máxima compresión. En este punto la velocidad de la partícula es nula, por lo que la energía cinética también lo es.

Al descender, disminuyen las energías gravitatoria y cinética, al tiempo que aumenta la energía cinética, hasta pasar por la posición de equilibrio, donde la Ec es máxima y la Ep elástica es nula (estiramiento cero).

A partir de este momento, con el estiramiento del muelle, vuelve a aumentar la energía potencial elástica, a costa de la disminución de la cinética, que llega a anularse en el punto de máximo estiramiento (el más bajo de la trayectoria), siendo otra vez máxima la energía elástica. La energía gravitatoria alcanza su valor más bajo.

A partir de aquí, el proceso se repite a la inversa. Durante la subida disminuye la energía elástica almacenada, transformándose en energía cinética y energía gravitatoria. Al pasar por la posición de equilibrio, nuevamente la Ec es máxima y la elástica se anula. Finalmente, al seguir ascendiendo se comprime el muelle, con lo que la Ec disminuye hasta anularse en el punto más alto, al tiempo que la energía elástica vuelve a aumentar hasta su valor máximo.



a) Movimiento armónico simple; características cinemáticas y dinámicas.

b) Razone si es verdadera o falsa la siguiente afirmación: En un movimiento armónico simple la amplitud y la frecuencia aumentan si aumenta la energía mecánica.

a) (Esta pregunta corresponde a todo un apartado de un tema (o incluso a un tema completo), en el que normalmente se invierten de dos a tres días de clase en su tratamiento. No sé exactamente qué aspectos considerará más importantes la ponencia de selectividad. Creo que al menos había que hablar sobre:

- Definición de movimiento armónico simple (m.a.s.)
- Ecuación de movimiento $y(t) = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0)$
- Magnitudes cinemáticas del m.a.s: Periodo, frecuencia, fase, fase inicial, velocidad de vibración, aceleración de vibración. Definición, fórmula y unidades
- Relación entre elongación y aceleración (ecuación fundamental del m.a.s) $a_y = -\omega^2 \cdot y$
- Magnitudes dinámicas: fuerzas presentes en un m.a.s. (por ejemplo, un muelle horizontal unido a una masa). Relación frecuencia angular – constante elástica – masa.
- Energías presentes en un m.a.s. Energías cinética y potencial elástica. Variaciones de energía durante un periodo. Energía mecánica del m.a.s.

Con todo, me parece larguísimo, para ser un apartado de una pregunta. Y muy poco especificado)

b) (Esta pregunta es bastante ambigua, sobre todo porque no nos dicen cómo se está aumentando la energía mecánica, ni de qué tipo de m.a.s. se trata.)

Suponiendo el movimiento armónico simple descrito por una masa unida a un resorte, en el que no variamos ni la masa ni la constante elástica, la frecuencia angular de oscilación es una característica propia del sistema (llamada

frecuencia de oscilación natural) y viene dada por $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ $f = \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}}$

Por lo tanto, la frecuencia de oscilación no variará si aumentamos la energía mecánica del sistema.

La energía mecánica del m.a.s. se mantiene constante durante todo el movimiento, ya que sólo actúan fuerzas conservativas. Coincide con la energía potencial máxima

$$E_M = \frac{1}{2} K \cdot A^2$$

Vemos que un aumento de la energía mecánica se traduce en un aumento de la amplitud A del movimiento, ya que la constante elástica no cambiará.

5

a) Explique el significado de las magnitudes que aparecen en la ecuación de un movimiento armónico simple e indique cuáles son sus respectivas unidades en el Sistema Internacional.

b) Demuestre que en un oscilador armónico simple la aceleración es proporcional al desplazamiento de la posición de equilibrio pero de sentido contrario.

a) La posición de un móvil que describe un m.a.s viene dada por una ecuación del tipo

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0) \quad \text{o} \quad y = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0) \quad \text{donde:}$$

y Elongación. Es la posición del móvil respecto al punto de referencia, que se escoge siempre en su posición de equilibrio. Indica el desplazamiento desde dicha posición de equilibrio. Aunque usemos la letra "y", se refiere a cualquier coordenada espacial (x, y, z) en la que se mueva. $[y] = \text{m}$ (S.I.)

A Amplitud del m.a.s. Es el valor máximo de la elongación (en valor absoluto). El m.a.s. alcanzará los valores de A y $-A$ en los extremos de su movimiento. $[A] = \text{m}$ (S.I.)

ω Frecuencia angular. Indica el ritmo de oscilación (algo análogo a la velocidad angular en un movimiento circular). $[\omega] = \text{rad s}^{-1}$ (S.I.). A partir de ω podemos obtener

T Periodo de oscilación. Tiempo que tarda el móvil en realizar una oscilación completa. Se calcula como

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad [T] = \text{s} \text{ (S.I.)}$$

f Frecuencia. Número de oscilaciones descritas en la unidad de tiempo. Es la inversa del periodo

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad [f] = \text{ciclos/s} = \text{s}^{-1} = \text{Hz (Hertzio)} \text{ (S.I.)}$$

$\varphi = (\omega \cdot t + \varphi_0)$ Fase. Es un ángulo que nos indica en qué estado de oscilación se encuentra el móvil. Se mide en radianes en el sistema internacional

φ_0 Fase inicial. Valor de la fase para $t = 0$, cuando comenzamos a estudiar el movimiento. Nos permite calcular cómo era el movimiento al comenzar a estudiarlo. Por ej. La posición inicial se calculará sustituyendo $t = 0$ s en la ecuación, y quedará $y_0 = y_{(t=0)} = A \cdot \text{sen}(\varphi_0)$

b) A partir de la ecuación de la elongación "y" del m.a.s. $y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$

Podemos obtener la velocidad de vibración derivando la elongación $v_y = \frac{dy}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$

Y la aceleración derivando la velocidad $a_y = \frac{dv_y}{dt} = -A \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$

Comparando las expresiones de elongación y aceleración, vemos que $a_y = -\omega^2 \cdot y$, con lo que queda demostrado que la aceleración es proporcional al desplazamiento respecto a la posición de equilibrio, pero en sentido contrario. La constante de proporcionalidad es el cuadrado de la frecuencia angular.



La energía mecánica de una partícula que realiza un movimiento armónico simple a lo largo del eje X y en torno al origen vale $3 \cdot 10^{-5} \text{ J}$ y la fuerza máxima que actúa sobre ella es de $1,5 \cdot 10^{-3} \text{ N}$.

a) Obtenga la amplitud del movimiento.

b) Si el periodo de oscilación es de 2 s y en el instante inicial la partícula se encuentra en la posición $x_0 = 2 \text{ cm}$, escriba la ecuación de movimiento.

Nos encontramos ante una partícula que describe un m.a.s. (movimiento armónico simple, movimiento oscilatorio periódico en el que la aceleración es proporcional y de signo contrario a la distancia a la posición de equilibrio, o elongación)

- a) La fuerza (o fuerzas) que originan un m.a.s. pueden ser de naturaleza muy variada (un cuerpo unido a un muelle, un péndulo con oscilaciones suficientemente pequeñas, un corcho que flota en el agua, los electrones en una corriente alterna...), pero matemáticamente todos pueden estudiarse como si se tratara de una fuerza elástica que actúa sobre el cuerpo (fuerza proporcional a la elongación y de sentido contrario). De este modo:

La fuerza elástica viene dada por $\vec{F}_{el} = -K \cdot \vec{x}$ en módulo $F_{el} = K \cdot x$, siendo K la constante elástica y x la elongación. *(también podríamos llamar "y" a la elongación, pero hay que especificarlo claramente)*

La fuerza máxima (en valor absoluto) se ejerce cuando la elongación es máxima ($x = A$, amplitud)

$$F_{elMAX} = K \cdot A$$

La energía mecánica del m.a.s. puede calcularse como la energía potencial elástica máxima (en ese momento su E_c es nula) cuando alcanza la máxima elongación

$$E_M = \frac{1}{2} K A^2 \quad \text{donde K es la constante elástica y A la amplitud del m.a.s.}$$

Con los datos que nos dan, tenemos un sistema de dos ecuaciones con el que calculamos A y K

$$F_{elMAX} = K \cdot A \rightarrow 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ N} = K \cdot A$$

$$E_M = \frac{1}{2} K A^2 \rightarrow 3 \cdot 10^{-5} \text{ J} = 0,5 \cdot K \cdot A^2 \quad \text{dividimos ambas expresiones (la 2ª entre la 1ª)}$$

$$\frac{3 \cdot 10^{-5}}{1,5 \cdot 10^{-3}} = \frac{0,5 \cdot K \cdot A^2}{K \cdot A} \rightarrow 0,02 = 0,5 \cdot A \rightarrow A = 0,04 \text{ m} = 4 \text{ cm}$$

- b) La ecuación de movimiento de un m.a.s. que oscila a lo largo del eje x, viene dada por

$$x(t) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0) \quad \text{donde}$$

$x(t)$ es la elongación (distancia a la posición de equilibrio, tomada como punto de referencia) en cualquier instante.

A es la elongación máxima en valor absoluto.

ω es la frecuencia angular de oscilación. $\omega = \frac{2\pi}{T}$

y φ_0 es la fase inicial, que indica el estado del movimiento para $t = 0 \text{ s}$.

$$x(0) = A \cdot \text{sen}\varphi_0$$

La amplitud está calculada en el apartado anterior. $A = 0,04 \text{ m}$

A partir del periodo, calculamos la frecuencia angular

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi \text{ rad}}{2 \text{ s}} = 3,14 \text{ rad s}^{-1}$$

Y la fase inicial a partir de la posición inicial de la partícula

$$x(0) = A \cdot \text{sen}\varphi_0 \rightarrow \varphi_0 = \text{arsen}\left(\frac{x(0)}{A}\right) = \text{arsen}\left(\frac{0,02 \text{ m}}{0,04 \text{ m}}\right) = \text{arsen}(0,5) = 0,5236 \text{ rad} = \pi / 6 \text{ rad}$$

Así, la ecuación de movimiento queda $x(t) = 0,04 \cdot \text{sen}(3,14 \cdot t + \frac{\pi}{6}) \text{ m}$



a) Explique las características cinemáticas del movimiento armónico simple.

b) Dos bloques, de masas M y m , están unidos al extremo libre de sendos resortes idénticos, fijos por el otro extremo a una pared, y descansan sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Los bloques se separan de su posición de equilibrio una misma distancia A y se sueltan. Razone qué relación existe entre las energías potenciales cuando ambos bloques se encuentran a la misma distancia de sus puntos de equilibrio.

a) En esta cuestión (a mi juicio bastante larga para ser sólo un apartado) pueden tratarse muchos aspectos. Creo que al menos habría que hablar sobre:

- Definición de movimiento armónico simple (m.a.s.)
- Ecuación de movimiento $y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$
- Magnitudes cinemáticas del m.a.s: Periodo, frecuencia, fase, fase inicial, velocidad de vibración, aceleración de vibración. Definición, fórmula y unidades
- Relación entre elongación y aceleración (ecuación fundamental del m.a.s) $a_y = -\omega^2 \cdot y$
- Dibujar algunas gráficas.

b) En la situación que nos dice el enunciado (masa unida a un resorte horizontal sin rozamiento), la única fuerza que interviene en el movimiento es la fuerza elástica del resorte, ya que la fuerza gravitatoria y la normal se anulan mutuamente.

Al ser todo el movimiento en horizontal, podemos obviar la energía potencial gravitatoria, eligiendo el nivel cero de potencial gravitatorio a la altura a la que se encuentran los bloques y los resortes.

La energía potencial será entonces energía potencial elástica, dada por $Ep_{el} = \frac{1}{2} K y^2$ donde

K es la constante elástica del resorte (e independiente de la masa)

y es la elongación, la distancia a la posición de equilibrio.

Teniendo en cuenta esto, si ambos resortes son idénticos y las masas están a la misma distancia de sus respectivas posiciones de equilibrio, la energía potencial es independiente de la masa de la partícula, por lo que tendrán idéntica energía potencial.

8

a) Explique las características cinemáticas de un movimiento armónico simple.

b) Dos partículas de igual masa m , unidas a dos resortes de constantes K_1 y K_2 ($K_1 > K_2$), describen movimientos armónicos simples de igual amplitud. ¿Cuál de las dos partículas tiene mayor energía cinética al pasar por su posición de equilibrio? ¿Cuál de las dos oscila con mayor periodo? Razone las respuestas

a) En esta cuestión (a mi juicio bastante larga para ser sólo un apartado) pueden tratarse muchos aspectos. Creo que al menos habría que hablar sobre:

- Definición de movimiento armónico simple (m.a.s.)
- Ecuación de movimiento $y(t) = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0)$
- Magnitudes cinemáticas del m.a.s: Periodo, frecuencia, fase, fase inicial, velocidad de vibración, aceleración de vibración. Definición, fórmula y unidades
- Relación entre elongación y aceleración (ecuación fundamental del m.a.s) $a_y = -\omega^2 \cdot y$
- Dibujar algunas gráficas.

b) En la situación que nos dice el enunciado (masa unida a un resorte horizontal sin rozamiento), la única fuerza que interviene en el movimiento es la fuerza elástica del resorte, ya que la fuerza gravitatoria y la normal se anulan mutuamente.

Al ser todo el movimiento en horizontal, podemos obviar la energía potencial gravitatoria, eligiendo el nivel cero de potencial gravitatorio a la altura a la que se encuentran los bloques y los resortes. Las únicas energías presentes serán la cinética ($Ec = \frac{1}{2} m v_y^2$) y la potencial elástica ($Ep_{el} = \frac{1}{2} K y^2$), manteniéndose constante la energía mecánica ($E_M = Ec + Ep_{el} = \frac{1}{2} K A^2$), ya que la fuerza elástica es conservativa.

$E_M = Ec + Ep_{el} = \frac{1}{2} K A^2$), ya que la fuerza elástica es conservativa.

m : masa de la partícula K : constante elástica del muelle.

y : elongación, la distancia a la posición de equilibrio (también suele expresarse como x).

v_y : velocidad de vibración.

A : Amplitud, elongación máxima.

Cuando la partícula pasa por la posición de equilibrio, su energía potencial es cero y su energía cinética es máxima, coincidiendo en ese momento con la energía mecánica. Así que $Ec_{max} = \frac{1}{2} K A^2$

Como ambos m.a.s tienen igual amplitud, vemos que tendrá mayor energía cinética máxima la partícula 1, ya que está unida a un resorte de mayor constante elástica.

El periodo de oscilación de un m.a.s. (tiempo en realizar una oscilación completa) depende de las características

propias del sistema (de K y m en este caso). Viene dado por $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{K}{m}}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$

Como ambas partículas tienen la misma masa, oscilará con mayor periodo la partícula 2, ya que está unida al muelle de menor constante elástica.

ONDAS

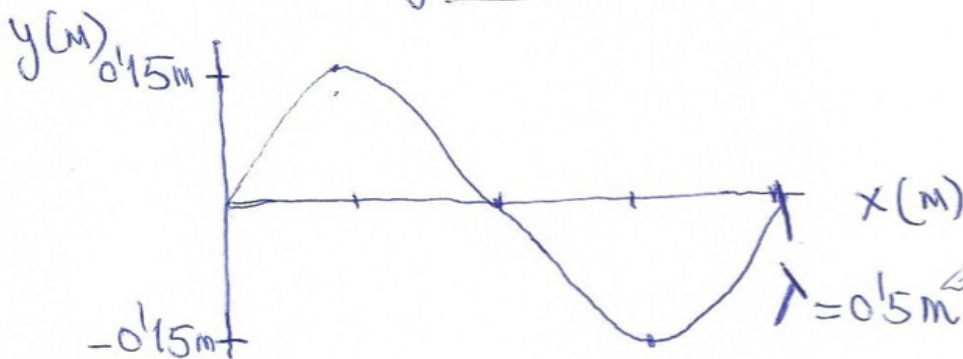
9

a) ¿Qué diferencias señalaría entre las ondas luminosas y las ondas sonoras?.

b) Por una cuerda tensa, colocada a lo largo del eje X, se propaga un movimiento ondulatorio transversal cuya función de onda es $y=0,15 \sin(4\pi x+400\pi t)$ (S.I.)
Represente gráficamente la forma de la onda en el instante inicial y un cuarto de periodo después.

1) a) Las ondas luminosas, al igual que todas las ondas electromagnéticas son transversales, mientras que las sonoras son longitudinales. Las ondas luminosas, al igual que todas las ondas electromagnéticas no necesitan de un medio material para su propagación, pueden hacerlo en el vacío, mientras que las ondas sonoras, al igual que el resto de las ondas mecánicas, necesitan de un medio material para su propagación.

b) $\boxed{t=0} \Rightarrow y=0,15 \cdot \sin(4\pi x)$ (S.I.)



$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

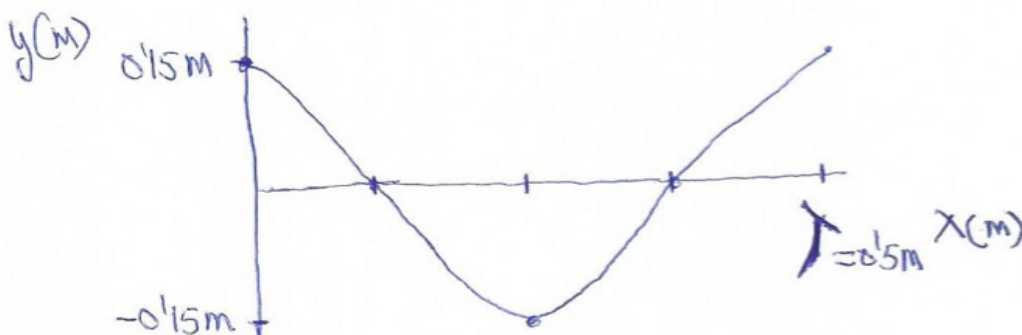
$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{4\pi} \text{ m}$$

$$\lambda = 0,5 \text{ m}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{400\pi} = \frac{1}{200} \text{ s}$$

$$t = \frac{T}{4} = \frac{1/200}{4} = \frac{1}{800} \text{ s} \Rightarrow y = 0,15 \cdot \sin(4\pi x + \frac{\pi}{2})$$



10

a) Por una cuerda tensa se propaga un movimiento ondulatorio caracterizado por la función de onda $y = A \cdot \sin 2\pi (x/\lambda - t/T)$. Razone y demuestre a qué distancia se encuentran dos puntos de esa cuerda si la diferencia de fase entre ellos es de π rad.

b) Un tabique móvil ha provocado, en la superficie del agua de un estanque un movimiento ondulatorio caracterizado por la función $y = 0,04 \sin(10\pi x - 4\pi t + \pi/2)$ S.I. Determine el tiempo que tarda en ser alcanzado por el movimiento un punto situado a una distancia de 3 m del tabique.

a) La distancia a la que se encuentran esos dos puntos es $\frac{\lambda}{2}$, puesto que si su diferencia de fase es de π rad, estarán en oposición de fase.

$$y = A \cdot \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \Rightarrow y = A \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{2\pi}{T} t \right)$$

$$y = A \cdot \sin(kx - \omega t)$$

$$\begin{aligned} y_1 &= A \cdot \sin(\underbrace{kx_1 - \omega t}_{\varphi_1}) \\ y_2 &= A \cdot \sin(\underbrace{kx_2 - \omega t}_{\varphi_2}) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_2 &= kx_1 - \omega t - (kx_2 - \omega t) \\ \varphi_1 - \varphi_2 &= kx_1 - \cancel{\omega t} - kx_2 + \cancel{\omega t} \\ \varphi_1 - \varphi_2 &= k(x_1 - x_2) \end{aligned} \right.$$

distancia.

$$\pi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (x_1 - x_2)$$

$$\boxed{(x_1 - x_2) = \frac{\lambda}{2}}$$

b) Hallamos la velocidad de propagación.

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi/k}{2\pi/\omega} = \frac{\omega}{k} = \frac{4\pi}{10\pi} = \frac{2}{5} \text{ m/s}$$

Al ser la velocidad de propagación de en el mismo medio, $v = \frac{s}{t} \Rightarrow t = \frac{s}{v} = \frac{3\text{m}}{2/5 \text{ m/s}} = 7.5 \text{ s}$.

11

a) Una onda armónica es doblemente periódica. ¿Qué significado tiene esa afirmación?. Haga esquemas para representar ambas periodicidades y coméntelos.

b) Una onda transversal se propaga por una cuerda en el sentido negativo del eje X con las siguientes características: $A=0,2$ m, $\lambda=0,4$ m, $f=10$ Hz. Escriba la ecuación de la onda sabiendo que la perturbación $y(x,t)$ toma su valor máximo en el punto $x=0$, en el instante $t=0$.

a) Estudiar apuntes de teoría.

b) $y = A \cdot \sin(\omega t + kx + \varphi_0)$

Para hallar φ_0
sabemos que: Si $t=0$, en $x=0 \Rightarrow y=A$

$$A = 0,2 \text{ m}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0,4} = 5\pi \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 10 = 20\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$A = A \cdot \sin(\omega t + kx + \varphi_0)$$

$$1 = \sin \varphi_0$$

$$\varphi_0 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$y(x,t) = 0,2 \cdot \sin\left(20\pi t + 5\pi x + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (SI)}$$

$$y(x,t) = 0,2 \cdot \cos(20\pi t + 5\pi x) \text{ (SI)}$$

12

a) Dos ondas viajeras se propagan por el mismo medio y la frecuencia de una es doble que la otra. Explique la relación entre las diferentes magnitudes de ambas ondas.

b) La ecuación de una onda armónica que se propaga por una cuerda es $y=0,08 \cos (16t-10x)$ (S.I.). Represente gráficamente la velocidad del foco en función del tiempo y calcule su velocidad máxima.

a) la amplitud A es la misma al ser independiente del periodo.
la velocidad de propagación v es la misma al propagarse en el mismo medio

$$T = \frac{1}{f}, \quad T' = \frac{1}{2f} = \frac{1}{2} T \Rightarrow \text{El periodo es mitad.}$$

$$v = \lambda \cdot f, \quad \lambda' = \frac{v}{2f} = \frac{1}{2} \lambda \Rightarrow \text{la longitud de onda es mitad.}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad k' = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}\lambda} = 2k \Rightarrow \text{el n.º de onda } k \text{ es doble.}$$

$$\omega = 2\pi f, \quad \omega' = 2\pi \cdot 2f = 2\omega \Rightarrow \text{la frecuencia angular } \omega \text{ es doble}$$

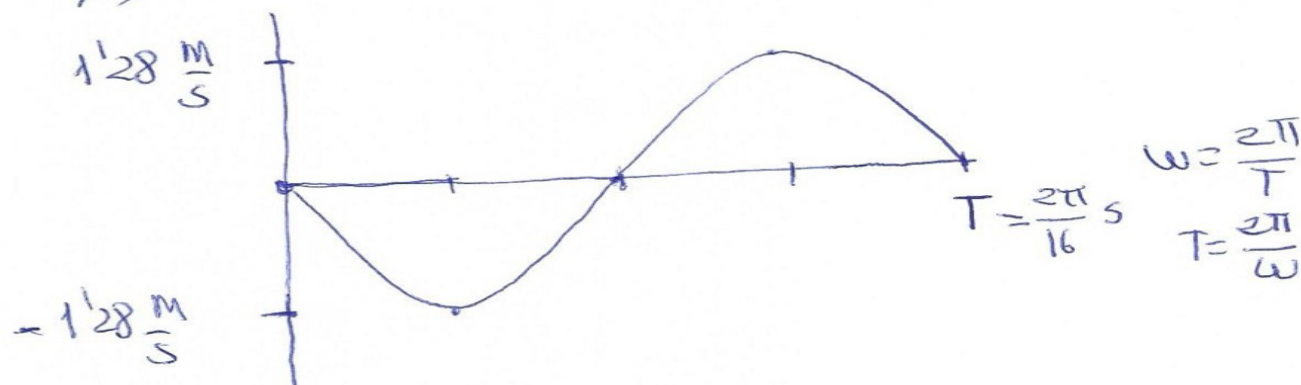
b) El foco es $x=0$ (donde se origina la perturbación)

$$v = \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_{x=0} = 0,08 \cdot 16 \cdot [-\sin(16t - 10x)]$$

$$v(x,t) = -1,28 \cdot \sin(16t - 10x) \text{ (S.I.)}$$

$$x=0 \Rightarrow v = -1,28 \cdot \sin(16t) \text{ (S.I.)} \Rightarrow v_{\max} = \pm 1,28 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (v_{\max} = \pm A \cdot \omega)$$

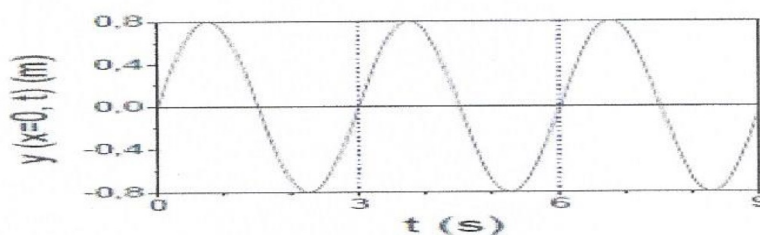
$v \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$



13

a) Se tiene una onda armónica transversal que se propaga por una cuerda tensa. Si se reduce a la mitad su frecuencia, razone que ocurre con el período, la velocidad de propagación, la longitud de onda y la amplitud.

b) Una onda armónica transversal de longitud de onda $\lambda=1$ m se desplaza en el sentido positivo del eje X. En la gráfica se muestra la elongación y del punto de coordenada $x=0$ en función del tiempo. Determine la expresión matemática que describe esta onda.



a) $T = \frac{1}{f} \Rightarrow T' = \frac{1}{f/2} \Rightarrow T' = 2T$. (El periodo se duplica)

$v = \text{cte}$ (no cambia de medio) $\Rightarrow$ la velocidad de propagación sigue igual

$v = \lambda \cdot f \Rightarrow \lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow \lambda' = \frac{v}{f/2} \Rightarrow \lambda' = 2\lambda$ (la longitud de onda se duplica)

La amplitud no varía.

b) $y = A \cdot \sin(\omega t - kx + \varphi_0)$ $\varphi_0 = 0$

$A = 0.8 \text{ m}$

$T = 3 \text{ s} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2}{3} \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

$\lambda = 1 \text{ m} \Rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{m}}$

Como para $x=0$ $y=0$ en $t=0$ y su valor es creciente al aumentar t , tomamos $\varphi_0 = 0^\circ$ (en vez de $\pi \text{ rad}$ para una función decreciente)

$y = 0.8 \cdot \sin\left(\frac{2}{3} \pi t - 2\pi x\right) \text{ (S.I.)}$

14

a) Explicar el fenómeno de difracción de ondas. ¿Cuándo es significativa?

b) Un punto material oscila en torno al origen de coordenadas en la dirección del eje Y, según la expresión $y = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}t + \pi/2\right)$ (y en cm, t en s) originando una onda armónica transversal que se propaga en el sentido positivo del eje X. Sabiendo que dos puntos materiales que oscilan con un desfase de π rad están separados una distancia mínima de 20 cm, determinar la expresión matemática que representa la onda armónica.

a) Ver teoría, es significativa cuando el tamaño de la abertura es del orden de λ .

b) Es la ecuación de un m.a.s., de la que extraemos los siguientes datos.

$$\left. \begin{aligned} A &= 2 \text{ cm} = 0.02 \text{ m} \\ \omega &= \frac{\pi}{4} \text{ rad/s} \\ \varphi_0 &= \frac{\pi}{2} \text{ rad} \end{aligned} \right\}$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \pi \text{ rad.}$$

$$kx_1 - \omega t - (kx_2 - \omega t) = \pi$$

$$kx_1 - \cancel{\omega t} - kx_2 + \cancel{\omega t} = \pi$$

$$k(x_1 - x_2) = \pi$$

$$\underbrace{0.2 \text{ m}}_{\text{distancia}} \quad k = 5\pi \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

$$y = 0.02 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}t - 5\pi x + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

$$y = 0.02 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}t - 5\pi x\right) \text{ (S.I.)}$$

15

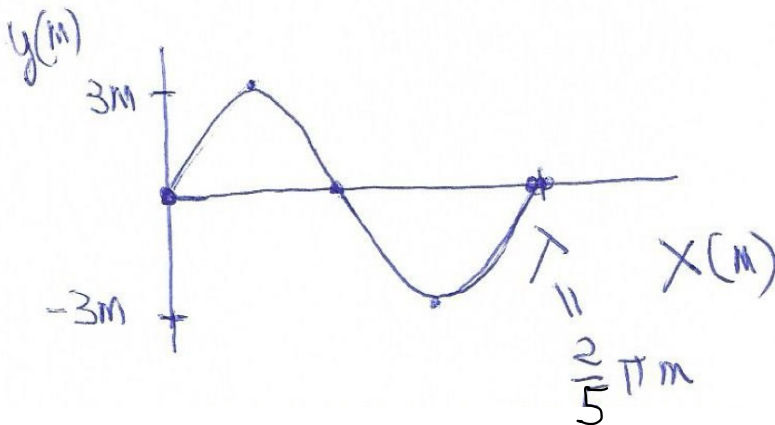
a) Describa el fenómeno de polarización de ondas. ¿Tiene sentido hablar de polarización en el sonido?

b) La ecuación de una onda armónica en una cuerda es $y(x,t)=3\cdot\sin(200\pi t-5x+\pi)$ (S.I). Representar la forma de la cuerda en el instante inicial.

a) Ver apuntes, no tiene sentido hablar de polarización del sonido puesto que al ser una onda longitudinal su dirección de oscilación y de propagación coinciden y no se forma plano.

b) $t=0 \Rightarrow y(x,0) = 3 \cdot \sin(0-5x+\pi)$ (S.I)

↳ Al sumar π rad cambia los Cuadrantes.



$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{5} \text{ m}$$

16

a) Explique el principio de Huygens.

b) La expresión matemática de una onda armónica transversal que se propaga por una cuerda tensa orientada según el eje X es $y = 0,5 \sin(6\pi t - 2\pi x)$ (S.I). Hallar la distancia mínima que separa dos puntos de la cuerda que, en un mismo instante vibran desfasados 2π radianes.

a) Estudiando en apuntes de clase.

b) Se podría razonar diciendo que desfasados 2π rad significa que estarán en fase, y por ello la distancia que los separa es $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1\text{ m}$ O bien,

$$y_1 = 0,5 \cdot \sin(\overbrace{6\pi t - 2\pi x_1}^{\psi_1})$$

$$\psi_1 - \psi_2 = 2\pi$$

$$y_2 = 0,5 \cdot \sin(\underbrace{6\pi t - 2\pi x_2}_{\psi_2})$$

$$6\pi t - 2\pi x_1 - (6\pi t - 2\pi x_2) = 2\pi$$

$$\cancel{6\pi t} - 2\pi x_1 - \cancel{6\pi t} + 2\pi x_2 = 2\pi$$

$$\cancel{2\pi} (x_2 - x_1) = \cancel{2\pi}$$

$$(x_2 - x_1) = 1\text{ m}$$



a) ¿De qué características de las ondas depende la energía que transportan?

b) Una onda armónica transversal de frecuencia 80 Hz y amplitud 25 cm se propaga a lo largo de una cuerda tensa de gran longitud. Calcular la velocidad y aceleración máximas de un punto cualquiera de la cuerda.

a) De la amplitud y la frecuencia (ver apuntes de teoría)

b) Primero deducimos teóricamente la velocidad máxima de oscilación para después hacerlo con la aceleración máxima.

$$y = A \cdot \sin(\omega t - kx + \varphi_0)$$

$$v = \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_{x=\text{cte}} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t - kx + \varphi_0) \Rightarrow v_{\max} = \pm A \cdot \omega$$

$$a = \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_{x=\text{cte}} = -A \omega^2 \cdot \sin(\omega t - kx + \varphi_0) \Rightarrow a_{\max} = \pm A \omega^2$$

$$A = 0.25 \text{ m}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 80 = 160\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$v_{\max} = \pm 0.25 \cdot 160\pi = 125.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$a_{\max} = \pm 0.25 \cdot (160\pi)^2 = 63101.44 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

18

a) ¿Qué diferencias existen entre el movimiento de una onda a través de un medio y el movimiento de las partículas del medio?

b) Una onda armónica que se propaga por un medio unidimensional tiene una frecuencia de 500 Hz y una velocidad de propagación de 350 m/s. ¿Cuál es la diferencia de fase de oscilación, en un cierto punto, para un intervalo de tiempo de 10^{-3} s?

a) La onda se mueve a través de un mismo medio con una velocidad de propagación constante, mientras que las partículas del medio se mueven con la velocidad de oscilación que no será constante. Con la propagación de la onda se transmite el movimiento y la energía, pero no las partículas del medio, las cuales se moverán con un cierto desfase entre ellas.

$$\begin{aligned} \psi_1 &= A \cdot \sin(\underbrace{\omega t - kx}_{\psi_1}) \\ \psi_2 &= A \cdot \sin(\underbrace{\omega(t + 10^{-3}) - kx}_{\psi_2}) \end{aligned}$$

$$\psi_1 - \psi_2 = \omega t - kx - [\omega(t + 10^{-3}) - kx]$$

$$\psi_1 - \psi_2 = \cancel{\omega t} - \cancel{kx} - \cancel{\omega t} - 10^{-3}\omega + \cancel{kx}$$

$$\psi_1 - \psi_2 = -10^{-3}\omega$$

$$\psi_2 - \psi_1 = 10^{-3}\omega$$

$$\psi_2 - \psi_1 = 10^{-3} \cdot 10^3 \pi = \pi$$

$\psi_2 - \psi_1 = \pi \text{ rad.} \rightarrow$ los puntos están en oposición de fase

$$\omega = 2\pi f$$

$$\omega = 2\pi \cdot 500$$

$$\omega = 1000\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega = 10^3 \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

a) i) ¿Qué información ofrece la ecuación de una onda armónica si fijamos una posición concreta?. Realice una representación gráfica. ii) ¿Y si fijamos una posición y un tiempo concretos simultáneamente?.

b) La siguiente ecuación corresponde a una onda armónica que se desplaza por un medio

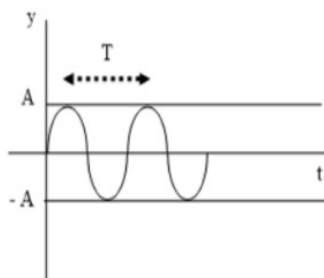
elástico: $y(x,t) = 0'1 \sin \left[5\pi t - \frac{5}{2}\pi x + \frac{\pi}{2} \right]$ (S.I.).

Determine: i) Su periodo, su longitud de onda y su velocidad de propagación. ii) La velocidad de oscilación del punto $x = 2$ m en el instante $t = 1$ s.

FISICA. 2021. RESERVA 2. EJERCICIO C1

RESOLUCION

a) i) $y(x,t) = A \sin(\omega t - kx)$ Si se fija una posición concreta $x = x_0 \Rightarrow y(x_0, t) = A \sin(\omega t - kx_0)$



Lo que se observa es un movimiento armónico simple del punto $x = x_0$ y en la elongación, se observa como el punto $x = x_0$ oscila entorno a la posición de equilibrio con periodicidad T .

ii) Si fijamos a la vez posición y tiempo: $\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 \\ t = t_0 \end{array} \right\} \Rightarrow y(x_0, t_0) = A \sin(\omega t_0 - kx_0)$ se obtiene la elongación del punto $x = x_0$ en el instante $t = t_0$.

b) $y(x,t) = 0'1 \sin \left[5\pi t - \frac{5}{2}\pi x + \frac{\pi}{2} \right]$ (S.I.)

i) Identificando coeficientes, tenemos que: $\left\{ \begin{array}{l} \omega = 5\pi = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2}{5} \text{ s} \quad \text{Periodo} \\ k = \frac{5}{2}\pi = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{4}{5} \text{ m} \quad \text{Longitud de onda} \end{array} \right.$

Luego: $v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{2}{5}} = 2 \text{ m/s}$ Velocidad de propagación

ii) $v_{\text{oscilación}} = \frac{dy}{dt} = 0'1 \cdot 5\pi \cdot \cos \left[5\pi t - \frac{5}{2}\pi x + \frac{\pi}{2} \right]$

$v \left(\begin{array}{l} x = 2 \\ t = 1 \end{array} \right) = 0'1 \cdot 5\pi \cdot \cos \left[5\pi - \frac{5}{2}\pi \cdot 2 + \frac{\pi}{2} \right] = 0'1 \cdot 5\pi \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0 \text{ m/s}$